Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Пастухова, Задача Неймана для эллиптических уравнений с многомасштабными коэффициентами: операторные оценки усреднения, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 3, 111–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 18:11:49

УДК 517.956.8

С. Е. Пастухова

Задача Неймана для эллиптических уравнений с многомасштабными коэффициентами: операторные оценки усреднения

Доказана L^2 -оценка усреднения для эллиптического оператора A_ε в области Ω с краевым условием Неймана на границе $\partial\Omega$. Коэффициенты оператора A_ε быстро осциллируют по разным группам переменных с периодами разных порядков малости при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предполагается минимальная регулярность данных, что позволяет придать результату смысл оценки в операторной $(L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega))$ -норме для разности резольвент исходной и усредненной задач. Найдена также аппроксимация резольвенты исходной задачи в операторной $(L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega))$ -норме.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: многомасштабное усреднение, операторные оценки усреднения, сглаживание по Стеклову.

DOI: 10.4213/sm8486

§ 1. Введение

1.1. Некоторые общие сведения о предмете исследования. В теории усреднения наблюдается повышенный интерес к операторным оценкам усреднения после выхода статьи М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [1]. Настоящая работа продолжает цикл работ [2]–[15], в которых операторные оценки были доказаны для самых разнообразных уравнений модифицированным методом первого приближения, предложенным В. В. Жиковым в [2]. В частности, изучались эллиптические уравнения резольвентного типа во всем пространстве и эллиптические краевые задачи в области с условием Дирихле или Неймана на границе. В настоящей статье рассматриваются эллиптические уравнения с коэффициентами, осциллирующими по разным группам переменных с периодами разных порядков малости при $\varepsilon \rightarrow 0$, например порядков ε и ε^2 . Для задачи Неймана в ограниченной области Ω доказана оценка порядка ε в $(L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega))$ -операторной норме для разности резольвент исходной и усредненной задач. Найдена также аппроксимация исходной резольвенты в $(L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega))$ -операторной норме с погрешностью порядка $\sqrt{\varepsilon}$. Эта аппроксимация имеет вид суммы резольвенты усредненной задачи и нескольких корректирующих операторов, число которых совпадает с числом различных масштабов осцилляции в коэффициентах исходного уравнения. Построенная аппроксимация снова дает погрешность порядка ε в $(L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega'))$ -норме,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00192) и Российского научного фонда (проект № 14-11-00398).

если $\Omega' \subset \Omega$ – строго внутренней подобласть. В [15] аналогичный результат получен для оператора с многомасштабными осциллирующими коэффициентами с условием Дирихле на границе области.

Укажем основные технические приемы нашего подхода. Это техника “переноса оценок из пространства в область” и специальный анализ первого приближения (предложенные в [2]–[5]) в сочетании со сглаживанием по Стеклову или его обобщением на многомасштабный случай. Что касается сглаживания по Стеклову, то оно зарекомендовало себя как эффективное вспомогательное средство в оценках усреднения (см. [2]–[17]) в условиях, когда регулярность данных задачи недостаточна для классического подхода. Под классическим подходом в оценках усреднения понимается метод асимптотических разложений в том виде, в каком он применяется в [18]–[20].

Для краевых задач с чисто ε -периодическими коэффициентами L^2 -оценки усреднения порядка ε получены в [16], [17], [21], [22], притом разными методами и при разных предположениях на границу области и регулярность коэффициентов. Наш подход к оценкам усреднения в краевых задачах использовался в [16], [17] и был дополнен некоторыми соображениями двойственности и более аккуратным изучением погрешности H^1 -приближения в приграничной зоне. Именно эти дополнения к схеме из [2]–[5] позволили довести порядок оценок до максимального, т.е. до $O(\varepsilon)$. В свою очередь и в многомасштабных задачах, применяя аргументы, схожие с этими дополнениями, можно добиться оценок усреднения с максимальным порядком точности по малому параметру осцилляции. Для задач с граничным условием Неймана это сделано в настоящей работе.

1.2. Постановка задачи. Основной результат. Рассмотрим краевую задачу Неймана в ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ для эллиптического оператора с сильно неоднородными коэффициентами $A_\varepsilon = -\operatorname{div} a^\varepsilon(x) \nabla$

$$\begin{aligned} A_\varepsilon u^\varepsilon &= f \quad \text{в } \Omega, \quad f \in L^2(\Omega), \\ u^\varepsilon &\in H^1(\Omega), \quad \partial_{\nu_\varepsilon} u^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \int_\Omega u^\varepsilon dx = 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$\partial_{\nu_\varepsilon}$ – оператор дифференцирования по конормали $a^\varepsilon(x)n$, т.е. $\partial_{\nu_\varepsilon} \varphi = a^\varepsilon(x)n \cdot \nabla \varphi$, n – единичная внешняя нормаль на границе $\partial\Omega$. Симметрическая матрица $a^\varepsilon(x)$ имеет “двухмасштабную” структуру:

$$a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2}\right), \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

где элементы матрицы $a(y, z)$ вещественнозначны, измеримы и периодичны по y и z , ячейкой периодичности служит куб $Y = Z = [-1/2, 1/2)^d$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ матрица $a^\varepsilon(x)$ быстро осциллирует по одной группе переменных с периодом ε , по другой – с периодом ε^2 .

Пусть выполнены условия

$$|a(y, z) - a(y', z)| \leq c_L |y - y'|, \quad (1.2)$$

$$\lambda |\xi|^2 \leq a(y, z) \xi \cdot \xi \leq \lambda^{-1} |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \lambda > 0, \quad (1.3)$$

для почти всех $z \in \mathbb{R}^d$ и всех $y, y' \in \mathbb{R}^d$; и, кроме того,

$$f \in \tilde{L}^2(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : \langle f \rangle_\Omega = \int_\Omega f \, dx = 0 \right\}. \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.1) понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_\Omega a^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}). \quad (1.5)$$

Поскольку справедливо неравенство Пуанкаре

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq c_P \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad \varphi \in \tilde{H}^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \langle \varphi \rangle_\Omega = 0\}, \quad (1.6)$$

то левая часть тождества (1.5) задает скалярное произведение на $\tilde{H}^1(\Omega)$, а правая часть – линейный функционал на этом пространстве. По теореме Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве существует единственная функция $u^\varepsilon \in \tilde{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющая тождеству (1.5). При этом выполнена равномерная при $\varepsilon \rightarrow 0$ оценка $\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c$ и можно считать, что имеют место сходимости

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } H^1(\Omega), \quad u^\varepsilon \rightarrow u \quad \text{в } L^2(\Omega). \quad (1.7)$$

Известно, что предельная функция u есть решение усредненной задачи

$$\begin{aligned} Au &= f \quad \text{в } \Omega, \\ u &\in H^1(\Omega), \quad \partial_\nu u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad \int_\Omega u \, dx = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $A = -\operatorname{div} a^0 \nabla$, $\partial_\nu u = a^0 n \cdot \nabla u$ – производная по соответствующей кономмали и $a^0 > 0$ – постоянная симметрическая матрица, которая находится в процессе повторного усреднения; см. (1.16)–(1.19).

Решение задачи (1.8) понимается в смысле интегрального тождества

$$u \in \tilde{H}^1(\Omega), \quad \int_\Omega a^0 \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}). \quad (1.9)$$

Это решение существует и единственно.

Пусть область Ω достаточно гладкая (класса $C^{1,1}$), так что по эллиптической теории решение усредненной задачи (1.8) принадлежит пространству $H^2(\Omega)$ и выполнена оценка

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad c = \operatorname{const}(d, \Omega), \quad (1.10)$$

кроме того, существует линейный непрерывный оператор продолжения

$$\mathcal{P}: H^2(\Omega) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^d). \quad (1.11)$$

При необходимости решение задачи (1.8) можно считать считается продолженным во внешность области Ω с помощью оператора $\mathcal{P}$. Это продолжение обозначается тем же символом u .

В сделанных выше предположениях о правой части f , матрице $a^\varepsilon(x)$ и области Ω результат (1.7) можно дополнить оценками сходимости. Получение таких оценок есть основная цель настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1.1. Для разности решений задач (1.1) и (1.8) имеет место оценка

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.12)$$

где константа c_0 зависит лишь от размерности d , постоянных λ и c_L из условий (1.2) и (1.3) и области Ω .

Исходной задаче (1.1) соответствует самосопряженный неотрицательный в $\tilde{L}^2(\Omega)$ оператор $A_{\varepsilon,N}$, его точное определение дается через замкнутую квадратичную форму

$$\int_{\Omega} a^\varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \varphi \in \tilde{H}^1(\Omega).$$

Аналогично, усредненной задаче соответствует самосопряженный неотрицательный в $\tilde{L}^2(\Omega)$ оператор A_N , который задается через квадратичную форму

$$\int_{\Omega} a^0 \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \varphi \in \tilde{H}^1(\Omega).$$

Неравенство (1.12) влечет оценку для разности резольвент в операторной норме

$$\|A_{\varepsilon,N}^{-1} - A_N^{-1}\|_{\tilde{L}^2(\Omega) \rightarrow \tilde{L}^2(\Omega)} \leq c_0 \varepsilon. \quad (1.13)$$

Если резольвенту $A_{\varepsilon,N}^{-1}$ рассматривать как оператор, действующий из $\tilde{L}^2(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$, то ее аппроксимация задается суммой $A_N^{-1} + \varepsilon \mathcal{K}_N(\varepsilon)$, где корректирующий оператор $\mathcal{K}_N(\varepsilon)$ имеет вполне обозримое описание (значение $\mathcal{K}_N(\varepsilon)f = K_\varepsilon$ задается равенствами (1.21), (1.22) через функцию $u = A_N^{-1}f$, а также решения двух вспомогательных задач на ячейке периодичности), так что выполнена оценка

$$\|A_{\varepsilon,N}^{-1} - A_N^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_N(\varepsilon)\|_{\tilde{L}^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)} \leq c_0 \varepsilon^{1/2}, \quad (1.14)$$

c_0 – константа того же типа, что в (1.13).

Оценки (1.13) и (1.14) имеют разные порядки малости по ε , в отличие от аналогичных операторных оценок для резольвенты оператора A_ε во всем пространстве $\mathbb{R}^d$ (см. [12]). В H^1 -оценке сказывается влияние границы, то же самое справедливо для краевой задачи Дирихле (см. [15]). В любой внутренней подобласти $\Omega' \subset \Omega$, отстоящей на положительное расстояние δ от границы $\partial\Omega$, H^1 -аппроксимация будет снова порядка ε , т.е.

$$\|A_{\varepsilon,N}^{-1} - A_N^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_N(\varepsilon)\|_{\tilde{L}^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega')} \leq c_0 \varepsilon, \quad (1.15)$$

c_0 – константа того же типа, что в (1.13), зависящая также от подобласти Ω' и растущая вместе с величиной δ^{-1} (подробности см. в § 4).

Лишь для простоты и большей доступности изложения здесь рассматривается скалярное уравнение (1.1). Вместо него можно брать векторные уравнения эллиптического типа, например, систему теории упругости: методы и результаты остаются без особых изменений (см. [2]–[5]). В случае уравнений теории упругости роль неравенства Пуанкаре (1.6) будет играть неравенство Корна.

1.3. Задачи на ячейке и усредненные матрицы. Условимся о некоторых обозначениях: $e^1, \dots, e^d$ – канонический базис в $\mathbb{R}^d$; $\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_Y = \int_Y \cdot dy$ – среднее по ячейке; $L^2_{\text{per}}(Y)$, $L^2_{\text{per}}(Y \times Z)$ – лебеговы пространства периодических функций с указанной ячейкой периодичности; $H^1(Y) = H^1_{\text{per}}(Y)$, $H^2(Y) = H^2_{\text{per}}(Y)$ и т.д. – соболевские пространства периодических функций.

Здесь, как и всюду в работе, функциональные пространства состоят из вещественнозначных функций. Часто не будем различать в обозначениях пространства скалярных и векторных функций.

Чтобы определить усредненную матрицу a^0 , введем следующие задачи:

$$M^j(y, \cdot) \in H^1(Z), \quad \operatorname{div}_z [a(y, z)(e^j + \nabla_z M^j(y, z))] = 0, \quad \langle M^j(y, \cdot) \rangle_Z = 0, \quad (1.16)$$

$$N^j(y) \in H^1(Y), \quad \operatorname{div} [\hat{a}(y)(e^j + \nabla N^j(y))] = 0, \quad \langle N^j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, d, \quad (1.17)$$

с “промежуточной” усредненной матрицей

$$\hat{a}(y) = \langle a(y, z)(I + \nabla_z M(y, z)) \rangle_Z, \quad (1.18)$$

где I – единичная $(d \times d)$ -матрица, M – вектор с координатами M^j . В задаче (1.16) переменная y выступает как параметр. “Окончательной” усредненной матрицей будет

$$a^0 = \langle \hat{a}(y)(I + \nabla N(y)) \rangle_Y, \quad (1.19)$$

где N – вектор с координатами N^j , а N^j определены в (1.17).

Решения задач на ячейке понимаются в смысле интегрального тождества. Например, для N^j имеем

$$\langle \hat{a}(y)(\nabla N^j(y) + e^j) \cdot \nabla \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in C^\infty_{\text{per}}(Y). \quad (1.20)$$

Это означает соленоидальность 1-периодического вектора $\hat{a}(y)(\nabla N^j(y) + e^j)$, что будет использовано далее. Соленоидальным (по переменной z) будет и вектор потока $a(y, z)(e^j + \nabla_z M^j(y, z))$ из уравнения (1.16).

Известно, что обе усредненные матрицы $\hat{a}(y)$ и a^0 симметричны и удовлетворяют неравенству типа (1.3) с исходной константой эллиптичности λ . Таким образом, хорошо поставлены обе задачи на ячейке периодичности, а также усредненная задача (1.8).

Свойство липшицевости (1.2) обеспечивает корректное определение матрицы $a^\varepsilon(x)$, прежде всего ее измеримость. (Напомним, что наиболее общим здесь будет условие каратеодориевости для матрицы $a(y, z)$.) Кроме того, на липшицевости матрицы $a(y, z)$ основаны следующие свойства решений задач на ячейке, без которых наш метод не работает.

ЛЕММА 1.2. Пусть M^j , N^j – решения задач (1.16) и (1.17), $\hat{a}(y)$ определена в (2.36). Тогда:

(i) $\|M^j(y, \cdot)\|_{H^1(Z)} \leq c$, $\|N^j\|_{H^2(Y)} \leq c$, $c = \text{const}(\lambda, c_L)$;

(ii) $M^j(y, z)$ – липшицева по $y \in Y$ функция со значениями в $H^1(Z)$ с константой Липшица, зависящей лишь от постоянных из условий (1.2) и (1.3);

(iii) $\widehat{a}(y)$ – липшицева матрица с той же оговоркой о константе Липшица, что и выше.

Несложное доказательство всех утверждений леммы дано, например, в [14], [15] и здесь опускается.

1.4. Первое приближение. В соответствии с результатом (1.12) функцию u часто называют нулевым приближением к u^ε . Это приближение к точному решению u^ε в L^2 -норме. Чтобы аппроксимировать u^ε в H^1 -норме, требуется к нулевому приближению добавить корректор. Так мы приходим к первому приближению

$$\widehat{v}^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon K_\varepsilon(x), \quad \varepsilon K_\varepsilon = \varepsilon K_{\varepsilon,1} + \varepsilon^2 K_{\varepsilon,2}, \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} K_{\varepsilon,1} &= \int_{Y \times Z} N(y') \cdot \nabla u(x') \, d\omega \, d\sigma, \\ K_{\varepsilon,2} &= \int_{Y \times Z} M(y', z) \cdot (I + \nabla N(y')) \nabla u(x') \, d\omega \, d\sigma, \\ y' &= \frac{x}{\varepsilon} - \varepsilon\sigma, \quad x' = x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma, \quad z = \frac{x}{\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Корректор должен состоять из столькох компонент, сколько масштабов осцилляции в коэффициентах, в данном случае их два. Когда коэффициенты чисто периодические, т.е. $a^\varepsilon(x) = a(y)|_{y=x/\varepsilon}$, корректор исчерпывается одной компонентой и задается равенством

$$K_\varepsilon(x) = N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla \int_Y u(x - \varepsilon\omega) \, d\omega,$$

где к функции u применено обычное сглаживание по Стеклову. Можно считать, что в (1.22) также происходит сглаживание по Стеклову, но не совсем обычное: оно двойное, со сложным вхождением параметров сглаживания и затрагивает, помимо функции u , осциллирующие множители.

Формулы (1.21), (1.22) задают первое приближение со сглаженным корректором, которое в отсутствие параметров сдвига дает обычное первое приближение

$$\begin{aligned} v^\varepsilon(x) &= u(x) + \varepsilon N(y) \cdot \nabla u(x) + \varepsilon^2 M(y, z) \cdot (I + \nabla N(y)) \nabla u(x), \\ y &= \frac{x}{\varepsilon}, \quad z = \frac{x}{\varepsilon^2}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

использованное ранее, например, в [18].

ТЕОРЕМА 1.3. Для разности решения задачи (1.1) и функции $\widehat{v}^\varepsilon$, определенной в (1.21), (1.22), имеет место оценка

$$\|u^\varepsilon - \widehat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.24)$$

где константа c_0 зависит лишь от размерности d , постоянных λ и c_L из условий (1.2) и (1.3) и области Ω .

В операторной форме оценка (1.24) записана ранее как неравенство (1.14). Оценки (1.24) и (1.12) доказаны в § 2 и § 3. При получении этих оценок в первое приближение добавляется поправочный член w^ε , чтобы ликвидировать невязку приближения $\widehat{v}^\varepsilon$ в краевом условии Неймана. С одной стороны,

$$\|w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.25)$$

с другой стороны, с включением w^ε уменьшается по сравнению с (1.24) погрешность приближения в $H^1(\Omega)$ -норме, а именно

$$\|u^\varepsilon - \widehat{v}^\varepsilon + w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0\varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.26)$$

Отсюда последовательно можно вывести

$$\|u^\varepsilon - \widehat{v}^\varepsilon + w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0\varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|u^\varepsilon - u + w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0\varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

что вместе с (1.25) дает L^2 -оценку (1.12) того же порядка $O(\varepsilon)$. Напротив, отбрасывание поправочного члена w^ε из (1.26) понижает порядок оценки, поскольку

$$\|w^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.27)$$

Доказательство оценок вида (1.25) и (1.27) занимает значительную часть в настоящей работе (см. § 3).

1.5. Основные технические леммы. Приведем ключевые для нашего метода леммы. При доказательстве этих лемм демонстрируется роль дополнительных параметров интегрирования, введенных в первое приближение за счет сдвига и усреднения по ячейкам периодичности.

Ниже рассматривается произвольная область $Q \subset \mathbb{R}^d$ и через Q_δ обозначена ее δ -окрестность.

ЛЕММА 1.4. (i) Если $b \in L^2_{\text{per}}(Y)$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, то

$$\varphi(x) = \int_{Y \times Z} b\left(\frac{x}{\varepsilon} - \varepsilon\sigma\right) u(x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma) d\omega d\sigma \in L^2(Q),$$

причем для достаточно малых $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\|\varphi\|_{L^2(Q)}^2 \leq \langle b^2 \rangle \|u\|_{L^2(Q_{2\varepsilon})}^2. \quad (1.28)$$

(ii) Если $b \in L^2_{\text{per}}(Y \times Z)$, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, то

$$\psi(x) = \int_{Y \times Z} b\left(\frac{x}{\varepsilon} - \varepsilon\sigma, \frac{x}{\varepsilon^2}\right) u(x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma) d\omega d\sigma \in L^2(Q),$$

причем для $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$\|\psi\|_{L^2(Q)} \leq \|b\|_{L^2(Y \times Z)} \|u\|_{L^2(Q_{2\varepsilon})}. \quad (1.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем более сложное соотношение (1.29). По неравенству Коши–Буняковского и теореме Фубини после замены переменных

$$x \rightarrow x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma,$$

которая переводит область Q в $Q' \subset Q_{2\varepsilon}$ при достаточно малых ε , получаем

$$\begin{aligned}
 \int_Q |\psi(x)|^2 dx &\leq \int_{Q \times Y \times Z} \left| b\left(\frac{x}{\varepsilon} - \varepsilon\sigma, \frac{x}{\varepsilon^2}\right) u(x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma) \right|^2 dx d\omega d\sigma \\
 &\leq \int_{Q_{2\varepsilon} \times Y \times Z} \left| b\left(\frac{x}{\varepsilon} + \omega, \frac{x}{\varepsilon^2} + \varepsilon^{-1}\omega + \sigma\right) u(x) \right|^2 dx d\omega d\sigma \\
 &= \int_{Q_{2\varepsilon}} |u(x)|^2 \left(\int_{Y \times Z} \left| b\left(\frac{x}{\varepsilon} + \omega, \frac{x}{\varepsilon^2} + \varepsilon^{-1}\omega + \sigma\right) \right|^2 d\omega d\sigma \right) dx \\
 &= \|b\|_{L^2(Y \times Z)}^2 \|u\|_{L^2(Q_{2\varepsilon})}^2,
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

что и требовалось.

ЛЕММА 1.5. Пусть $b_1 \in L^2(Y)$, $b_2 \in L^\infty(Y, L^2(Z))$ и $b(y, z) = b_1(y)b_2(y, z)$. Тогда

$$\|b\|_{L^2(Y \times Z)} \leq \|b_1\|_{L^2(Y)} \sup_y \|b_2(y, \cdot)\|_{L^2(Z)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к повторному интегралу

$$\begin{aligned}
 \int_{Y \times Z} |b|^2 dy dz &= \int_Y |b_1(y)|^2 \left(\int_Z |b_2(y, z)|^2 dz \right) dy \\
 &\leq \sup_y \|b_2(y, \cdot)\|_{L^2(Z)}^2 \int_Y |b_1(y)|^2 dy,
 \end{aligned}$$

получаем требуемое неравенство.

Из приведенных выше лемм 1.2, 1.4, 1.5 следует принадлежность первого приближения $\widehat{v}^\varepsilon$ пространству $H^1(\Omega)$.

§ 2. Вывод H^1 - и L^2 -оценок

2.1. Операторные уравнения в $L^2(\Omega)$. Изучим сначала более простую, чем (1.1), задачу

$$\begin{aligned}
 (A_\varepsilon + 1)u^\varepsilon &= f \quad \text{в } \Omega, \quad f \in L^2(\Omega), \\
 u^\varepsilon &\in H^1(\Omega), \quad \partial_{\nu_\varepsilon} u^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где дифференциальные операторы $A_\varepsilon = -\operatorname{div} a^\varepsilon(x)\nabla$ и $\partial_{\nu_\varepsilon}$ те же, что раньше.

Усредненной для (2.1) будет задача

$$\begin{aligned}
 (A + 1)u &= f \quad \text{в } \Omega, \\
 u &\in H^1(\Omega), \quad \partial_\nu u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Задачи (2.1) и (2.2) можно записать в виде операторных уравнений

$$(\mathcal{A}_{\varepsilon, N} + 1)u^\varepsilon = f \quad \text{в } L^2(\Omega), \tag{2.3}$$

$$(\mathcal{A}_N + 1)u = f \quad \text{в } L^2(\Omega). \tag{2.4}$$

Здесь $\mathcal{A}_{\varepsilon,N}$ – оператор в $L^2(\Omega)$, определенный через замкнутую квадратичную форму

$$\int_{\Omega} a^{\varepsilon} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \varphi \in H^1(\Omega),$$

которая, очевидно, является расширением квадратичной формы оператора $A_{\varepsilon,N}$. Аналогично, $\mathcal{A}_N$ – оператор в $L^2(\Omega)$, определенный через квадратичную форму

$$\int_{\Omega} a^0 \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \varphi \in H^1(\Omega).$$

Пусть область Ω удовлетворяет тем же, что раньше, требованиям. Тогда существует непрерывный оператор продолжения (1.11) и решение задачи (2.2) принадлежит $H^2(\Omega)$ с эллиптической оценкой вида (1.10).

ТЕОРЕМА 2.1. *Для разности решений задач (2.1) и (2.2) имеет место оценка вида (1.12), которая допускает операторную форму*

$$\|(\mathcal{A}_{\varepsilon,N} + 1)^{-1} - (\mathcal{A}_N + 1)^{-1}\|_{L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)} \leq c_0 \varepsilon. \quad (2.5)$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть u^{ε} , u – решения задач (2.1) и (2.2), функция $\widehat{v}^{\varepsilon}$ определена согласно (1.21), (1.22). Тогда имеет место оценка вида (1.24).*

В действительности выполнена оценка с мажорантой, содержащей H^2 -норму решения усредненной задачи

$$\|u^{\varepsilon} - \widehat{v}^{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 \sqrt{\varepsilon} \|u\|_{H^2(\Omega)}, \quad (2.6)$$

где константа c_1 зависит лишь от размерности d , постоянных λ и c_L из условий (1.2) и (1.3) и области Ω .

Сначала докажем эти две теоремы, из них как следствия будут получены теоремы 1.1 и 1.3.

2.2. Резольвентные уравнения в пространстве $\mathbb{R}^d$. Продолжая во внешность Ω решение усредненной задачи (2.2) с помощью оператора $\mathcal{P}$ из (1.11), получим функции

$$\widetilde{u} = \mathcal{P}u, \quad \widetilde{f} = A\widetilde{u} + \widetilde{u}.$$

В силу свойств продолжения, а также в силу эллиптической оценки для решения задачи (2.2) верны неравенства

$$\|\widetilde{u}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leq c \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c_0 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.7)$$

$$\|\widetilde{f}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A\widetilde{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\widetilde{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\widetilde{u}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \stackrel{(2.7)}{\leq} c \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.8)$$

Далее продолженную функцию $\widetilde{u}$ для простоты обозначаем снова через u . Введем резольвентное уравнение

$$z^{\varepsilon} \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad (A_{\varepsilon} + 1)z^{\varepsilon} = \widetilde{f} \quad \text{в } \mathbb{R}^d. \quad (2.9)$$

Согласно доказанным уже результатам (см. [15]) функция $\widehat{v}^\varepsilon(x)$, построенная по формулам (1.21), (1.22), является приближением для решения z^ε , так что выполнены оценки

$$\|z^\varepsilon - \widehat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq c_0 \varepsilon \|\widetilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (2.10)$$

$$\|a^\varepsilon \nabla z^\varepsilon - a^\varepsilon \nabla \widehat{v}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq c_0 \varepsilon \|\widetilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.11)$$

Далее будет выяснено, в какой степени z^ε приближает решение задачи (2.1) (см. (2.26)). Очевидны соотношения

$$\begin{aligned} A_\varepsilon(u^\varepsilon - z^\varepsilon) + (u^\varepsilon - z^\varepsilon) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \partial_{\nu_\varepsilon}(u^\varepsilon - z^\varepsilon)|_{\partial\Omega} &= -\partial_{\nu_\varepsilon} z^\varepsilon|_{\partial\Omega} =: -h_\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где условие Неймана выполнено с ненулевой правой частью. Требуется поправочный член, компенсирующий невязку h_ε в краевом условии.

Напомним некоторые сведения о краевой задаче с ненулевым условием Неймана. Отправной точкой является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть векторная функция $p \in L^2(\Omega)^d$ такова, что $\operatorname{div} p \in L^2(\Omega)$. Тогда определен след на границе $\partial\Omega$ компоненты

$$p \cdot n \in H^{-1/2}(\partial\Omega) = (H^{1/2}(\partial\Omega))^*,$$

при этом

$$\int_{\partial\Omega} \varphi p \cdot n \, d\Gamma = \int_{\Omega} (\varphi \operatorname{div} p + \nabla \varphi \cdot p) \, dx, \quad \varphi \in H^1(\Omega), \quad (2.13)$$

$$\|p \cdot n\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq \|p\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\operatorname{div} p\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.14)$$

Стоит также напомнить следующий факт: для функции $\varphi \in H^1(\Omega)$ определен след на границе $\partial\Omega$, причем взятие следа $\varphi \rightarrow \varphi|_{\partial\Omega}$ есть непрерывный оператор из $H^1(\Omega)$ в $H^{1/2}(\partial\Omega)$; наоборот, для любой $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ найдется функция из $H^1(\Omega)$, след которой на границе совпадает с φ .

В отношении вектора $p^\varepsilon = a^\varepsilon \nabla z^\varepsilon$ (это поток в задаче (2.9)) предложение 2.3 дает корректное определение следа конормальной производной

$$\partial_{\nu_\varepsilon} z^\varepsilon|_{\partial\Omega} = p^\varepsilon \cdot n|_{\partial\Omega},$$

обозначенного в (2.12) через h^ε . Тожество (2.13) в данном случае выглядит как

$$\int_{\partial\Omega} \varphi h^\varepsilon \, d\Gamma = \int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla z^\varepsilon \cdot \nabla \varphi + z^\varepsilon \varphi - f \varphi) \, dx, \quad \varphi \in H^1(\Omega). \quad (2.15)$$

Из общей теории следует, что корректно поставлена краевая задача Неймана

$$\begin{aligned} (A_\varepsilon + 1)w &= \Phi \quad \text{в } \Omega, \quad \Phi \in L^2(\Omega), \\ w &\in H^1(\Omega), \quad \partial_{\nu_\varepsilon} w = h \quad \text{на } \partial\Omega, \quad h \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \end{aligned} \quad (2.16)$$

если решение этой задачи понимать через интегральное тождество

$$\int_{\Omega} (a^{\varepsilon} \nabla w \cdot \nabla \varphi + w \varphi) dx = \int_{\partial \Omega} h \varphi d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi \varphi dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad (2.17)$$

при этом выполнена оценка

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\|h\|_{H^{-1/2}(\partial \Omega)} + \|\Phi\|_{L^2(\Omega)}), \quad c = \text{const}(d, \Omega, \lambda). \quad (2.18)$$

2.3. Поправочный член. Введем w^{ε} как решение задачи

$$\begin{aligned} (A_{\varepsilon} + 1)w^{\varepsilon} &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ w^{\varepsilon} &\in H^1(\Omega), \quad \partial_{\nu_{\varepsilon}} w^{\varepsilon} = \eta^{\varepsilon} \quad \text{на } \partial \Omega, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где элемент $\eta_{\varepsilon} \in H^{-1/2}(\partial \Omega)$ есть функционал на $H^{1/2}(\partial \Omega)$, заданный равенством

$$\int_{\partial \Omega} \varphi \eta^{\varepsilon} d\Gamma = \int_{\Omega} (a^{\varepsilon} \nabla \widehat{v}^{\varepsilon} \cdot \nabla \varphi + \widehat{v}^{\varepsilon} \varphi - f \varphi) dx, \quad \varphi \in H^1(\Omega). \quad (2.20)$$

Функционал определен корректно, что легко показать, исходя из определения $\widehat{v}^{\varepsilon}$, используя леммы 1.4, 1.5, а также свойства составляющих $\widehat{v}^{\varepsilon}$ функций N, M, u . Из (2.15), (2.20) и оценок (2.10), (2.11) следует, что

$$\|h^{\varepsilon} - \eta^{\varepsilon}\|_{H^{-1/2}(\partial \Omega)} \leq c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.21)$$

Согласно (2.12) и (2.19) имеем

$$\begin{aligned} (A_{\varepsilon} + 1)(u^{\varepsilon} - z^{\varepsilon} + w^{\varepsilon}) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u^{\varepsilon} - z^{\varepsilon} + w^{\varepsilon} &\in H^1(\Omega), \quad \partial_{\nu_{\varepsilon}}(u^{\varepsilon} - z^{\varepsilon} + w^{\varepsilon}) = \eta^{\varepsilon} - h^{\varepsilon} \quad \text{на } \partial \Omega, \end{aligned} \quad (2.22)$$

и в этой ситуации (см. (2.16)–(2.18))

$$\|u^{\varepsilon} - z^{\varepsilon} + w^{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|h^{\varepsilon} - \eta^{\varepsilon}\|_{H^{-1/2}(\partial \Omega)} \stackrel{(2.21)}{\leq} C \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.23)$$

В силу (2.10) неравенство сохранится с мажорантой того же типа, если заменить здесь z^{ε} на $\widehat{v}^{\varepsilon}$. В итоге получим оценку

$$\|u^{\varepsilon} - \widehat{v}^{\varepsilon} + w^{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.24)$$

из которой следуют утверждения теорем 2.1 и 2.2, если доказана

ЛЕММА 2.4. Для решения задачи (2.19) выполнены оценки

$$\|w^{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|w^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.25)$$

где c_0 – константа того же типа, что в (1.12).

Доказательство этой леммы вынесено в § 3.

Представляет интерес следующее

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Для разности решений задач (2.1) и (2.9) верна оценка

$$\|u^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.26)$$

где c_0 – константа того же типа, что в (1.12).

Действительно, из (2.23) и L^2 -оценки (2.25) сразу вытекает (2.26).

2.4. Операторные уравнения в $\tilde{L}^2(\Omega)$. Вернемся к задачам (1.1) и (1.8). Их можно записать как операторные уравнения в $L^2(\Omega)$ резольвентного типа:

$$\mathcal{A}_{\varepsilon,N}u^\varepsilon + u^\varepsilon = f + u^\varepsilon =: F^\varepsilon, \quad (2.27)$$

$$\mathcal{A}_N u + u = f + u =: F. \quad (2.28)$$

“Промежуточным” для этих двух уравнений можно считать уравнение

$$\mathcal{A}_N U^\varepsilon + U^\varepsilon = F^\varepsilon. \quad (2.29)$$

Из энергетических оценок для решений u^ε и u следуют неравенства

$$\|F^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|f + u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|F\|_{L^2(\Omega)} = \|f + u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.30)$$

Кроме того, эллиптическая оценка типа (1.10) для уравнения (2.29) дает

$$\|U^\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|F^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(2.30)}{\leq} c\|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.31)$$

Теперь докажем наш основной результат – L^2 -оценку (1.12), а затем H^1 -оценку (1.24). По теореме 2.1

$$\|u^\varepsilon - U^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0\varepsilon\|F^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(2.30)}{\leq} c\varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.32)$$

Кроме того, из соотношений

$$\mathcal{A}_N(U^\varepsilon - u) + (U^\varepsilon - u) \stackrel{(2.28), (2.29)}{=} F^\varepsilon - F \stackrel{(2.27), (2.28)}{=} u^\varepsilon - u$$

выводим сначала условие ортогональности

$$\int_{\Omega} (U^\varepsilon - u) dx = 0,$$

а затем в силу неравенства Пуанкаре оценку

$$\|U^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 - \delta)\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.33)$$

с некоторой константой $\delta \in (0, 1)$, не зависящей от ε . В самом деле, из энергетического равенства для $v = U^\varepsilon - u$ последовательно получаем

$$\begin{aligned} \lambda\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|v\|_{L^2(\Omega)}\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)}, \\ (\lambda c_P^{-1} + 1)\|v\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

откуда следует (2.33), если положить $1 - \delta = (\lambda c_P^{-1} + 1)^{-1}$.

Тогда по неравенству треугольника

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} &\stackrel{(2.32), (2.33)}{\leq} c\varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)} + (1 - \delta)\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} &\leq c\delta^{-1}\varepsilon\|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

и искомая L^2 -оценка получена.

Приступим к выводу H^1 -оценки (1.24). В силу эллиптической оценки типа (1.10) имеем

$$\|U^\varepsilon - u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|F^\varepsilon - F\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(2.27), (2.28)}{=} C \|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(1.12)}{\leq} c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.34)$$

Важно, что L^2 -оценка (1.12) уже доказана.

Обозначим через $\tilde{v}^\varepsilon$ приближение, построенное согласно формулам (1.21), (1.22) по функции U^ε (вместо u) – решению задачи (2.29). Тогда по теореме 2.2

$$\|u^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|F^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(2.31)}{\leq} c_0 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.35)$$

Учитывая структуру функций $\widehat{v}^\varepsilon$ и $\tilde{v}^\varepsilon$, по лемме 1.4 заключаем о близости двух приближений в H^1 -норме, а именно

$$\|\widehat{v}^\varepsilon - \tilde{v}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|u - U^\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \stackrel{(2.34)}{\leq} c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.36)$$

В итоге из (2.35), (2.36) следует искомая оценка погрешности

$$\|u^\varepsilon - \widehat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

§ 3. Поправочное слагаемое

Изучим поправочное слагаемое из оценки (2.24), введенное как решение задачи (2.19). Наша цель – доказать H^1 - и L^2 -оценки (2.25).

3.1. H^1 -оценка. Доказательство оценки разбиваем на несколько этапов.

1°. Тожество (2.17) для решения задачи (2.19) имеет вид

$$\int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \cdot \nabla \varphi + w^\varepsilon \varphi) dx = \int_{\partial\Omega} \eta^\varepsilon \varphi d\Gamma, \quad \varphi \in H^1(\Omega).$$

Отсюда с учетом (2.20) и интегрального тождества для решения задачи (2.2) запишем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \cdot \nabla \varphi + w^\varepsilon \varphi) dx &= \int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla \widehat{v}^\varepsilon \cdot \nabla \varphi + \widehat{v}^\varepsilon \varphi - f \varphi) dx, \\ \int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla w^\varepsilon \cdot \nabla \varphi + w^\varepsilon \varphi) dx &= \int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla \widehat{v}^\varepsilon - a^0 \nabla u) \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} (\widehat{v}^\varepsilon - u) \varphi dx, \quad \varphi \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.1)$$

и надо оценить должным образом оба слагаемых из правой части (3.1).

Используя леммы 1.4 и 1.5 и свойства функций N , M , u , легко получить, что

$$\|\widehat{v}^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.2)$$

Для вывода H^1 -оценки (2.25) остается оценить подходящим образом содержащий

$$\widehat{R}^\varepsilon := a^\varepsilon \nabla \widehat{v}^\varepsilon - a^0 \nabla u \quad (3.3)$$

интеграл из (3.1), а именно

$$\widehat{J}^\varepsilon(\varphi) := \int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla \widehat{v}^\varepsilon - a^0 \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx. \quad (3.4)$$

ЛЕММА 3.1. Для функционала $\widehat{J}^\varepsilon(\varphi)$, определенного в (3.4), выполнена оценка

$$|\widehat{J}^\varepsilon(\varphi)| \leq c_0 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.5)$$

где c_0 – константа того же типа, что в (1.12).

Доказательство леммы дано в пп. 2°–4°.

2°. Попробуем доказать оценку (3.5), взяв в (3.4) вместо $\widehat{R}^\varepsilon$ выражение

$$R^\varepsilon := a^\varepsilon \nabla v^\varepsilon - a^0 \nabla u, \quad (3.6)$$

где v^ε – обычное первое приближение из (1.23).

Запишем

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon N^j(y) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) + \varepsilon^2 M^j(y, z) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial}{\partial y_j} N^k(y) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} u(x),$$

$$y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad z = \frac{x}{\varepsilon^2},$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до d . Вычисляя градиент $\nabla v^\varepsilon(x)$, имеем

$$\begin{aligned} \nabla v^\varepsilon(x) &= \nabla u(x) + \nabla N^j(y) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) + \nabla_z M^j(y, z) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial}{\partial y_j} N^k(y) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} u(x) \\ &\quad + \varepsilon N^j(y) \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla u(x) + \varepsilon \nabla_y \left[M^j(y, z) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial}{\partial y_j} N^k(y) \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_k} u(x) \\ &\quad + \varepsilon^2 M^j(y, z) \left(\delta_{jk} + \frac{\partial}{\partial y_j} N^k(y) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \nabla u(x) \\ &= (I + \nabla N) \nabla u + \nabla_z M (I + \nabla N) \nabla u + \dots = (I + \nabla_z M) (I + \nabla N) \nabla u + \dots, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где многоточие скрывает члены порядка $O(\varepsilon)$ и выше, откуда

$$\begin{aligned} R^\varepsilon &= a^\varepsilon \nabla v^\varepsilon - a^0 \nabla u \\ &= a(y, z) (I + \nabla_z M) (I + \nabla N) \nabla u \mp \widehat{a}(y) (I + \nabla N) \nabla u - a^0 \nabla u + \dots, \\ R^\varepsilon &= [a(I + \nabla_z M) - \widehat{a}] (I + \nabla N) \nabla u + [\widehat{a}(I + \nabla N) - a^0] \nabla u + r_\varepsilon^1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

с остаточным членом (см. (3.7))

$$r_\varepsilon^1 = \varepsilon a^\varepsilon \nabla^2 u N + \varepsilon a^\varepsilon \nabla_y [(I + \nabla N) M] \nabla u + \varepsilon^2 a^\varepsilon \nabla^2 u [(I + \nabla N) M]. \quad (3.9)$$

Проанализируем структуру вектора R_ε с учетом соотношений (1.16)–(1.20).

Заметим, что столбцы матрицы $\widehat{a}(I + \nabla N) - a^0$ образуют 1-периодические векторы

$$g^j(y) = \widehat{a}(e^j + \nabla N^j) - a^0 e^j, \quad j = 1, \dots, d,$$

каждый из которых соленоидален и имеет среднее $\langle g^j \rangle = 0$; см. (1.19) и (1.20). Известно представление таких векторов (см. [20; гл. I, § 1])

$$g^j(y) = \operatorname{div}_y G^j(y), \quad G^j \in H^1(Y) - \text{кососимметрическая матрица}, \quad (3.10)$$

$$\|G^j\|_{H^1(Y)} \leq C \|g^j\|_{L^2(Y)} \leq c, \quad c = c(d, \lambda).$$

Тогда второе слагаемое в сумме (3.8) записываем как

$$g^j(y) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) = (\operatorname{div}_y G^j(y)) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x)$$

$$= \varepsilon \operatorname{div} \left(G^j(y) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) - \varepsilon G^j(y) \nabla \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Введем θ^ε – срезающую функцию в окрестности границы $\Gamma = \partial\Omega$ такую, что

$$\theta^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \operatorname{supp} \theta^\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon, \quad 0 \leq \theta^\varepsilon \leq 1, \quad \theta^\varepsilon|_{\Gamma_{\varepsilon/2}} = 1, \quad \varepsilon |\nabla \theta^\varepsilon| \leq c, \quad (3.11)$$

где ε -окрестность границы Γ обозначена через Γ_ε . Тогда функция $1 - \theta^\varepsilon$ обращается в нуль в некоторой окрестности границы $\partial\Omega$, и ввиду кососимметричности матрицы $G^j(y)$ вектор

$$\operatorname{div}_x \left((1 - \theta^\varepsilon(x)) G^j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right)$$

обладает следующим свойством соленоидальности:

$$\int_\Omega \operatorname{div} \left((1 - \theta^\varepsilon(x)) G^j \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx$$

$$= - \int_\Omega ((1 - \theta^\varepsilon) G^j \cdot \nabla^2 \varphi) \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega). \quad (3.12)$$

Аналогично, каждый столбец матрицы $a(I + \nabla_z M) - \widehat{a}$ (см. (3.8)) образует вектор

$$p^j(y, z) = a(y, z)(e^j + \nabla_z M^j(y, z)) - \widehat{a}(y)e^j, \quad j = 1, \dots, d, \quad (3.13)$$

который соленоидален по z и имеет среднее $\langle p^j(y, \cdot) \rangle = 0$; см. (1.16) и (2.36). Так же, как в (3.10), имеем представление

$$p^j(y, z) = \operatorname{div}_z P^j(y, z), \quad P^j(y, \cdot) \in H^1(Z) - \text{кососимметрическая матрица},$$

$$\|P^j(y, \cdot)\|_{H^1(Z)} \leq C \|p^j(y, \cdot)\|_{L^2(Z)} \leq c, \quad c = c(d, \lambda). \quad (3.14)$$

По построению (см. (3.13)) вектор $p^j(y, z)$ липшицев по y со значениями в $L_{\text{per}}^2(Z)^d$ ввиду соответствующих свойств функций $a(y, z)$, $\widehat{a}(y)$ и $M(y, z)$ (см. (1.2) и лемму 1.2). Это свойство липшицевости наследуется матрицей $P^j(y, z)$, поскольку согласно предъявленной в [20; гл. I, § 1] конструкции отображение $p^j(y, z) \rightarrow P^j(y, z)$ представляет собой ограниченный оператор из $L_{\text{per}}^2(Z)^d$ в $L_{\text{per}}^2(Z)^{d \times d}$. Как следствие липшицевости $P^j(y, z)$ по y для почти всех y существует градиент $\nabla_y P^j(y, z)$ с оценкой

$$\|\nabla_y P^j(y, \cdot)\|_{L^2(Z)} \leq c, \quad c = c(\lambda, c_L). \quad (3.15)$$

В силу (3.14) первое слагаемое в сумме (3.8) записывается как

$$\begin{aligned} p^j(y, z)\zeta_j &= (\operatorname{div}_z P^j(y, z))\zeta_j \\ &= \varepsilon^2 \operatorname{div}(P^j(y, z)\zeta_j) - \varepsilon \operatorname{div}_y(P^j(y, z)\zeta_j) - \varepsilon^2 P^j(y, z)\nabla_x \zeta_j, \\ \zeta_j &= \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j} N(y) \cdot \nabla u(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad z = \frac{x}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Ввиду кососимметричности матрицы P^j вектор

$$\operatorname{div}_x \left((1 - \theta^\varepsilon(x)) P^j \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2} \right) \zeta_j \right)$$

обладает свойством соленоидальности, аналогичным (3.12), т.е.

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \left((1 - \theta^\varepsilon(x)) P^j \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x}{\varepsilon^2} \right) \zeta_j \right) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega). \quad (3.16)$$

В итоге представление (3.8) записываем как

$$R^\varepsilon = r_\varepsilon^1 + r_\varepsilon^2 + r_\varepsilon^3, \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} r_\varepsilon^2 &= \varepsilon \operatorname{div} \left[G^j(y) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right] - \varepsilon G^j(y) \nabla \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}, \\ r_\varepsilon^3 &= \varepsilon^2 \operatorname{div} \left[P^j(y, z) \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial N(y)}{\partial y_j} \cdot \nabla u(x) \right) \right] \\ &\quad - \varepsilon \operatorname{div}_y \left[P^j(y, z) \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial N(y)}{\partial y_j} \cdot \nabla u(x) \right) \right] \\ &\quad - \varepsilon^2 P^j(y, z) \nabla_x \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial N(y)}{\partial y_j} \cdot \nabla u(x) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Здесь наиболее трудными для нашей оценки являются слагаемые, содержащие оператор дивергенции div . Даже формально малость их находится под вопросом, не говоря уже об оценке нужного порядка.

В силу (3.17), (3.18) выводим

$$J^\varepsilon(\varphi) := \int_{\Omega} R^\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} r_\varepsilon^i \cdot \nabla \varphi dx, \quad (3.19)$$

а если учесть (3.12) и (3.16), то

$$J^\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega} (r_\varepsilon^1 + \tilde{r}_\varepsilon^2 + \tilde{r}_\varepsilon^3) \cdot \nabla \varphi dx \leq (\|r_\varepsilon^1\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{r}_\varepsilon^2\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{r}_\varepsilon^3\|_{L^2(\Omega)}) \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.20)$$

Здесь член $\tilde{r}_\varepsilon^2$ получается из r_ε^2 , если в его составляющее с оператором div в квадратную скобку внести множителем срезающую функцию $\theta^\varepsilon(x)$ из (3.11). Аналогичной срезкой из r_ε^3 получается член $\tilde{r}_\varepsilon^3$ (см. (3.18)).

Произведенные выше преобразования были формальными. Они имеют смысл, например, если все функции, участвующие в определении $v^\varepsilon(x)$, достаточно гладки, скажем, класса $C^\infty(\bar{\Omega})$. Но даже в этой ситуации структура

стоящих в правой части (3.20) функций r_ε^i такова, что не представляется возможным отсюда получить искомую оценку вида (3.5). Покажем, как обойти это препятствие.

3°. Первое приближение $v^\varepsilon(x)$ из (1.23) имеет структуру суммы

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon k_{1,\varepsilon}(x, y) + \varepsilon^2 k_{2,\varepsilon}(x, y, z), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad z = \frac{x}{\varepsilon^2}. \quad (3.21)$$

Смещенным первым приближением будет

$$\begin{aligned} v_{\omega,\sigma}^\varepsilon(x) &= u(x') + \varepsilon k_{1,\varepsilon}(x', y') + \varepsilon^2 k_{2,\varepsilon}(x', y', z), \\ x' &= x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma, \quad y' = \frac{x}{\varepsilon} - \varepsilon\sigma, \quad z = \frac{x}{\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ему соответствуют

$$\begin{aligned} R_{\omega,\sigma}^\varepsilon(x) &= a_\sigma^\varepsilon(x) \nabla v_{\omega,\sigma}^\varepsilon(x) - a^0 \nabla u(x'), \quad a_\sigma^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon} - \varepsilon\sigma, \frac{x}{\varepsilon^2}\right), \\ J_{\omega,\sigma}^\varepsilon(\varphi) &= \int_{\Omega} R_{\omega,\sigma}^\varepsilon(x) \cdot \nabla \varphi \, dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Те же преобразования, что в п. 2°, приводят к оценке типа (3.20) со смещенными аргументами x' и y' , указанными в (3.22), в остаточных членах $r_\varepsilon^1, \tilde{r}_\varepsilon^2, \tilde{r}_\varepsilon^3$, а именно

$$\begin{aligned} J_{\omega,\sigma}^\varepsilon(\varphi) &= \int_{\Omega} (r_{\varepsilon,\omega,\sigma}^1 + \tilde{r}_{\varepsilon,\omega,\sigma}^2 + \tilde{r}_{\varepsilon,\omega,\sigma}^3) \cdot \nabla \varphi \, dx \\ &\leq (\|r_{\varepsilon,\omega,\sigma}^1\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{r}_{\varepsilon,\omega,\sigma}^2\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{r}_{\varepsilon,\omega,\sigma}^3\|_{L^2(\Omega)}) \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

После интегрирования этой оценки по $\omega \in Y$ и $\sigma \in Z$, учитывая структуру остаточных членов, выводим неравенство

$$\begin{aligned} \int_{Y \times Z} J_{\omega,\sigma}^\varepsilon(\varphi) \, d\omega \, d\sigma &\leq \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\times \sum_j \varepsilon^{\alpha_j} \left(\int_{\Omega \times Y \times Z} \left| b_j\left(\frac{x}{\varepsilon} - \varepsilon\sigma, \frac{x}{\varepsilon^2}\right) U_j(x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma) \right|^2 \, dx \, d\omega \, d\sigma \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь показатель α_j может принимать значение 2 или 1, или 0; функции $b_j(y, z)$ формируются из $N(y)$, $M(y, z)$, $G(y)$, $P(y, z)$ и их производных, а функции $U_j(x)$ – из $\nabla u(x)$, $\nabla^2 u(x)$, умноженных, быть может, на ограниченные функции $\theta^\varepsilon(x)$ или $\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon(x)$ (см. формулы (3.10)–(3.20)). Например, стоящее в (3.24) выражение

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{\varepsilon,\omega,\sigma}^2(x) &= \varepsilon \operatorname{div}_x \left[\theta^\varepsilon(x') G^j(y') \frac{\partial u(x')}{\partial x_j} \right] - \varepsilon G^j(y') \nabla \frac{\partial u(x')}{\partial x_j}, \\ x' &= x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma, \quad y' = \frac{x}{\varepsilon} - \varepsilon\sigma, \end{aligned}$$

дает вклад в сумму из (3.25) в виде интегралов

$$\int_{\Omega \times Y \times Z} \left| g^j(y') \theta^\varepsilon(x') \frac{\partial u(x')}{\partial x_j} \right|^2 dx d\omega d\sigma, \quad (3.26)$$

$$\int_{\Omega \times Y \times Z} \left| G^j(y')(\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon(x')) \frac{\partial u(x')}{\partial x_j} \right|^2 dx d\omega d\sigma,$$

$$\int_{\Omega \times Y \times Z} \left| G^j(y') \nabla \frac{\partial u(x')}{\partial x_j} \right|^2 dx d\omega d\sigma. \quad (3.27)$$

В сумме (3.25) интеграл (3.27) стоит с множителем ε , в то время как интегралы (3.26) такого множителя не имеют. Однако за счет вхождения ограниченных срезающих функций θ^ε или $\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon$ сами интегралы (3.26) оказываются порядка $O(\varepsilon)$ в силу так называемого неравенства для следа

$$\|\varphi\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)}^2 \leq c\varepsilon \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad c = \text{const}(d, \Omega). \quad (3.28)$$

Например,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times Y \times Z} \left| G^j(y')(\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon(x')) \frac{\partial u(x')}{\partial x_j} \right|^2 dx \\ & \leq \max(\varepsilon |\nabla \theta^\varepsilon|) \int_{\Gamma_{2\varepsilon} \times Y \times Z} \left| G^j(y') \frac{\partial u(x')}{\partial x_j} \right|^2 dx \\ & \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Gamma_{3\varepsilon})}^2 \stackrel{(3.28)}{\leq} C\varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

где второе неравенство получено с помощью аргументов из доказательства леммы 1.4 (см. цепочку соотношений (1.30)), а последнее неравенство – с помощью оценки типа (1.10).

Интеграл (3.27) оценивается на основе аналогичных соображений и имеет мажоранту вида $c_0 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2$.

В итоге, оценив подобным образом каждое слагаемое в (3.25), получим общую для всей правой части (3.25) мажоранту вида $c_0 \sqrt{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}$.

4°. Теперь изучим левую часть неравенства (3.25). Имеет место представление

$$\begin{aligned} \int_{Y \times Z} J_{\omega, \sigma}^\varepsilon(\varphi) d\omega d\sigma &= \int_{Y \times Z} \left(\int_{\Omega} R_{\omega, \sigma}^\varepsilon \cdot \nabla \varphi dx \right) d\omega d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{Y \times Z} R_{\omega, \sigma}^\varepsilon d\omega d\sigma \right) \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} (\hat{R}^\varepsilon + O(\varepsilon)) \cdot \nabla \varphi dx, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где $\hat{R}^\varepsilon$ определено в (3.3). Здесь и далее через $O(\varepsilon)$ обозначаем погрешность, для которой справедлива оценка в L^2 -норме с мажорантой вида $c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}$, что в случае (3.29) означает

$$\left\| \int_{Y \times Z} R_{\omega, \sigma}^\varepsilon d\omega d\sigma - \hat{R}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.30)$$

Докажем неравенство (3.30). В силу (3.21)–(3.23) запишем

$$\begin{aligned} \int_{Y \times Z} R_{\omega, \sigma}^{\varepsilon} d\omega d\sigma &= \int_{Y \times Z} a_{\sigma}^{\varepsilon}(x) \{ \nabla u(x') + \varepsilon \nabla(N(y') \cdot \nabla u(x')) \\ &\quad + \varepsilon^2 \nabla[M(y', z) \cdot (I + \nabla N(y')) \nabla u(x')] \} d\omega d\sigma - a^0 \int_{Y \times Z} \nabla u(x') d\omega d\sigma. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Укажем дальнейшие упрощения. Прежде всего, в силу свойства липшицевости (1.2) матрицу $a_{\sigma}^{\varepsilon}(x) = a(x/\varepsilon - \varepsilon\sigma, x/\varepsilon^2)$ заменим на $a^{\varepsilon}(x) = a(x/\varepsilon, x/\varepsilon^2)$, так что первый интеграл из правой части (3.31) принимает вид

$$\int_{Y \times Z} a_{\sigma}^{\varepsilon}(x) \{ \dots \} d\omega d\sigma = a^{\varepsilon}(x) \int_{Y \times Z} \{ \dots \} d\omega d\sigma + O(\varepsilon);$$

для оценки погрешности используем лемму 1.4 и оценку (1.10). Здесь

$$\int_{Y \times Z} \{ \dots \} d\omega d\sigma = \int_{Y \times Z} \nabla u(x') d\omega d\sigma + \varepsilon \nabla K_{\varepsilon} = ((\nabla u)_{\varepsilon})_{\varepsilon^2} + \varepsilon \nabla K_{\varepsilon},$$

где K_{ε} – корректор из (1.21), (1.22), кроме того,

$$\int_{Y \times Z} \nabla u(x') d\omega d\sigma = \int_Z \left(\int_Y \nabla u(x - \varepsilon\omega - \varepsilon^2\sigma) d\omega \right) d\sigma = ((\nabla u)_{\varepsilon})_{\varepsilon^2}(x)$$

есть двукратное среднее по Стеклову от градиента ∇u . Напомним, что среднее по Стеклову $(\varphi)_{\delta}$ от функции $\varphi \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$ определяется как интеграл

$$(\varphi)_{\delta}(x) = \int_Y \varphi(x - \delta\omega) d\omega.$$

Известны свойства среднего

$$\nabla(\varphi)_{\delta} = (\nabla\varphi)_{\delta}, \quad \|(\varphi)_{\delta}\| \leq \|\varphi\|, \quad \|(\varphi)_{\delta} - \varphi\| \leq c(d)\delta\|\nabla\varphi\| \quad \forall \delta > 0, \quad (3.32)$$

где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. Благодаря (3.32), а также оценке вида (1.10) имеем

$$((\nabla u)_{\varepsilon})_{\varepsilon^2} = \nabla u + O(\varepsilon).$$

Суммируя все упрощения, получаем

$$\begin{aligned} \int_{Y \times Z} R_{\omega, \sigma}^{\varepsilon} d\omega d\sigma &= a^{\varepsilon}(\nabla u + \varepsilon \nabla K_{\varepsilon}) - a^0 \nabla u + O(\varepsilon) \\ &\stackrel{(1.21)}{=} a^{\varepsilon} \nabla \hat{v}^{\varepsilon} - a^0 \nabla u + O(\varepsilon) \stackrel{(3.3)}{=} \hat{R}^{\varepsilon} + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

что и требуется для (3.30).

Итогом наших рассуждений в пп. 3° и 4° является вывод из (3.25) оценки (3.5). Вместе с тем доказаны лемма 3.1 и H^1 -оценка (2.25).

Фактически нами доказана более точная, чем (3.5), оценка, которая окажется весьма полезной при выводе L^2 -оценки (2.25).

ЛЕММА 3.2. Оценка (3.5) допускает следующее уточнение:

$$|\hat{J}^\varepsilon(\varphi)| \leq c_0 \|f\|_{L^2(\Omega)} (\sqrt{\varepsilon} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Gamma_{2\varepsilon})} + \varepsilon \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}), \quad (3.33)$$

где c_0 – константа того же типа, что в (1.12).

В самом деле, напомним, что в силу (3.29), (3.30)

$$\begin{aligned} \hat{J}^\varepsilon(\varphi) &= \int_{\Omega} \hat{R}^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{Y \times Z} J_{\omega, \sigma}^\varepsilon(\varphi) \, d\omega \, d\sigma + \int_{\Omega} O(\varepsilon) \cdot \nabla \varphi \, dx, \\ J_{\omega, \sigma}^\varepsilon(\varphi) &= \int_{\Omega} R_{\omega, \sigma}^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx, \end{aligned}$$

где последний функционал определен соотношениями (3.21)–(3.23). Записывая правую часть в неравенствах (3.24), (3.25), учтем вхождение ограниченных срезающих функций θ_ε или $\varepsilon \nabla \theta_\varepsilon$ в остаточные члены $\tilde{r}_{\varepsilon, \omega, \sigma}^i$. Тогда оценка (3.25) принимает уточненный вид

$$\begin{aligned} \int_{Y \times Z} J_{\omega, \sigma}^\varepsilon(\varphi) \, d\omega \, d\sigma &\leq \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Gamma_{2\varepsilon})} \\ &\times \sum_j \left(\int_{\Gamma_\varepsilon \times Y \times Z} \left| b_j \left(\frac{x}{\varepsilon} - \varepsilon \sigma, \frac{x}{\varepsilon^2} \right) \tilde{U}_j(x - \varepsilon \omega - \varepsilon^2 \sigma) \right|^2 \, dx \, d\omega \, d\sigma \right)^{1/2} \\ &+ \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \sum_j \varepsilon^{\alpha_j} \left(\int_{\Omega \times Y \times Z} \left| b_j \left(\frac{x}{\varepsilon} - \varepsilon \sigma, \frac{x}{\varepsilon^2} \right) U_j(x - \varepsilon \omega - \varepsilon^2 \sigma) \right|^2 \, dx \, d\omega \, d\sigma \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где показатель α_j может принимать значение 2 или 1, а функции $\tilde{U}_j$ содержат срезающие функции θ^ε или $\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon$. Далее работают прежние аргументы, которые приводят к оценке (3.33).

3.2. Оценка градиента решения в приграничном слое. Ранее систематически применялись следующие свойства решения усредненной задачи (2.2):

- (i) $u \in H^2(\Omega)$ с оценкой $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$;
- (ii) малость L^2 -нормы градиента решения в окрестности границы $\partial\Omega$ с оценкой

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla u|^2 \, dx \leq c\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Эти свойства предполагают повышенную регулярность границы $\partial\Omega$, просто липшицевости недостаточно.

Для исходной задачи (2.1) нет оснований ожидать, что выполняется свойство (i) – принадлежность градиента решения пространству $H^1(\Omega)$. Тем не менее наблюдается свойство (ii) – контролируемая L^2 -оценка градиента решения по слою Γ_ε . Здесь помимо повышенных требований на границу нужна липшицевость матрицы коэффициентов $a(y, z)$ по y (см. (1.2)). Словом, должны быть выполнены условия, при которых справедлива H^1 -оценка для погрешности первого приближения порядка $\sqrt{\varepsilon}$, т.е. оценка вида (1.24).

ЛЕММА 3.3. Пусть u^ε – решение задачи (2.1) в указанных выше предположениях. Тогда выполнена оценка

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx \leq c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.34)$$

где c_0 – константа того же типа, что в (1.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Взяв H^1 -приближение $\widehat{v}^\varepsilon$ к решению u^ε , воспользуемся оценкой (1.24), а также свойствами (i), (ii) решения усредненной задачи. Имеем

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &= (u^\varepsilon - \widehat{v}^\varepsilon) + \widehat{v}^\varepsilon \stackrel{(1.21)}{=} (u^\varepsilon - \widehat{v}^\varepsilon) + u + \varepsilon K_\varepsilon, \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx &\leq \int_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla(u^\varepsilon - \widehat{v}^\varepsilon)|^2 dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} |\nabla(\varepsilon K_\varepsilon)|^2 dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \|u^\varepsilon - \widehat{v}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \stackrel{(1.24)}{\leq} c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad I_2 \leq c \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ I_3 &\leq \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} (|\nabla u|^2 + \varepsilon^2 |\nabla^2 u|^2) dx \stackrel{(i), (ii)}{\leq} c(\varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

В оценке интеграла I_3 первое неравенство получено по лемме 1.4, и здесь снова важны свойство (i) для u , а также свойства участвующих в определении $\widehat{v}^\varepsilon$ функций N и M , перечисленные в лемме 1.2. Из приведенных выше соотношений следует неравенство (3.34).

3.3. L^2 -оценка. Исходим из определения нормы

$$\|w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \sup \left\{ \int_{\Omega} w^\varepsilon \Phi dx : \Phi \in L^2(\Omega), \|\Phi\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\}. \quad (3.35)$$

Для произвольной фиксированной $\Phi \in L^2(\Omega)$ рассмотрим краевую задачу Неймана

$$(A_\varepsilon + 1)\varphi^\varepsilon = \Phi \quad \text{в } \Omega, \quad \varphi^\varepsilon \in H^1(\Omega), \quad \partial_{\nu^\varepsilon} \varphi^\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (3.36)$$

Для решения φ^ε выполнены оценки (см. (2.18), (3.34))

$$\|\varphi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\Phi\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\nabla \varphi^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|\Phi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.37)$$

Записав интегральное тождество на пробной функции w^ε

$$\int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla \varphi^\varepsilon \cdot \nabla w^\varepsilon + \varphi^\varepsilon w^\varepsilon) dx = \int_{\Omega} \Phi w^\varepsilon dx,$$

выразим его левую часть через (3.1), вспоминая, что w^ε – решение задачи (2.19). Тогда с учетом обозначений (3.3), (3.4) получим

$$\int_{\Omega} \Phi w^\varepsilon dx = \int_{\Omega} [\widehat{R}^\varepsilon \cdot \nabla \varphi^\varepsilon + (\widehat{v}^\varepsilon - u)\varphi^\varepsilon] dx = \widehat{J}^\varepsilon(\varphi^\varepsilon) + \int_{\Omega} (\widehat{v}^\varepsilon - u)\varphi^\varepsilon dx. \quad (3.38)$$

Здесь

$$\int_{\Omega} (\widehat{v}^\varepsilon - u) \varphi^\varepsilon dx \leq \|\widehat{v}^\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(3.2), (3.37)}{\leq} c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\Phi\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} |\widehat{J}^\varepsilon(\varphi^\varepsilon)| &\stackrel{(3.33)}{\leq} c_0 \|f\|_{L^2(\Omega)} (\sqrt{\varepsilon} \|\nabla \varphi^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_{3\varepsilon})} + \varepsilon \|\nabla \varphi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\stackrel{(3.37)}{\leq} c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\Phi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

В итоге (3.35)–(3.40) дают требуемую L^2 -оценку поправочного слагаемого

$$\|w^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

§ 4. Оценки во внутренней области

4.1. Неравенство Каччопполи. Пусть Ω – липшицева область и Ω' – строго внутренняя подобласть области Ω , т.е. $\delta = \text{dist}(\partial\Omega, \Omega') > 0$. Известно неравенство Каччопполи

$$\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega')} \leq k_C \delta^{-1} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.1)$$

которое выполняется, если φ – решение эллиптического дивергентного уравнения, например, в следующем подходящем для нас случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\varphi \in H^1(\Omega)$ есть слабое решение уравнения

$$-\text{div } a^\varepsilon \nabla \varphi + c\varphi = 0, \quad c \geq 0,$$

в области Ω , т.е. удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \eta + c\varphi \eta) dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.2)$$

Тогда для φ справедливо неравенство (4.1) с константой k_C , зависящей только от постоянной эллиптичности λ из условия (1.3). Как следствие,

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega')} \leq (k_C \delta^{-1} + 1) \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем срезающую функцию

$$\theta \in C_0^\infty(\Omega), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad \theta|_{\Omega'} = 1, \quad \delta |\nabla \theta| \leq 2,$$

и рассмотрим тождество (4.2) на пробной функции $\eta = \theta^2 \varphi$, что возможно по соображениям замыкания. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a^\varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla (\theta^2 \varphi) + c\varphi (\theta^2 \varphi)) dx &= 0, \\ \int_{\Omega} (a^\varepsilon \theta^2 \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + c|\varphi \theta|^2) dx &= -2 \int_{\Omega} a^\varepsilon \theta \nabla \varphi \cdot (\varphi \nabla \theta) dx, \\ \lambda \int_{\Omega} |\theta \nabla \varphi|^2 dx &\leq \rho \int_{\Omega} |\theta \nabla \varphi|^2 dx + C_\rho \int_{\Omega} |a^\varepsilon \varphi \nabla \theta|^2 dx, \quad \rho > 0, \end{aligned}$$

откуда, взяв $\rho = \lambda/2$, выводим

$$\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\theta \nabla \varphi|^2 dx \leq C_{\rho} \lambda^{-2} \int_{\Omega} |\varphi \nabla \theta|^2 dx,$$

и по свойствам срезающей функции получаем неравенство (4.1).

4.2. Вывод H^1 -оценок в строго внутренней подобласти. Пусть область Ω и матрица a^{ε} таковы, что можно воспользоваться доказанными ранее оценками усреднения для краевых задач в области Ω .

Если u^{ε} и z^{ε} – решения задач (2.1) и (2.9) соответственно, то

$$(A_{\varepsilon} + 1)(u^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}) = 0 \quad \text{в } \Omega$$

и согласно предложению 4.1 для $\varphi = u^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}$ выполнено неравенство (4.3). Поэтому

$$\|u^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega')} \leq (k_C \delta^{-1} + 1) \|u^{\varepsilon} - z^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(2.26)}{\leq} (k_C \delta^{-1} + 1) c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\delta = \text{dist}(\partial\Omega, \Omega'),$$

для любой строго внутренней подобласти $\Omega' \subset \Omega$. В силу (2.10) замена z^{ε} на $\widehat{v}^{\varepsilon}$ не изменит характера мажоранты в этом неравенстве. Нами доказана

ТЕОРЕМА 4.2. *Для разности решения задачи (2.1) и первого приближения $\widehat{v}^{\varepsilon}$, определенного согласно (1.21), (1.22) по решению усредненной задачи (2.1), имеет место оценка*

$$\|u^{\varepsilon} - \widehat{v}^{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega')} \leq c_0 \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (4.4)$$

где константа c_0 зависит лишь от размерности d , постоянных λ и c_L из условий (1.2) и (1.3) и областей Ω и Ω' .

Аналогичное утверждение верно для задачи (1.1). Формулировку этого утверждения, как и его доказательство, использующее аргументы п. 2.4, опускаем. Операторная форма утверждения была приведена в § 1 (см. оценку (1.15)).

§ 5. Некоторые замечания

1) Мы подробно изучаем здесь двухмасштабную задачу с осцилляциями в коэффициентах, имеющими периоды ε и ε^2 . Оценки типа (1.12) и (1.24) можно получить и в случае многомасштабной матрицы

$$a^{\varepsilon}(x) = a(y_1, \dots, y_n), \quad y_1 = \frac{x}{\varepsilon}, \dots, y_n = \frac{x}{\varepsilon^n}, \quad n > 2, \quad (5.1)$$

где $a(y_1, \dots, y_n)$ периодическая по каждой переменной $y_j \in \mathbb{R}^d$ с ячейкой периодичности Y_j ; Y_j ($j = 1, \dots, d$) – параллелепипеды, не обязательно совпадающие. При $n = 2$ требовалась измеримость по y_2 и липшицевость по y_1 функции $a(y_1, y_2)$. При $n > 2$ функция $a(y_1, \dots, y_n)$ должна быть липшицевой по каждой переменной y_j , $j \neq n$, и измеримой по y_n . Как строится первое

приближение в общем многомасштабном случае, объяснено в [14]. Вместо степеней ε в (5.1) можно брать произвольные бесконечно малые $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, разделенные по порядку, что означает

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\zeta_j}{\zeta_{j-1}} = 0, \quad 1 < j \leq n.$$

При этом мажоранта в оценке (1.12) зависит от самих бесконечно малых и от их степеней разделенности. Например, для $n = 2$ мажорантой будет

$$c_0 \max \left\{ \zeta_1, \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right\} \|f\|_{L^2}.$$

2) При более сильных, чем у нас, предположениях о регулярности матрицы a и правой части f для решения уравнений с оператором A_ε принято брать в качестве первого приближения (см., например, [18])

$$v^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon N(y) \cdot \nabla u(x) + \varepsilon^2 M(y, z) \cdot (I + \nabla N(y)) \nabla u(x),$$

$$y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad z = \frac{x}{\varepsilon^2}.$$

В наших условиях принадлежность v^ε пространству $H^1(\Omega)$ не гарантирована. Наибольшие проблемы связаны с градиентом второй компоненты корректора, содержащим такие “трудные” члены, как

$$\nabla_z M(y, z)(I + \nabla N(y)) \nabla u(x), \quad \varepsilon \nabla_y M(y, z)(I + \nabla N(y)) \nabla u(x).$$

Принадлежность последних пространству $L^2(\Omega)$ ниоткуда не следует. Более того, если уравнение (1.1) векторное (например, это система теории упругости), то функция вида (1.23) сама не из $L^2(\Omega)$. Таких проблем нет для приближения $\widehat{v}^\varepsilon$.

3) В скалярном случае функции N , M , ∇N ограничены в L^∞ -норме, что является следствием обобщенного принципа максимума и эллиптических оценок в соболевских нормах $\|\cdot\|_{2,q}$ (см., например, [23; гл. III, теоремы 13.1 и 15.1]). Используя эти свойства ограниченности, можно несколько упростить $\widehat{v}^\varepsilon$ (см. подробности в [24]). Но мы отдаем предпочтение методам, пригодным одновременно для уравнений скалярных и векторных. Поэтому избегаем всякого упрощения, основанного на специфике скалярного случая.

Список литературы

- [1] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, “Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения”, *Алгебра и анализ*, **15**:5 (2003), 1–108; англ. пер.: M. Sh. Birman, T. A. Suslina, “Second order periodic differential operators. Threshold properties and homogenization”, *St. Petersburg Math. J.*, **15**:5 (2004), 639–714.
- [2] В. В. Жиков, “Об операторных оценках в теории усреднения”, *Докл. РАН*, **403**:3 (2005), 305–308; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On operator estimates in homogenization theory”, *Dokl. Math.*, **72**:1 (2005), 534–538.

- [3] В. В. Жиков, “О некоторых оценках из теории усреднения”, *Докл. РАН*, **406**:5 (2006), 597–601; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Some estimates from homogenization theory”, *Dokl. Math.*, **73**:1 (2006), 96–99.
- [4] С. Е. Пастухова, “О некоторых оценках из усреднения задач теории упругости”, *Докл. РАН*, **406**:5 (2006), 604–608; англ. пер.: S. E. Pastukhova, “Some estimates from homogenized elasticity problems”, *Dokl. Math.*, **73**:1 (2006), 102–106.
- [5] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “On operator estimates for some problems in homogenization theory”, *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:4 (2005), 515–524.
- [6] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:2 (2006), 224–237.
- [7] В. В. Жиков, С. В. Тихомирова, “Об операторных оценках в несимметрических задачах усреднения”, *Судзальская конференция – 1*, Современная математика и ее приложения, **33**, Ин-т кибернетики НАН Грузии, Тбилиси, 2005, 124–128.
- [8] G. Cardone, S. E. Pastukhova, V. V. Zhikov, “Some estimates for non-linear homogenization”, *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5), **29**:1 (2005), 101–110.
- [9] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “Усреднение вырождающихся эллиптических уравнений”, *Сиб. матем. журнал*, **49**:1 (2008), 101–124; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “Homogenization of degenerate elliptic equations”, *Siberian Math. J.*, **49**:1 (2008), 80–101.
- [10] С. Е. Пастухова, С. В. Тихомирова, “Эллиптическое уравнение с несимметрической матрицей. Усреднение “вариационных решений””, *Матем. заметки*, **81**:4 (2007), 631–635; англ. пер.: S. E. Pastukhova, S. V. Tikhomirova, “Elliptic equation with nonsymmetric matrix: averaging of the “variational solutions””, *Math. Notes*, **81**:4 (2007), 560–565.
- [11] С. Е. Пастухова, “Операторные оценки в нелинейных задачах повторного усреднения”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, МАИК, М., 2008, 220–233; англ. пер.: S. E. Pastukhova, “Operator estimates in nonlinear problems of reiterated homogenization”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **261** (2008), 214–228.
- [12] С. Е. Пастухова, Р. Н. Тихомиров, “Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения”, *Докл. РАН*, **415**:3 (2007), 304–309; англ. пер.: S. E. Pastukhova, R. N. Tikhomirov, “Operator estimates in reiterated and locally periodic homogenization”, *Dokl. Math.*, **76**:1 (2007), 548–553.
- [13] S. E. Pastukhova, “Estimates in homogenization of parabolic equations with locally periodic coefficients”, *Asymptot. Anal.*, **66**:3-4 (2010), 207–228.
- [14] С. Е. Пастухова, “Аппроксимация экспоненты оператора диффузии с многомасштабными коэффициентами”, *Функц. анализ и его прил.*, **48**:3 (2014), 34–51; англ. пер.: S. E. Pastukhova, “Approximation of the exponential of a diffusion operator with multiscale coefficients”, *Funct. Anal. Appl.*, **48**:3 (2014), 183–197.
- [15] С. Е. Пастухова, “Задача Дирихле для эллиптических уравнений с многомасштабными коэффициентами: операторные оценки усреднения”, Пробл. матем. анализ, **71**, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2013, 123–136; англ. пер.: S. E. Pastukhova, “The Dirichlet problem for elliptic equations with multiscale coefficients. Operator estimates for homogenization”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **193**:2 (2013), 283–300.
- [16] T. A. Suslina, “Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2 -operator error estimates”, *Mathematika*, **59**:2 (2013), 463–476.
- [17] T. A. Suslina, “Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients”, *SIAM J. Math. Anal.*, **45**:6 (2013), 3453–3493.
- [18] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., **5**, North Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978, xxiv+700 pp.

- [19] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984, 352 с.; англ. пер.: N. Bakhvalov, G. Panasenko, *Homogenisation: averaging processes in periodic media. Mathematical problems in the mechanics of composite materials*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **36**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, xxxvi+366 pp.
- [20] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993, 464 с.; англ. пер.: V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994, xii+570 pp.
- [21] G. Griso, “Interior error estimate for periodic homogenization”, *Anal. Appl. (Singap.)*, **4**:1 (2006), 61–79.
- [22] С. Е. Kenig, Fanghua Lin, Zhongwei Shen, “Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **203**:3 (2012), 1009–1036.
- [23] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964, 538 с.; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, New York–London, 1968, xviii+495 pp.
- [24] S. Pastukhova, R. Tikhomirov, *On homogenization estimates in Neuman boundary value problem for an elliptic equation with multiscale coefficients*, [arXiv: abs/1512.06396](https://arxiv.org/abs/1512.06396).

Светлана Евгеньевна Пастухова

(Svetlana E. Pastukhova)

Московский технологический университет

(МИРЭА)

E-mail: pas-se@yandex.ru

Поступила в редакцию

04.02.2015 и 24.05.2015