Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Р. Андриянова, Ф. Х. Мукминов, Существование и качественные свойства решения первой смешанной задачи для параболического уравнения с двойной нестепенной нелинейностью, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 1, 3–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:15:38

УДК 517.954+517.956.45+517.958:531.72

Э. Р. Андриянова, Ф. Х. Мукминов

Существование и качественные свойства решения первой смешанной задачи для параболического уравнения с двойной нестепенной нелинейностью

Рассматривается первая смешанная задача для некоторого класса параболических уравнений с двойными нестепенными нелинейностями в цилиндрической области $D = (t > 0) \times \Omega$. Область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ может быть неограниченной. Методом галёркинских приближений доказывается существование сильных решений в пространстве Соболева–Орлича. Установлены принцип максимума, а также оценки сверху и снизу, характеризующие степенное убывание решения при $t \rightarrow \infty$. При дополнительных условиях доказывается единственность решения.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: параболическое уравнение с двойной нелинейностью, N -функции, существование решения, оценка скорости убывания решения.

DOI: 10.4213/sm8484

§ 1. Введение

Пусть Ω – неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача для уравнения вида

$$(\beta(x, u))'_t = \sum_{i=1}^n (a_{p_i}(x, u, \nabla u))_{x_i} - b(x, u, \nabla u) \quad (1.1)$$

с однородными граничными условиями

$$u(t, x)|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega, \quad (1.2)$$

и начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (1.3)$$

Функции $\beta(x, u)$, $a_{p_i}(x, u, p)$, $b(x, u, p)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют условию Каратеодори при $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \Omega$. Функция $\beta(x, u)$, $\beta(x, 0) = 0$, абсолютно непрерывна и возрастает по u , а также измерима по $x \in \Omega$ при $u \in \mathbb{R}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-07920-а).

Модельным примером рассматриваемых уравнений служит уравнение вида

$$(\gamma(u))_t = \sum_{i=1}^n (B'_i(u_{x_i}) + \Psi_i(x))_{x_i} + \Phi(x), \quad (1.4)$$

где B_i – N -функции, $\gamma(u)$, $u \in \mathbb{R}$, – нечетная неограниченная функция, возрастающая и абсолютно непрерывная. Определение N -функций и их свойства можно найти, например, в [1].

В настоящей работе исследуется существование и единственность решения задачи (1.1)–(1.3) с нелинейностями, определяемыми N -функциями, и поведение решений при $t \rightarrow \infty$.

В работах [2], [3] уже рассматривались уравнения вида (1.1) с нестепенными нелинейностями. В [2] для модельного уравнения при $b \equiv 0$ в предположении ограниченности функции β'_u в окрестности $u \in (-\delta, \delta)$ доказано существование решения и установлены степенные (по t) оценки сверху и снизу скорости убывания решения при больших значениях t . В [3] доказано существование решения при условии сильной монотонности (т.е. оператора в правой части уравнения; см. ниже (3.21)). В настоящей работе условие монотонности используется в слабой форме в виде неравенства

$$\Lambda(x, u, p, q) = \sum_{i=1}^n (a_{p_i}(x, u, p) - a_{p_i}(x, u, q))(p_i - q_i) > 0, \quad p \neq q, \quad (1.5)$$

справедливого при всех $u \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x \in \Omega$.

Вопросы существования решения параболических уравнений с двойной нелинейностью рассматривались в работах [4]–[6] и др. Как правило, область Ω предполагалась ограниченной, нелинейности – только степенного вида и существование доказывалось дискретизацией по времени. В работе [7] было доказано существование слабых решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью в ограниченной области методом галёркинских приближений. В работе [8] решение для неограниченной области было получено как предел решений для последовательности ограниченных областей. Существование слабого решения параболического уравнения с двумя переменными нелинейностями в подходящих пространствах Соболева–Орлича при ограниченной области Ω доказано в [9]. В [10] доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения задачи Дирихле для вырождающихся параболических уравнений специального вида, имеющих переменный показатель нелинейности по u . Для параболических уравнений 2-го порядка с переменным порядком нелинейности в работе [11] было доказано существование различных решений первой смешанной задачи, зависящих от выбора пространства, в котором ищется решение.

Существование сильного решения задачи (1.1)–(1.3) для изотропного параболического уравнения с двойной степенной нелинейностью было установлено в [12]. Там же были получены точные двусторонние оценки степенного убывания нормы решения по времени. Исследованию поведения решения при $t \rightarrow \infty$ смешанной задачи для анизотропных параболических уравнений с двойной

нелинейностью посвящены работы [13]–[15]. Обзор результатов исследования поведения решения нелинейных уравнений при $t \rightarrow \infty$ можно найти в [12], [15]. Точные двусторонние оценки скорости убывания нормы решений линейного и квазилинейного параболических уравнений в неограниченной области установлены в работах [16], [17], а для анизотропного параболического уравнения – в [18].

В работе [19] единственность неотрицательного решения задачи (1.1)–(1.3) для уравнения

$$\beta'_t = |u|^{\alpha-2} u_t = \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i})_{x_i}$$

была доказана в случае $\alpha \in (1, 2)$, $p > 1$ в предположении $(\beta(u))'_t \in L_1(D^T)$, $D^T = (0, T) \times \Omega$. Однако существование таких решений не было доказано в общем случае. Единственность решения смешанной задачи для системы уравнений была доказана в [6] при том же предположении $(\beta(u))'_t \in L_1(D^T)$, но при $\alpha \geq 2$ и довольно сильном ограничении на правую часть уравнения. Похожие результаты для уравнения (1.1), записанного в другой форме, были установлены в [20], [21]. Существенно более сильный результат – единственность ренормализованного решения эллиптико-параболической задачи со степенными нелинейностями – был установлен в [22] методом удвоения переменных, предложенным С. Н. Кружковым в [23]. Тем же методом в [24] была получена единственность слабого решения задачи, близкой к (1.1)–(1.3), которая возникла при моделировании динамики ледяного слоя.

В работе [25] изучалось свойство вырождения решения нелинейного параболического уравнения с нестандартными анизотропными условиями роста за конечный промежуток времени. Теми же авторами в [26] были установлены достаточные условия для взрыва решения однородной задачи Дирихле для анизотропного параболического уравнения с переменной нелинейностью за конечный промежуток времени. В [27] были установлены оценки повышенной суммируемости градиента для слабого решения параболической системы переменного порядка нелинейности.

В настоящей работе доказаны существование решения (теорема 1), принцип максимума (леммы 1, 2) и степенные оценки решения снизу (теорема 2) и сверху (теорема 4), характеризующие степенное убывание решения при $t \rightarrow \infty$. В § 10 доказана теорема 5 о единственности решения. В § 11 приведены конкретные примеры уравнений, удовлетворяющих условиям теорем из § 2.

§ 2. Функциональные пространства

Определим здесь используемые в работе функциональные пространства и приведем некоторые известные факты из теории пространств Соболева–Орлича (см. [1]).

Введем следующие обозначения:

$$\langle F(t) \rangle = \int_{\Omega} F(t, x) dx, \quad [F] = \int_{D^T} F(t, x) dx dt.$$

Значение обобщенной функции σ на элементе $\varphi \in C_0^\infty(D^T)$ будем записывать так: $\sigma(\varphi) = (\sigma, \varphi)_{D^T}$.

Для выпуклых функций $B(s)$, $s \geq 0$, функция

$$\overline{B}(z) = \sup_{s \geq 0} (s|z| - B(s))$$

называется *дополнительной*. Очевидно свойство дополнительных функций (неравенство Юнга)

$$|zs| \leq B(z) + \overline{B}(s).$$

Говорят, что N -функция $B(s)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если выполнено одно из трех эквивалентных условий:

- 1) существует такое число $k > 0$, что $B(2s) \leq kB(s)$ для любого $s \geq 0$;
- 2) существуют такие числа $l > 1$, $m > 0$, $k > 0$, что

$$B(ls) \leq kl^m B(s) \quad \forall s \geq 0; \quad (2.1)$$

- 3) существует такое число $\alpha_d > 0$, что $sB'(s) \leq \alpha_d B(s)$ для любого $s \geq 0$.

Здесь и далее $B'(s)$ обозначает правую производную выпуклой функции. Отметим еще, что из известного (см. [1; гл. 1, формула (2.7)]) равенства $uB'(u) = B(u) + \overline{B}(B'(u))$ следует оценка

$$\overline{B}(B'(u)) \leq cB(u). \quad (2.2)$$

Будем обозначать все N -функции заглавными латинскими буквами и предполагать, что используемые в работе N -функции удовлетворяют Δ_2 -условию (кроме B^* ; см. ниже).

Все постоянные, встречающиеся в работе, положительны (или, в оговоренных случаях, неотрицательны).

Пусть функция $g(x, u)$ абсолютно непрерывна по u и $g'(x, u) = u\beta'(x, u)$, $g(x, 0) = 0$. Здесь и далее через β' , γ' , g' будем обозначать производные $\beta'_u(x, u)$, $\gamma'_u(x, u)$, $g'_u(x, u)$ абсолютно непрерывных по u функций и через u' , v' , w' , φ' – производные $u'_t(t, x)$, $v'_t(t, x)$, $w'_t(t, x)$, $\varphi'_t(t, x)$. Будем записывать функцию $u(t, x)$ через u или $u(t)$, когда это не вызывает двусмысленности. Аргументы функций $a = a(x, u, \nabla u)$, $b = b(x, u, \nabla u)$, $a_{p_i} = a_{p_i}(x, u, \nabla u)$ также будем иногда опускать.

Будем предполагать, что существует абсолютно непрерывная нечетная монотонная функция $\gamma(u)$, удовлетворяющая при $u \in R$, $x \in \Omega$ неравенствам

$$\frac{\gamma(u)}{c_\gamma} \leq u\gamma'(u) \leq c_\gamma \gamma(u), \quad \gamma'(u) \leq \beta'(x, u) \leq c_\beta \gamma'(u). \quad (2.3)$$

В § 4 доказано неравенство

$$ug'(x, u) \leq \alpha g(x, u) \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

с некоторым $\alpha > 0$. Там же показано, что N -функция

$$G(u) = \int_0^u s\gamma'(s) ds$$

удовлетворяет Δ_2 -условию. В степенном случае

$$G(u) = |u|^\alpha, \quad \alpha > 1, \quad \gamma'(u) = \alpha|u|^{\alpha-2}.$$

Другим примером является функция

$$G(u) = |u|^{3/2} + |u|^3, \quad \gamma'(u) = |u|^{-1/2} + |u|.$$

Более сложный пример функции $G(u)$ – выпуклая оболочка функции $|u|^{[3;3/2]}$, где использовано обозначение

$$u^{[a;b]} = \begin{cases} |u|^a & \text{при } |u| < 1, \\ |u|^b & \text{при } |u| \geq 1. \end{cases}$$

Будем предполагать, что существует интервал $I_0 = (0, \delta_\gamma)$, на котором хотя бы одна из функций $\gamma'(u)$, $1/\gamma'(u)$ ограничена. Случай, когда ограничена лишь вторая функция и

$$\frac{1}{\beta'(x, u)} \leq c, \quad u \in I_0, \quad x \in \Omega, \quad (2.5)$$

будем называть случаем *неограниченного функционального коэффициента* при u' (н.ф.к.) в уравнении (1.1), так как из (2.3) следует, что функция $\beta'(x, u)$ не ограничена в окрестности нуля. Другой случай, $\gamma'(u) \leq c$, $u \in I_0$, будем называть случаем *ограниченного функционального коэффициента* (о.ф.к.).

Пусть при всех $u \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x \in \Omega$ выполняется условие

$$b(x, u, p)u + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, u, p)p_i \geq S(p) - c(G(u) + f(x)), \quad f \in L_1(\Omega), \quad (2.6)$$

где $S(p) = \sum_{i=1}^n B_i(p_i)$, B_i – некоторые N -функции. Здесь и далее обозначаем через $c, c_1, c_2, \dots$ постоянные, которые, вообще говоря, могут не совпадать даже при одинаковых индексах.

Через $L_B(Q)$ обозначим пространство Орлича, соответствующее N -функции $B(s)$, с нормой Люксембурга

$$\|u\|_{L_B(Q)} = \|u\|_{B,Q} = \inf \left\{ k > 0 : \int_Q B\left(\frac{u(x)}{k}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

Ниже в качестве Q могут выступать области Ω , D^T и другие.

Определим также анизотропное пространство Соболева–Орлича $\dot{W}_{G,B}^1(\Omega)$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{\dot{W}_{G,B}^1(\Omega)} = \|u\|_{G,\Omega} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{B_i,\Omega}.$$

Пространство $L_\infty([0, T]; \dot{W}_{G,B}^1(\Omega))$ будем обозначать кратко через $V(D^T)$, а $\dot{W}_{G,B}^1(\Omega)$ – через X .

Известно (см. [1]), что для нормы Люксембурга при $\nu \equiv \|u\|_{B,Q} \geq 1$ выполнено неравенство

$$\|u\|_{B,Q} \leq \int_Q B(u) dx.$$

Если же $\nu \leq 1$, то Δ_2 -условие влечет неравенство

$$1 \leq \int_Q B\left(\frac{u}{\nu - \varepsilon}\right) dx \leq k \left(\frac{1}{\nu - \varepsilon}\right)^m \int_Q B(u) dx.$$

Таким образом, всегда

$$\|u\|_{B,Q} \leq f_N\left(\int_Q B(u) dx\right), \quad (2.7)$$

$f_N(s) = k^{1/m} s^{1/m} + s$. Далее, при $\nu > 1$ имеем

$$\int_Q B(u) dx = \int_Q B\left(\frac{\nu u}{\nu}\right) dx \leq k \nu^m \int_Q B\left(\frac{u}{\nu}\right) dx \leq k \nu^m.$$

Таким образом, всегда

$$\int_Q B(u) dx \leq f_B(\|u\|_{B,Q}), \quad f_B(s) = k s^m + s. \quad (2.8)$$

Для анизотропных пространств Соболева–Орлича известна теорема вложения А. Г. Королева (см. [28]). Для ее формулировки определим функцию $\Theta(s)$ следующим образом:

$$\Theta(s) = s^{-1/n} \prod_{i=1}^n (B_i^{-1}(s))^{1/n}.$$

Может оказаться, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{\Theta(s)}{s} ds \quad (2.9)$$

расходится в нуле; тогда при вычислении $\Theta(s)$ заменяем функции B_i на $\tilde{B}_i$ по формуле

$$\tilde{B}_i(s) = \begin{cases} B_i(s) & \text{при } |s| \geq 1, \\ s^\kappa B_i(1) & \text{при } |s| \leq 1. \end{cases}$$

Отметим, что поскольку функции B_i выпуклые, то выполняется неравенство $B'_i(1) > B_i(1)$. Выберем $\kappa \in (1, n)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$B'_i(1) > \kappa B_i(1), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Сходимость интеграла (2.9) в нуле обеспечена неравенством $\kappa < n$.

Определим теперь N -функцию $B^*(z)$ по формуле

$$(B^*)^{-1}(z) = \int_0^{|z|} \frac{\Theta(s)}{s} ds,$$

если интеграл

$$I(\Theta) = \int_1^\infty \frac{\Theta(s)}{s} ds \quad (2.10)$$

расходится, и положим

$$\|u\|_{B^*, Q} = \operatorname{vrai\,sup}_Q |u|,$$

если интеграл (2.10) сходится. В работе [28] при $Q = \Omega$ доказано неравенство

$$\|u\|_{B^*, Q} \leq C \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{\tilde{B}_i, Q} \quad (2.11)$$

для функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$; постоянная C не зависит от области. В действительности неравенство (2.11) справедливо также и для области $Q = \Omega_+ = \{x \in \Omega, x_1 > 0\}$ в том же классе функций.

Для N -функции B определим продолжение вниз B_G при помощи N -функции G следующим образом. Пусть $s_0 \geq 1$ – такая точка, что $B(s_0) = c_B G(s_0)$, $c_B = B(1)/G(1)$, $B'(s_0) \geq c_B G'(s_0)$. Положим

$$B_G(s) = \begin{cases} c_B G(s), & |s| \leq s_0, \\ B(s), & |s| > s_0. \end{cases}$$

Если такой точки s_0 не существует, то полагаем $B_G = G$. Если область Ω ограничена, то необходимости в продолжении B_G нет и полагаем $B_G = B$.

Будем использовать следующее обозначение для N -функций:

$$M \prec B \iff \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{M(s)}{B(s)} = 0.$$

Пусть $\chi(Q)$ обозначает характеристическую функцию множества Q . Пусть выполнены следующие условия при любых $u \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x \in \Omega$:

$$\tilde{b}^2 \chi(|u| < 1) + G\left(\frac{\tilde{b}^2}{\beta'(x, u)G'(u)}\right) \leq c(f(x) + G(u) + S(p)), \quad (2.12)$$

где $\tilde{b}(x, u, p) = b(x, u, p) - a_u(x, u, p)$;

$$\Gamma_1 a(x, u, p) + d_f(f(x) + G(u)) \geq b(x, u, p)u + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, u, p)p_i, \quad (2.13)$$

где $d_f \geq 0$ (но в некоторых утверждениях полагаем $d_f = 0$);

$$b(x, u, p)u + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, u, p)p_i \geq \delta_1 a(x, u, p) - d_f \phi(x, u), \quad (2.14)$$

где

$$\phi(x, u) = f(x) + \tilde{G}(u) + M_G(u), \quad \tilde{G} \prec G, \quad M \prec B^*, \quad \tilde{G}(u) \leq G(u).$$

В случае сходимости интеграла (2.10) можно положить $M(u) = u^d$, $d > 1$ – произвольное число,

$$\sum_{i=1}^n \bar{B}_i(a_{p_i}(x, u, p)) \leq d_f f(x) + c \left(b(x, u, p)u + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, u, p)p_i + S(p) \right). \quad (2.15)$$

Пусть для любого $\delta > 0$ существует число $C(\delta)$ такое, что выполнены неравенства

$$\overline{M_G}(b(x, u, p)) \leq \delta S(p) + C(\delta)\phi(x, u), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{B}_i(a_{p_i}(x, u, p) - a_{p_i}(x, u, q)) \\ \leq C(\delta)S(p - q) + \delta(S(p) + S(q) + \phi(x, u)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

§ 3. Формулировка основных результатов

Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию $u(t, x)$, принадлежащую пространству $V(D^T)$ при каждом $T > 0$ и удовлетворяющую при $\varphi(t, x) \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$, $D_{-1}^T = (-1, T) \times \Omega$, равенству

$$[(\beta(x, u_0) - \beta(x, u))\varphi' + b(x, u, \nabla u)\varphi] + \sum_{i=1}^n [a_{p_i}(x, u, \nabla u)\varphi_{x_i}] = 0. \quad (3.1)$$

В § 5 будет доказано существование обобщенного решения.

Для простоты будем считать, что область Ω расположена в полупространстве $x_1 > 0$. Если она не ограничена, предполагаем выполненным условие

$$B_1(s) \prec B^*(s). \quad (3.2)$$

Будем использовать обозначение $\Omega_a^b = \{x \in \Omega \mid a < x_1 < b\}$, при этом значения $a = 0$, $b = \infty$ опускаются. Предполагается, что область Ω^r ограничена при любом $r > 0$.

Обозначим через **A** список следующих условий: (1.5), (2.3), (2.6) и (2.12)–(2.17). Если область Ω не ограничена, то в список **A** включаем условие (3.2).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_0 \in \dot{W}_{G,B}^1(\Omega)$ и выполняются условия **A**. Тогда существует обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{aligned} u \in L_\infty([0, T]; \dot{W}_{G,B}^1(\Omega)), \quad (\beta'(x, u))^{1/2} u' \in L_2(D^T), \\ u(t) \in C([0, \infty); L_{\bar{G}, \text{loc}}(\bar{\Omega})), \quad u(t) \in C_w([0, \infty); L_G(\Omega)); \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\beta(x, u(t, x)) \in C([0, \infty); L_{1, \text{loc}}(\bar{\Omega})), \quad \beta(x, u(t, x)) \in C_w([0, \infty); L_{\bar{G}}(\Omega)). \quad (3.4)$$

Непрерывность в последнем соотношении понимается в смысле слабой топологии пространства $L_{\bar{G}}(\Omega)$.

Единственность решения задачи (1.1)–(1.3) со свойствами, установленными в теореме 1, будет доказана в теореме 5 при дополнительных предположениях.

В следующих ниже утверждениях речь идет о произвольном решении со свойствами, установленными в теореме 1. При этом будем считать, что выполнено условие

$$\sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, u, p) p_i \geq 0, \quad p \in \mathbb{R}^n. \quad (3.5)$$

Кроме того, предполагается неубывание функции b по u :

$$b(x, \tilde{u}, p) \geq b(x, u, p) \quad \text{при } \tilde{u} > u, \quad b(x, 0, p) \geq 0. \quad (3.6)$$

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия **A** и (3.5), (3.6). Если начальная функция ограничена ($u_0(x) \leq h$, $h > 0$), то обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) из теоремы 1 является ограниченным, т.е.

$$\operatorname{vrai\,sup}_D u(t, x) \leq h.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если начальная функция удовлетворяет неравенству $u_0(x) \geq -h$, то функция $-u$ будет являться решением некоего другого уравнения, но из того же рассматриваемого класса (ввиду четности N -функций). Поэтому, применив лемму к функции $-u$, получим $-u \leq h$, или $u \geq -h$.

ЛЕММА 2. Пусть область Ω произвольна и интеграл (2.10) сходится. Тогда для любой функции $u \in \dot{W}_{G,B}^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{vrai\,sup}_\Omega |u(x)| \leq c_1 \|u\|_{W_{G,B}^1(\Omega)}, \quad (3.7)$$

где c_1 не зависит от u .

При оценке снизу нормы решения задачи (1.1)–(1.3) потребуется условие компактности вложения

$$\dot{W}_{G,B}^1(\Omega) \hookrightarrow L_G(\Omega). \quad (3.8)$$

Условие $G \prec B^*$ является достаточным для (3.8) в случае ограниченной области.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия **A**, причем $d_f = 0$ в (2.13)–(2.15), $b = a_u$, область Ω ограничена и выполнено условие (3.8). Тогда существует положительное число $c_2 = c_2(u_0)$ такое, что для решения $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) из теоремы 1 выполнено неравенство

$$\langle G(u(t)) \rangle \geq c_2(1+t)^{1/(1-\sigma)} \quad \text{при } \sigma > 1, \quad t \geq 0,$$

где $\sigma = \delta_1/\alpha$, δ_1 – число из (2.14) и α – из (2.4).

Положим $\Sigma(r) = \{x \in \Omega \mid x_1 = r\}$. Пусть существует число $d > 0$ такое, что

$$\operatorname{mes} \Omega^r \leq r^d, \quad r \geq r_0. \quad (3.9)$$

Для изучения убывания решения задачи (1.1)–(1.3) при $x_1 \rightarrow \infty$ определим функцию

$$\nu(r) = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \sup \left\{ z : \int_{\Sigma(r)} B_2(zu) dx' \leq \int_{\Sigma(r)} B_2(u_{x_2}) dx' \right\},$$

где $x' = (x_2, x_3, \dots, x_n)$. Будем считать, что область Ω удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \nu(r) dr = \infty. \quad (3.10)$$

Пусть начальная функция имеет ограниченный носитель:

$$\text{supp } u_0 \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0. \quad (3.11)$$

Пусть существуют такие числа $\alpha_B > 0$, $s_1 > 0$, что

$$B_1(s) \leq \alpha_B B_2(s), \quad s < s_1, \quad (3.12)$$

при этом допустимо $s_1 = \infty$.

Введем обозначение

$$l(u, \varphi) = b(x, u, \nabla u) \varphi + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, u, \nabla u) \varphi_{x_i}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия **A** и (3.10)–(3.12), причем $c = 0$ в (2.6) и $d_f = 0$ в (2.15). Если $s_1 \neq \infty$, то решение предполагается ограниченным:

$$|u_0(x)| \leq v_0, \quad x \in \Omega. \quad (3.13)$$

Тогда решение задачи (1.1)–(1.3) из теоремы 1 при всех $t \geq 0$, $r \geq R_1 = 2R_0$ подчиняется оценке

$$\langle g(x, u(t, x)) \chi(x_1 \geq r) \rangle + [l(u, u) \chi(x_1 \geq r)] \leq C \exp \left(-\lambda \int_{R_1}^r \tilde{\nu}(\rho) d\rho \right), \quad (3.14)$$

где C, λ – некоторые положительные числа, $\tilde{\nu}(r) = \min(\nu(r), s_1)$.

В следующей теореме используется такое условие: существуют числа $q_2 > 1$ и c_3 такие, что

$$(G(u))^{q_2} \leq c_3 B_1(u) \quad \text{при} \quad G(u) \geq 1. \quad (3.15)$$

Из Δ_2 -условия следует существование $q_1 > 1$ такого, что выполнено неравенство

$$(G(u))^{q_1} \leq c_4 B_1(u) \quad \text{при} \quad G(u) < 1. \quad (3.16)$$

Не ограничивая общность, можно считать, что $q_1 \geq q_2$. Возьмем μ такое, что

$$\mu = 1 + m + d(q_1 - 1),$$

где m – число из Δ_2 -условия (2.1) для функции B_1 и d – из (3.9). Пусть $r(t) \leq (t(q_2 - 1))^{1/\mu}$ – произвольная возрастающая функция, удовлетворяющая неравенству (в котором число C – из (3.14))

$$C \exp \left(-\lambda \int_{R_1}^{r(t)} \tilde{\nu}(\rho) d\rho \right) \leq \left(\frac{(q_1 - 1)t}{r^\mu(t)} - \frac{q_1 - q_2}{q_2 - 1} \right)^{-1/(q_1 - 1)} \quad (3.17)$$

при t настолько больших, что $r(t) \geq R_2 = \max(r_0, R_1)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия **A** и (3.9)–(3.13), причем (2.6) при $c = 0$. Если решение $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3) из теоремы 1 удовлетворяет оценке (3.14) и выполнено неравенство (3.15), то справедлива оценка

$$\langle g(x, u(t, x)) \rangle \leq 2 \left(\frac{(q_1 - 1)t}{r^\mu(t)} - \frac{q_1 - q_2}{q_2 - 1} \right)^{-1/(q_1 - 1)} \quad (3.18)$$

при t таких, что $r(t) \geq R_2$. Оценка остается справедливой, если вместо условий (3.14), (3.15) выполняется условие ограниченности $|u| \leq v_0$. Тогда $q_2 = q_1$.

Если вместо (3.10) выполнено более сильное требование

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \nu(t) dt = \infty, \quad (3.19)$$

то можно выбрать $r(t) = t^{1/(2\mu)}$; оценка (3.18) тогда примет вид

$$\langle g(x, u(t, x)) \rangle \leq C(\sqrt{t} - c)^{-1/(q_1 - 1)}. \quad (3.20)$$

Теорема единственности решения доказана при выполнении сильного условия монотонности

$$(b(x, u) - b(x, v))(u - v) + \sum_{i=1}^n (a_{p_i}(x, u, p) - a_{p_i}(x, v, q))(p_i - q_i) \geq 0, \quad (3.21)$$

справедливого при всех $u, v \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x \in \Omega$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $b = b(x, u)$ – неубывающая по u функция и выполнены условия (2.3), (2.15) при $d_f = 0$, (2.16), (3.6), (3.21). Если область Ω не ограничена, то дополнительно предполагается, что она расположена в полупространстве $x_1 > 0$, удовлетворяет условиям (3.9), (3.19) и условию (2.6) при $c = 0$.

Тогда существует не более одного решения $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющего условию $(\beta(x, u))'_t \in L_{1, \text{loc}}(\overline{D^T})$ и оценке (3.14).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае ограниченной области Ω оценка считается справедливой. Условие $(\beta(x, u))'_t \in L_{1, \text{loc}}(\overline{D^T})$ имеет место, например, в случае о.ф.к., когда $\gamma'(u) \leq c$ при $|u| < \delta$. Доказательство см. в [3].

§ 4. Вспомогательные утверждения

Из (2.3) вытекает неравенство

$$u\gamma(u) = \int_0^u (s\gamma(s))' ds = \int_0^u \gamma(s) ds + G(u) \leq (c_\gamma + 1) \int_0^u \gamma(s) ds, \quad u \geq 0. \quad (4.1)$$

Поэтому

$$uG'(u) = u^2\gamma'(u) \leq c_\gamma u\gamma(u) \leq c_\gamma(c_\gamma + 1)G(u), \quad (4.2)$$

т.е. $G(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Отсюда же в силу (2.3) получаем (2.4).

Если $u_m \rightarrow u$ в $L_B(\Omega)$ и B удовлетворяет Δ_2 -условию, то существует C такое, что $\langle B(u_m) \rangle \leq C$. Действительно, сходящаяся последовательность ограничена: $\|u_m\|_{L_B(\Omega)} \leq c$, $m = 1, 2, \dots$. Поэтому нужное неравенство следует из (2.8). Более того,

$$\langle B(u_m) \rangle \rightarrow \langle B(u) \rangle. \quad (4.3)$$

Это следует из неравенств

$$\langle |B(u_m) - B(u)| \rangle \leq \langle |(u_m(x) - u(x))B'(v(x))| \rangle \leq \|u_m - u\|_B \|B'(v(x))\|_{\bar{B}},$$

где $v(x) = \theta(x)u_m(x) + (1 - \theta(x))u(x)$. Ниже будет установлена ограниченность нормы $\|B'(v(x))\|_{\bar{B}}$ постоянной, не зависящей от m . Тем самым, сходимость доказана. Имеем по неравенству Йенсена

$$\langle \bar{B}(B'(v(x))) \rangle \leq c \langle B(v(x)) \rangle \leq c \langle \theta(x)B(u_m(x)) + (1 - \theta(x))B(u(x)) \rangle \leq c_1.$$

Отсюда вытекает искомая ограниченность нормы.

Справедливо также неравенство Чебышёва

$$\text{mes}\{u \geq h\} \leq \frac{[G(u)]}{G(h)}, \quad u \in L_G(D^T), \quad (4.4)$$

где $\{u \geq h\} = \{(t, x) \in D^T \mid u(t, x) \geq h\}$. Аналогичное неравенство справедливо для $v \in L_G(\Omega)$.

Покажем, что

$$\|u\|_{B_G^*, \Omega} \leq c \|u\|_{W_{G, B}^1(\Omega)}, \quad u \in \dot{W}_{G, B}^1(\Omega). \quad (4.5)$$

Очевидно, что тогда справедливо неравенство

$$\|u\|_{M_G, \Omega} \leq c \|u\|_{W_{G, B}^1(\Omega)}, \quad u \in \dot{W}_{G, B}^1(\Omega). \quad (4.6)$$

Положим

$$u^{(h)} = \max(0, u - h).$$

Установим при любой N -функции B неравенство

$$\|u\|_{B_G} \leq 3c_B \|u\|_G + \|u^{(1)}\|_B + \|(-u)^{(1)}\|_B + 1. \quad (4.7)$$

Введем обозначение

$$Tu = u - u^{(1)} + (-u)^{(1)}.$$

Тогда $\|Tu\|_\infty \leq 1$ и

$$\|u\|_{B_G} \leq \|Tu\|_{B_G} + \|u^{(1)}\|_{B_G} + \|(-u)^{(1)}\|_{B_G}.$$

Если $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $k = \|Tu\|_{B_G} \geq 1$, $k_G = \|Tu\|_G \leq k$, то

$$\begin{aligned} 1 &= \left\langle B_G\left(\frac{Tu}{k}\right) \right\rangle = \left\langle c_B G\left(\frac{Tu}{k}\right) \right\rangle = c_B \left\langle G\left(\frac{Tu}{k_G} \frac{k_G}{k}\right) \right\rangle \\ &\leq c_B \frac{k_G}{k} \left\langle G\left(\frac{Tu}{k_G}\right) \right\rangle = c_B \frac{k_G}{k}. \end{aligned}$$

Следовательно, $k \leq c_B k_G$, поэтому получаем $\|Tu\|_{B_G} \leq c_B \|u\|_G$. Далее, поскольку $B_G(u) \leq B(u) + c_B G(u)$, то

$$\|u^{(1)}\|_{B_G} \leq \|u^{(1)}\|_B + \|u^{(1)}\|_{c_B G} \leq \|u^{(1)}\|_B + c_B \|u\|_G.$$

Из приведенных рассуждений следует (4.7).

Запишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|u_{x_i}^{(h)}\|_{\tilde{B}_i(\Omega)} &\leq 1 + \langle \tilde{B}_i(u_{x_i}^{(h)}) \rangle \\ &\leq 1 + \langle B_i(u_{x_i}) \chi(u > h) \chi(|u_{x_i}| > 1) \rangle + \langle B_i(1) \chi(u > h) \chi(|u_{x_i}| \leq 1) \rangle \\ &\leq 1 + \langle B_i(u_{x_i}) \rangle + \langle B_i(1) \chi(u > h) \rangle. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если интеграл (2.10) расходится, $I(\Theta) = \infty$, воспользуемся неравенствами Чебышёва, (2.11) и (4.8):

$$\|u^{(h)}\|_{B^*, \Omega} \leq C \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}^{(h)}\|_{\tilde{B}_i, \Omega} \leq c_2 + C \sum_{i=1}^n \langle B_i(u_{x_i}) \rangle, \quad (4.9)$$

поэтому из (2.8) получаем

$$\langle B^*(u^{(h)}) \rangle \leq c_3(k), \quad \text{если} \quad \langle S(\nabla u) + G(u) \rangle < k. \quad (4.10)$$

Доказательство (4.5) достаточно провести в предположении $\|u\|_{W_{G,B}^1(\Omega)} \leq 1$. В случае $I(\Theta) = \infty$ в силу (4.7), (4.9) имеем

$$\|u\|_{B_G^*} \leq c + \|u^{(1)}\|_{B^*} + \|(-u)^{(1)}\|_{B^*} \leq c_4.$$

Тем самым, неравенство (4.5) установлено.

Проведем доказательство теперь для случая $I(\Theta) < \infty$. Используя (2.11), (4.8), для неотрицательной функции $u \geq 0$ имеем

$$\|u\|_{\infty, \Omega} \leq 1 + \|u^{(1)}\|_{\infty, \Omega} \leq 1 + C \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}^{(1)}\|_{\tilde{B}_i, \Omega} \leq c_5.$$

Применяя полученное соотношение к функциям $u^{(0)}$, $(-u)^{(0)}$, устанавливаем неравенство (4.5).

Используя (2.8), (4.6), легко установить также неравенство

$$\langle S(\nabla u) + \phi(x, u) \rangle \leq c(\|u\|_{W_{G,B}^1(\Omega)}). \quad (4.11)$$

Отметим, что из (2.15), (2.16) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^n \bar{B}_i(a_{p_i}(x, u, p)) \leq c(\phi(x, u) + S(p) + d_f f(x)). \quad (4.12)$$

Это нетрудно доказать с помощью неравенства Юнга

$$|bu| + |a_{p_i} p_i| \leq \overline{M_G}(b) + M_G(u) + \delta \bar{B}_i(a_{p_i}) + C(\delta) S(p).$$

Поэтому из (4.12), (4.11), (2.16) следует неравенство

$$\langle (\overline{M_G}(b(x, u, \nabla v)) + \bar{B}_i(a_{p_i}(x, u, \nabla u))) \rangle \leq c(\|u\|_{W_{G,B}^1(\Omega)}) + c_1 d_f. \quad (4.13)$$

ЛЕММА 3. Пусть область Ω расположена в полупространстве $x_1 > 0$. Тогда для произвольной N -функции B выполняется следующее неравенство:

$$\int_{\Omega^r} B(u(x)) dx \leq \int_{\Omega^r} B(ru_{x_1}(x)) dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(x_1) \in C^1[0, r]$, $f(0) = 0$. Воспользовавшись формулой Ньютона–Лейбница, получим

$$|f(x_1)| = \left| \int_0^{x_1} f'(x_1) dx_1 \right| \leq \int_0^r |f'(x_1)| dx_1, \quad x_1 \in [0, r].$$

Теперь применим интегральное неравенство Йенсена (см. [1; гл. 2, п. 8.2, формула (8.2)]):

$$B\left(\frac{f(x_1)}{r}\right) \leq B\left(r^{-1} \int_0^r |f'(x_1)| dx_1\right) \leq \frac{1}{r} \int_0^r B(f'(x_1)) dx_1.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по x_1 :

$$\int_0^r B\left(\frac{f(x_1)}{r}\right) dx_1 \leq \int_0^r B(f'(x_1)) dx_1.$$

Тогда после подстановки $f(x_1) = ru(x)$ и интегрирования по $x' = \{x_2, \dots, x_n\}$ получим (4.14).

Из неравенства (4.14), записанного для функции B_2 , легко видеть, что если область Ω может быть помещена в конус со сколь угодно маленьким углом при вершине и осью вращения Ox_1 , то условие (3.19) выполнено.

Ниже будет использоваться теорема Витали в следующей форме (см. [29; гл. III, § 6, теорема 15]). Пусть $z_m(x) \rightarrow 0$ п.в. в ограниченной области Q и интегралы $\int_Q |z_m(x)| dx$ равностепенно абсолютно непрерывны. Тогда $z_m \rightarrow 0$ в $L_1(Q)$.

ЛЕММА 4. Пусть последовательность v_m сходится к v почти всюду в Q и ограничена в $L_B(Q)$.

Если $\bar{B}$ удовлетворяет Δ_2 -условию, то $v_m \rightarrow v$ слабо в $L_B(Q)$.

Если $\hat{B} \prec B$, B удовлетворяет Δ_2 -условию и область Q ограничена, то $v_m \rightarrow v$ сильно в $L_{\hat{B}}(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(Q)$. Тогда к последовательности $z_m = (v_m - v)\varphi$ применима теорема Витали. Действительно, равностепенно абсолютная непрерывность интегралов $\int_Q z_m dx$ следует из неравенств

$$\int_E |z_m| dx \leq 2\|v_m - v\|_B \|\varphi\chi(E)\|_{\bar{B}}$$

и абсолютной непрерывности нормы при выполнении Δ_2 -условия (см. [1; гл. II, § 10, теорема 10.3]). Поэтому $\int_Q v_m \varphi dx \rightarrow \int_Q v \varphi dx$, откуда следует первое утверждение леммы.

В силу условия $\tilde{B} \prec B$ можно для любого $\varepsilon > 0$ выбрать число r так, что $\tilde{B}(s) < \varepsilon B(s)$ при $s > r$. Тогда для любого множества $E \subset Q$ имеем

$$\int_E \tilde{B}(v_m) dx \leq \int_E \tilde{B}(r) \chi(|v_m| \leq r) dx + \int_E \varepsilon B(v_m) dx.$$

Выбирая множество E так, что $\tilde{B}(r) \text{mes } E < \varepsilon$, из (2.8) получаем равностепенно абсолютную непрерывность интегралов $\int_Q \tilde{B}(v_m) dx$. Второе утверждение леммы следует теперь из теоремы Витали, примененной к последовательности интегралов $\int_Q \tilde{B}(v_m - v) dx$.

ЛЕММА 5. Пусть $u_m \in V(D^T)$ – ограниченная последовательность, $u_m \rightarrow u$ п.в. в D^T , $v \in V(D^T)$. Если $Q \subset D^T$ – ограниченная область, то

$$\begin{aligned} a_{p_i}(x, u_m, \nabla v) &\rightarrow a_{p_i}(x, u, \nabla v) \quad \text{в } L_{\overline{B}_i}(Q), \\ u_m &\rightarrow u \quad \text{в } L_{M_G}(Q) \quad \text{и, если выполнено (3.2), в } L_{B_1}(Q). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что из неравенств (2.8), (4.5) следует, что

$$[B_G^*(u_m)] \leq \int_0^T f_B(\|u_m(t)\|_{B_G^*, \Omega}) dt \leq c_1.$$

Используя соотношения $\tilde{G} \prec G$, $M_G \prec B_G^*$ и действуя, как в лемме 4, устанавливаем, что семейства интегралов $[M_G(u_m)]$, $[\phi(x, u_m)]$ равностепенно абсолютно непрерывны. Интегралы $[B_1(u_m)]$ равностепенно абсолютно непрерывны, если выполнено условие (3.2). Равномерно абсолютная непрерывность интегралов $[\overline{B}_i(a_{p_i}(x, u_m, \nabla v))]$ следует из оценки (4.12)

$$\int_E (\overline{B}_i(a_{p_i}(x, u_m, \nabla v))) dx dt \leq \int_E c(S(\nabla v) + \phi(x, u_m) + d_f f(x)) dx dt$$

и неравенства (4.11).

Теперь утверждения леммы следуют из теоремы Витали, примененной к интегралам

$$\begin{aligned} &[\overline{B}_i(a_{p_i}(x, u_m, \nabla v) - a_{p_i}(x, u, \nabla v))\chi(Q)], \\ &[M_G(u_m - u)\chi(Q)], \quad [B_1(u_m - u)\chi(Q)]. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6. Пусть $K \subset V(D^T)$ – ограниченное множество и $v_m \rightarrow v \in V(D^T)$. Тогда

$$a_{p_i}(x, u, \nabla v_m) \rightarrow a_{p_i}(x, u, \nabla v) \quad \text{в } L_{\overline{B}_i}(D^T)$$

при $m \rightarrow \infty$ равномерно по $u \in K$.

Пользуясь (2.17), запишем неравенство

$$\begin{aligned} &[\overline{B}_i(a_{p_i}(x, u, \nabla v_m) - a_{p_i}(x, u, \nabla v))] \\ &\leq [C(\delta)S(\nabla v_m - \nabla v) + \delta(S(\nabla v_m) + S(\nabla v) + \phi(x, u))]. \end{aligned}$$

Утверждение следует теперь из неравенства (4.11) и условия $[S(\nabla v_m - \nabla v)] \rightarrow 0$.

Как следствие получаем, что

$$I_1(u, v_m, w) = [a_{p_i}(x, u, \nabla v_m)w_{x_i}] \rightarrow [a_{p_i}(x, u, \nabla v)w_{x_i}], \quad m \rightarrow \infty, \quad (4.15)$$

равномерно по $u, w \in K$, поскольку $|I_1(u, v_m, w)| \leq \|a_{p_i}\|_{\overline{B}_i, DT} \|w_{x_i}\|_{B_i, DT}$. Более того,

$$[\Lambda(x, u, \nabla u, \nabla v_m)] \rightarrow [\Lambda(x, u, \nabla u, \nabla v)], \quad m \rightarrow \infty, \quad (4.16)$$

равномерно по $u \in K$.

Следующая лемма близка к соответствующему утверждению из работы [22]. В настоящей работе, в отличие от [22], ограниченность области Ω не предполагается, поэтому, ради полноты изложения, в приложении (§ 12) дается ее доказательство.

ЛЕММА 7. Пусть $v \in L_2(0, T; X)$, $X = \mathring{W}_{G, B}^1(\Omega)$, $\beta(x, v) \in L_{\overline{G}}(D^T)$ и $v_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta(x, v_0) \in L_{\overline{G}}(\Omega)$. Пусть $w \in L_2(0, T; X')$ и выполнено неравенство

$$[(\beta(x, v) - \beta(x, v_0))\varphi_t] \underset{(\leq)}{\geq} \int_0^T (w(t), \varphi(t))_{\Omega} dt \quad (4.17)$$

при всех неотрицательных $\varphi \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$. Тогда

$$\left[\varphi_t \int_{v_0}^v h(r) d\beta(x, r) \right] \underset{(\leq)}{\geq} \int_0^T (w, h(v)\varphi)_{\Omega} dt \quad (4.18)$$

при всех неотрицательных $h \in W_\infty^1(\mathbb{R})$, $h(0) = 0$ и $\varphi \in C_0^\infty((-1, T) \times \mathbb{R}^n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Интеграл Стильтьеса в формуле (4.18) вычисляется при фиксированных x .

§ 5. Доказательство теоремы 1

Покажем, что все интегралы, входящие в формулу (3.1) из определения обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3), конечны.

Используя неравенства (4.13), (4.6), устанавливаем, что

$$\langle l(u, \varphi) \rangle \leq c(\|u\|_{W_{G, B}^1(\Omega)}) \|\varphi\|_{W_{G, B}^1(\Omega)}. \quad (5.1)$$

Первый из интегралов в (3.1) определен в силу вытекающего из (2.3) неравенства

$$\overline{G}\left(\frac{\beta(x, u)}{c_\beta c_\gamma}\right) \leq \overline{G}\left(\frac{\gamma(u)}{c_\gamma}\right) \leq \overline{G}(u\gamma'(u)) = \overline{G}(G'(u)) \leq cG(u). \quad (5.2)$$

При построении галёркинских приближений будем проводить регуляризацию эволюционного слагаемого в уравнении (1.1) по-разному, в зависимости от поведения функции $\gamma'(u)$ в окрестности нуля. Положим

$$\beta_m(x, u) = \int_0^u \beta'_m(x, s) ds,$$

где

$$\beta'_m(x, u) = \varepsilon_m + \beta'(x, u) + c_+(\beta'(x, \varepsilon_m) - \beta'(x, u))\chi(0 < |u| < \varepsilon_m),$$

$c_+ = 1$ в случае н.ф.к. и $c_+ = 0$ в случае о.ф.к. Введем функцию $g_m(x, u) = \int_0^u s\beta'_m(x, s) ds$. Числа $\varepsilon_m > 0$ выберем позже.

При $u > 0$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} g(x, u) - g_m(x, u) &= \int_0^u s(\beta'(x, s) - \beta'_m(x, s)) ds \\ &\leq \int_0^{\varepsilon_m} s\beta'(x, s) ds = g(x, \varepsilon_m) \leq c_\beta G(\varepsilon_m). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Такое же неравенство справедливо и при $u < 0$. Аналогичным образом при помощи (2.4) устанавливаем, что

$$g_m(x, u) - g(x, u) \leq \frac{\varepsilon_m u^2}{2} + \int_0^{\varepsilon_m} s\beta'(x, \varepsilon_m) ds \leq \frac{\varepsilon_m u^2}{2} + \frac{\alpha g(x, \varepsilon_m)}{2}. \quad (5.4)$$

Сначала проведем доказательство теоремы 1 в случае ограниченной области Ω .

Выберем последовательность $\omega_k \in C_0^\infty(\Omega)$ линейно независимых функций, линейная оболочка которых плотна в $\dot{W}_{G,B}^1(\Omega)$. Галёркинские приближения к решению будем искать в виде

$$u_m(t, x) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t)\omega_k(x),$$

где функции $c_{mk}(t)$ определяются из уравнений

$$\left\langle \omega_j \frac{\partial}{\partial t} (\beta_m(x, u_m)) + l(u_m, \omega_j) \right\rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5.5)$$

Убедимся, что уравнения (5.5) разрешимы относительно производных c'_{mk} . Очевидно, что они имеют вид

$$\sum_{k=1}^m A_{jk}(t)c'_{mk} = F_j(c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mm}).$$

Матрица коэффициентов

$$A_{jk}(t) = \langle \beta'_m(x, u_m)\omega_j\omega_k \rangle$$

при каждом t является матрицей Грама системы линейно независимых векторов ω_k , $k = 1, 2, \dots, m$, и поэтому имеет обратную. Из уравнений (5.5) при начальных условиях $c_{mk}(0)$, подобранных так, что

$$u_m(0, x) \rightarrow u_0(x) \quad \text{в} \quad \dot{W}_{G,B}^1(\Omega), \quad (5.6)$$

находим функции $c_{mk}(t)$. Сначала эти функции находятся на малом промежутке времени, но установленная ниже ограниченность галёркинских приближений позволяет определить их на бесконечном промежутке времени.

После умножения уравнений (5.5) на $c_{mj}(t)$ и суммирования будем иметь

$$\langle g'_m(x, u_m) u'_m + l(u_m, u_m) \rangle = 0. \quad (5.7)$$

Воспользовавшись неравенством (2.6), получим

$$\langle (g_m(x, u_m))'_t + S(\nabla u_m(t)) \rangle \leq c \langle G(u_m(t)) + f(x) \rangle.$$

Интегрируя по t , получим

$$\langle g_m(x, u_m(t)) \rangle + \int_{D_0^t} S(\nabla u_m) dx dt \leq \langle g_m(x, u_m(0)) \rangle + c \int_{D_0^t} G(u_m) dx dt + c_1 t.$$

Выберем ε_m так, что

$$\begin{aligned} G(\varepsilon_m) \text{mes}(\Omega) &\leq \frac{1}{2m}, \\ \langle \varepsilon_m u_m^2(0) \rangle &\leq \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

Тогда из (5.3) следует неравенство

$$\langle g(x, u_m(t)) - g_m(x, u_m(t)) \rangle \leq \int_{\Omega} c_{\beta} G(\varepsilon_m) dx \leq \frac{c_{\beta}}{2m},$$

которое вместе с (2.3) и (5.6) дает оценку снизу

$$\langle G(u_0) \rangle \leq \liminf \langle g_m(x, u_m(0)) \rangle. \quad (5.9)$$

Из (5.4) и (5.6) следует также ограниченность интегралов

$$\langle g_m(x, u_m(0)) \rangle \leq c, \quad m = 1, 2, \dots$$

Теперь при помощи (2.3) устанавливаем неравенство

$$\langle G(u_m(t)) \rangle + \int_{D_0^t} S(\nabla u_m) dx dt \leq C(1+t) + c \int_{D_0^t} G(u_m) dx dt.$$

По лемме Гроунола получим следующую оценку:

$$\langle G(u_m(t)) \rangle + [S(\nabla u_m)] \leq C_1(T), \quad t \in [0, T]. \quad (5.10)$$

Из оценки (5.10) следует, что последовательность u_m в пространствах $L_{\infty}([0, T]; L_G(\Omega))$ ограничена при всех $T > 0$.

Далее, умножив уравнения (5.5) на $c'_{mj}(t)$ и просуммировав, получим

$$\langle \beta'_m(x, u_m(t, x))(u'_m)^2 + b(x, u_m, \nabla u_m)u'_m \rangle + \sum_{i=1}^n \langle a_{p_i}(x, u_m, \nabla u_m)u'_{mx_i} \rangle = 0,$$

или

$$\langle \beta'_m(x, u_m(t, x))(u'_m)^2 + (a(x, u_m, \nabla u_m))'_t \rangle = \langle (a_u - b)(x, u_m, \nabla u_m)u'_m \rangle. \quad (5.11)$$

Проинтегрируем последнее равенство по t :

$$\begin{aligned} & [\beta'_m(x, u_m)(u'_m)^2] + \langle a(x, u_m(T), \nabla u_m(T)) \rangle \\ &= \langle a(x, u_m(0), \nabla u_m(0)) \rangle + [(a_u - b)(x, u_m, \nabla u_m)u'_m] = I_\Omega + I_D. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Воспользуемся теперь условием (2.14) и неравенствами (4.11), (5.1); тогда

$$I_\Omega = \langle a(x, u_m(0), \nabla u_m(0)) \rangle \leq c \langle \phi(x, u_m(0)) + l(u_m(0)), u_m(0) \rangle \leq c_1. \quad (5.13)$$

Ниже будет показана ограниченность последовательности интегралов

$$I_\beta = [\beta'_m(x, u_m)(u'_m)^2], \quad (5.14)$$

постоянной c , не зависящей от области Ω . Для оценки интеграла I_D запишем неравенство

$$[|u'_m \varphi|] = \left[(\beta'_m(x, u_m))^{1/2} |u'_m| \frac{|\varphi|}{(\beta'_m(x, u_m))^{1/2}} \right] \leq \frac{I_\beta}{2} + \left[\frac{\varphi^2 \chi(|u_m| > 0)}{2\beta'_m(x, u_m)} \right]. \quad (5.15)$$

Оценим последний интеграл, пользуясь формулой для β_m . Имеем

$$\left[\frac{\varphi^2 \chi(|u_m| > 0)}{\beta'_m(x, u_m)} \right] \leq \left[\frac{\varphi^2 \chi(|u_m| > 0)}{\beta'(x, u_m)} \right] + c_+ \left[\frac{\varphi^2 \chi(\varepsilon_m \geq |u_m| > 0)}{\beta'(x, \varepsilon_m)} \right] = J_1 + c_+ J_2,$$

где второй интеграл справа в случае о.ф.к. отсутствует. По неравенству Юнга

$$J_1 \leq \left[\overline{G}(u_m \gamma'(u_m)) + G\left(\frac{\varphi^2 \chi(|u_m| > 0)}{u_m \beta'(x, u_m) \gamma'(u_m)} \right) \right].$$

Подставляя $\varphi = (b - a_u)(x, u_m, \nabla u_m)$, $u_m \gamma'(u_m) = G'(u_m)$ и используя неравенства (2.2), (2.12), имеем

$$J_1 \leq c_2 [f(x) + G(u_m) + S(\nabla u_m)].$$

Далее, используя (2.5), находим $J_2 \leq c[\varphi^2 \chi(\varepsilon_m \geq |u_m| > 0)]$. Таким образом, снова используя (2.12), получаем

$$[|u'_m \varphi|] \leq \frac{I_\beta}{2} + c_3 [f(x) + G(u_m) + S(\nabla u_m)]$$

и, применяя (5.10), устанавливаем оценку

$$I_D \leq c_4(T) + \frac{I_\beta}{2}.$$

Соединив оценки интегралов и равенство (5.12), а также применив условия (2.13), (2.6), будем иметь

$$\frac{[\beta'_m(x, u_m)(u'_m)^2]}{2} + \left\langle \frac{S(\nabla u_m(T))}{\Gamma_1} \right\rangle \leq c_4 + c \langle f(x) + G(u_m(T)) \rangle \leq c_5.$$

Из последнего неравенства в силу (5.10) устанавливаем ограниченность последовательности u_m в пространстве $L_\infty([0, T]; \dot{W}_{G,B}^1(\Omega))$:

$$\|u_m(t)\|_{W_{G,B}^1} \leq c_6(T), \quad t \in [0, T], \quad (5.16)$$

при каждом $T > 0$. Постоянная c_6 не зависит от области Ω .

Теперь диагональным процессом выбираем подпоследовательность u_{m_k} , слабо сходящуюся в указанных ниже пространствах. Для упрощения записи подындекс k в подпоследовательностях будем опускать. При любом фиксированном $T > 0$

$$\begin{aligned} u_m \rightharpoonup u \quad & \text{*}-\text{слабо в } L_\infty([0, T]; \dot{W}_{G,B}^1(\Omega)) \subset L_2([0, T]; X), \\ (\beta'_m(x, u_m))^{1/2} u'_m & \rightarrow \tilde{u} \quad \text{слабо в } L_2(D^T). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $u \in L_{\infty, \text{loc}}([0, \infty); \dot{W}_{G,B}^1(\Omega))$.

Можно считать также, что имеют место слабые сходимости $u_m \rightarrow u$ в $L_G(D^T)$ и $(u_m)_{x_i} \rightarrow u_{x_i}$ в $L_{B_i}(D^T)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Из (4.13) следует, что $a_{p_i}(x, u_m, \nabla u_m)$, $b(x, u_m, \nabla u_m)$ – ограниченные последовательности в пространствах $L_\infty([0, T]; L_{\overline{B_i}}(\Omega))$, $L_\infty([0, T]; L_{\overline{M_G}}(\Omega))$ соответственно, и из них можно выделить слабо сходящиеся подпоследовательности

$$\begin{aligned} a_{p_i}(x, u_m, \nabla u_m) & \rightarrow w_i \quad \text{*}-\text{слабо в } L_\infty([0, T]; L_{\overline{B_i}}(\Omega)), \\ a_{p_i}(x, u_m, \nabla u_m) & \rightarrow w_i \quad \text{слабо в } L_{\overline{B_i}}(D^T), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ b(x, u_m, \nabla u_m) & \rightarrow w_0 \quad \text{*}-\text{слабо в } L_\infty([0, T]; L_{\overline{M_G}}(\Omega)), \\ b(x, u_m, \nabla u_m) & \rightarrow w_0 \quad \text{слабо в } L_{\overline{M_G}}(D^T). \end{aligned}$$

Очевидно, что $w_0, (w_i)_{x_i} \in L_\infty([0, T]; X')$ и, тем более,

$$w_0, (w_i)_{x_i} \in L_2([0, T]; X'), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.17)$$

Сходимость имеет место при каждом $T = 1, 2, \dots$, причем предельные функции совпадают в общей области определения. Тогда фактически сходимость имеет место при любом $T > 0$. Ниже будут установлены сходимости $u_m \rightarrow u$ и $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$ п.в. в D^T ; тогда из леммы 4 последуют равенства

$$w_i = a_{p_i}(x, u, \nabla u), \quad w_0 = b(x, u, \nabla u). \quad (5.18)$$

Из леммы 5 следуют предельные переходы

$$[a_{p_i}(x, u_m, \nabla v)(u_m - v)_{x_i}] \rightarrow [a_{p_i}(x, u, \nabla v)(u - v)_{x_i}], \quad v \in V(D^T), \quad (5.19)$$

$$[b(x, u_m, \nabla u_m)(u_m - u)] \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.20)$$

используемые ниже.

Дальнейшие рассуждения разобьем на три шага, причем рассуждения первых двух шагов изложим сразу, без предположения ограниченности области Ω (в случае ограниченной области соответствующие упрощения очевидны). Но

при неограниченной области Ω под u_m понимаются решения для семейства ограниченных областей, указанных ниже.

Шаг 1. Зафиксируем счетное плотное подмножество $\{t_s\} \subset [0, \infty]$. Можно считать, что $t_0 = 0$. Известно, что для каждой ограниченной области $\Omega^r \subset \Omega$ с гладкой границей имеет место компактность вложения $W_1^1(\Omega^r) \subset L_1(\Omega^r)$. Так как $\dot{W}_{G,B}^1(\Omega) \subset W_1^1(\Omega^r)$, то в силу (5.16) диагональным процессом из $u_m(t_s)$ можно выделить подпоследовательность $u_{m_k}(t_s) \rightarrow h_s$ сильно в $L_1(\Omega^r)$ при всех натуральных s . Выбирая еще раз подпоследовательность, можно считать также (отбрасывая подындексы), что $u_m(t_s, x) \rightarrow h_s(x)$ п.в. в Ω^r при каждом t_s . В частности, при $t_0 = 0$ имеем $u_m(0, x) \rightarrow u_0(x)$ п.в. в Ω .

Для следующего шага используем лемму, доказанную в [12].

ЛЕММА 8. Пусть последовательность $v_m(t)$ ограничена в пространстве $C([0, T]; L_2(\Omega))$ и обладает свойствами:

- 1) $v_m(t_s, x)$ сходится п.в. в Ω^r при каждом t_s и некотором $r > 0$;
- 2) последовательность v'_m ограничена в $L_2(D^T)$.

Тогда можно выделить подпоследовательность v_{m_k} , сходящуюся к функции v в пространстве $C([0, T]; L_1(\Omega^r))$, и $v_{m_k} \rightarrow v$ п.в. в $(0, T) \times \Omega^r$.

Шаг 2. К последовательности

$$v_m = f_m(x, u_m) = \int_0^{u_m} (\beta'_m(x, \tau) - \varepsilon_m)^{1/2} d\tau$$

применим лемму 8. При этом последовательность $v'_m = (\beta'_m - \varepsilon_m)^{1/2} u'_m$ ограничена в $L_2(D^T)$ в силу (5.14). При помощи (2.3) и (4.2) выводим оценку

$$\begin{aligned} v_m^2 &\leq |u_m| \int_0^{|u_m|} (\beta'_m(x, \tau) - \varepsilon_m) d\tau \\ &\leq c\beta \left(|u_m| \int_0^{|u_m|} \gamma'(\tau) d\tau + \varepsilon_m^2 \gamma'(\varepsilon_m) \right) \leq c(G(u_m) + G(\varepsilon_m)). \end{aligned}$$

Тогда из (5.10) и (5.8) следует, что последовательность $v_m(t)$ ограничена в пространстве $C([0, T]; L_2(\Omega))$.

Далее, из равенства

$$f_m(x, u) - f(x, u) = \int_0^{\varepsilon_m} ((\beta'_m(x, \tau) - \varepsilon_m)^{1/2} - (\beta'(x, \tau))^{1/2}) d\tau,$$

условия (2.3) и неравенства Коши–Буняковского

$$\left(\int_0^{\varepsilon_m} (\beta'(x, \tau))^{1/2} d\tau \right)^2 \leq \varepsilon_m \int_0^{\varepsilon_m} \beta'(x, \tau) d\tau \rightarrow 0$$

следует равномерная сходимость $f_m(x, u) \rightarrow f(x, u)$ по u при фиксированных $x \in \Omega$. Это обеспечивает условие 1) леммы.

Используя лемму 8, в силу произвольности $r > 0$, $T = 1, 2, \dots$, диагональным процессом можно выделить подпоследовательность v_{m_k} , сходящуюся в D п.в.

Так как $f(x, u)$ – возрастающая по u непрерывная функция и имеет обратную, то из равенства

$$v_m = (f_m(x, u_m) - f(x, u_m)) + f(x, u_m) = \nu_m + f(x, u_m), \quad \nu_m \rightarrow 0,$$

находим, что $u_m = f^{-1}(x, v_m - \nu_m)$. Тогда из сходимости последовательности v_{m_k} следует сходимость последовательности u_{m_k} п.в. в D к u . То, что предельной функцией будет именно u , вытекает из леммы 4. Из леммы 4 следует также, что $v_{m_k} \rightarrow v = f(x, u)$ слабо в $L_2(D^T)$ при каждом $T > 0$.

Из леммы 8 известно, что $v(t) \in C([0, T]; L_1(\Omega^r))$, поэтому при каждом $\tau \in [0, T]$ из последовательности $v(\tau_s)$, $\tau_s \rightarrow \tau$, можно выделить подпоследовательность $v(\tau_{s_k}, x)$ такую, что $v(\tau_{s_k}, x) \rightarrow v(\tau, x)$ при почти всех $x \in \Omega^r$. Но тогда и $u(\tau_{s_k}, x) = f^{-1}(x, v(\tau_{s_k}, x)) \rightarrow u(\tau, x)$ при почти всех $x \in \Omega^r$. По лемме 4 получаем сходимость $u(\tau_{s_k}, x) \rightarrow u(\tau, x)$ в пространстве $L_{\bar{G}}(\Omega^r)$ при любых $T > 0$, $r > 0$, а также слабую сходимость в $L_G(\Omega)$. Таким образом, соотношение (3.3) установлено.

Из леммы 8 известно, что $v_{m_k}(T) \rightarrow v(T)$ в $L_1(\Omega^r)$. Тогда можно выделить подпоследовательность, сходящуюся п.в. в Ω^r : $v_{m_k}(T, x) \rightarrow v(T, x) \implies u_{m_k}(T, x) \rightarrow u(T, x)$ п.в. в Ω^r (а следовательно, и в Ω). Точно так же устанавливается, что $u_{m_k}(0, x) \rightarrow u(0, x)$ п.в. в Ω , т.е.

$$u(0, x) = u_0(x).$$

Далее, $(v'_m, \varphi)_{D^T} = -(v_m, \varphi')_{D^T}$, $\varphi \in C_0^\infty(D^T)$. Переходя к пределу, получим

$$(\tilde{u}, \varphi)_{D^T} = -(v, \varphi')_{D^T}.$$

Отсюда следует, что $\tilde{u} = v' = (\beta'(x, u))^{1/2} u'$, откуда в силу (5.14) получаем

$$[\beta'(x, u)(u')^2] \leq c, \quad (5.21)$$

где постоянная c не зависит от области Ω .

Из неравенства (5.2) следует, что последовательность $\beta(x, u_m(t))$ ограничена в $L_{\bar{G}}(\Omega)$ постоянной, не зависящей от $t \in [0, T]$. В частности, она ограничена в пространстве $L_{\bar{G}}(D^T)$. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L_{\bar{G}}(D^T)$ к функции $\beta(x, u)$. Действительно, сходимость последовательности u_m к u п.в. в D^T и лемма 4 обеспечивают требуемое. При этом $\beta(x, u) \in L_\infty([0, T]; L_{\bar{G}}(\Omega))$.

Далее, используя непрерывность вложения $L_{\bar{G}}(\Omega) \subset L_1(\Omega^r)$, соотношения (3.3) и лемму 4, устанавливаем соотношение (3.4).

Шаг 3. Перейдем от галёркинских приближений к решению. Умножим уравнение (5.5) на гладкую функцию $d_j(t)$ и проинтегрируем по t , обозначив $d_j \omega_j(x)$ через φ в конечном выражении

$$[\beta'_m(x, u_m) u'_m \varphi] + [l(u_m, \varphi)] = 0. \quad (5.22)$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$[\beta'_m(x, u_m) u'_m \varphi] = [\beta'(x, u_m) u'_m \varphi] + A_m,$$

где

$$A_m = [(\varepsilon_m + c_+(\beta'(x, \varepsilon_m) - \beta'(x, u_m))\chi(0 < |u_m| < \varepsilon_m))u'_m\varphi] = -[(\mu_m)'\varphi],$$

$\mu_m = c_+\bar{\mu}_m(t, x) - \varepsilon_m u_m$ и, как легко видеть,

$$|\bar{\mu}_m(t, x)| \leq \gamma(\varepsilon_m) + \varepsilon_m \gamma'(\varepsilon_m) \rightarrow 0.$$

Покажем, что $A_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$:

$$A_m = [\mu_m \varphi'] - \langle \mu_m(T) \varphi(T) \rangle + \langle \mu_m(0) \varphi(0) \rangle \rightarrow 0.$$

Последнее следует из (5.10) и компактности носителя φ .

После интегрирования по частям в формуле (5.22) будем иметь

$$A_m - [\beta(x, u_m) \varphi'] + \langle \beta(x, u_m(t)) \varphi(t) \rangle \Big|_{t=0}^{t=T} + [l(u_m, \varphi)] = 0.$$

После предельного перехода с использованием установленных слабых сходимостей получим

$$-[\beta(x, u) \varphi'] + \langle \beta(x, u(t)) \varphi(t) \rangle \Big|_{t=0}^{t=T} + \left[\sum_{i=1}^n w_i \varphi_{x_i} + w_0 \varphi \right] = 0. \quad (5.23)$$

Другим следствием этого предельного перехода является равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (-[\beta'(x, u_m) u'_m \varphi]) = \left[\sum_{i=1}^n w_i \varphi_{x_i} + w_0 \varphi \right]. \quad (5.24)$$

Множество линейных комбинаций вида $\varphi_m = \sum_{i=1}^m d_{jm}(t) \omega_j(x)$ обозначим через V_m , и пусть $V_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_m$. Отметим, что любая функция $\varphi \in C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$ может быть приближена функциями $\varphi_m \in V_m$ так, что $\varphi_m \rightarrow \varphi$ в $L_2([0, T]; X)$ и $\varphi'_m \rightarrow \varphi'$ в $L_G(D^T)$. Поэтому в силу (5.17) соотношение (5.23) справедливо и для функций вида $\varphi \in C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$.

Пусть

$$z_m = (g(x, u_m))^{1/2}, \quad z_m \rightarrow z = (g(x, u))^{1/2} \quad \text{п.в. в } D^T.$$

Если будет установлено, что $z \in L_2(D^T)$ имеет обобщенную производную $z_t \in L_2(D^T)$, то будет выполнено тождество

$$[\beta'(x, u) u' u] = \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \|z\|_2^2 dt = \|z(T)\|_{L_2(\Omega)}^2 - \|z(0)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (5.25)$$

откуда, в частности, следует $\beta'(x, u) u' u \in L_1(D^T)$. Воспользуемся неравенствами (2.3) и определением функций g, G :

$$\int_{\Omega} g(x, u_m(T, x)) dx \leq c_1 \int_{\Omega} G(u_m(T, x)) dx < c_2. \quad (5.26)$$

Получаем, что последовательность $z_m(T)$ ограничена в $L_2(\Omega)$, и по лемме 4 из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $z(T)$ слабо в $L_2(\Omega)$. Заметим, что тогда

$$\|z(T)\|_2^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle z(T)z_m(T) \rangle \leq \liminf \|z\|_2 \|z_m\|_2.$$

Отсюда следует неравенство

$$\liminf \|g(x, u_m(T))\|_{L_1(\Omega)} \geq \|g(x, u(T))\|_{L_1(\Omega)}. \quad (5.27)$$

Проинтегрировав неравенство (5.26) по T , получаем, что последовательность z_m ограничена в $L_2(D^T)$ и по лемме 4 из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к z слабо в $L_2(D^T)$.

Для доказательства того, что $z' \in L_2(D^T)$, применим (2.4); тогда

$$\begin{aligned} [(g^{1/2}(x, u_m))']^2 &= \left[\left(\frac{g'(x, u_m)u'_m}{2g^{1/2}(x, u_m)} \right)^2 \right] \\ &\leq \left[\frac{\alpha(g'(x, u_m))^2(u'_m)^2}{2ug'(x, u_m)} \right] = \frac{\alpha}{2} [\beta'(x, u_m)(u'_m)^2] = \frac{\alpha}{2} I_\beta < c_3. \end{aligned}$$

Следовательно, z'_m слабо сходится к $\bar{z}$ в $L_2(D^T)$. Далее, $[z_m\varphi'_t] = -[z'_m\varphi]$, $\varphi \in C_0^\infty(D^T)$. Переходя к пределу, получим $[z\varphi'_t] = -[\bar{z}\varphi]$. Значит, $\bar{z} = z' = (g^{1/2}(x, u))'_t$.

Теперь обоснуем возможность подстановки $\varphi = u$ в формулу (5.23). Пусть

$$u^{(a,b)} = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq a, \ a \geq 0, \\ u - a & \text{при } a < u < b, \\ b - a & \text{при } u \geq b. \end{cases}$$

Соотношения (5.17), (5.23) обеспечивают применимость леммы 7. Воспользуемся формулой (4.18) при $\varphi = \eta(t)\xi(x)$, где $\eta \in C_0^\infty(-1, T)$, $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ — неотрицательные функции, и $h(s) = s^{(\varepsilon, r)} \in W_\infty^1(\mathbb{R})$:

$$-\left[\varphi' \int_{u_0}^u h(s) d\beta(x, s) \right] + \left[\sum_{i=1}^n w_i(h(u)\varphi)_{x_i} + w_0 h(u)\varphi \right] = 0,$$

и проведем интегрирование по частям (это возможно, поскольку $\beta'(x, u)u'u \in L_1(D^T)$):

$$[\varphi\beta'(x, u)u'u^{(\varepsilon, r)}] + \left[\sum_{i=1}^n w_i(h(u)\varphi)_{x_i} + w_0 h(u)\varphi \right] = 0.$$

После предельных переходов (сначала по $\eta \rightarrow 1$ возрастающим образом, затем по $r \rightarrow \infty$) получим соотношение

$$[\beta'(x, u)u'u^{(\varepsilon)}\xi] + \left[\sum_{i=1}^n w_i(u^{(\varepsilon)}\xi)_{x_i} + w_0 u^{(\varepsilon)}\xi \right] = 0, \quad (5.28)$$

где $u^{(\varepsilon)} = u^{(\varepsilon, \infty)}$, или (после предельного перехода по $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$[\beta'(x, u)u'u^{(0)}\xi] + \left[\sum_{i=1}^n w_i(u^{(0)}\xi)_{x_i} + w_0u^{(0)}\xi \right] = 0.$$

Вычитая из последнего аналогичное выражение, записанное для $(-u)^{(0)}$, получим

$$[\beta'(x, u)u'u\xi] + \left[\sum_{i=1}^n w_i(u\xi)_{x_i} + w_0u\xi \right] = 0. \quad (5.29)$$

Совершив предельный переход по подходящей неубывающей последовательности $\xi_m \rightarrow 1$, будем иметь

$$[\beta'(x, u)u'u] + \left[\sum_{i=1}^n w_iu_{x_i} + w_0u \right] = 0. \quad (5.30)$$

Применив (5.27), (5.6) и (5.25), получим

$$\begin{aligned} \liminf [\beta'(x, u_m)u'_m u_m] &= \liminf \langle g(x, u_m(T)) - g(x, u_m(0)) \rangle \\ &\geq \langle g(x, u(T)) - g(x, u(0)) \rangle = [\beta'(x, u)u'u] = - \left[\sum_{i=1}^n w_iu_{x_i} + w_0u \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Подставим в (5.22) функцию $\varphi = u_m - v$, где $v \in V_k$, $k \leq m$:

$$[\beta'(x, u_m)u'_m(u_m - v)] + A_m + [l(u_m, u_m - v)] = 0;$$

перепишем это в виде

$$\begin{aligned} &[\beta'(x, u_m)u'_m(u_m - v)] + A_m + [\Lambda(x, u_m, \nabla u_m, \nabla v) + b(x, u_m, \nabla u_m)(u_m - v)] \\ &+ \sum_{i=1}^n [a_{p_i}(x, u_m, \nabla v)(u_m - v)_{x_i}] = 0. \end{aligned}$$

После предельного перехода $m \rightarrow \infty$ с использованием (5.19), (5.20), (5.24), (5.31) будем иметь

$$\begin{aligned} &\limsup [\Lambda(x, u_m, \nabla u_m, \nabla v)] + [w_0(u - v)] + \sum_{i=1}^n [a_{p_i}(x, u, \nabla v)(u - v)_{x_i}] \\ &= \limsup (-[\beta'(x, u_m)u'_m(u_m - v)]) \leq \left[\sum_{i=1}^n w_i(u - v)_{x_i} + w_0(u - v) \right]. \end{aligned}$$

Предельный переход $v_k \rightarrow u$ с использованием (4.16) приводит к неравенству

$$\limsup [\Lambda(x, u_m, \nabla u_m, \nabla u)] \leq 0.$$

Поскольку из условия (1.5) следует, что $\Lambda(x, u_m, \nabla u_m, \nabla u) \geq 0$, то получаем соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Lambda(x, u_m, \nabla u_m, \nabla u) = 0$$

п.в. в D^T . По лемме 4.4 из работы [7] устанавливаем сходимость $\nabla u_m \rightarrow \nabla u$ п.в. в D^T , и равенства (5.18) имеют место. Теперь из (5.23) нетрудно вывести равенство (3.1). Как следствие имеем соотношение

$$((\beta(x, u))', \varphi)_{D^T} + [b(x, u, \nabla u)\varphi] + \sum_{i=1}^n [a_{p_i}(x, u, \nabla u)\varphi_{x_i}] = 0. \quad (5.32)$$

Теорема 1 в случае ограниченной области Ω доказана.

В случае неограниченной области Ω доказательство практически повторяется с заменой галёркинских приближений u_m на обобщенные решения u_m задачи (1.1)–(1.3) в областях $(0, T) \times \Omega_m$, где Ω_m – такие подмножества, что $\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m$, $\Omega_m \subset \Omega_{m+1}$, $m = 1, 2, \dots$. Подробнее остановимся лишь на моментах, отличающихся от приведенных выше рассуждений.

Для обобщенных решений u_m оценки (5.16) позволяют установить слабые сходимости, приведенные выше для галёркинских приближений. Шаг 1 описан выше. Оценка (5.21) позволяет шаг 2 применить на этот раз к последовательности

$$v_m = f(x, u_m) = \int_0^{u_m} (\beta'(x, \tau))^{1/2} d\tau$$

с очевидными изменениями. Вместо (5.19) и (5.20) из леммы 5 выводим предельные переходы

$$[a_{p_i}(x, u_m, \nabla v)(u_m - v)_{x_i} \xi(x_1)] \rightarrow [a_{p_i}(x, u, \nabla v)(u - v)_{x_i} \xi(x_1)], \quad v \in V(D^T), \quad (5.33)$$

$$[b(x, u_m, \nabla u_m)(u_m - u) \xi(x_1)] \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.34)$$

где $\xi = \eta_R(x_1)$,

$$\eta_R(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho < r, \\ 0 & \text{при } \rho > R, \\ \frac{R - \rho}{R - r} & \text{при } \rho \in [r, R]. \end{cases} \quad (5.35)$$

Шаг 3 проводится без существенных изменений до соотношения (5.31). Далее подставим в (5.32) (с индексом m , соответствующим области Ω_m)

$$\varphi = v \xi(x_1), \quad v \in C_0^\infty(D^T(k)), \quad D^T(k) = (0, T) \times \Omega_k, \quad k < m,$$

и вычтем полученное из (5.29):

$$((\beta(x, u_m))', (u_m - v) \xi)_{D^T} + [l(u_m, (u_m - v) \xi)] = 0;$$

перепишем это в виде

$$\begin{aligned} & ((\beta(x, u_m))', (u_m - v) \xi)_{D^T} + [\Lambda(x, u_m, \nabla u_m, \nabla v) \xi + b(x, u_m, \nabla u_m)(u_m - v) \xi] \\ & + \sum_{i=1}^n [a_{p_i}(x, u_m, \nabla v)(u_m - v)_{x_i} \xi] + [a_{p_1}(x, u_m, \nabla u_m)(u_m - v) \xi_{x_1}] = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Вместо (5.31) будем использовать соотношения

$$\begin{aligned} \liminf [\beta'(x, u_m) u'_m u_m \xi] &= \liminf \langle (g(x, u_m(T)) - g(x, u_m(0))) \xi \rangle \\ &\geq \langle (g(x, u(T)) - g(x, u(0))) \xi \rangle = [\beta'(x, u) u' u \xi] = - \left[\sum_{i=1}^n w_i (u \xi)_{x_i} + w_0 u \xi \right]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

После предельного перехода в (5.36) при $m \rightarrow \infty$ с использованием (5.24), (5.33), (5.34), (5.37) с учетом сходимости $u_m \xi_{x_1} \rightarrow u \xi_{x_1}$ в $L_{B_1}(D^T)$ (см. лемму 5) будем иметь

$$\begin{aligned} &\limsup [\Lambda(x, u_m, \nabla u_m, \nabla v) \xi] + [w_0(u - v) \xi] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n [a_{p_i}(x, u, \nabla v)(u - v)_{x_i} \xi] + [w_1(u - v) \xi_{x_1}] \\ &= \limsup (-(\beta(x, u_m))', (u_m - v) \xi)_{D^T} \leq \left[\sum_{i=1}^n w_i ((u - v) \xi)_{x_i} + w_0(u - v) \xi \right]. \end{aligned}$$

Предельный переход $v_k \rightarrow u$ с использованием (4.16) приводит к неравенству

$$\limsup [\Lambda(x, u_m, \nabla u_m, \nabla u) \xi] \leq 0.$$

Тогда из условия (1.5) и произвольности чисел $R > r > 0$, определяющих функцию ξ , получаем соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Lambda(x, u_m, \nabla u_m, \nabla u) = 0$$

п.в. в D^T . Далее доказательство завершается точно так же, как в случае ограниченной функции.

Теорема 1 доказана.

Для дальнейшего использования запишем (5.30) в следующем виде:

$$\|g(x, u(T))\|_{L_1(\Omega)} + [l(u, u)] = \|g(x, u(0))\|_{L_1(\Omega)}. \quad (5.38)$$

§ 6. Доказательства лемм 1 и 2

Сначала докажем лемму 1. Пусть $u_0(x) \leq h$ для почти всех $x \in \Omega$. Воспользуемся тождеством (5.28) при $\varepsilon = h$; получим с учетом (5.18)

$$\begin{aligned} &[(\beta(x, u))'_t u^{(h)}(t, x) \xi(x)] + \left[b(x, u, \nabla u) u^{(h)} \xi(x) + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, u, \nabla u) u_{x_i}^{(h)}(t, x) \xi(x) \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n [a_{p_i}(x, u, \nabla u) u^{(h)}(t, x) \xi_{x_i}(x)] = I_1 + I_2 + I_3 = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Выберем $\xi = \eta_R(x_1)$; см. (5.35). Тогда получаем $|\xi_{x_1}| \leq 1/(R - r)$. Отметим, что $u^{(h)}(0, x) = u_0^{(h)}(x) = 0$ при почти всех $x \in \Omega$.

Далее оценим интегралы, входящие в равенство (6.1). Из условий (3.5), (3.6) следует, что $I_2 \geq 0$. Преобразуем первый интеграл в (6.1):

$$\begin{aligned} I_1 &= [(\beta(x, u))'_t u^{(h)} \xi] = [\beta'(x, u) u' u^{(h)} \xi \chi(u > h)] \\ &= [\beta'(x, h + u^{(h)}) (u^{(h)})' u^{(h)} \xi \chi(u > h)]. \end{aligned}$$

Положим

$$b_2(x, y) = \int_0^y \beta'(x, h + v) v \, dv;$$

тогда $b'_{2y}(x, u^{(h)}) \geq 0$, поскольку $\beta' \geq 0$. Поэтому функция $b_2(x, y)$ строго возрастает по y и интеграл I_1 приводится к виду

$$I_1 = \langle \xi(x) b_2(x, u^{(h)}(t, x)) \rangle \Big|_0^T = \langle \xi b_2(x, u^{(h)}(T)) \rangle \geq 0. \quad (6.2)$$

В случае ограниченной области Ω выбираем r так, что $\Omega = \Omega^r$. Тогда $\xi_{x_i} = 0$ в D^T , $I_3 = 0$ и из (6.1), (6.2) выводим равенство $I_1 = 0$. Отсюда получаем

$$u^{(h)}(T, x) = 0 \quad (6.3)$$

для почти всех $x \in \{u(T) > h\} \cap \Omega^r$. Выбирая произвольное $t \leq T$ вместо T , получаем $u^{(h)}(t, x) = 0$, т.е. $u(t, x) \leq h$ при почти всех $(t, x) \in (0, T) \times \Omega^r$.

Для оценки последнего интеграла в (6.1) в случае неограниченной области Ω последовательно воспользуемся неравенствами Юнга и (4.12):

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \frac{1}{R-r} [a_{p_1}(x, u, \nabla u) u^{(h)}] \leq \frac{1}{R-r} [\bar{B}_1(a_{p_1}(x, u, \nabla u)) + B_1(u^{(h)})] \\ &\leq \frac{c_1}{R-r} [S(\nabla u) + \phi(x, u) + d_f f(x) + B_1(u^{(h)})]. \end{aligned}$$

Учитывая (6.1), (6.2) и последнее соотношение, выводим неравенство

$$I_1 \leq \frac{c_1}{R-r} [S(\nabla u) + \phi(x, u) + d_f f(x) + B_1(u^{(h)})]. \quad (6.4)$$

Используя условие (3.2) и неравенства (4.4), (4.10), получаем при достаточно большом s_0

$$[B_1(u^{(h)})] \leq [B^*(u^{(h)}) \chi(u^{(h)} > s_0)] + [B_1(s_0) \chi(u > h)] \leq c_2.$$

Таким образом, в силу (4.11) правая часть в неравенстве (6.4) стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Поэтому (6.3) справедливо и для неограниченной области Ω . Тогда $u^{(h)}(t, x) = 0$ п.в. в $(0, T) \times \Omega^r$. Ввиду произвольности $r > 0$, $T > 0$ отсюда следует, что $u(t, x) \leq h$ для почти всех $(t, x) \in D$.

Доказательство леммы 2 достаточно провести в случае $\|u\|_{W_{G,B}^1(\Omega)} \leq 1$. Выберем произвольное число $h > 0$. Напомним, что в случае $I(\Theta) < \infty$ неравенство (4.9) записывается в виде

$$\|u^{(h)}\|_{\infty, \Omega} \leq c_6.$$

Так как $u(x) \leq h + u^{(h)}(x)$, то (3.7) установлено для положительных значений функции. Применив те же рассуждения к функции $-u$, завершим доказательство леммы.

§ 7. Доказательство теоремы 2

Пусть область Ω ограничена. Установим оценки снизу скорости убывания решения задачи (1.1)–(1.3) при $t \rightarrow \infty$.

Введем обозначения

$$e_m(t) = e(t) = \langle g_m(x, u_m(t)) \rangle, \quad h(t) = \langle a(x, u_m(t), \nabla u_m(t)) \rangle,$$

опуская индекс m там, где это допустимо. Из формул (5.7) (при $b = a_u$) и (2.14) (при $d_f = 0$) следует, что

$$e'(t) = - \sum_{i=1}^n \langle a_{p_i}(x, u_m(t), \nabla u_m) u_{mx_i} \rangle - \langle a_u(x, u_m(t), \nabla u_m) u_m \rangle \leq -\delta_1 h(t). \quad (7.1)$$

Используя (2.13), выводим неравенство

$$e'(t) \geq -\Gamma_1 h(t).$$

Далее, из (5.11) имеем

$$\begin{aligned} -h'(t) &= \langle \beta'_m(x, u_m(t))(u'_m(t))^2 \rangle, \\ e'(t) &= \langle g_m(x, u_m(t))_t \rangle = \langle u_m(t) \beta'_m(x, u_m(t)) u'_m(t) \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(e'(t))^2 \leq \langle \beta'_m(x, u_m) (u'_m)^2 \rangle \langle u_m^2 \beta'_m(x, u_m) \rangle = -h'(t) \langle u_m g'_m(x, u_m) \rangle. \quad (7.2)$$

Используя (2.4) и (5.3), запишем неравенства

$$\begin{aligned} u_m g'_m(x, u_m) &\leq u_m (g'(x, u_m) + \varepsilon_m u_m) + \varepsilon_m g'(x, \varepsilon_m) \chi(\Omega_m) \\ &\leq \alpha g(x, u_m) + \alpha g(x, \varepsilon_m) \chi(\Omega_m) + \varepsilon_m u_m^2 \\ &\leq \alpha g_m(x, u_m) + \alpha G(\varepsilon_m) \chi(\Omega_m) + \alpha (g(x, u_m) - g_m(x, u_m)) + \varepsilon_m u_m^2 \\ &\leq \alpha g_m(x, u_m) + 2\alpha G(\varepsilon_m) \chi(\Omega_m) + \varepsilon_m u_m^2. \end{aligned}$$

Функции

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^n c_{mk}(t) \omega_k$$

принадлежат линейной оболочке функций $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$. В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, поэтому из (5.10) получаем

$$\langle u_m^2(t) \rangle \leq c_m \|u_m(t)\|_{G, \Omega}^2 \leq \tilde{c}_m \quad \forall t > 0.$$

В дополнение к (5.8) выберем числа ε_m так, что $\varepsilon_m \tilde{c}_m \leq \alpha/m$. Тогда

$$\varepsilon_m \langle u_m^2(t) \rangle \leq \frac{\alpha}{m} \quad \forall t > 0, \quad (7.3)$$

$$\langle u_m(t) g'_m(x, u_m) \rangle \leq \langle \alpha g_m(x, u_m) + 2\alpha G(\varepsilon_m) \chi(\Omega_m) + \varepsilon_m u_m^2(t) \rangle \leq \alpha \left(e(t) + \frac{2}{m} \right).$$

С учетом (7.1) перепишем соотношение (7.2) в виде

$$\delta_1 e'(t)h(t) \geq \alpha h'(t) \left(e(t) + \frac{2}{m} \right),$$

или

$$\sigma \frac{e'(t)}{e(t) + 2/m} \geq \frac{h'(t)}{h(t)}, \quad \text{где } \sigma = \frac{\delta_1}{\alpha}.$$

После интегрирования имеем

$$h(t) \leq \frac{h(0)(e(t) + 2/m)^\sigma}{(e(0) + 2/m)^\sigma}.$$

Тогда

$$e'(t) \geq -\Gamma_1 h(t) \geq -\frac{\Gamma_1 h(0)(e(t) + 2/m)^\sigma}{(e(0) + 2/m)^\sigma},$$

или, с учетом (5.13) и (5.9),

$$\frac{e'}{(e(t) + 2/m)^\sigma} \geq -\frac{\Gamma_1 h(0)}{(e(0))^\sigma} \geq -\frac{C}{(\langle G(u_0) \rangle)^\sigma} \equiv -C_1.$$

Отсюда получаем

$$\left(e(t) + \frac{2}{m} \right)^{1-\sigma} - (e(0))^{1-\sigma} \leq (\sigma - 1)C_1 t \quad \text{для случая } \sigma > 1.$$

Таким образом,

$$e(t) + \frac{2}{m} \geq c_2(1+t)^{1/(1-\sigma)} \quad \text{при } \sigma > 1. \quad (7.4)$$

Докажем предельное соотношение

$$\liminf \langle g_m(x, u_m(t)) \rangle \leq c_\beta \langle G(u(t)) \rangle \quad (7.5)$$

при любом фиксированном $t > 0$. С учетом (2.3), (5.4), (7.3) устанавливаем, что

$$\langle g_m(x, u_m(t)) \rangle \leq \left\langle g(x, u_m(t)) + \frac{\varepsilon_m u_m^2}{2} + \alpha g(x, \varepsilon_m) \right\rangle \leq c_\beta \langle G(u_m(t)) \rangle + \frac{2\alpha c_\beta}{m}.$$

Тогда соотношение (7.5) следует из (4.3), ограниченности последовательности $u_m(t)$ в пространстве $\dot{W}_{G,B}^1(\Omega)$, сходимости $u_m(t, x) \rightarrow u(t, x)$ п.в. в Ω и компактности вложения $\dot{W}_{G,B}^1(\Omega) \hookrightarrow L_G(\Omega)$.

Используя (7.5), после предельного перехода в (7.4) при $m \rightarrow \infty$, где $e(t) = e_m(t) = \langle g(x, u_m(t)) \rangle$, получим оценку теоремы.

§ 8. Доказательство теоремы 3

Пусть область Ω ограничена. Пусть $\theta(\rho)$, $\rho > 0$, – абсолютно непрерывная функция, равная единице при $\rho \geq r$, нулю при $\rho \leq R_0$, линейная при $\rho \in [R_0, R_1]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\theta'(\rho) = \lambda \tilde{v}(\rho) \theta(\rho), \quad \rho \in (R_1, r) \quad (8.1)$$

(постоянная λ будет определена ниже). Решая это уравнение, в частности, находим

$$\theta(\rho) = \exp\left(-\lambda \int_{\rho}^r \tilde{v}(t) dt\right), \quad \rho \in [R_1, r].$$

Для $\rho \in (R_0, R_1)$ имеем $\theta'(\rho) = \theta(R_1)/(R_1 - R_0)$.

Положим в (5.29) $\xi(x) = \theta(x_1)$. Используя (5.18), (8.1) и учитывая, что носители ξ и u_0 не пересекаются, после интегрирования первого слагаемого по t получим

$$\begin{aligned} \langle g(x, u(T)) \theta(x_1) \rangle + [l(u, u) \theta(x_1)] &\leq [ua_{p_1}(x, u, \nabla u) \theta'(x_1)] \\ &\leq [ua_{p_1}(x, u, \nabla u) \lambda \tilde{v}(x_1) \theta(x_1) | \chi(R_1 < x_1 < r)] + \\ &\quad + \frac{\theta(R_1)}{R_1 - R_0} [ua_{p_1}(x, u, \nabla u) | \chi(R_0 < x_1 < R_1)] = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Отметим, что $B(ku) \leq kB(u)$ при $k \leq 1$. Далее, в силу того, что $\tilde{v} \leq s_1$ и $|u| \leq v_0$ (см. (3.13)), применяя неравенство Юнга, (2.15) при $d_f = 0$ и (3.12), оценим первый интеграл:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left[\theta(x_1) \left(\bar{B}_1(\varepsilon a_{p_1}(x, u, \nabla u)) + B_1\left(\frac{u \tilde{v} \lambda}{\varepsilon}\right) \right) \chi(R_1 < x_1 < r) \right] \\ &\leq \left[\theta(x_1) \left(\varepsilon c(S(\nabla u) + l(u, u)) + \alpha_B B_2\left(\frac{u \tilde{v} \lambda}{\varepsilon}\right) \right) \chi(R_1 < x_1 < r) \right]. \end{aligned}$$

Выберем теперь $\varepsilon = 1/(4c)$, а также λ так, что $(\lambda/\varepsilon)v_0 \leq 1$ и $(\lambda/\varepsilon)\alpha_B \leq 1/4$. Тогда, используя определение функции $\tilde{v}$, получим

$$\begin{aligned} &\int_0^T dt \int_{R_1}^r \left(\frac{\theta(x_1)}{4} \int_{S(x_1)} B_2(u \tilde{v}) dx' \right) dx_1 \\ &\leq \int_0^T dt \int_{R_1}^r \left(\frac{\theta(x_1)}{4} \int_{S(x_1)} B_2(u_{x_2}) dx' \right) dx_1. \end{aligned}$$

Следовательно, используя (2.6) (при $c = 0$), будем иметь

$$I_1 \leq \left[\frac{\theta(x_1)}{4} (l(u, u) + S(\nabla u) + B_2(u_{x_2})) \right] \leq \left[\frac{3\theta(x_1)}{4} l(u, u) \right].$$

Используя (4.12) и (2.1), получим следующую оценку для второго интеграла:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{\theta(R_1)}{R_1 - R_0} \left[\left(B_1\left(\frac{u}{R_1}\right) + \bar{B}_1(R_1 a_{p_1}(x, u, \nabla u)) \right) \chi(R_0 < x_1 < R_1) \right] \\ &\leq \frac{\theta(R_1)}{R_1 - R_0} \left[\left(B_1\left(\frac{u}{R_1}\right) + c(R_1)(\phi(x, u) + S(\nabla u)) \right) \chi(R_0 < x_1 < R_1) \right]. \end{aligned}$$

В силу (4.14) справедливо неравенство

$$\left[B_1\left(\frac{u}{R_1}\right)\chi(x_1 < R_1) \right] \leq [B_1(u_{x_1})\chi(x_1 < R_1)].$$

Далее, в силу (4.11)

$$I_2 \leq \theta(R_1)c_1(R_1, \|u\|_{V(D^T)}) \leq \theta(R_1)c_2(R_1, u_0).$$

Теперь, используя (8.2) и оценки интегралов I_1 , I_2 , имеем

$$\langle g(x, u(T))\theta(x_1) \rangle + [l(u, u)\theta(x_1)] \leq \theta(R_1)c_3(R_1, u_0).$$

Поскольку $\theta(x_1) = 1$ при $x_1 \geq r$, получаем оценку (3.14).

§ 9. Доказательство теоремы 4

Пусть выполнены соотношения (3.14) и (3.15). Выберем положительное число $r \geq R_2$. Обозначая

$$\varepsilon(r) = C \exp\left(-\lambda \int_{R_1}^r \nu(t) dt\right)$$

и используя (3.14), запишем соотношение

$$\Phi(t) \equiv \langle g(x, u(t, x)) \rangle \leq \langle g(x, u(t, x))\chi(x_1 < r) \rangle + \varepsilon(r).$$

Пусть t_r – такая точка интервала $(0, \infty)$, что $\Phi(t_r) = \varepsilon(r)$. Если такой точки нет, то либо $\Phi(t) > \varepsilon(r)$ при всех $t > 0$ (тогда полагаем $t_r = \infty$), либо $\Phi(t) < \varepsilon(r)$ при всех $t \geq 0$. В последнем случае желаемая оценка (9.1) выполнена. Из (5.38) и (2.6) при $c = 0$ следует невозрастание функции $\Phi(t)$, поэтому

$$0 \leq \Phi(t) - \varepsilon(r) \leq \langle g(x, u(t, x))\chi(x_1 < r) \rangle, \quad t \in [0, t_r].$$

Используя (3.9), (3.15) и (3.16), запишем неравенства

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \varepsilon(r) &\leq c_\beta \langle G(u(t))^{q_1} \chi(x_1 < r) \chi(G < 1) \rangle^{1/q_1} (\text{mes } \Omega^r)^{1/\overline{q_1}} \\ &\quad + c_\beta \langle G(u(t))^{q_2} \chi(x_1 < r) \chi(G \geq 1) \rangle^{1/q_2} (\text{mes } \Omega^r)^{1/\overline{q_2}} \\ &\leq c_5 \left(\langle B_1(u(t, x)) \chi(x_1 < r) r^{d_1} \rangle^{1/q_1} + \langle B_1(u(t, x)) \chi(x_1 < r) r^{d_1} \rangle^{1/q_2} \right) \\ &\leq 2c_5 \max_{i=1,2} \langle B_1(u(t, x)) \chi(x_1 < r) r^{d_1} \rangle^{1/q_i}, \quad r \geq r_0, \end{aligned}$$

где $r^{d_1} = r^{d(q_1-1)}$. Следовательно,

$$\min_{i=1,2} (\Phi(t) - \varepsilon(r))^{q_i} \leq c_6 r^{d_1} \langle B_1(u(t, x)) \chi(x_1 < r) \rangle.$$

Воспользуемся теперь неравенством (4.14), а также Δ_2 -условием (2.1), затем неравенством (2.6) и равенством (5.38):

$$\begin{aligned} \langle B_1(u(t, x))\chi(x_1 < r) \rangle &\leq \langle B_1(ru_{x_1}(t, x))\chi(x_1 < r) \rangle \leq kr^m \langle B_1(u_{x_1}(t, x)) \rangle \\ &\leq kr^m \sum_{i=1}^n \langle b(x, u, \nabla u)u(t, x) + a_{p_i}(x, u, \nabla u)u_{x_i}(t, x) \rangle \\ &= -kr^m \frac{d}{dt} \langle g(x, u(t, x)) \rangle. \end{aligned}$$

Далее, при $r \geq c_6 k$, $\mu = d_1 + m + 1$ справедливо неравенство

$$\min_{i=1,2} (\Phi(t) - \varepsilon(r))^{q_i} \leq -r^\mu \frac{d}{dt} (\Phi(t) - \varepsilon(r)).$$

Решая это дифференциальное неравенство для невозрастающей функции $\Phi(t)$, получим, что если существует $t_1 \geq 0$ – точка, в которой $\Phi(t_1) > \varepsilon(r) + 1$, то $t_1 \leq r^\mu / (q_2 - 1)$.

Снова решая это дифференциальное неравенство при $t \geq r^\mu / (q_2 - 1)$, получим

$$\Phi(t) \leq \varepsilon(r) + \left(\frac{(q_1 - 1)t}{r^\mu(t)} - \frac{q_1 - q_2}{q_2 - 1} \right)^{-1/(q_1 - 1)}. \quad (9.1)$$

Последнее неравенство справедливо для любых $r > R_2$. Выбирая $r = r(t)$ (см. (3.17)), получаем (3.18).

В случае ограниченного решения по теореме 3 имеем оценку (3.14), и дальнейшее доказательство теоремы 4 проводится аналогично приведенному выше с очевидными упрощениями.

§ 10. Доказательство теоремы 5

Пусть $\tilde{u}$ и u – два решения задачи (1.1)–(1.3). Запишем уравнение (3.1) для функций $\tilde{u}$, u , проведем интегрирование по частям и вычтем второе уравнение из первого:

$$[(\beta(x, \tilde{u}) - \beta(x, u))_t \varphi + (\tilde{b} - b)\varphi] + \sum_{i=1}^n [(\tilde{a}_{p_i} - a_{p_i})\varphi_{x_i}] = 0,$$

где $\tilde{b} = b(x, \tilde{u})$, $b = b(x, u)$, $\tilde{a}_{p_i} = a_{p_i}(x, \tilde{u}, \nabla \tilde{u})$, $a_{p_i} = a_{p_i}(x, u, \nabla u)$; $b(x, u)$ – неубывающая функция по u . Пусть $v = \tilde{u} - u$, $\varphi = H_\delta(v)\xi$, где $\xi = \eta_{r+1}(x_1)$, η_R определяется по формуле (5.35), а $H_\delta(s)$ – по формуле

$$H_\delta(s) = \begin{cases} 1 & \text{при } s \geq \delta, \\ \frac{s}{\delta} & \text{при } 0 \leq s \leq \delta, \\ 0 & \text{при } s \leq 0. \end{cases}$$

Очевидно, $H'_\delta(v)v \leq H_\delta(v)$. Поскольку $\tilde{b} - b \geq 0$ при $v \geq 0$ (см. (3.6)), то

$$\begin{aligned} & [(\beta(x, \tilde{u}) - \beta(x, u))_t H_\delta(v) \xi] + \left[(\tilde{b} - b) H'_\delta(v) v \xi + \sum_{i=1}^n (\tilde{a}_{p_i} - a_{p_i}) H'_\delta(v) v_{x_i} \xi \right] \\ & + [(\tilde{a}_{p_1} - a_{p_1}) H_\delta(v) \xi'_{x_1}] = I_1 + I_2 + I_3 \leq 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Оценим каждый из этих интегралов. В силу условия монотонности (3.21) имеем $I_2 \geq 0$.

В случае ограниченной области Ω выбираем r так, что $\Omega = \Omega^r$. Тогда $\xi_{x_1} = 0$ в Ω и $I_3 = 0$. Теперь оценим интеграл I_3 в случае неограниченной области Ω . Легко видеть, что $|\xi_{x_1}| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |I_3| & \leq [|\tilde{a}_{p_1} - a_{p_1}| H_\delta(v) |\xi'_{x_1}|] \leq [|\tilde{a}_{p_1} - a_{p_1}| \chi(r < x_1 < r + 1)] \\ & \leq \left[\left(\bar{B}_1 \left(\frac{\tilde{a}_{p_1} - a_{p_1}}{\varepsilon} \right) + B_1(\varepsilon) \right) \chi(r < x_1 < r + 1) \right] \\ & \leq \frac{ck}{\varepsilon^m} [l(u, u) + l(\tilde{u}, \tilde{u}) \chi(x_1 > r)] + c_1 T B_1(\varepsilon) (r + 1)^{d-1}, \end{aligned}$$

где использованы условия (2.15) при $d_f = 0$ и (2.6) при $c = 0$. Применяя неравенство (3.14) и выбирая $\varepsilon = (r + 1)^{-d}$, получим следующую оценку:

$$|I_3| \leq c_2 (r + 1)^{dm} \exp \left(-\lambda \int_{R_1}^r \tilde{\nu}(s) ds \right) + \frac{c_3 T}{r + 1} \equiv f_e(r),$$

где $f_e(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ в силу (3.19). Далее, используя тот факт, что β — возрастающая функция, получим

$$\begin{aligned} |I_3| & \geq I_1 = [(\beta(x, \tilde{u}) - \beta(x, u))_t \xi \chi(\tilde{u} > u) H_\delta(v)] \\ & = [(\beta(x, \tilde{u}) - \beta(x, u))_t \xi \chi(\tilde{u} > u) (1 + H_\delta(v) - 1)] \\ & \geq [(\beta(x, \tilde{u}) - \beta(x, u))_t \xi \chi(\beta(x, \tilde{u}) > \beta(x, u))] \\ & \quad - [(\beta(x, \tilde{u}) - \beta(x, u))_t \chi(0 < v < \delta) \chi(x_1 < r + 1)]. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Введем теперь функцию

$$J(s) = \begin{cases} s & \text{при } s > 0, \\ 0 & \text{при } s \leq 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что $J'(s) = \chi(s > 0)$; следовательно,

$$(\xi J(\beta(x, \tilde{u}) - \beta(x, u)))'_t = \xi \chi(\beta(x, \tilde{u}) - \beta(x, u) > 0) (\beta(x, \tilde{u}) - \beta(x, u))'_t.$$

Тогда из (10.1), (10.2) получим

$$\begin{aligned} & \langle J(\beta(x, \tilde{u}) - \beta(x, u)) \chi(x_1 < r) \rangle|_0^t \\ & \leq |I_3| + [(\beta(x, \tilde{u}) - \beta(x, u))_t \chi(0 < v < \delta) \chi(x_1 < r + 1)]. \end{aligned}$$

Так как $(\beta(x, u))_t \in L_1((0, T) \times \Omega^{r+1})$, то последний интеграл стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. В силу $\tilde{u}(0) = u(0)$ имеем

$$\langle J(\beta(x, \tilde{u}(t, x)) - \beta(x, u(t, x)))\chi(x_1 < r) \rangle \leq f_e(r).$$

Устремляя $r \rightarrow \infty$, получим

$$\langle J(\beta(x, \tilde{u}(t, x)) - \beta(x, u(t, x))) \rangle = 0.$$

Следовательно, в силу возрастания функции β

$$\text{mes}\{x \in \Omega \mid \tilde{u}(t, x) > u(t, x)\} = 0.$$

Перестановкой $\tilde{u}$, u устанавливаем, что $\text{mes}\{x \in \Omega \mid \tilde{u}(t, x) < u(t, x)\} = 0$. Таким образом, доказано, что $\tilde{u}(t, x) = u(t, x)$ при почти всех $x \in \Omega$. Ввиду произвольности $t \in [0, T]$ получаем $\tilde{u}(t, x) = u(t, x)$ при почти всех $(t, x) \in D^T$.

Теорема 5 доказана.

§ 11. Примеры

ПРИМЕР 1. Пусть

$$a = 2p_1^4 + u^2 p_1^2 + B_1(p_1) + B_2(p_2),$$

где $B_1(p_1) = p_1^{24}$, B_2 — произвольная N -функция, удовлетворяющая Δ_2 -условию, $b = u^3 + u$, $g(x, u) = G(u) = u^2 + u^6$, $\tilde{G}(u) = M(u) = |u|^5 + u^2$. Непосредственными вычислениями проверяются условия из списка **A**. Пусть область Ω ограничена. Тогда справедлива теорема 1.

Проверим условие монотонности (3.21). Надо доказать положительность выражения

$$\begin{aligned} \text{Мон} = & ((8p_1^3 - 8q_1^3) + (24p_1^{23} - 24q_1^{23}) + (2u^2 p_1 - 2v^2 q_1))(p_1 - q_1) \\ & + (B_2'(p_2) - B_2'(q_2))(p_2 - q_2) + (u^3 - v^3 + u - v)(u - v). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$\text{Мон} \geq ((8p_1^3 - 8q_1^3) + 2q_1(u^2 - v^2))(p_1 - q_1) + (u^3 - v^3)(u - v).$$

Непосредственно проверяется, что последнее есть неотрицательная квадратичная форма относительно переменных $p_1 - q_1$, $u - v$. Поэтому справедлива теорема 5 о единственности решения.

Несмотря на длинный список условий в § 1, имеется широкий класс уравнений, им удовлетворяющих. Однако мы ограничимся лишь одним конкретным уравнением, иллюстрирующим, что класс рассматриваемых уравнений действительно широк.

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 2$, а область Ω лежит в полуплоскости $x_1 > 0$ и области ограничены при всех $r > 0$. Выберем N -функции $B_1(s)$, $B_2(s)$, $G(s)$, а также функции $g(x, u)$, $\beta(x, u)$, $\gamma(x, u)$, $a(x, u, p)$, $b(x, u, p)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} B_1(s) &= s^8, \quad B_2(s) = s^6, \quad G(s) = |s|^{3/2} + |s|^3, \quad \gamma'(s) = \frac{3}{2}|s|^{-1/2} + 3|s|, \\ a(x, u, \nabla u) &= B_1(u_{x_1}) + B_2(u_{x_2}) \frac{2 + |x|}{1 + |x|} + u^6 |u_{x_1}|^5 + |u|^5 u_{x_2}^4 + 4c_b^2 u^4 + u^{16} + |u|^{15} \\ &\quad + c_f (|f_1(x)u_{x_1}| + |f_2(x)u_{x_2}| + |l(x)u| + f_{11}u_{x_1}^4 + f_{21}|u_{x_2}|^3), \end{aligned}$$

где $\overline{G}(l), \overline{B}_i(f_i), f_{i1}^2 \in L_1(\Omega)$, $c_f, f_{11}(x), f_{21}(x) \geq 0$,

$$\begin{aligned} b(x, u, \nabla u) &= a_u(x, u, \nabla u) + c_b u (|u_{x_1}|^{[5;1]} + |u_{x_2}|^{[4;1/2]}), \\ g(x, u) &= |u|^{3/2} + |u|^3 \frac{2 + |x|}{1 + |x|}, \quad \beta(x, u) = 3|u|^{1/2} \operatorname{sgn} u + \frac{3}{2}|u|^2 \operatorname{sgn} u \frac{2 + |x|}{1 + |x|}. \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{G}(u) = u^2$, $M(u) = |u|^{21}$. Несложно проверить, что для данных функций выполнены условия (1.5), (2.3), (2.6), (2.12)–(2.17). Утверждение теоремы 1 справедливо.

Далее, выбрав $\kappa = 3/2$, получим

$$\tilde{B}_1(s) = s^{[3/2;8]}, \quad \tilde{B}_2(s) = |s|^{[3/2;6]}, \quad \Theta(s) = s^{[1/6;-17/48]}.$$

Таким образом, интеграл (2.10) сходится и по лемме 2 решение ограничено. Компактность вложения (3.8) также имеет место.

Если выбрать $c_f = 0$, $c_b = 0$, то в (2.14) можно положить $\delta_1 = 5$. Из условия (2.4) следует, что можно взять $\alpha = 3$. Таким образом, из теоремы 2 получаем оценку в случае произвольной ограниченной области Ω

$$\langle G(u(t)) \rangle \geq \langle G(u_0) \rangle (1 + Ct)^{-3/2} \quad \text{при } t \geq 0.$$

При этом решение ограничено и удовлетворяет оценке теоремы 3. При $c_b = 0$, $c_f = 0$, очевидно, выполнены условия (3.5), (3.6).

Теперь в качестве Ω выберем следующую область:

$$\Omega(f) = \{x \mid x_1 > 0, -x_1^{1/2} + f(x_1) \leq x_2 \leq x_1^{1/2} + f(x_1)\},$$

где f – произвольная непрерывная функция. Тогда $\operatorname{mes} \Omega^r(f) = (4/3)r^{3/2} \leq r^2$, $r \geq 2$. Действуя, как в лемме 3, найдем $\nu(r) = 1/(2\sqrt{r})$. Несложно проверить, что область $\Omega(f)$ удовлетворяет условиям (3.9), (3.19). Далее, в неравенстве (3.16) можно выбрать $q_1 = 6$. Тогда из (3.20) найдем оценку сверху

$$\int_{\Omega(f)} g(u(t, x)) dx \leq C(\sqrt{t} - c)^{-1/5}.$$

Условие $b = b(x, u)$ теоремы 5 не выполнено.

§ 12. Приложение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Поскольку

$$\left| \int_{v_0}^v h(r) d\beta(x, r) \right| \leq \|h\|_\infty |\beta(x, v) - \beta(x, v_0)|,$$

то

$$\int_{v_0}^v h(r) d\beta(x, r) \in L_{\overline{G}}(D^T)$$

и интегралы в (4.18) определены. Достаточно доказать одно из неравенств леммы, так как если v удовлетворяет первому неравенству в (4.17), то $-v$ удовлетворяет другому с заменой $\tilde{\beta}(x, r) = -\beta(x, -r)$, $\tilde{v}_0 = -v_0$ и $\tilde{w} = -w$.

Если справедливо первое из неравенств (4.17), то оно справедливо также и для неотрицательных функций $\varphi \in Y = W_\infty^1(D^T) \cap L_2(0, T; X)$ с $\varphi(T) = 0$ и ограниченным носителем (это легко установить соответствующим предельным переходом).

Сначала предположим, что $h \geq 0$ не убывает и $h(0) = 0$. Ясно, что

$$\int_r^s h(\tau) d\beta(x, \tau) \leq h(s)(\beta(x, s) - \beta(x, r))$$

при всех $r, s \in \mathbb{R}$. Следовательно, при всех $t > 0$

$$\int_{v(t-\eta)}^{v(t)} h(r) d\beta(x, r) \leq h(v(t))(\beta(x, v(t)) - \beta(x, v(t-\eta))), \quad (12.1)$$

$$\int_{v(t-\eta)}^{v(t)} h(r) d\beta(x, r) \geq h(v(t-\eta))(\beta(x, v(t)) - \beta(x, v(t-\eta))) \quad (12.2)$$

п.в. в Ω , где полагаем $v(t) = v_0$ при $t < 0$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty((-\infty, T) \times \mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$; тогда $\zeta = h(v)\varphi \in L_2(0, T; X) \cap L_G(D^T)$. Отметим, что при любом малом $\eta > 0$ функция

$$\zeta_\eta(t) = \frac{1}{\eta} \int_t^{t+\eta} \zeta(s) ds, \quad \zeta_\eta(T) = 0,$$

лежит в пространстве Y . Поэтому ζ_η можно подставить в (4.17). Согласно (12.1) запишем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^T (w(t), \zeta_\eta(t))_\Omega dt &\leq [(\zeta_\eta)_t(\beta(x, v) - \beta(x, v_0))] \\ &= \int_{D_\infty^T} \frac{1}{\eta} (\zeta(t+\eta) - \zeta(t)) (\beta(x, v(t)) - \beta(x, v_0)) dx dt \\ &= \int_{D_\infty^T} \frac{1}{\eta} \zeta(t) (\beta(x, v(t-\eta)) - \beta(x, v(t))) dx dt \\ &= \int_{D_\infty^T} \frac{\varphi(t)}{\eta} h(v(t)) (\beta(x, v(t-\eta)) - \beta(x, v(t))) dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{D^T_\infty} \left(\frac{\varphi(t)}{\eta} \int_{v(t)}^{v(t-\eta)} h(r) d\beta(x, r) \right) dx dt \\
&= \left[\frac{\varphi(t+\eta) - \varphi(t)}{\eta} \int_{v_0}^{v(t)} h(r) d\beta(x, r) \right].
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
&\zeta_\eta \rightarrow \zeta = h(v)\varphi \quad \text{в } L_2(0, T; X), \\
&\frac{\varphi(t+\eta) - \varphi(t)}{\eta} \rightarrow \varphi_t(t) \quad \text{в } L_G(D^T) \quad \text{при } \eta \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

то после предельного перехода в последнем неравенстве получим (4.18).

Теперь предположим, что $h \geq 0$ не возрастает. Пусть $v_{0m} \in X$, $\beta(x, v_{0m}) \rightarrow \beta(x, v_0)$ в $L_{\bar{G}}(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$, и пусть m фиксировано всюду далее. Подставляя $\tilde{h} = -h(r)$ в (12.2), будем иметь

$$\int_{v(t-\eta)}^{v(t)} h(r) d\beta(x, r) \leq h(v(t-\eta))(\beta(x, v(t)) - \beta(x, v(t-\eta))) \quad (12.3)$$

для п.в. $t > 0$ при $\eta > 0$, где в этот раз при $t < 0$ мы определяем $v(t) = v_{0m}$ и будем писать h_1 вместо h . Как и ранее, $\zeta = h_1(v)\varphi$. Мы будем предполагать, что $\varphi \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$. Следовательно, при малых $\eta > 0$ функция

$$\zeta_{-\eta}(t) = \frac{1}{\eta} \int_{t-\eta}^t \zeta(s) ds, \quad \zeta_{-\eta}(T) = 0,$$

лежит в пространстве Y . Поэтому $\zeta_{-\eta}$ можно подставить в (4.17). Используя (12.3), получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (w(t), \zeta_{-\eta}(t))_\Omega dt \leq [(\zeta_{-\eta})_t(\beta(x, v(t)) - \beta(x, v_0))] \\
&= \left[\frac{1}{\eta} (\zeta(t) - \zeta(t-\eta))(\beta(x, v(t)) - \beta(x, v_0)) \right] \\
&= \left[\frac{1}{\eta} \zeta(t-\eta)(\beta(x, v(t-\eta)) - \beta(x, v(t))) \right] \\
&\quad - \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \langle \zeta(t-\eta)(\beta(x, v_{0m}) - \beta(x, v_0)) \rangle dt \\
&\leq \left[\frac{\varphi(t-\eta)}{\eta} \int_{v(t)}^{v(t-\eta)} h_1(r) d\beta(x, r) \right] \\
&\quad - \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^0 \langle \varphi(t) h_1(v_{0m})(\beta(x, v_{0m}) - \beta(x, v_0)) \rangle dt \\
&= \left[\frac{\varphi(t) - \varphi(t-\eta)}{\eta} \int_{v_0}^{v(t)} h_1(r) d\beta(x, r) \right] \\
&\quad + \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^0 \left\langle \varphi(t) \int_{v_0}^{v_{0m}} h_1(r) d\beta(x, r) \right\rangle dt
\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^0 \langle \varphi(t) h_1(v_{0m})(\beta(x, v_{0m}) - \beta(x, v_0)) \rangle dt.$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^0 \left\langle \varphi(t) \int_{v_0}^{v_{0m}} h_1(r) d\beta(x, r) \right\rangle dt &= \left\langle \varphi(0) \int_{v_0}^{v_{0m}} h_1(r) d\beta(x, r) \right\rangle \\ &+ \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^0 \left\langle (\varphi(t) - \varphi(0)) \int_{v_0}^{v_{0m}} h_1(r) d\beta(x, r) \right\rangle dt \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где последний интеграл стремится к 0 при $\eta \rightarrow 0$. Аналогично, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^0 \langle \varphi(t) h_1(v_{0m})(\beta(x, v_{0m}) - \beta(x, v_0)) \rangle dt \\ = \langle \varphi(0) h_1(v_{0m})(\beta(x, v_{0m}) - \beta(x, v_0)) \rangle \\ + \frac{1}{\eta} \int_{-\eta}^0 \langle (\varphi(t) - \varphi(0)) h_1(v_{0m})(\beta(x, v_{0m}) - \beta(x, v_0)) \rangle dt, \end{aligned}$$

где последний интеграл стремится к 0 при $\eta \rightarrow 0$. Теперь, пользуясь тем, что

$$\zeta_{-\eta} \rightarrow h_1(v)\varphi \quad \text{в } L_2((0, T); X), \quad \frac{\varphi(t+\eta) - \varphi(t)}{\eta} \rightarrow \varphi_t(t) \quad \text{в } L_G(D^T)$$

при $\eta \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T (w(t), h_1(v)\varphi(t))_{\Omega} dt &\leq \left[\varphi_t \int_{v_0}^v h_1(r) d\beta(x, r) \right] + \left\langle \varphi(0) \int_{v_0}^{v_{0m}} h_1(r) d\beta(x, r) \right\rangle \\ &- \langle \varphi(0) h(v_{0m})(\beta(x, v_{0m}) - \beta(x, v_0)) \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\beta(x, v_{0m}) \rightarrow \beta(x, v_0) \quad \text{в } L_{\overline{G}}(\Omega),$$

то после предельного перехода $m \rightarrow \infty$, пользуясь ограниченностью функции h_1 , получаем (4.18) в случае невозрастания h_1 .

Перепишем (4.18) в виде

$$\int_0^T (\tilde{w}(t), \psi(t))_{\Omega} dt \leq [\psi_t(\tilde{\beta}(x, v) - \tilde{\beta}(x, v_0))], \quad (12.4)$$

где

$$\tilde{w} = w h_1(v), \quad \tilde{\beta}(x, s) = \int_0^s h_1(r) d\beta(x, r).$$

Неравенство (12.4), установленное для $\psi \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$, предельным переходом распространяется и на функции $\psi \in Y$ с ограниченным носителем. В частности, как было показано выше, для неубывающей неотрицательной функции h_2 такой, что $h_2(0) = 0$, из (12.4) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^T (\tilde{w}(t), h_2(v)\varphi(t))_{\Omega} dt &\leq \left[\varphi_t \int_{v_0}^v h_2(r) d\tilde{\beta}(x, r) \right], \\ \varphi &\in C_0^\infty((-1, T) \times \mathbb{R}^n), \quad \varphi \geq 0, \end{aligned}$$

равносильное (4.18) с $h = h_1 h_2$. Справедливость леммы для неотрицательных функций $h \in W_\infty^1(\mathbb{R})$ таких, что $h(r) = 0$, $r < 0$, следует из того, что они могут быть приближены выпуклой комбинацией произведений функций. Поэтому лемма верна для таких функций. Аналогичным образом устанавливается справедливость леммы для неотрицательных функций в случае $h(r) = 0$, $r > 0$.

Список литературы

- [1] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлица*, Физматгиз, М., 1958, 271 с.; англ. пер.: М. А. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961, xi+249 pp.
- [2] Э. Р. Андриянова, “Оценки скорости убывания решения параболического уравнения с нестепенными нелинейностями”, *Уфимск. матем. журн.*, **6:2** (2014), 3–25; англ. пер.: E. R. Andriyanova, “Estimates of decay rate for solution to parabolic equation with non-power nonlinearities”, *Ufa Math. Journal*, **6:2** (2014), 3–24.
- [3] Э. Р. Андриянова, Ф. Х. Мукминов, “Существование решения параболического уравнения с нестепенными нелинейностями”, *Уфимск. матем. журн.*, **6:4** (2014), 32–49; англ. пер.: E. R. Andriyanova, F. Kh. Mukminov, “Existence of solution for parabolic equation with non-power nonlinearities”, *Ufa Math. Journal*, **6:4** (2014), 31–47.
- [4] P. A. Raviart, “Sur la résolution de certaines équations paraboliques non linéaires”, *J. Functional Analysis*, **5:2** (1970), 299–328.
- [5] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972, 587 с.; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris; Gauthier-Villars, Paris, 1969, xx+554 pp.
- [6] H. W. Alt, S. Luckhaus, “Quasilinear elliptic-parabolic differential equations”, *Math. Z.*, **183:3** (1983), 311–341.
- [7] Г. И. Лаптев, “Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью”, *Матем. сб.*, **188:9** (1997), 83–112; англ. пер.: G. I. Laptev, “Weak solutions of second-order quasilinear parabolic equations with double non-linearity”, *Sb. Math.*, **188:9** (1997), 1343–1370.
- [8] F. Bernis, “Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains”, *Math. Ann.*, **279:3** (1988), 373–394.
- [9] S. Antontsev, S. Shmarev, “Parabolic equations with double variable nonlinearities”, *Math. Comput. Simulation*, **81:10** (2011), 2018–2032.
- [10] С. Н. Антонцев, С. И. Шмарев, “Существование и единственность решений вырождающихся параболических уравнений с переменными показателями нелинейности”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12:4** (2006), 3–19; англ. пер.: S. N. Antontsev, S. I. Shmarev, “Existence and uniqueness of solutions of degenerate parabolic equations with variable exponents of nonlinearity”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **150:5** (2008), 2289–2301.
- [11] Ю. А. Алхутов, В. В. Жиков, “Теоремы существования решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 21–32; англ. пер.: Yu. A. Alkhutov, V. V. Zhikov, “Existence theorems for solutions of parabolic equations with variable order of nonlinearity”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270** (2010), 15–26.
- [12] Э. Р. Андриянова, Ф. Х. Мукминов, “Стабилизация решения параболического уравнения с двойной нелинейностью”, *Матем. сб.*, **204:9** (2013), 3–28; англ.

- пер.: È. R. Andriyanova, F. Kh. Mukminov, "Stabilization of the solution of a doubly nonlinear parabolic equation", *Sb. Math.*, **204**:9 (2013), 1239–1263.
- [13] Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев, "Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях", *Уфимск. матем. журн.*, **5**:1 (2013), 63–82; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, A. A. Leontiev, "Decay of solution of anisotropic doubly nonlinear parabolic equation in unbounded domains", *Ufa Math. Journal*, **5**:1 (2013), 63–82.
- [14] Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев, "Решения анизотропных параболических уравнений с двойной нелинейностью в неограниченных областях", *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки*, 2013, №1(30), 82–89.
- [15] Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев, "О решениях анизотропных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных областях", *Матем. сб.*, **205**:1 (2014), 9–46; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, A. A. Leont'ev, "Solutions to higher-order anisotropic parabolic equations in unbounded domains", *Sb. Math.*, **205**:1 (2014), 7–44.
- [16] Л. М. Кожевникова, "Стабилизация решений псевдодифференциальных параболических уравнений в неограниченных областях", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:2 (2010), 109–130; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, "Stabilization of solutions of pseudo-differential parabolic equations in unbounded domains", *Izv. Math.*, **74**:2 (2010), 325–345.
- [17] Р. Х. Каримов, Л. М. Кожевникова, "Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами", *Матем. сб.*, **201**:9 (2010), 3–26; англ. пер.: R. Kh. Karimov, L. M. Kozhevnikova, "Stabilization of solutions of quasilinear second order parabolic equations in domains with non-compact boundaries", *Sb. Math.*, **201**:9 (2010), 1249–1271.
- [18] Л. М. Кожевникова, Ф. Х. Мукминов, "Стабилизация решений анизотропного квазилинейного параболического уравнения в неограниченных областях", *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **278**, МАИК, М., 2012, 114–128; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, F. Kh. Mukminov, "Stabilization of solutions of an anisotropic quasilinear parabolic equation in unbounded domains", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **278** (2012), 106–120.
- [19] A. Bamberger, "Étude d'une équation doublement non linéaire", *J. Functional Analysis*, **24**:2 (1977), 148–155.
- [20] А. В. Иванов, П. З. Мкртычан, В. Яегер, "Существование и единственность регулярного решения первой начально-краевой задачи для некоторого класса дважды нелинейных параболических уравнений", *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 25, Зап. научн. сем. ПОМИ, **213**, Наука, СПб., 1994, 48–65; англ. пер.: A. V. Ivanov, P. Z. Mkrtychan, W. Jäger, "Existence and uniqueness of regular solution of Cauchy–Dirichlet problem for some class of doubly nonlinear parabolic equations", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **84**:1 (1997), 845–855.
- [21] П. З. Мкртычан, "О единственности решения второй начально-краевой задачи для уравнения неньютоновской политропической фильтрации", *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 24, Зап. научн. сем. ПОМИ, **200**, Наука, СПб., 1992, 110–117; англ. пер.: P. Z. Mkrtychan, "On the uniqueness of a solution of the second initial boundary-value problem for the equation of non-Newtonian polytropic filtration", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **77**:3 (1995), 3207–3211.
- [22] J. Carrillo, P. Wittbold, "Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems", *J. Differential Equations*, **156**:1 (1999), 93–121.

- [23] С. Н. Кружков, “Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными”, *Матем. сб.*, **81(123)**:2 (1970), 228–255; англ. пер.: S. N. Kruzhkov, “First order quasilinear equations in several independent variables”, *Math. USSR-Sb.*, **10**:2 (1970), 217–243.
- [24] N. Calvo, J. I. Díaz, J. Durany, E. Schiavi, C. Vázquez, “On a doubly nonlinear parabolic obstacle problem modelling ice sheet dynamics”, *SIAM J. Appl. Math.*, **63**:2 (2002), 683–707.
- [25] S. N. Antontsev, S. I. Shmarev, “Extinction of solutions of parabolic equations with variable anisotropic nonlinearities”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, МАИК, М., 2008, 16–25; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **261** (2008), 11–21.
- [26] S. N. Antontsev, S. I. Shmarev, “On the blow-up of solutions to anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 33–48; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270** (2010), 27–42.
- [27] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “О свойстве повышенной суммируемости для параболических систем переменного порядка нелинейности”, *Матем. заметки*, **87**:2 (2010), 179–200; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “On the property of higher integrability for parabolic systems of variable order of nonlinearity”, *Math. Notes*, **87**:2 (2010), 169–188.
- [28] А. Г. Королев, “Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева–Орлича”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 1983, № 1, 32–37; англ. пер.: A. G. Korolev, “Embedding theorems for anisotropic Sobolev–Orlicz spaces”, *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **38**:1 (1983), 37–42.
- [29] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы*, т. I: *Общая теория*, ИЛ, М., 1962, 895 с.; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators*, v. I: *General theory*, Pure Appl. Math., **7**, Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers, Ltd., London, 1958, xiv+858 pp.

Элина Радиковна Андриянова
(Elina R. Andriyanova)

Уфимский государственный авиационный
технический университет
E-mail: Elina.Andriyanov@mail.ru

Поступила в редакцию
01.02.2015 и 22.06.2015

Фарит Хамзаевич Мукминов
(Farit Kh. Mukminov)

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра
Российской академии наук
E-mail: mfkh@rambler.ru