Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Критерии непрерывности конечномерных представлений связных локально компактных групп, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 9, 145–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm849>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 05:23:35

УДК 512.546+517.987

А. И. Штерн

Критерии непрерывности конечномерных представлений связных локально компактных групп

Получены необходимые и достаточные условия непрерывности конечномерных (алгебраических) представлений связных локально компактных групп. А именно показано, что конечномерное представление связной локально компактной группы непрерывно в том и только том случае, если колебание этого представления в единице группы меньше 2.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

Условия непрерывности гомоморфизмов и представлений топологических групп и полугрупп изучались, как правило, в предположении измеримости в том или ином смысле рассматриваемых отображений. Однако условие измеримости отображения является ограничительным, и проверка этого условия не всегда проста [1]. В связи с этим представляют интерес условия непрерывности на основе оценки величины сильной вариации в точке. Изучение этих условий начато в [1], где постановка задачи мотивируется и подробно обсуждается (см. также [2]–[4]). В частности, известен соответствующий критерий непрерывности представлений локально компактных групп ограниченными линейными операторами в банаховом пространстве. Чтобы сформулировать его, напомним основное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если G – топологическая группа, S – ее (алгебраическое) представление в нормированном пространстве E , а E^* – пространство, сопряженное к E , то *слабая вариация* $\omega(S) \geq 0$ представления S в единичном элементе e группы G (или, кратко, *слабая вариация представления* S) определяется как верхняя грань по всем векторам $\xi \in E$ единичной длины и всем функционалам $f \in E^*$ единичной нормы от нижних граней величин $\sup_{g \in U} |f(S(g)\xi - \xi)|$ по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$,

$$\omega(S) = \sup_{\substack{\xi \in E, \|\xi\| \leq 1 \\ f \in E^*, \|f\| \leq 1}} \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} |f(S(g)\xi - \xi)|. \quad (1)$$

Положим также

$$v(S) = \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} \|S(g) - 1_E\|. \quad (2)$$

В терминах слабого колебания (1) общий критерий непрерывности банаховых представлений локально компактной группы выглядит следующим образом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00574).

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть G – локально компактная группа, S – ее (алгебраическое) представление в банаховом пространстве E непрерывными линейными операторами. Следующие условия равносильны:

- 1) представление S непрерывно в сильной операторной топологии;
- 2) $\omega(S) < 1$.

Таким образом, если слабое колебание представления локально компактной группы в банаховом пространстве удовлетворяет неравенству в условии 2) теоремы 1, то это колебание равно нулю и представление непрерывно.

Возникает естественный вопрос о возможности улучшения величины постоянной 1, обеспечивающей непрерывность представления. Очевидный пример унитарного представления недискретной топологической группы G сдвигами в пространстве $l^2(G)$ показывает, что, вообще говоря, нельзя заменить условие $\omega(S) < 1$ в п. 2) теоремы 1 условием $\omega(S) < q$ при $q > 1$. Как мы знаем, для конечномерных представлений общих локально компактных групп можно заменить условие $\omega(S) < 1$ в п. 2) теоремы 1 условием $\omega(S) < \sqrt{3}$ (см. [1]). Мы увидим, что для представлений связных локально компактных групп в конечномерных нормированных пространствах можно увеличить постоянную $\sqrt{3}$ до 2 (ср. [3]). Напомним (см. [1]), что А. С. Мищенко высказал гипотезу, что для конечномерных представлений любой связной топологической группы постоянная $\sqrt{3}$ может быть улучшена до 2. Таким образом, основной результат статьи состоит в доказательстве справедливости гипотезы Мищенко для всех связных локально компактных групп. А именно справедлива следующая теорема (см. §5).

ТЕОРЕМА 7. Пусть G – связная локально компактная группа и σ – (алгебраическое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E . Если $\omega(\sigma) < 2$, то $v(\sigma) = 0$ (см. (2)), т.е. представление σ непрерывно.

Этот результат имеет непосредственное следствие для отображений, близких к представлениям.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G – связная локально компактная группа и T – ее непрерывное отображение в группу обратимых линейных операторов в конечномерном пространстве E . Если существует такое представление S группы G в E , что $\|S(g) - T(g)\| \leq C$ для всех $g \in G$ и некоторого C , $C < 1$, то представление S непрерывно.

Изложение ведется следующим образом. В §2 приведен ряд вспомогательных утверждений. В §3 основная теорема доказывается для связных локально компактных групп, а в §4 – для связных разрешимых групп. В §5 доказана основная теорема. В §6 приведены заключительные замечания и примеры.

Часть результатов статьи приведена без доказательств в [4].

§2. Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть T – одномерный тор, $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел, $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\mathbb{N}$ – натуральный ряд, $\mathbb{Z}$ – аддитивная группа целых чисел. Символы $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ используются также для обозначения аддитивных групп соответствующих полей.

Пусть G – топологическая группа, S – ее (алгебраическое, не обязательно непрерывное) представление в нормированном пространстве E (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Пусть E^* – пространство, сопряженное к E .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [1]. Введем *сильную вариацию* $\varepsilon(S) \geq 0$ представления S в единичном элементе e группы G (или, кратко, *сильную вариацию представления* S), полагая $\varepsilon(S)$ равным верхней грани по всем векторам $\xi \in E$ единичной длины от нижних граней величин

$$\sup_{g \in U} \|S(g)\xi - \xi\|$$

по всем окрестностям $U \subset G$ единичного элемента $e \in G$:

$$\varepsilon(S) = \sup_{\xi \in E, \|\xi\| \leq 1} \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} \|S(g)\xi - \xi\|. \quad (3)$$

Следующее определение стандартно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть G – топологическая группа, S – ее (алгебраическое) представление в нормированном пространстве E . Мы будем говорить, что S *локально равномерно ограничено*, если существует окрестность V единичного элемента e в G и постоянная C , удовлетворяющие условию

$$\|S(g)\| \leq C \quad \text{для любого } g \in V.$$

Напомним некоторые известные результаты.

ЛЕММА 1 (см. [1; лемма 1]). Пусть G – топологическая группа, S – ее (алгебраическое) представление в нормированном пространстве E . Пусть E^* – пространство, сопряженное к E . Пусть $\varepsilon(S)$, $\omega(S)$ и $v(S)$ – вариации представления S , введенные в (1)–(3).

1) Если $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, то неравенство $\omega(S) \leq a$ выполняется тогда и только тогда, когда для любого $b > a$, любого единичного вектора ξ в пространстве E представления S и любого функционала $f \in E^*$ с единичной нормой существует такая окрестность $U = U(\xi, f) \subset G$ единичного элемента $e \in G$, что $|f(S(g)\xi - \xi)| < b$ для всех $g \in U$. Аналогичное описание имеют величины $\varepsilon(S)$ и $v(S)$.

2) Представление S непрерывно сильно (слабо, по норме) тогда и только тогда, когда $\varepsilon(S) = 0$ (соответственно $\omega(S) = 0$, $v(S) = 0$).

3) Справедливо неравенство $\omega(S) \leq \varepsilon(S) \leq v(S)$.

4) Если величина $\varepsilon(S)$ конечна, а группа G локально компактна, то представление S локально равномерно ограничено. В частности, если группа G компактна, то представление S ограничено.

СЛЕДСТВИЕ 1 [1], [2]. Пусть G – группа Ли, S – ее (алгебраическое) представление в конечномерном пространстве. Если представление S непрерывно на каждой однопараметрической подгруппе группы G , то оно непрерывно.

ТЕОРЕМА 2 [1; теорема 3]. Пусть G – связная группа Ли и S – (алгебраическое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E . Если $\omega(S) < 2$, то $v(S) = 0$, т.е. представление S непрерывно в сильной операторной топологии.

ТЕОРЕМА 3 [1; теорема 4]. Пусть G – локально компактная группа и S – (алгебраическое) представление группы G в конечномерном нормированном пространстве E . Если $\varepsilon(S) < \sqrt{3}$, то $\varepsilon(S) = 0$, т.е. представление S непрерывно в сильной операторной топологии.

Следующее утверждение показывает, что в конечномерном случае есть по существу только одно колебание представления в точке.

ЛЕММА 2. Пусть G – локально компактная топологическая группа и S – представление G в конечномерном нормированном пространстве E . Пусть $\omega(S)$ и $\varepsilon(S)$ – слабая и сильная вариации S в единице группы соответственно (см. определение 1). Если $\omega(S) < 2$, то $\varepsilon(S) = \omega(S) = v(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 имеем

$$\omega(S) \leq \varepsilon(S) \leq v(S),$$

и поэтому достаточно доказать, что $\omega(S) \geq v(S)$. Пусть $\dim E = n$. Из теоремы Пифагора следует, что евклидова норма вектора $S(g)\xi - \xi$ удовлетворяет неравенству

$$\|S(g)\xi - \xi\|_2^2 \leq n(\omega(S))^2$$

для любого (евклидово) единичного вектора ξ в E . Поэтому

$$\|S(g)\xi - \xi\|_E \leq \sqrt{n}\omega(S)(C_E)^2$$

для любого единичного вектора ξ ($\|\cdot\|$ относительно нормы $\|\cdot\|_E$) в E , где

$$\|\xi\|_2 \leq C_E\|\xi\|_E, \quad \|\xi\|_E \leq C_E\|\xi\|_2,$$

для некоторой постоянной C_E и любого вектора $\xi \in E$. Следовательно,

$$\varepsilon(S) \leq \omega(S)\sqrt{n}C_E. \quad (4)$$

Итак, если S – конечномерное представление и $\omega(S)$ конечно, то $\varepsilon(S)$ тоже конечно (см. (4)). Напомним, что представление S локально ограничено по лемме 1. Пусть M – такая постоянная, что $\|S(g)\| \leq M$ в некоторой окрестности U_0 единичного элемента e в G . Тогда

$$\|S(g) - I_E\| \leq M + 1,$$

где I_E – единичный оператор в пространстве E .

Пусть $\omega(S) < 2$. Докажем, что $v(S) \leq \omega(S)$. Пусть $\omega_0 \in (\omega(S), 2]$ и $\omega_1 \in (\omega(S), \omega_0)$. Пусть δ определено условием $0 < \delta < (\omega_0 - \omega_1)/(2(M + 1))$. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_p$ и $f_1, \dots, f_q$ – конечные δ -сети на единичных сферах пространства E и пространства E^* , дуального к E , соответственно. Для любых i и j , $i \in \{1, \dots, p\}$, $j \in \{1, \dots, q\}$, возьмем такие окрестности U_{ij} , что

$$|f_j(S(g)\xi_i - \xi_i)| \leq \omega_1 \quad \text{для любого } g \in U_{ij}.$$

Пусть

$$\Omega = U_0 \cap \bigcap_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, q}} U_{ij}.$$

Если $\xi \in E$, $\|\xi\| = 1$, и $f \in E^*$, $\|f\| = 1$, $g \in \Omega$, и если i и j выбраны так, чтобы

$$\|f - f_j\| \leq \delta, \quad \|\xi - \xi_i\| \leq \delta,$$

то

$$\begin{aligned} \|f(S(g)\xi - \xi)\| &\leq \|(f - f_j)(S(g)\xi - \xi)\| + \|f_j(S(g)\xi - \xi)\| \\ &\leq \delta(M + 1) + \|f_j((S(g) - I_E)(\xi - \xi_i))\| + \|f_j(S(g)\xi_i - \xi_i)\| \\ &\leq 2\delta(M + 1) + \omega_1 \leq \omega_0 \end{aligned}$$

для всех $\xi \in E$, $\|\xi\| = 1$, $f \in E^*$, $\|f\| = 1$, $g \in \Omega$, и, следовательно,

$$\|S(g) - I_E\| \leq \omega_0 \quad \text{для любого } g \in \Omega.$$

Так как ω_0 — любое число, большее $\omega(S)$, то $v(S) \leq \omega(S)$, что завершает доказательство леммы.

§ 3. Критерий непрерывности конечномерных представлений связных компактных групп

Нам нужно следующее вспомогательное утверждение для связных компактных коммутативных групп.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G — компактная связная коммутативная группа, в которой есть такой вполне несвязный замкнутый нормальный делитель N , что факторгруппа G/N — (компактная коммутативная) группа Ли, т.е. (конечномерный) тор. Пусть θ — такой характер группы G , что

$$|\theta(g) - 1| \leq q \quad \text{для некоторого } q < 2 \text{ и любого } g \in G$$

в некоторой окрестности U_q единицы в группе G . Тогда характер θ непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T = G/N$ — тор, упомянутый в условии теоремы. Тогда группа T удовлетворяет всем условиям теоремы 8.20 в [5]. Напомним ее формулировку, что требует некоторых определений. Для любой коммутативной топологической группы G можно ввести векторное пространство $\mathfrak{L}(G) = \text{Hom}(\mathbb{R}, G)$ однопараметрических групп в G . Снабдим это пространство топологией равномерной сходимости на компактах, поточечным сложением и умножением на числа по правилу

$$r \cdot X(t) = X(rt) \quad \text{при } X \in \mathfrak{L}(G) \text{ и } r, t \in \mathbb{R},$$

что превращает $\mathfrak{L}(G)$ в топологическую группу векторного пространства; отображение $\exp_G: \mathfrak{L}(G) \rightarrow G$, определенное формулой

$$\exp_G(X) = X(1), \quad X \in \mathfrak{L}(G),$$

называется *экспоненциальной функцией* на G .

Пусть $\pi: G \rightarrow G/N = T$ – каноническое отображение, где T – топологическая группа, изоморфная тору $\mathbb{T}^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. По теореме 8.20 в [5] гомоморфизм $\varphi: N \times \mathfrak{L}(T) \rightarrow T$, определенный правилом

$$\varphi(n, X) = n \exp X, \quad n \in N, \quad X \in \mathfrak{L}(T), \quad (5)$$

непрерывен, сюръективен и открыт, а его ядро K алгебраически и топологически отображается на подмножество $\Delta = \ker(\pi \circ \exp_T)$ второго сомножителя при проекции $N \times \mathfrak{L}(T) \rightarrow \mathfrak{L}(T)$. Более того, компонента единицы $N \times \mathfrak{L}(T)$ равна $\{0\} \times \mathfrak{L}(T)$, множество $\varphi(\{0\} \times \mathfrak{L}(T))$ плотно в T , пересечение $K \cap (\{0\} \times \mathfrak{L}(T))$ имеет вид $\{0\} \times \mathfrak{K}(T)$, где $\mathfrak{K}(T) = \ker \exp_T$, и морфизм φ факторизуется через факторгруппу $N \times \mathfrak{L}(T) \rightarrow N \times (\mathfrak{L}(T)/\mathfrak{K}(T))$ с фактор-морфизмом $\Phi: N \times (\mathfrak{L}(T)/\mathfrak{K}(T)) \rightarrow T$, заданным формулой

$$\Phi(n, X + \mathfrak{K}(T)) = n \exp X, \quad n \in N, \quad X \in \mathfrak{L}(T).$$

Наконец, как было показано в [5] в доказательстве теоремы 8.20, индуцированный морфизм $\mathfrak{L}(\pi): \mathfrak{L}(T) \rightarrow \mathfrak{L}(T/N)$ является изоморфизмом топологических групп векторных пространств, причем экспоненциальные функции T и T/N связаны соотношением

$$\pi \circ \exp_T = \exp_{T/N} \circ \mathfrak{L}(\pi).$$

В рассматриваемом случае величина n конечна.

Рассмотрим характер θ . По теореме 2 характер группы Ли $\mathfrak{L}(G)$ (изоморфной $\mathbb{R}^n$), определяемый композицией $\theta \circ \exp$, непрерывен. Пусть M – компактный открытый нормальный делитель N , лежащий в окрестности U_q [6; § II.7]. Тогда $\theta(M)$ – замкнутая подгруппа $\mathbb{T}$, не содержащая некоторой дуги (вблизи точки -1). Поэтому группа $\theta(M)$ конечна. Так как факторгруппа N/M конечна, то и группа $\theta(N)$ конечна. Следовательно, $\theta(N)$ – группа p -х корней из единицы для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Если $p = 1$, то θ определяется характером группы Ли G/N и поэтому θ непрерывен. Пусть $p > 1$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Пусть $g_0 \in G$. Так как G связна, то она безгранично делима [5; следствие 8.5]. Поэтому найдется такой элемент $h_0 \in G$, что $h_0^p = g_0$. Согласно (5) мы можем представить h_0 в виде $h_0 = \varphi(n_0, X_0)$, т.е. как произведение $h_0 = n_0 \exp X_0$, $n_0 \in N$, $X_0 \in \mathfrak{L}(G)$. Возьмем окрестность $U(n_0)$ элемента n_0 в N и найдем такую окрестность $V(X_0)$ элемента X_0 в $\mathfrak{L}(G)$, что

$$|(\theta \circ \exp)(X) - (\theta \circ \exp)(X_0)| < \varepsilon/p.$$

Так как возведение в p -ю степень в группе G есть непрерывный гомоморфизм (поскольку G коммутативна) и притом сюръективный (поскольку G безгранично делима), то из теоремы об открытом отображении [6; 5.29] следует, что это отображение открыто. Так как множество $U(n_0) \exp(V(X_0))$ открыто по теореме 8.20 в [5], то множество $W = U(n_0)^p (\exp(V(X_0))^p)$ есть окрестность точки

$$n_0^p \exp(X_0)^p = h_0^p = g_0.$$

Если $g \in W$, то g можно представить в виде $g = n^p(\exp X)^p$ для некоторых $n \in U(n_0)$ и $X \in V(X_0)$. Поэтому

$$\theta(g) = \theta(n^p(\exp X)^p) = (\theta(n))^p(\theta(\exp X))^p.$$

Но $\theta(n)^p = 1$, поскольку порядок группы $\theta(N)$ равен p . Таким образом,

$$\theta(g) = \theta(\exp X)^p \quad \text{для любого } g \in W$$

и

$$|\theta(g) - \theta(g_0)| = |\theta(\exp X)^p - \theta(\exp X_0)^p| \leq p|\theta(\exp X) - \theta(\exp X_0)| < \varepsilon$$

по построению, что доказывает непрерывность характера θ на G .

Следующий вспомогательный результат также заслуживает выделения в самостоятельное утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть G — компактная связная группа и S — (алгебраическое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E . Пусть $\omega(S) < 2$, ω_0 — такое число, что $\omega(S) < \omega_0 < 2$, и пусть Ω — такая окрестность единичного элемента $e \in G$, что

$$|f(S(g)\xi - \xi)| \leq \omega_0 \|f\| \|\xi\|, \quad \omega_0 < 2, \quad \text{для любых } g \in \Omega, \quad \xi \in E, \quad f \in E^*$$

(см. [1; лемма 1]). Пусть N — такой замкнутый нормальный делитель в G , что факторгруппа G/N — связная группа Ли [7], [8]. Тогда компонента единицы группы N лежит в ядре представления S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω_0 удовлетворяет условию $\omega(S) < \omega_0 < 2$. По лемме 1 в [1] существует такая окрестность Ω единичного элемента $e \in G$, что

$$|f(S(g)x - x)| \leq \omega_0 \|f\| \|x\|, \quad \omega_0 < 2,$$

для любых $g \in \Omega$, $x \in E$, $f \in E^*$.

Согласно [7], [8] окрестность Ω содержит такой замкнутый нормальный делитель N в G , что факторгруппа G/N — (связная) группа Ли. Пусть N_0 — компонента единицы в N .

Напомним, что каждый элемент g произвольной компактной связной топологической группы H содержится в некоторой максимальной компактной связной коммутативной подгруппе $K_g \subset H$, любая максимальная связная коммутативная подгруппа в H содержит центр H и любые две связные коммутативные подгруппы в G сопряжены в H [9]. Применим это утверждение к компоненте единицы N_0 группы N (связная группа N_0 замкнута в G и, следовательно, компактна) и рассмотрим максимальную связную коммутативную подгруппу $L \subset N_0$. Замыкание образа этой группы в представлении S — ограниченная (и, следовательно, компактная) коммутативная группа $Q = \overline{S(L)}$ операторов в конечномерном пространстве. Следовательно, группа Q имеет общий собственный базис $f_1, \dots, f_n$ в E . В этом базисе все

матрицы, отвечающие операторам из $S(L)$, диагональны и диагональные матричные элементы определяют характеры группы L (они имеют единичный модуль); эти характеры $\chi_i: L \rightarrow \mathbb{T}$ определяются правилом

$$\chi_i: l \mapsto s(l)_{ii}, \quad l \in L.$$

Из условия $N_0 \subset \Omega$ немедленно следует, что образ подгруппы N_0 под действием любого диагонального характера $\chi_i = s_{ii}$ не содержит некоторую дугу окружности $\mathbb{T}$ вблизи точки $-1 \in \mathbb{T}$ (размер этой дуги определяется значением разности $2 - \varepsilon > 0$). Таким образом, образ $s_{ii}(L)$ есть либо единичная подгруппа, либо группа q -х корней из единицы для некоторого натурального $q \geq 2$. Однако второй случай невозможен, потому что группа L связна по построению и, следовательно, безгранично делима [5; следствие 8.5], в то время как любой гомоморфный образ безгранично делимой группы тоже безгранично делим. Итак, S -образ L есть $\{1\}$. Так как любой элемент группы N_0 сопряжен элементу группы L , то $S(N_0) = \{1\}$.

Теперь мы можем получить критерий непрерывности конечномерных представлений связных компактных групп.

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – компактная связная группа и S – (алгебраическое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E . Если $\omega(S) < 2$, то $v(S) = 0$, т.е. представление S непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Примем обозначения и определения, использованные в лемме 3. По этой лемме имеем $S(N_0) = \{1\}$. Поэтому мы можем рассматривать представление S группы G как представление компактной связной факторгруппы G/N_0 . Группа N/N_0 – вполне несвязный нормальный делитель в связной группе G/N_0 . Следовательно, группа N/N_0 центральна в G/N_0 .

Применим утверждение о максимальных связных коммутативных подгруппах к группе G/N . Пусть T' – максимальная связная коммутативная подгруппа G/N . Образ $S(T')$ ограничения представления S на подгруппу T' есть ограниченная коммутативная группа операторов в конечномерном пространстве. Следовательно, эта группа имеет общий собственный базис $x_1, \dots, x_n$ в E . В этом базисе матрицы из семейства $S(T')$ диагональны, и диагональные матричные элементы определяют характеры группы T' , имеющие единичный модуль; эти характеры $\chi_i: T' \rightarrow \mathbb{T}$ определяются формулами

$$\chi_i: l \mapsto s(l)_{ii}, \quad l \in T'.$$

По построению каждый характер вида χ_i удовлетворяет условиям теоремы 4 (окрестность, в которой значения характера не попадают на дугу вблизи точки -1 , есть пересечение канонического образа исходной окрестности в G в группе G/N_0 с максимальной связной коммутативной подгруппой T'). Следовательно, все характеры χ_i непрерывны и ограничение представления S на T' непрерывно. Так как $T' \supset N/N_0$, то ограничение представления S на N/N_0 непрерывно. Так как N/N_0 вполне несвязна, то существует такой открытый нормальный делитель $M \subset N/N_0$, что $S(g) = I_E$ для всех $g \in M$. Тогда нормальный делитель $Q = \ker S|_{N/N_0}$ содержит N/N_0 и поэтому тоже открыт. Пусть P – полный

прообраз Q при каноническом отображении G на G/N_0 . Тогда P – открытый нормальный делитель в N . Рассмотрим S снова как представление группы G . Тогда $P = \ker S \cap N$. Следовательно, P – компактный открытый нормальный делитель в G . Поэтому индекс P в G конечен. Кроме того, P содержит N_0 . Поэтому индекс $\ker S \cap N$ в N конечен. Таким образом, $G/(\ker S \cap N)$ – (связная) группа Ли и представление S можно рассматривать как представление этой группы Ли. Кроме того, представление S , рассматриваемое как представление группы Ли $G/(\ker S \cap N)$, имеет то же значение $\omega(S)$, так что $\omega(S) < 2$. Остается применить теорему 2, что завершает доказательство.

§ 4. Критерий непрерывности конечномерных представлений связных разрешимых групп

Нам придется сначала доказать аналог теоремы Ли для конечномерных представлений разрешимых групп.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть G – разрешимая связная локально компактная группа и S – (алгебраическое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E . Если $\omega(S) < 2$, то $v(S) = 0$, т.е. представление S непрерывно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему индукцией по длине композиционного ряда разрешимой связной локально компактной группы G . Если эта длина равна единице, то группа G коммутативна. Согласно части (iii) теоремы 7.57 в [5] связная коммутативная локально компактная группа есть (алгебраически и топологически) прямое произведение конечномерной векторной группы V и (единственной) максимальной компактной подгруппы K . Заметим, что группа K связна как гомоморфный образ связной группы G . В этом случае утверждение теоремы 6 следует из теоремы 5, примененной к группе K , и теоремы 2, примененной к группе V . Таким образом, база индукции установлена.

Докажем утверждение индукционного шага. Пусть утверждение справедливо, если длина композиционного ряда разрешимой связной локально компактной группы не превосходит натурального числа n , и пусть дана разрешимая связная локально компактная группа G , длина композиционного ряда которой равна $n + 1$. Пусть S – (алгебраическое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E , и пусть $\omega(S) < 2$. Рассмотрим коммутаторную подгруппу C группы G , т.е. замкнутую подгруппу, порожденную коммутаторами

$$ghg^{-1}h^{-1}, \quad g, h \in G.$$

Тогда H – разрешимая локально компактная группа, длина композиционного ряда которой равна n , и C связна как замыкание связного множества (объединения связных множеств, образованных элементами, допускающими представление в виде произведения данного числа коммутаторов; эти множества имеют общую точку (единицу группы)). Пусть T – ограничение представления S на подгруппу C . Очевидно, что $\omega(T) < 2$. По предположению индукции представление T группы C непрерывно. Следовательно, по теореме Ли [10; теорема V.3.1] представление T

имеет одномерное инвариантное подпространство (и тем самым общий собственный вектор $\xi \in E$):

$$T(ghg^{-1}h^{-1})\xi = \lambda(g, h)\xi, \quad \lambda(g, h) \in \mathbb{C}, \quad g, h \in G.$$

Тогда

$$T(ghg^{-1}h^{-1})S(k)\xi = S(k)T(k^{-1}ghg^{-1}h^{-1}k)\xi = \lambda(k^{-1}gk, k^{-1}hk)S(k)\xi, \quad (6)$$

$$g, h, k \in G,$$

так что все векторы вида $S(k)\xi$ – собственные для T . Они порождают конечномерное подпространство $F \subset E$ (линейную оболочку одномерных T -инвариантных подпространств в E), и подпространство F имеет базис из собственных векторов представления T . Разумеется, множество линейно независимых векторов вида $T(k)\xi, k \in G$, конечно. Из формулы (6) следует, что подпространство F инвариантно относительно представления S группы G . Обозначим через S_F ограничение представления S на подпространство F . Таким образом, множество значений функции λ конечно. Отметим также, что (при фиксированных $g, h \in G$) элемент $k^{-1}ghg^{-1}h^{-1}k$ принадлежит C , поскольку имеет место равенство

$$\begin{aligned} k^{-1}ghg^{-1}h^{-1}k &= (k^{-1}gk)(k^{-1}hk)(k^{-1}g^{-1}k)(k^{-1}h^{-1}k) \\ &= (k^{-1}gk)(k^{-1}hk)(k^{-1}gk)^{-1}(k^{-1}hk)^{-1}, \end{aligned}$$

и непрерывно зависит от $k \in G$. Кроме того, функция λ непрерывна, поскольку представление T непрерывно. Так как группа G связна, то функция $G \rightarrow \mathbb{C}$, определенная формулой

$$k \mapsto \lambda(k^{-1}gk, k^{-1}hk), \quad k \in G,$$

постоянна, т.е. не зависит от $k \in G$. Следовательно, оператор $T(ghg^{-1}h^{-1})$ скалярен на F (где он является умножением на число $\lambda(g, h)$). Но

$$T(ghg^{-1}h^{-1}) = S_F(g)S_F(h)S_F(g^{-1})S_F(h^{-1}) \quad \text{для любых } g, h \in G$$

и из S -инвариантности подпространства F следует, что

$$\det T(ghg^{-1}h^{-1}) = 1, \quad (\lambda(g, h))^{\dim F} = 1.$$

Таким образом, множество значений функции λ конечно. Из связности группы G следует тогда, что множество значений функции λ одноэлементно. Так как число 1 заведомо входит в это множество значений, то

$$\lambda(g, h) \equiv 1 \quad \text{для всех } g, h \in G.$$

Следовательно, представление T кратно единичному, $C \subset \ker T$ и можно считать, что S_T – представление факторгруппы G/C . Обозначим через $S_F^{G/C}$ ограничение представления S на подпространство F , рассматриваемое как представление факторгруппы G/C . Так как группа G/C коммутативна и связна, а $\omega(S_F^{G/C}) < 2$ по

условию и по определению топологии в факторгруппе, то представление $S_F^{G/C}$ непрерывно по уже доказанному утверждению, составляющему базу индукции. Таким образом, данное представление имеет инвариантное подпространство и ограничение на это подпространство является непрерывным представлением.

Переходя к факторпространству E/F и повторяя рассуждение, мы получим по индукции, что можно выбрать базис в пространстве представления S , в котором матрицы представления имеют блочно-треугольный вид с непрерывными диагональными блоками.

Рассмотрим пространство $\mathcal{L}(E)$ всех линейных операторов в пространстве E представления S . Пусть M – пересечение замыканий $\overline{S(V)}$ образов $S(V)$ всевозможных окрестностей $V \subset G$ единичного элемента группы G . Поскольку представление S ограничено на некоторой окрестности V_0 единичного элемента, то для любой окрестности $V \subset V_0$ множество $\overline{S(V)}$ компактно как замкнутое подмножество компактного множества.

Пусть T – некоторый элемент M . Равенство $M = \{1_E\}$ равносильно непрерывности представления S в e ввиду только что отмеченной компактности множеств $\overline{S(V)}$ в $\mathcal{L}(E)$. Действительно, дополнение любой окрестности нуля W в множестве $\overline{S(V_0)}$ (для такой окрестности V_0 , что $\overline{S(V_0)}$ компактно) тоже компактно. Если $M = \{1_E\}$, то пересечение $M \cap (\overline{S(V_0)} \setminus W)$ пусто и поэтому существует конечный набор множеств вида $\overline{S(V_i)}$, $i = 1, \dots, N$, для которых пересечение

$$\left(\bigcap_{i=1}^N \overline{S(V_i)} \right) \cap (\overline{S(V_0)} \setminus W)$$

пусто, так что

$$S(V) \subset W \quad \text{для} \quad V = V_0 \cap \left(\bigcap_{i=1}^N V_i \right).$$

Докажем, что $T = 1_E$. Так как для любого единичного вектора $\xi \in E$ и любого функционала $f \in E_*$ единичной длины окрестность $U(\xi)$ участвует в построении множества M , то $|f(T\xi - \xi)| < 2$ для всех единичных векторов $\xi \in E$ и функционалов $f \in E_*$ единичной длины. Таким образом, $\|T - 1_E\| \leq 2$.

Для любой окрестности V единичного элемента в G и любого натурального n существует окрестность W единичного элемента в G , удовлетворяющая условию $W^{2^n} \subset V$. Отсюда следует, что $S(W)^{2^n} \subset S(V)$ и, очевидно, $(S(W))^{2^n} \subset S(V) \subset \overline{S(V)}$. Пусть $n = 1$. Тогда $S(W)S(W) \subset S(V)$ для любого α и так как умножение операторов непрерывно, то $\overline{S(W)S(W)} \subset \overline{S(V)}$. По индукции отсюда следует, что для любой окрестности V единичного элемента в G , любого натурального n и любой окрестности W единичного элемента в G , удовлетворяющей условию $W^{2^n} \subset V$, имеем $\overline{(S(W))^{2^n}} \subset \overline{S(V)}$ в $\mathcal{L}(E)$. В частности, поскольку $T \in \overline{SO}$ для любой окрестности O единичного элемента, то $T^n \in \overline{S(V)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и для всех окрестностей V единичного элемента в G , откуда следует, что $T^n \in M$. Как мы видели выше, отсюда следует, что

$$\|T^n - 1_E\| \leq 2 \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7)$$

Напомним, что в пространстве представления S есть базис, в котором матрицы представления имеют блочно-треугольный вид с непрерывными диагональными

блоками. В этом базисе оператор T имеет блочно-треугольный вид с единичными диагональными блоками. Если $T \neq 1_E$, то последовательность T^n неограничена, что противоречит неравенству (7). Поэтому представление S непрерывно в единичном элементе, а тогда и всюду на G . Это доказывает теорему 6.

§ 5. Критерий непрерывности конечномерных представлений связных локально компактных групп

Теперь мы можем доказать основную теорему статьи.

ТЕОРЕМА 7. Пусть G – связная локально компактная группа и σ – (алгебраическое) представление группы G в конечномерном нормированном линейном пространстве E . Если $\omega(\sigma) < 2$, то $v(\sigma) = 0$, т.е. представление σ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве теоремы 5, примем обозначения и определения, использованные в лемме 3. По этой лемме имеем $S(N_0) = \{1\}$. Поэтому мы можем рассматривать представление σ группы G как представление σ' связной факторгруппы $G' = G/N_0$. Очевидно, что выполняется условие $\omega(\sigma') < 2$. Поэтому мы перейдем к $G' = G/N_0$ и σ' , не будем писать штрихи и будем считать, что $N_0 = \{e\}$. Этот переход позволяет считать, что группа N – вполне несвязный нормальный делитель в связной группе G , причем факторгруппа G/N есть связная группа Ли. Отсюда следует, что группа N центральна в G , а G – конечномерная группа. Пусть $\pi: G \rightarrow \Sigma$ – каноническое отображение. Рассмотрим радикал (наибольший связный разрешимый нормальный делитель) группы G (см. [11; теорема 3.7]). Тогда либо $G = R$, либо факторгруппа $\Sigma = G/R$ есть связная полупростая локально компактная группа конечной размерности [12; теорема 7.6]. Рассмотрим образ $\pi(Z(G))$ центра $Z(G)$ группы G в группе Σ . Так как π – эпиморфизм, то $\pi(Z(G))$ содержится в центре $Z(\Sigma)$ группы Σ . В этом случае $Z(G) \supset N$ и поэтому группа $\Sigma/Z(\Sigma)$ есть связная полупростая группа Ли без центра (прямое произведение присоединенных групп простых групп Ли).

Если сама группа Σ – группа Ли, то ее центр конечен. Следовательно, есть замкнутая подгруппа Q конечного индекса в $Z(G)$ (Q – полный прообраз единицы в $Z(\Sigma)$), лежащая в R .

Пусть Σ – не группа Ли. Напомним [12; теорема 8.3], что в этом случае существует последовательность

$$\pi_n: L_{n+1} \rightarrow L_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

нетривиальных конечнократных накрытий связных групп Ли, где $L_0 = \Sigma/Z(\Sigma)$ (прямое произведение присоединенных групп простых групп Ли) и Σ – проективный предел семейства $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где каждая группа L_n есть гомоморфный образ универсальной накрывающей группы L_0 , которая изоморфна прямому произведению универсальных накрывающих простых сомножителей группы L_0 . Напомним, что для простого сомножителя в $\Sigma/Z(\Sigma)$ последовательность $\{\pi_n\}$ может существовать тогда и только тогда, когда этот сомножитель эрмитов. В этом случае центр любой группы L_n содержится в центральном торе максимальной компактной подгруппы группы L_n . Поскольку неэрмитовы прямые сомножители в $\Sigma/Z(\Sigma)$

имеют универсальные накрывающие группы с конечным центром, то центр $Z(\Sigma)$ группы Σ содержит подгруппу Z' конечного индекса (ядро факторизации группы Σ по прообразу в Σ прямого произведения всех неэрмитовых прямых сомножителей в $\Sigma/Z(\Sigma)$), лежащую в проективном пределе прямого произведения одномерных центральных торов максимальных компактных подгрупп эрмитовых сомножителей [12; 8.5 и теорема 8.6]. Тогда группа Z' лежит в проективном пределе T' этих прямых произведений. Группа T' связна и коммутативна как проективный предел торов. Ее полный прообраз R_1 в G разрешим как расширение связной коммутативной группы T' с помощью связной разрешимой группы R , и группа R_1 содержит центральную подгруппу Q конечного индекса в $Z(G)$.

Итак, в любом случае центр $Z(G)$ группы G содержит замкнутую подгруппу Q конечного индекса, принадлежащую замкнутой связной разрешимой подгруппе R_1 группы G . По теореме 6 ограничение представления σ группы G на подгруппу R_1 непрерывно. Следовательно, ограничение представления σ группы G на подгруппу Q непрерывно. Поскольку Q – подгруппа конечного индекса в $Z(G)$, то ограничение представления σ группы G на подгруппу $Z(G)$ непрерывно, откуда следует, что замкнутый нормальный делитель $\ker \sigma \cap Z(G)$ имеет конечный индекс в $Z(G)$. Таким образом, представление σ можно рассматривать как представление связной факторгруппы $G/(\ker \sigma \cap Z(G))$. Эта группа есть расширение группы Ли $G/Z(G)$ с помощью конечной группы $Z(G)/(\ker \sigma \cap Z(G))$ и потому является группой Ли. Остается применить теорему 2.

§6. Примеры и заключительные замечания

6.1. Наилучшие константы. Приведем примеры, показывающие, в частности, что постоянная 1 в теореме 1 и постоянные 2 и $\sqrt{3}$ в теоремах 2 и 3 неулучшаемы.

ПРИМЕР 1. Пусть G – неметризуемая локально компактная группа, Σ – представление группы G в гильбертовом пространстве $l^2(G)$ сдвигами. Тогда $\omega(\Sigma) = 1$ и при этом представление Σ разрывно.

ПРИМЕР 2. Пусть G – неметризуемая локально компактная группа, E – замыкание конечных линейных комбинаций характеристических функций точек в банаховом пространстве ограниченных функций на G с обычной равномерной нормой, Σ – представление группы G в E сдвигами. Тогда $\varepsilon(\Sigma) = 1$ и при этом представление Σ разрывно.

ПРИМЕР 3. Пусть $G = \mathbb{T}$, Σ – нетривиальный одномерный характер группы G , все неединичные значения которого имеют бесконечный порядок (см., например, [6; (25.26)(e)]). Тогда $\omega(\Sigma) = \varepsilon(\Sigma) = 2$ и при этом представление Σ разрывно.

ПРИМЕР 4. Пусть G – прямое произведение счетного набора групп третьего порядка, реализованных в виде корней из единицы на комплексной плоскости,

$$\mathbb{T}_3 = \{1, \cos(2\pi/3) \pm i \sin(2\pi/3)\};$$

занумеруем эти группы натуральными числами. Рассмотрим некоторый свободный ультрафильтр α на натуральном ряде и введем одномерный характер Σ группы G с помощью формулы

$$\Sigma(g) = \alpha((g_n)) \quad \text{при } g = (g_n) \in G,$$

где $g_n \in \mathbb{T}_3$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\omega(\Sigma) = \varepsilon(\Sigma) = 2$ и при этом представление Σ разрывно.

Проверка правильности вычисления величин $\omega(\Sigma)$ и $\varepsilon(\Sigma)$ и проверка разрывности представлений Σ в этих примерах предоставляется читателю.

6.2. Приложение: непрерывность представлений, аппроксимирующих конечномерные квазипредставления.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть G – связная локально компактная группа и T – ее непрерывное отображение в группу обратимых линейных операторов в конечномерном пространстве E . Если существует такое представление Σ группы G в E , что $\|\Sigma(g) - T(g)\| \leq C$ для всех $g \in G$ и некоторого C , $C < 1$, то представление Σ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях следствия имеем $\omega(\Sigma) \leq \omega(T) + 2C$, где $\omega(T) = 0$ по условию непрерывности отображения T . Следовательно, $\omega(\Sigma) < 2$. Остается применить теорему 7.

6.3. Условия непрерывности конечномерных представлений общих локально компактных групп.

В случае общих (не обязательно связных) локально компактных групп ситуация оказывается более содержательной.

ТЕОРЕМА 8. Все конечномерные представления открытой почти связной подгруппы O локально компактной группы G , колебание которых в единице группы меньше 2, непрерывны в том и только том случае, если все нормальные делители нечетного индекса в любой открытой подгруппе некоторой открытой почти связной подгруппы σ группы G замкнуты.

Группы O и σ могут быть различными.

Доказательство теоремы 8, которое будет опубликовано в другой статье, существенно использует условия непрерывности конечномерных представлений вполне несвязных локально компактных групп (см. [4]).

Автор благодарен А. С. Мищенко за внимание к работе.

Список литературы

1. Штерн А. И. Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах // Матем. сб. 2002. Т. 193. №9. С. 139–156.
2. Shtern A. I. Continuity of Banach representations in terms of point variations // Russian J. Math. Phys. 2002. V. 9. №2. P. 251–253.
3. Shtern A. I. Continuity criteria for finite-dimensional representations of compact connected groups // Adv. Stud. Contemp. Math. 2003. V. 6. №2. P. 141–156.
4. Shtern A. I. Continuity conditions for finite-dimensional representations of some compact totally disconnected groups // Adv. Stud. Contemp. Math. 2004 (to appear).
5. Hofmann K. H., Morris S. A. The structure of compact groups. Berlin: Walter de Gruyter, 1998.
6. Хьюитт Э., Росс К. А. Абстрактный гармонический анализ. Т. I. М.: Наука, 1975.
7. Montgomery D., Zippin L. Topological transformation groups. New York: Interscience Publ., 1955.
8. Глушков В. М. Структура локально бикompактных групп и пятая проблема Гильберта // УМН. 1957. Т. 12. №2. С. 3–41.

9. *Ahdout S., Hurwitz C., Itzkowitz G., Rothman S., Strassberg H.* Maximal protori in compact topological groups // Papers on general topology and applications (Flushing, NY, 1992). New York: New York Acad. Sci., 1994. P. 227–236. (Ann. New York Acad. Sci. V. 728.)
10. *Наймарк М. А.* Теория представлений групп. М.: Наука, 1976.
11. *Paterson A. L. T.* Amenability. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988. (Math. Surveys Monogr. V. 29.)
12. *Stroppel M.* Lie theory for non-Lie groups // J. Lie Theory. 1994. V. 4. №2. P. 257–284.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ashtern@member.ams.org

Поступила в редакцию
6.10.2003