Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Принцип кольца в задаче о существовании гиперболического странного аттрактора, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 4, 15–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:26:19

УДК 517.926

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Принцип кольца в задаче о существовании гиперболического странного аттрактора

Исследуется некоторый специальный класс диффеоморфизмов кольца (прямого произведения шара в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, на окружность). Устанавливается так называемый принцип кольца, т.е. предлагается набор достаточных условий, при которых каждый диффеоморфизм из приведенного класса имеет странный гиперболический аттрактор типа соленоида Смейла–Вильямса.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: принцип кольца, гиперболический аттрактор, инвариантное слоение, соленоид, топологическое перемешивание.

DOI: 10.4213/sm8491

§ 1. Постановка задачи и описание результата

Фиксируем произвольно открытое множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, содержащее начало координат, обозначим через S окружность $\{\varphi \in \mathbb{R} : 0 \leq \varphi \leq 2\pi \pmod{2\pi}\}$ и рассмотрим диффеоморфизм $\Pi: \mathcal{U} \times S \rightarrow \mathbb{R}^k \times S$, имеющий вид

$$\Pi: \begin{aligned} v &\rightarrow f(v, \varphi), \\ \varphi &\rightarrow m\varphi + g(v, \varphi) \pmod{2\pi}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \geq 2$, $f(v, \varphi) \in C^1(\mathcal{U} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^k)$, $g(v, \varphi) \in C^1(\mathcal{U} \times \mathbb{R})$ и справедливы тождества $f(v, \varphi + 2\pi) \equiv f(v, \varphi)$, $g(v, \varphi + 2\pi) \equiv g(v, \varphi)$.

Далее, кольцом или полноторием назовем множество K вида

$$K = \{w = (v, \varphi) : \|v\| \leq r, \varphi \in S\} = B \times S, \quad (1.2)$$

где $r = \text{const} > 0$, $B = \{v \in \mathbb{R}^k : \|v\| \leq r\}$, а одним и тем же символом $\|\cdot\|$ будем обозначать евклидову векторную норму в $\mathbb{R}^k$ и различные индуцированные ею операторные нормы (из контекста всегда будет ясно, о какой именно норме идет речь). Предполагаем, естественно, что $B \subset \mathcal{U}$, т.е. оператор (1.1) определен в кольце (1.2). Кроме того, всюду ниже считаем, что

$$\Pi(K) \subset \text{int } K, \quad (1.3)$$

где $\text{int } K$ – внутренность множества K .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-04066а) и проекта № 1.1875.2014/К проектной части госзадания на НИР ЯрГУ № 2014/258.

Изучение диффеоморфизмов вида (1.1) берет начало с известной работы С. Смейла [1]. Точнее говоря, в указанной статье сформулирован некий общий принцип построения отображений кольца в себя, допускающих гиперболические аттракторы соленоидального типа. Впоследствии на основе этого принципа был предложен ряд конкретных примеров, вошедших во многие монографии и учебники по динамическим системам (см. [2]–[5]). Необходимо также отметить, что диффеоморфизмы (1.1) возникают при исследовании так называемой катастрофы голубого неба [6], [7], связанной с исчезновением седло-узлового цикла. Тем самым, анализ их динамических свойств весьма актуален.

В настоящей статье предлагаются легко проверяемые достаточные условия на функции f, g из (1.1), при которых диффеоморфизм (1.1) имеет в кольце K гиперболический странный аттрактор типа соленоида Смейла–Вильямса. Иными словами, устанавливается гиперболический принцип кольца, аналогичный известному принципу кольца в задаче о существовании и устойчивости инвариантного тора [8], [9]. Добавим еще, что наши условия выполняются как для всех известных модельных примеров соленоидальных отображений, так и для отображения, описывающего катастрофу голубого неба.

Перед формулировкой основного результата приведем ряд необходимых в дальнейшем определений. Прежде всего снабдим множество K метрикой ρ , задаваемой для любых двух точек $w_j = (v_j, \varphi_j)$, $j = 1, 2$, формулой

$$\rho(w_1, w_2) = \|v_1 - v_2\| + |\exp(i\varphi_1) - \exp(i\varphi_2)| \quad (1.4)$$

(окружность S естественным образом отождествляется с множеством $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ на комплексной плоскости). Далее, поскольку в силу требования (1.3) диффеоморфизм (1.1) переводит кольцо K строго в себя, то имеет смысл рассмотреть вопрос о его аттракторах, лежащих в K . В связи с этим, следуя [10], дадим два эквивалентных определения понятия аттрактора, которые будут использоваться нами в последующем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Аттрактор* $A \subset K$ отображения (1.1) – это замкнутое множество, у которого имеется такая окрестность V , что замыкание $\overline{\Pi(V)} \subset V$ и $A = \bigcap_{n \geq 0} \Pi^n(V)$ (окрестность V с указанными свойствами называется *поглощающей*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Аттрактором* $A \subset K$ назовем замкнутое и инвариантное (т.е. такое, что $\Pi(A) = A$) множество, обладающее свойствами:

- а) для любой окрестности $\tilde{U}$ множества A существует такая его окрестность $\tilde{V}$, что $\Pi^n(\tilde{V}) \subset \tilde{U}$ при всех целых $n \geq 0$;
- б) имеется окрестность $\tilde{W}$ множества A , для любой точки w из которой ее ω -предельное множество $\omega(w) \subset A$ (иными словами, A притягивает все точки w из $\tilde{W}$, т.е. $\rho(\Pi^n(w), A) = \inf_{\bar{w} \in A} \rho(\Pi^n(w), \bar{w}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$).

Необходимо добавить, что под окрестностями в этих определениях понимаются множества, принадлежащие K и открытые в топологии пространства (K, ρ) с метрикой (1.4).

В дальнейшем нас будет интересовать так называемый максимальный аттрактор оператора Π в кольце K , который в силу условия (1.3) существует и задается соотношением

$$A = \bigcap_{n \geq 0} \Pi^n(K). \quad (1.5)$$

Этот аттрактор обладает следующим интересным свойством: если A' – любой другой аттрактор из K , для которого $\omega(w) \subset A'$ при всех $w \in K$, то $A' = A$.

Действительно, в силу (1.5) включение $A' \subset A$ очевидно. Далее, согласно определению 1 для A' существует поглощающая окрестность V' . Кроме того, поскольку множество A' притягивает любую точку w из K , то найдется такое натуральное n_0 (общее для всех $w \in K$ в силу компактности K), что $\Pi^n(w) \in V'$ для любых $n \geq n_0$ и любых $w \in K$. Отсюда последовательно заключаем, что

$$A \subset \Pi^{n+n_0}(K) \subset \Pi^n(V') \quad \forall n \geq 0, \quad A \subset \bigcap_{n \geq 0} \Pi^n(V') = A'.$$

Тем самым, $A' = A$.

Обратимся теперь к определению гиперболичности, адаптированному для нашего случая. В связи с этим введем в рассмотрение пространство $\mathbb{R}^{k+1}$, состоящее из векторов

$$x = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \xi = \text{colon}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k, \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad \|x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} = \|\xi\| + |\eta|. \quad (1.6)$$

Далее, привлекая покоординатные представления

$$v = \text{colon}(v_1, v_2, \dots, v_k), \quad f(v, \varphi) = \text{colon}(f_1(v, \varphi), f_2(v, \varphi), \dots, f_k(v, \varphi)),$$

для любой точки $w \in K$ определим линейный оператор $D\Pi(w): \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ (дифференциал), действующий на произвольный вектор (1.6) по правилу:

$$D\Pi(w)x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v}(w)\xi + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(w)\eta \\ \frac{\partial g}{\partial v}(w)\xi + \left(m + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(w)\right)\eta \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(w) &= \left(\frac{\partial f_j}{\partial v_s}(v, \varphi) \right)_{j,s=1}^k, & \frac{\partial f}{\partial \varphi}(w) &= \frac{\partial f}{\partial \varphi}(v, \varphi), & \frac{\partial g}{\partial \varphi}(w) &= \frac{\partial g}{\partial \varphi}(v, \varphi), \\ \frac{\partial g}{\partial v}(w) &= \left(\frac{\partial g}{\partial v_1}(v, \varphi), \frac{\partial g}{\partial v_2}(v, \varphi), \dots, \frac{\partial g}{\partial v_k}(v, \varphi) \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Помимо оператора (1.7), (1.8) нам потребуются еще операторы $D(\Pi^n(w))$, $n \in \mathbb{N}$, задающиеся равенствами

$$D(\Pi^n(w)) = D\Pi(w_{n-1}) \circ D\Pi(w_{n-2}) \circ \dots \circ D\Pi(w_0), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.9)$$

где $w_s = \Pi^s(w)$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что аттрактор (1.5) *гиперболический*, если для каждого $w \in A$ пространство $\mathbb{R}^{k+1}$ допускает представление в виде прямой суммы

$$\mathbb{R}^{k+1} = E_w^u \oplus E_w^s \quad (1.10)$$

линейных подпространств E_w^u, E_w^s и выполняются следующие требования:

а) для $\forall w \in A$ имеем $D\Pi(w)E_w^u = E_{\Pi(w)}^u, D\Pi(w)E_w^s = E_{\Pi(w)}^s$ (это свойство называется *инвариантностью*);

б) существуют такие универсальные (не зависящие от w, x) постоянные $\lambda > 1, \mu \in (0, 1), c_1, c_2 > 0$, что

$$\|D(\Pi^n(w))x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} \geq c_1 \lambda^n \|x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} \quad \forall w \in A, \quad \forall x \in E_w^u, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.11)$$

$$\|D(\Pi^n(w))x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} \leq c_2 \mu^n \|x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} \quad \forall w \in A, \quad \forall x \in E_w^s, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.12)$$

Еще одно определение, касающееся множества (1.5), характеризует его динамические свойства, т.е. поведение траекторий диффеоморфизма $\Pi|_A$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. $\Pi|_A$ – *топологическое перемешивание*, если для любых двух непустых множеств $U, V \subset A$, открытых в топологии пространства (A, ρ) , существует такое натуральное $n_0 = n_0(U, V)$, что $\Pi^n(U) \cap V \neq \emptyset$ при всех $n \geq n_0$.

Заключительное определение связано с геометрическими свойствами аттрактора A . Точнее говоря, мы придадим строгий смысл понятию соленоида. Для этого нам понадобится последовательность замкнутых вложенных множеств

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots, \quad (1.13)$$

где K_1 совпадает с базовым полноторием (1.2), $K_{n+1} = F_n(K_n)$, $n \geq 1$, а $F_n: K_n \rightarrow K_{n+1}$ – некоторая последовательность гомеоморфизмов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Множество $A = \bigcap_{n \geq 1} K_n$ называется *соленоидом*, если выполнены следующие условия:

а) A имеет канторовский тип, т.е. является замкнутым, совершенным и нигде не плотным;

б) для любого $n \geq 1$ ось полнотория K_{n+1} обходит $m_n \geq 2$ раз ось полнотория K_n , не образуя крюков (см. [11]).

Требование б), фигурирующее в данном определении, нуждается в дополнительных пояснениях. Для этого рассмотрим отображение окружности $\mathcal{F}_{n,v}: S \rightarrow S$, которое при любых фиксированных $n \in \mathbb{N}, v \in B$ определяется по правилу

$$\mathcal{F}_{n,v}: \varphi \rightarrow p \circ (F_n \circ F_{n-1} \circ \dots \circ F_1)(v, \varphi), \quad (1.14)$$

где $p: B \times S \rightarrow S$ – естественная проекция. Упомянутое требование означает, что при всех $n \in \mathbb{N}, v \in B$ отображение (1.14) – неособый эндоморфизм окружности степени d_n и $|d_n| = m_1 m_2 \dots m_n$ (неособый эндоморфизм – это такое непрерывное сюръективное отображение, что любое его поднятие с S на $\mathbb{R}$ строго монотонно). Добавим еще, что каждый соленоид связан, локально

несвязен и имеет топологическую размерность, равную единице (см., например, [2]).

Завершая сводку предварительных определений, введем в рассмотрение величины

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \max_{(v, \varphi) \in K} \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(v, \varphi) \right\|, & \alpha_2 &= \max_{(v, \varphi) \in K} \left\| \frac{\partial f}{\partial \varphi}(v, \varphi) \right\|, \\ \beta_1 &= \min_{(v, \varphi) \in K} \left| m + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(v, \varphi) \right|, & \beta_2 &= \max_{(v, \varphi) \in K} \left\| \frac{\partial g}{\partial v}(v, \varphi) \right\|\end{aligned}\quad (1.15)$$

(подчеркнем, что в случае β_1 берется именно минимум, а не максимум). Справедливо следующее утверждение, являющееся основным результатом данной статьи и представляющее собой гиперболический принцип кольца.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в дополнение к (1.3) выполнены неравенства

$$\alpha_1 < 1, \quad \beta_1 > 1 + \frac{\alpha_2 \beta_2}{1 - \alpha_1}. \quad (1.16)$$

Тогда максимальный аттрактор (1.5) диффеоморфизма (1.1) таков, что, во-первых, A – гиперболическое множество и соленид; во-вторых, $\Pi|_A$ – топологическое перемешивание.

Доказательство сформулированной теоремы приводится в § 2–4. Сначала мы установим существование на аттракторе A гиперболической структуры. Затем будет построено устойчивое инвариантное слоение в K . Эта конструкция позволит (путем распрямления слоев) привести диффеоморфизм (1.1) к треугольному виду и уже достаточно просто показать, что A является соленидом. И наконец, изучив свойства фактор-отображения по слоям, мы убедимся, что $\Pi|_A$ – топологическое перемешивание.

В дополнение к теореме 1 отметим, что из свойств гиперболичности, локальной максимальной (а наше множество A таковым является, поскольку оно аттрактор) и топологического перемешивания вытекают транзитивность (существование всюду плотной в A полутраектории $\Pi^n(w_0)$, $n \geq 0$, при некотором $w_0 \in A$) и равенство $\overline{\text{Per}} = A$, где Per – совокупность периодических точек из A . Таким образом, можно утверждать, что отображение Π хаотично на A в смысле Девани [12], [13].

§ 2. Существование гиперболической структуры

В настоящем параграфе убедимся в справедливости для аттрактора (1.5) разложения (1.10), где подпространства E_w^u , E_w^s инвариантны по отношению к дифференциалу (1.7) и обладают свойствами (1.11), (1.12). Кроме того, предположим, что

$$\dim E_w^u = 1, \quad \dim E_w^s = k \quad \forall w \in A. \quad (2.1)$$

Начнем с отыскания подпространства E_w^u . Поскольку в силу (2.1) оно одномерно, то будем считать, что

$$E_w^u = \left\{ \begin{pmatrix} a(w) \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad a(w) \in \mathbb{R}^k, \quad w \in A, \quad (2.2)$$

где вектор-функция $a(w)$ подлелжит определению. Далее, из инвариантности подпространства (2.2) следует, что должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} D\Pi(w) \begin{pmatrix} a(w) \\ 1 \end{pmatrix} &= \tau_a(w) \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_a(w)} \left(\frac{\partial f}{\partial v}(w)a(w) + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(w) \right) \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \tau_a(w) \begin{pmatrix} a(\Pi(w)) \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\tau_a(w) = m + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(w) + \frac{\partial g}{\partial v}(w)a(w). \quad (2.4)$$

Таким образом, $a(w)$ является решением функционального уравнения

$$a(w) = \mathcal{A}(a)(w), \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{A}(a)(w) = \frac{1}{\tau_a(\Pi^{-1}(w))} \left[\frac{\partial f}{\partial v}(\Pi^{-1}(w))a(\Pi^{-1}(w)) + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\Pi^{-1}(w)) \right]. \quad (2.6)$$

ЛЕММА 1. Уравнение (2.5) допускает решение $a = a_*(w)$, непрерывное на множестве A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $X(L)$ совокупность вектор-функций $a(w) \in C(A; \mathbb{R}^k)$, удовлетворяющих неравенству

$$\max_{w \in A} \|a(w)\| \leq L \quad (2.7)$$

с некоторой универсальной постоянной $L \geq 0$. Упомянутую константу будем считать таковой, что

$$\beta_1 - \beta_2 L > 0, \quad (2.8)$$

где β_1, β_2 – величины из (1.15). Далее, после введения метрики

$$\rho(a_1, a_2) = \max_{w \in A} \|a_1(w) - a_2(w)\| \quad (2.9)$$

множество $X(L)$ становится полным метрическим пространством. Наша ближайшая задача – показать, что при соответствующем выборе L нелинейный оператор (2.6) переводит $X(L)$ в себя и является сжимающим.

Прежде всего убедимся в корректности определения оператора (2.6). А именно, проверим, что

$$\tau_a(\Pi^{-1}(w)) \neq 0 \quad \forall a(w) \in X(L), \quad \forall w \in A.$$

Но это действительно так, поскольку в силу (2.4), (2.7), (2.8) имеем

$$|\tau_a(\Pi^{-1}(w))| \geq \beta_1 - \beta_2 L > 0. \quad (2.10)$$

Оценка (2.10), в свою очередь, приводит к выводу, что

$$\|\mathcal{A}(a)(w)\| \leq \frac{\alpha_1 L + \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2 L} \quad \forall a(w) \in X(L), \quad \forall w \in A, \quad (2.11)$$

где α_1, α_2 – постоянные из (1.15).

На следующем этапе распорядимся выбором L . В связи с этим рассмотрим квадратное уравнение

$$\beta_2 L^2 - (\beta_1 - \alpha_1)L + \alpha_2 = 0, \quad (2.12)$$

а в качестве L возьмем его наименьший неотрицательный корень $L = L_*$. Из оценок (1.16) вытекает, что заведомо $\beta_1 > \alpha_1 + 2\sqrt{\alpha_2\beta_2}$. Тем самым, уравнение (2.12) имеет на полуоси $L \geq 0$ два различных корня, причем интересующий нас корень L_* задается равенством

$$L_* = \frac{2\alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\beta_1 - \alpha_1)^2 - 4\alpha_2\beta_2}}. \quad (2.13)$$

Отметим еще, что в силу (2.12), (2.13) при $L = L_*$ выполняется априорное условие (2.8) и, более того, справедливы соотношения

$$\left(\frac{\alpha_1 L + \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2 L} - L \right) \Big|_{L=L_*} = 0, \quad \frac{d}{dL} \left(\frac{\alpha_1 L + \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2 L} \right) \Big|_{L=L_*} < 1. \quad (2.14)$$

Учитывая первое из них в (2.11), приходим к выводу, что $\mathcal{A}(X(L_*)) \subset X(L_*)$.

Заключительный этап анализа оператора (2.6) состоит в проверке факта его сжимаемости. В связи с этим фиксируем произвольно две вектор-функции $a_1(w), a_2(w) \in X(L_*)$ и заметим, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(a_1)(w) - \mathcal{A}(a_2)(w)\| &\leq \frac{1}{|\tau_1(w)|} \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(\Pi^{-1}(w)) [a_1(\Pi^{-1}(w)) - a_2(\Pi^{-1}(w))] \right\| \\ &+ \left| \frac{\tau_2(w) - \tau_1(w)}{\tau_1(w)\tau_2(w)} \right| \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(\Pi^{-1}(w)) a_2(\Pi^{-1}(w)) + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(\Pi^{-1}(w)) \right\|, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\tau_j(w) = \tau_a(\Pi^{-1}(w))|_{a=a_j}$, $j = 1, 2$. Учитывая, далее, в (2.15) оценки (2.7), (2.10) (при $L = L_*$) и вытекающее из соотношения $\Pi^{-1}(A) = A$ свойство

$$\rho(a_1(\Pi^{-1}(w)), a_2(\Pi^{-1}(w))) = \rho(a_1(w), a_2(w))$$

метрики (2.9), последовательно убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(a_1)(w) - \mathcal{A}(a_2)(w)\| &\leq q\rho(a_1, a_2) \quad \forall w \in A, \\ \rho(\mathcal{A}(a_1), \mathcal{A}(a_2)) &\leq q\rho(a_1, a_2), \end{aligned}$$

где в силу второго неравенства из (2.14)

$$q = \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \beta_2 L_*} + \frac{\beta_2(\alpha_1 L_* + \alpha_2)}{(\beta_1 - \beta_2 L_*)^2} < 1.$$

Остается воспользоваться принципом сжимающих отображений и заключить, что уравнение (2.5) имеет единственное решение $a_*(w) \in X(L_*)$. Лемма 1 доказана.

Проверим теперь выполнение для подпространства E_w^u неравенства вида (1.11). Привлекая формулы (1.9), (2.3), нетрудно показать, что

$$D(\Pi^n(w)) \begin{pmatrix} a_*(w) \\ 1 \end{pmatrix} = \tau_*(w_0) \tau_*(w_1) \cdots \tau_*(w_{n-1}) \begin{pmatrix} a_*(w_n) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_*(w) = \tau_a(w)|_{a=a_*},$$

где, напомним, $w_s = \Pi^s(w)$, $s \geq 0$. А отсюда и из (2.10) для любого $x \in E_w^u$ имеем

$$\begin{aligned} \|D(\Pi^n(w))x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} &= |\tau_*(w_0) \tau_*(w_1) \cdots \tau_*(w_{n-1})| \frac{\|a_*(w_n)\| + 1}{\|a_*(w_0)\| + 1} \|x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} \\ &\geq (\beta_1 - \beta_2 L_*)^n \frac{1 + \min_{w \in A} \|a_*(w)\|}{1 + \max_{w \in A} \|a_*(w)\|} \|x\|_{\mathbb{R}^{k+1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, требуемая оценка справедлива с константами

$$\lambda = \beta_1 - \beta_2 L_*, \quad c_1 = \frac{1 + \min_{w \in A} \|a_*(w)\|}{1 + \max_{w \in A} \|a_*(w)\|}.$$

Остается лишь добавить, что условие $\lambda > 1$ здесь выполняется (оно вытекает из неравенств (1.16)).

Обратимся, далее, к подпространству E_w^s . Поскольку согласно предположениям (2.1) оно имеет коразмерность 1, то будем считать, что

$$E_w^s = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} : (b(w), \xi) + \eta = 0 \right\}, \quad (2.16)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$, а вектор-функция $b(w)$ пока произвольна. Точнее говоря, она определяется из условия инвариантности подпространства (2.16).

Действительно, результат применения оператора $D\Pi(w)$ к любому вектору из этого подпространства задается по правилам

$$\begin{aligned} D\Pi(w) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}, \quad \bar{\xi} = \frac{\partial f}{\partial v}(w)\xi - \frac{\partial f}{\partial \varphi}(w)(b(w), \xi), \\ \bar{\eta} &= \frac{\partial g}{\partial v}(w)\xi - \left(m + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(w) \right) (b(w), \xi) \end{aligned} \quad (2.17)$$

(при получении формул (2.17) использовалось равенство $\eta = -(b(w), \xi)$). В свою очередь, компоненты $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ в силу инвариантности должны удовлетворять соотношению

$$(b(\Pi(w)), \bar{\xi}) + \bar{\eta} = 0, \quad (2.18)$$

из которого с учетом (2.17) выводим

$$\begin{aligned} &\left(b(\Pi(w)), \frac{\partial f}{\partial v}(w)\xi \right) - \left(b(\Pi(w)), \frac{\partial f}{\partial \varphi}(w) \right) (b(w), \xi) \\ &+ \frac{\partial g}{\partial v}(w)\xi - \left(m + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(w) \right) (b(w), \xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^k, \quad \forall w \in A. \end{aligned}$$

Последнее же равенство эквивалентно функциональному уравнению

$$b(w) = \mathcal{B}(b)(w), \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(b)(w) = & \left(m + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(w) \right)^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial v}(w) \right)^* b(\Pi(w)) \right. \\ & \left. - b(w) \left(b(\Pi(w)), \frac{\partial f}{\partial \varphi}(w) \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial v}(w) \right)^* \right\}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

а $*$ – операция транспонирования.

ЛЕММА 2. Уравнение (2.19) имеет решение $b = b_*(w)$, непрерывное на множестве A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при обосновании леммы 1, обозначим через $X(R)$ совокупность вектор-функций $b(w) \in C(A; \mathbb{R}^k)$, удовлетворяющих условию

$$\max_{w \in A} \|b(w)\| \leq R \quad (2.21)$$

с некоторой универсальной постоянной $R \geq 0$. Метрику в $X(R)$ определим равенством вида (2.9). Что же касается постоянной R из (2.21), то она определяется из тех же соображений, что и константа L в предыдущем случае.

Действительно, поскольку мы выбрали евклидову норму в $\mathbb{R}^k$, то автоматически

$$\left\| \left(\frac{\partial f}{\partial v}(w) \right)^* \right\| = \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(w) \right\| \leq \alpha_1, \quad \left\| \left(\frac{\partial g}{\partial v}(w) \right)^* \right\| \leq \beta_2.$$

Учитывая эти неравенства, из (2.20), (2.21) нетрудно вывести, что

$$\|\mathcal{B}(b)(w)\| \leq \frac{1}{\beta_1}(\alpha_1 R + \alpha_2 R^2 + \beta_2), \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}(b_1)(w) - \mathcal{B}(b_2)(w)\| & \leq \frac{1}{\beta_1}((\alpha_1 + \alpha_2 R)\|b_1(\Pi(w)) - b_2(\Pi(w))\| \\ & + \alpha_2 R\|b_1(w) - b_2(w)\|) \leq \frac{1}{\beta_1}(\alpha_1 + 2\alpha_2 R)\rho(b_1, b_2). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Далее, рассмотрим квадратное уравнение

$$\alpha_2 R^2 - (\beta_1 - \alpha_1)R + \beta_2 = 0, \quad (2.24)$$

получающееся из (2.12) в результате замены $L = 1/R$. Как мы уже знаем, при условиях (1.16) оно имеет на полуоси $R \geq 0$ два различных корня. В качестве R в (2.21) возьмем наименьший из них, т.е. положим

$$R = R_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \alpha_1 + \sqrt{(\beta_1 - \alpha_1)^2 - 4\alpha_2\beta_2}}. \quad (2.25)$$

Из соотношения (2.22) очевидным образом следует, что при указанном выборе R оператор (2.20) переводит полное метрическое пространство $X(R_*)$ в себя. Более того, опираясь на формулу (2.25), нетрудно увидеть, что

$$\frac{1}{\beta_1}(\alpha_1 + 2\alpha_2 R_*) < 1$$

(данное неравенство – следствие простоты корня $R = R_*$ уравнения (2.24)). Отсюда и из (2.23) заключаем, что оператор $\mathcal{B}: X(R_*) \rightarrow X(R_*)$ является сжимающим. Тем самым уравнение (2.19) имеет в пространстве $X(R_*)$ единственное решение $b = b_*(w)$. Лемма 2 доказана.

Следующий этап проверки гиперболичности аттрактора A состоит в получении для подпространства E_w^s нужного неравенства (1.12). В связи с этим обратим внимание, что в силу (2.17), (2.18)

$$D\Pi(w) \begin{pmatrix} \xi \\ -(b_*(w), \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(w)\xi \\ -(b_*(\Pi(w)), C(w)\xi) \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

где

$$C(w)\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial v}(w)\xi - \frac{\partial f}{\partial \varphi}(w)(b_*(w), \xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^k.$$

Далее, объединяя соотношения (1.9), (2.26), убеждаемся, что

$$D(\Pi^n(w)) \begin{pmatrix} \xi \\ -(b_*(w), \xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(w_{n-1})C(w_{n-2}) \cdots C(w_0)\xi \\ -(b_*(w_n), C(w_{n-1})C(w_{n-2}) \cdots C(w_0)\xi) \end{pmatrix}.$$

А отсюда, учитывая вытекающее из (2.21) (при $R = R_*$) неравенство

$$\|C(w)\| \leq \alpha_1 + \alpha_2 R_*,$$

для любого $x = \text{colon}(\xi, -(b_*(w), \xi)) \in E_w^s$ имеем

$$\begin{aligned} \|D(\Pi^n(w))x\| &\leq (1 + \|b_*(w_n)\|)(\alpha_1 + \alpha_2 R_*)^n \|x\|_{\mathbb{R}^{k+1}} \\ &\leq (1 + \max_{w \in A} \|b_*(w)\|)(\alpha_1 + \alpha_2 R_*)^n \|x\|_{\mathbb{R}^{k+1}}. \end{aligned}$$

Тем самым, требуемая оценка выполняется с константами

$$\mu = \alpha_1 + \alpha_2 R_*, \quad c_2 = 1 + \max_{w \in A} \|b_*(w)\|.$$

Что же касается неравенства $\mu < 1$, то оно гарантируется условиями (1.16).

Покажем, наконец, что фигурирующая в (1.10) сумма подпространств E_w^u , E_w^s является прямой и совпадает с $\mathbb{R}^{k+1}$. Для этого достаточно убедиться, что вектор $\text{colon}(a_*(w), 1) \notin E_w^s$ при всех $w \in A$. Но данный факт верен, поскольку в силу (2.7), (2.13), (2.21), (2.25)

$$(a_*(w), b_*(w)) + 1 \geq 1 - L_* R_* > 0.$$

Итак, существование гиперболической структуры на аттракторе (1.5) полностью обосновано. Добавим еще, что в рамках наших конструкций ослабить ограничения (1.16) не удастся. Действительно, возникающее при доказательстве лемм 1, 2 условие $\beta_1 > \alpha_1 + 2\sqrt{\alpha_2 \beta_2}$ и требования $\lambda > 1$, $\mu < 1$ в совокупности эквивалентны этим ограничениям.

§ 3. Существование устойчивого инвариантного слоения

В этом параграфе мы покажем, что через каждую точку $w_0 = (v_0, \varphi_0) \in K$ проходит единственная поверхность

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w_0) &= \{(v, \varphi) \in K : v \in B, \varphi = \Phi_*(v, v_0, \varphi_0) \pmod{2\pi}\}, \\ \Pi(\mathcal{L}(w_0)) &\subset \mathcal{L}(\Pi(w_0)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь функция $\Phi_*(v, v_0, \varphi_0)$ непрерывна по $(v, v_0, \varphi_0) \in B \times B \times \mathbb{R}$ и удовлетворяет требованиям

$$\begin{aligned} \Phi_*(v_0, v_0, \varphi_0) &= \varphi_0, \quad \Phi_*(v, v_0, \varphi_0 + 2\pi) \equiv \Phi_*(v, v_0, \varphi_0) + 2\pi, \\ |\Phi_*(v_1, v_0, \varphi_0) - \Phi_*(v_2, v_0, \varphi_0)| &\leq R_* \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in B, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $R_* \geq 0$ – некоторая универсальная константа (как будет показано в дальнейшем, она совпадает с (2.25)). Семейство

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(w_0), w_0 \in K\} \quad (3.3)$$

таких поверхностей назовем *устойчивым инвариантным слоением* в K .

ЛЕММА 3. *Инвариантное слоение (3.3), обладающее свойствами (3.1), (3.2), существует и единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По техническим причинам сначала удобно построить слоение

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \{\widetilde{\mathcal{L}}(w_0), w_0 \in \widetilde{K}\} \quad (3.4)$$

в полосе

$$\widetilde{K} = \{w = (v, \varphi) : \|v\| \leq r, \varphi \in \mathbb{R}\}, \quad (3.5)$$

инвариантное для отображения

$$\begin{aligned} \widetilde{\Pi}: \quad v &\rightarrow f(v, \varphi), \\ \varphi &\rightarrow m\varphi + g(v, \varphi), \end{aligned} \quad (3.6)$$

а затем перейти от (3.4) к (3.3) по правилу

$$\mathcal{L} = \{\sigma(\widetilde{\mathcal{L}}(w_0)), w_0 \in K\}. \quad (3.7)$$

Здесь $\sigma: \widetilde{K} \rightarrow K$ – естественная проекция, ставящая в соответствие любой точке $(v, \varphi) \in \widetilde{K}$ точку $(v, \varphi - 2\pi \lfloor \varphi/2\pi \rfloor) \in K$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть.

Для отыскания слоения (3.4) воспользуемся схемой, предложенной в работе [7]. В связи с этим фиксируем произвольно точку (v_0, φ_0) из полосы (3.5) и положим $(v_j, \varphi_j) = \widetilde{\Pi}^j((v_0, \varphi_0))$, $j = 0, 1, \dots$, где $\widetilde{\Pi}$ – отображение (3.6). Нас будут интересовать v_j, φ_j как функции переменных v_0, φ_0 . Нетрудно увидеть, что эти функции непрерывны и

$$v_j(v_0, \varphi_0 + 2\pi) \equiv v_j(v_0, \varphi_0), \quad \varphi_j(v_0, \varphi_0 + 2\pi) \equiv \varphi_j(v_0, \varphi_0) + 2\pi m^j, \quad j \geq 0. \quad (3.8)$$

Далее, рассмотрим счетное семейство пространств H_j , $j \geq 0$. А именно, будем считать, что при любом j элементами H_j являются скалярные функции $\varphi = \Phi(v, v_0, \varphi_0)$, непрерывные по $(v, v_0, \varphi_0) \in B \times B \times \mathbb{R}$ и такие, что

$$\Phi(v, v_0, \varphi_0 + 2\pi) \equiv \Phi(v, v_0, \varphi_0) + 2\pi m^j, \quad \Phi|_{v=v_j(v_0, \varphi_0)} = \varphi_j(v_0, \varphi_0), \quad (3.9)$$

$$|\Phi(v_1, v_0, \varphi_0) - \Phi(v_2, v_0, \varphi_0)| \leq R \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in B, \quad (3.10)$$

где $R \geq 0$ – универсальная константа, выбором которой распорядимся чуть позже.

Метрику в пространстве H_j зададим формулой

$$\rho(\Phi_1, \Phi_2) = \max_{(v, v_0, \varphi_0) \in B \times B \times \mathbb{R}} |\Phi_1(v, v_0, \varphi_0) - \Phi_2(v, v_0, \varphi_0)|, \quad (3.11)$$

где максимум заведомо достигается, поскольку в силу (3.9) разность $\Phi_1 - \Phi_2$ периодична по φ_0 с периодом 2π . В результате каждое из рассматриваемых пространств становится полным.

На следующем этапе построения слоения (3.4) определим отображения $T_j: H_j \rightarrow H_{j-1}$, $j \geq 1$, по правилу

$$T_j(\Phi) = \bar{\Phi}, \quad (3.12)$$

где функция $\varphi = \bar{\Phi}(v, v_0, \varphi_0)$ задает поверхность

$$\{(v, \varphi) \in \tilde{K} : \varphi = \bar{\Phi}(v, v_0, \varphi_0)\} = \tilde{\Pi}^{-1}(\{(v, \varphi) \in \tilde{K} : \varphi = \Phi(v, v_0, \varphi_0)\} \cap \tilde{\Pi}(\tilde{K})). \quad (3.13)$$

Иными словами, $\varphi = \bar{\Phi}$ удовлетворяет уравнению

$$m\varphi + g(v, \varphi) = \Phi(f(v, \varphi), v_0, \varphi_0). \quad (3.14)$$

Покажем, что при любом $\Phi \in H_j$ это уравнение однозначно разрешимо, а его решение $\varphi = \bar{\Phi}(v, v_0, \varphi_0)$ принадлежит пространству H_{j-1} .

Введем в рассмотрение функцию $\varphi = \Sigma(u, v)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in B$, определяющуюся неявным образом из уравнения

$$m\varphi + g(v, \varphi) = u.$$

Отметим, что это определение корректно, поскольку из (1.16) вытекает неравенство

$$m + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(v, \varphi) \neq 0 \quad \forall v \in B, \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}.$$

Более того, привлекая формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \Sigma(u, v) &= \left(m + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(v, \varphi) \right)^{-1} \Big|_{\varphi = \Sigma(u, v)}, \\ \frac{\partial}{\partial v} \Sigma(u, v) &= -\frac{\partial g}{\partial v}(v, \varphi) \left(m + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(v, \varphi) \right)^{-1} \Big|_{\varphi = \Sigma(u, v)}, \end{aligned}$$

нетрудно увидеть, что

$$\sup_{(u,v) \in \mathbb{R} \times B} \left| \frac{\partial}{\partial u} \Sigma(u, v) \right| \leq \frac{1}{\beta_1}, \quad \sup_{(u,v) \in \mathbb{R} \times B} \left\| \frac{\partial}{\partial v} \Sigma(u, v) \right\| \leq \frac{\beta_2}{\beta_1}. \quad (3.15)$$

Функция $\varphi = \Sigma(u, v)$ позволяет переписать интересующее нас уравнение (3.14) в эквивалентном виде

$$\varphi = \Gamma_{\Phi}(v, \varphi, v_0, \varphi_0), \quad \Gamma_{\Phi} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma(u, v)|_{u=\Phi(f(v, \varphi), v_0, \varphi_0)}. \quad (3.16)$$

Далее, обратим внимание, что в силу (3.10), (3.15) функция Γ_{Φ} из (3.16) удовлетворяет условию Липшица по переменной φ . Действительно,

$$\begin{aligned} & |\Gamma_{\Phi}(v, \varphi_1, v_0, \varphi_0) - \Gamma_{\Phi}(v, \varphi_2, v_0, \varphi_0)| \\ &= |\Sigma(\Phi(f(v, \varphi_1), v_0, \varphi_0), v) - \Sigma(\Phi(f(v, \varphi_2), v_0, \varphi_0), v)| \\ &\leq \frac{1}{\beta_1} |\Phi(f(v, \varphi_1), v_0, \varphi_0) - \Phi(f(v, \varphi_2), v_0, \varphi_0)| \leq \frac{R\alpha_2}{\beta_1} |\varphi_1 - \varphi_2|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Всюду ниже считаем, что выполнено неравенство

$$\frac{R\alpha_2}{\beta_1} < 1. \quad (3.18)$$

Тогда в силу (3.17) к уравнению (3.16) применим принцип сжимающих отображений по $\varphi \in \mathbb{R}$ (при фиксированных v, v_0, φ_0). Из этого принципа следует, что (3.16) допускает единственное решение $\varphi = \bar{\Phi}(v, v_0, \varphi_0)$, непрерывно зависящее от $(v, v_0, \varphi_0) \in B \times B \times \mathbb{R}$ (поскольку согласно (3.17), (3.18) сжатие равномерно по v, v_0, φ_0).

Покажем теперь, что $\bar{\Phi}(v, v_0, \varphi_0) \in H_{j-1}$. Для проверки свойств вида (3.9) заметим, что уравнение (3.14) не меняется при преобразованиях

$$\varphi_0 \rightarrow \varphi_0 + 2\pi, \quad \varphi \rightarrow \varphi + 2\pi m^{j-1}$$

и обращается в верное равенство при $\varphi = \varphi_{j-1}(v_0, \varphi_0)$, $v = v_{j-1}(v_0, \varphi_0)$. Тем самым для $\bar{\Phi}(v, v_0, \varphi_0)$ имеют место соотношения, получающиеся из (3.9) при замене j на $j-1$.

Проверим далее, что функция $\varphi = \bar{\Phi}(v, v_0, \varphi_0)$ по переменной v удовлетворяет условию Липшица. В связи с этим фиксируем произвольно $v_1, v_2 \in B$ и положим $\varphi_j = \bar{\Phi}(v_j, v_0, \varphi_0)$, $j = 1, 2$. Тогда, опираясь на (3.15)–(3.18), имеем

$$\begin{aligned} |\varphi_1 - \varphi_2| &= |\Gamma_{\Phi}(v_1, \varphi_1, v_0, \varphi_0) - \Gamma_{\Phi}(v_2, \varphi_2, v_0, \varphi_0)| \\ &= |\Sigma(\Phi(f(v_1, \varphi_1), v_0, \varphi_0), v_1) - \Sigma(\Phi(f(v_2, \varphi_2), v_0, \varphi_0), v_2)| \\ &\leq \frac{1}{\beta_1} |\Phi(f(v_1, \varphi_1), v_0, \varphi_0) - \Phi(f(v_2, \varphi_2), v_0, \varphi_0)| + \frac{\beta_2}{\beta_1} \|v_1 - v_2\| \\ &\leq \frac{1}{\beta_1} (R\alpha_1 \|v_1 - v_2\| + R\alpha_2 |\varphi_1 - \varphi_2|) + \frac{\beta_2}{\beta_1} \|v_1 - v_2\|, \\ &|\varphi_1 - \varphi_2| \leq \frac{R\alpha_1 + \beta_2}{\beta_1 - R\alpha_2} \|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

Таким образом, требуемое включение $\overline{\Phi}(v, v_0, \varphi_0) \in H_{j-1}$ будет заведомо выполняться в случае, когда постоянная R из (3.10) удовлетворяет уравнению

$$\frac{R\alpha_1 + \beta_2}{\beta_1 - R\alpha_2} = R \quad (3.19)$$

и неравенству (3.18).

Нетрудно заметить, что уравнение (3.19) эквивалентно уже рассмотренному ранее уравнению (2.24). Поэтому, как и выше, в качестве R выберем его наименьший положительный корень (2.25). Тогда априорное условие (3.18) справедливо автоматически.

Итак, мы построили счетное семейство пространств H_j , $j \geq 0$, и отображений T_j , $j \geq 1$, причем

$$H_0 \xleftarrow{T_1} H_1 \xleftarrow{T_2} \dots \xleftarrow{T_j} H_j \xleftarrow{T_{j+1}} H_{j+1} \xleftarrow{T_{j+2}} \dots \quad (3.20)$$

Далее, следуя [7], попытаемся применить к спектру (3.20) пространств H_j и отображений T_j специальный вариант принципа сжимающих отображений, предложенный в статье [14]. Но для этого предварительно убедимся, что каждое из отображений T_j является сжимающим. Точнее говоря, проверим выполнение неравенства

$$\rho(T_j(\Phi_1), T_j(\Phi_2)) \leq q\rho(\Phi_1, \Phi_2) \quad \forall \Phi_1, \Phi_2 \in H_j \quad (3.21)$$

с некоторой универсальной (не зависящей от j) постоянной $q \in (0, 1)$.

Для доказательства оценки (3.21) фиксируем произвольно две функции $\Phi_1, \Phi_2 \in H_j$ и положим $\overline{\Phi}_1 = T_j(\Phi_1)$, $\overline{\Phi}_2 = T_j(\Phi_2)$. Далее, остановимся на зависимости от Φ функции Γ_Φ из (3.16). Нетрудно увидеть, что

$$\begin{aligned} & |\Gamma_{\Phi_1}(v, \varphi, v_0, \varphi_0) - \Gamma_{\Phi_2}(v, \varphi, v_0, \varphi_0)| \\ &= |\Sigma(\Phi_1(f(v, \varphi), v_0, \varphi_0), v) - \Sigma(\Phi_2(f(v, \varphi), v_0, \varphi_0), v)| \leq \frac{1}{\beta_1} \rho(\Phi_1, \Phi_2), \end{aligned}$$

где ρ – метрика (3.11). Объединяя это свойство с (3.17) (при $R = R_*$), приходим к цепочке неравенств

$$\begin{aligned} & |\overline{\Phi}_1(v, v_0, \varphi_0) - \overline{\Phi}_2(v, v_0, \varphi_0)| = |\Gamma_{\Phi_1}(v, \overline{\Phi}_1, v_0, \varphi_0) - \Gamma_{\Phi_2}(v, \overline{\Phi}_2, v_0, \varphi_0)| \\ & \leq \frac{1}{\beta_1} \rho(\Phi_1, \Phi_2) + \frac{R_*\alpha_2}{\beta_1} |\overline{\Phi}_1(v, v_0, \varphi_0) - \overline{\Phi}_2(v, v_0, \varphi_0)| \\ & \leq \frac{1}{\beta_1} \rho(\Phi_1, \Phi_2) + \frac{R_*\alpha_2}{\beta_1} \rho(\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2). \end{aligned}$$

А отсюда заключаем, что оценка (3.21) имеет место с константой

$$q = \frac{1}{\beta_1 - R_*\alpha_2} < 1 \quad (3.22)$$

(данное неравенство – следствие условий (1.16)).

На завершающем этапе построения слоения (3.4) рассмотрим пространство $H = \prod_{j=0}^{\infty} H_j$, элементами которого являются последовательности

$$x = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_j, \dots), \quad \Phi_j \in H_j, \quad j \geq 0. \quad (3.23)$$

Метрику в нем зададим формулой

$$\rho(x_1, x_2) = \sup_{j \geq 0} \rho(\Phi_j^1, \Phi_j^2), \quad (3.24)$$

где $x_s = (\Phi_0^s, \Phi_1^s, \dots)$, $s = 1, 2$, – последовательности вида (3.23). Подчеркнем, что правая часть формулы (3.24) заведомо конечна, так как

$$\sup_{\Phi_1, \Phi_2 \in H_j} \rho(\Phi_1, \Phi_2) \leq 4rR_* < \infty,$$

где r – постоянная из (1.2). Действительно, разность $\Phi_1 - \Phi_2$ удовлетворяет условию Липшица с константой $2R_*$ и $(\Phi_1 - \Phi_2)|_{v=v_j(v_0, \varphi_0)} = 0$. Тем самым,

$$\begin{aligned} |\Phi_1(v, v_0, \varphi_0) - \Phi_2(v, v_0, \varphi_0)| &= |(\Phi_1(v, v_0, \varphi_0) - \Phi_2(v, v_0, \varphi_0)) \\ &\quad - (\Phi_1(v_j(v_0, \varphi_0), v_0, \varphi_0) - \Phi_2(v_j(v_0, \varphi_0), v_0, \varphi_0))| \leq 2R_* \|v - v_j\| \leq 4rR_*. \end{aligned}$$

Добавим еще, что определенное таким способом метрическое пространство H полно.

Последовательность T_j естественным образом порождает в пространстве H оператор $T: H \rightarrow H$, действующий на произвольный элемент (3.23) по правилу

$$Tx = (T_1(\Phi_1), T_2(\Phi_2), \dots, T_j(\Phi_j), \dots). \quad (3.25)$$

Несложная проверка, опирающаяся на соотношения (3.21), (3.24), показывает, что оператор (3.25) является сжимающим с константой сжатия (3.22). Следовательно, он допускает в H единственную неподвижную точку

$$x_* = (\Phi_0^*, \Phi_1^*, \dots, \Phi_j^*, \dots), \quad \Phi_{j-1}^* = T_j(\Phi_j^*), \quad j \geq 1. \quad (3.26)$$

Итак, положим $\Phi_*(v, v_0, \varphi_0) = \Phi_0^*(v, v_0, \varphi_0)$, где Φ_0^* – первая компонента вектора (3.26), и введем в рассмотрение поверхность

$$\widetilde{\mathcal{L}}(w_0) = \{(v, \varphi) \in \widetilde{K} : \varphi = \Phi_*(v, v_0, \varphi_0)\}, \quad w_0 \in \widetilde{K}. \quad (3.27)$$

По своему построению функция $\Phi_*(v, v_0, \varphi_0)$ удовлетворяет соотношениям (3.2). Далее, из формул (3.12), (3.13), (3.26) следует, что поверхности (3.27) инвариантны, т.е.

$$\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mathcal{L}}(w_0)) \subset \widetilde{\mathcal{L}}(\widetilde{\Pi}(w_0)) \quad \forall w_0 \in \widetilde{K}.$$

Кроме того, в силу единственности вектора (3.26) через каждую точку $w_0 \in \widetilde{K}$ проходит ровно одна такая поверхность. А это значит, что в полосе (3.5) мы построили требуемое слоение (3.4), инвариантное для оператора (3.6). Остается воспользоваться формулой (3.7) и получить искомое слоение (3.3) в кольце K . Лемма 3 доказана.

Следующее утверждение проясняет смысл термина “устойчивое” применительно к слоению (3.3).

ЛЕММА 4. *Для любых двух точек w_1, w_2 из K , принадлежащих одному и тому же слою $\mathcal{L}(w_0)$, справедливо предельное равенство*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(\Pi^n(w_1), \Pi^n(w_2)) = 0. \quad (3.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что любой слой $\mathcal{L}(w_0)$ пересекает ось $\{(v, \varphi) : v = 0\}$ полнотория K в единственной точке $(0, \psi)$, где $\psi = \Phi_*(0, v_0, \varphi_0) \pmod{2\pi}$. А это значит, что мы можем параметризовать слоение (3.3) с помощью одного скалярного параметра $\psi \in S$. Точнее говоря, справедливо равенство

$$\{\mathcal{L}(w_0), w_0 \in K\} = \{\mathcal{L}_\psi, \psi \in S\}, \quad (3.29)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi &= \{(v, \varphi) \in K : \varphi = \psi + h_*(v, \psi) \pmod{2\pi}\}, \\ h_*(v, \psi) &= \Phi_*(v, 0, \psi) - \psi. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Заметим еще, что в силу (3.2) фигурирующая в (3.30) непрерывная по совокупности переменных $(v, \psi) \in B \times \mathbb{R}$ функция $h_*(v, \psi)$ такова, что

$$\begin{aligned} h_*(v, \psi + 2\pi) &\equiv h_*(v, \psi), \quad h_*(0, \psi) \equiv 0, \\ |h_*(v_1, \psi) - h_*(v_2, \psi)| &\leq R_* \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in B. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Убедимся далее, что функция $\varphi = \psi + h_*(v, \psi)$ при любом $v \in B$ строго монотонна по $\psi \in \mathbb{R}$. Действительно, предположим, что

$$\varphi = \psi_1 + h_*(v, \psi_1) = \psi_2 + h_*(v, \psi_2)$$

при некоторых $\psi_1 \neq \psi_2$. Тогда точка $(v, \varphi) \in \tilde{K}$ принадлежит двум различным слоям $\tilde{\mathcal{L}}_{\psi_1}$ и $\tilde{\mathcal{L}}_{\psi_2}$ из $\tilde{K}$ (эти слои определяются равенствами вида (3.30), в которых K заменено на $\tilde{K}$). Но, как мы уже знаем (см. доказательство предыдущей леммы), слои, проходящие через одну и ту же точку, должны совпадать. Тем самым, с необходимостью $\psi_1 = \psi_2$, что противоречит исходной посылке.

Из проделанного анализа следует, что отображение

$$\gamma: (v, \varphi) \rightarrow (v, \varphi + h_*(v, \varphi)) \quad (3.32)$$

является гомеоморфизмом кольца K , а обратное к нему имеет вид

$$\gamma^{-1}: (v, \varphi) \rightarrow (v, \varphi + \Delta_*(v, \varphi)), \quad (3.33)$$

где функция $\Delta_*(v, \varphi)$, $\Delta_*(0, \varphi) \equiv 0$, $\Delta_*(v, \varphi + 2\pi) \equiv \Delta_*(v, \varphi)$ непрерывна по совокупности переменных. Далее, опираясь на соотношения (3.32), (3.33), выполним в исходном отображении (1.1) замену

$$\varphi = \psi + h_*(v, \psi), \quad \psi \rightarrow \varphi, \quad (3.34)$$

“распрямляющую” слоение (3.29). В результате для оператора $\Pi_* = \gamma^{-1} \circ \Pi \circ \gamma$ получается треугольное представление вида

$$\Pi_*: \begin{aligned} v &\rightarrow f_*(v, \varphi), \\ \varphi &\rightarrow g_*(\varphi) \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где

$$\begin{aligned} f_*(v, \varphi) &= f(v, \varphi + h_*(v, \varphi)), \\ g_*(\varphi) &= m\varphi + g(0, \varphi) + \Delta_*(f(0, \varphi), m\varphi + g(0, \varphi)). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Отметим еще, что в силу свойств (3.31) выполняется неравенство

$$\|f_*(v_1, \varphi) - f_*(v_2, \varphi)\| \leq q\|v_1 - v_2\| \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}, \quad \forall v_1, v_2 \in B \quad (3.37)$$

с константой

$$q = \alpha_1 + R_*\alpha_2 < 1 \quad (3.38)$$

(оценка (3.38) вытекает из (1.16), (2.25)).

Полученная информация уже без труда позволяет обосновать требуемое предельное равенство (3.28). Действительно, после замены (3.34) слоение (3.29) распрямится, т.е. каждый отдельно взятый слой примет вид

$$\mathcal{L}_\psi = \{(v, \varphi) \in K : \varphi = \psi \pmod{2\pi}\}. \quad (3.39)$$

Тем самым для любых двух точек $w_j = (v_j, \varphi_j)$, $j = 1, 2$, принадлежащих слою (3.39), выполняется соотношение $\varphi_1 = \varphi_2 = \psi \pmod{2\pi}$. А отсюда и из (3.35), в свою очередь, следует, что для соответствующих полутраекторий $(v_n^j, \varphi_n^j) = \Pi_*^n(w_j)$, $j = 1, 2$, $n \geq 0$, справедливы равенства $\varphi_n^1 = \varphi_n^2 \pmod{2\pi}$, $n \geq 0$. Что же касается координат v_n^1, v_n^2 , то для них из (3.37), (3.38) имеем

$$\begin{aligned} \|v_n^1 - v_n^2\| &= \|f_*(v_{n-1}^1, \varphi_{n-1}^1) - f_*(v_{n-1}^2, \varphi_{n-1}^2)\| \\ &= \|f_*(v_{n-1}^1, \varphi_{n-1}^1) - f_*(v_{n-1}^2, \varphi_{n-1}^1)\| \leq q\|v_{n-1}^1 - v_{n-1}^2\|, \\ \|v_n^1 - v_n^2\| &\leq q^n\|v_1 - v_2\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Итак, равенство вида (3.28) установлено для отображения Π_* . А поскольку $\Pi = \gamma \circ \Pi_* \circ \gamma^{-1}$, где γ – гомеоморфизм (3.32), то оно сохранится и для исходного диффеоморфизма Π . Более того, опираясь на условие Липшица по v , которому удовлетворяет функция $h_*(v, \psi)$ (см. (3.31)), нетрудно убедиться, что стремление к нулю в (3.28) происходит с экспоненциальной скоростью. Лемма 4 доказана.

Перед формулировкой очередной леммы напомним, что устойчивым многообразием точки w_0 , принадлежащей аттрактору (1.5), называется множество

$$W^s(w_0) = \{w \in K : \rho(\Pi^n(w), \Pi^n(w_0)) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty\}. \quad (3.40)$$

ЛЕММА 5. *Для любой точки $w_0 \in A$ ее устойчивое многообразие (3.40) задается равенством*

$$W^s(w_0) = \bigcup_{n \geq 0} \Pi^{-n}[\mathcal{L}(\Pi^n(w_0))]. \quad (3.41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно из работ [2]–[4], [10], для гиперболического инвариантного множества A связная компонента многообразия (3.40), содержащая точку w_0 , локально (т.е. в некоторой достаточно малой окрестности этой точки) является C^1 -гладкой поверхностью размерности $k = \dim E_{w_0}^s$ (см. (2.1)), касающейся в точке w_0 подпространства $E_{w_0}^s$. Точнее говоря, в нашем случае найдется такое достаточно малое $\delta > 0$, что для любой $w_0 = (v_0, \varphi_0) \in A$ соответствующая локальная компонента $W_\delta^s(w_0) \subset W^s(w_0)$ имеет вид

$$W_\delta^s(w_0) = \{(v, \varphi) \in K : \varphi = \Psi_*(v, v_0, \varphi_0) \pmod{2\pi}, v \in B_\delta(v_0)\}, \quad (3.42)$$

где $B_\delta(v_0) = \{v \in \mathbb{R}^k : \|v - v_0\| \leq \delta\} \subset B$, функция $\Psi_*(v, v_0, \varphi_0)$ непрерывна по совокупности переменных (v, v_0, φ_0) вместе со своей производной по v и $\Psi_*(v_0, v_0, \varphi_0) = \varphi_0$, $\text{grad}_v \Psi_*(v_0, v_0, \varphi_0) = -b_*(w_0)$ ($b_*(w)$ – вектор-функция, фигурирующая в определении подпространства E_w^s). Напомним также, что полное многообразие (3.40) получается из (3.42) по известному правилу

$$W^s(w_0) = \bigcup_{n \geq 0} \Pi^{-n}[W_\delta^s(\Pi^n(w_0))]. \quad (3.43)$$

Наряду с (3.42) рассмотрим соответствующий локальный кусок слоя (3.1), проходящего через точку $w_0 \in A$. А именно, положим

$$\mathcal{L}_\delta(w_0) = \{(v, \varphi) \in K : \varphi = \Phi_*(v, v_0, \varphi_0) \pmod{2\pi}, v \in B_\delta(v_0)\}. \quad (3.44)$$

Из леммы 4 следует, что с необходимостью $\mathcal{L}(w_0) \subset W^s(w_0)$ и, в частности, $\mathcal{L}_\delta(w_0) \subset W_\delta^s(w_0)$. Таким образом, для любых $(v_0, \varphi_0) \in A$, $v \in B_\delta(v_0)$ автоматически имеем $\Phi_*(v, v_0, \varphi_0) = \Psi_*(v, v_0, \varphi_0) \pmod{2\pi}$, а значит, на самом деле $\mathcal{L}_\delta(w_0) = W_\delta^s(w_0)$.

Обратимся далее к формуле (3.43). В силу сказанного выше мы вправе заменить в ней локальную компоненту (3.42) на (3.44) или даже на более широкое множество $\mathcal{L}(w_0)$. В результате получится искомое равенство (3.41). Лемма 5 доказана.

Установленное равенство нуждается в некоторых пояснениях. Проблема здесь заключается в том, что отображение Π^{-n} определено не на всем слое $\mathcal{L}(\Pi^n(w_0))$, а лишь на множестве $\mathcal{L}(\Pi^n(w_0)) \cap \Pi^n(K)$. Это множество состоит из $|m|^n$ связных компонент. Тем самым, полный прообраз $\Pi^{-n}[\mathcal{L}(\Pi^n(w_0))]$ представляет собой объединение прообразов всех упомянутых компонент.

Следующая лемма касается простейших свойств фигурирующей в (3.36) функции $g_*(\varphi)$.

ЛЕММА 6. *Функция $g_*(\varphi)$ строго монотонна по $\varphi \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет равенству $g_*(\varphi + 2\pi) \equiv g_*(\varphi) + 2\pi t$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственно говоря, в обосновании нуждается лишь факт строгой монотонности (второе утверждение очевидно). Для проверки же монотонности предположим противное: найдутся такие $\psi_1 \neq \psi_2$, что

$$g_*(\psi_1) = g_*(\psi_2) = \bar{\psi}. \quad (3.45)$$

Для того чтобы получить противоречие, воспользуемся некоторыми геометрическими соображениями. В связи с этим в полосе (3.5) рассмотрим слои $\widetilde{\mathcal{L}}_\psi$, $\psi \in \mathbb{R}$, являющиеся поднятиями слоев (3.30) с K на $\widetilde{K}$, и заметим, что

$$\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mathcal{L}}_\psi) \subset \widetilde{\mathcal{L}}_{g_*(\psi)}, \quad (3.46)$$

где $\widetilde{\Pi}$ – отображение (3.6). Действительно, после распрямления слоев $\widetilde{\mathcal{L}}_\psi$ для отображения

$$\widetilde{\Pi}_*: \begin{array}{l} v \rightarrow f_*(v, \varphi), \\ \varphi \rightarrow g_*(\varphi) \end{array}$$

включение (3.46) очевидно. А поскольку $h_*(0, \psi) \equiv 0$ (см. (3.31)), то при обращении замены (3.34) оно сохраняется и для $\widetilde{\Pi}$.

Дальнейший способ действий таков. Рассмотрим точки $(v_j, \bar{\psi}_j) = \widetilde{\Pi}((0, \psi_j))$, $j = 1, 2$. Из свойства инвариантности слоения (3.4) вытекает, что

$$\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mathcal{L}}_{\psi_j}) \subset \{(v, \varphi) : \varphi = \Phi_*(v, v_j, \bar{\psi}_j)\}, \quad j = 1, 2.$$

Но в то же время в силу (3.45), (3.46) имеем

$$\widetilde{\Pi}(\widetilde{\mathcal{L}}_{\psi_j}) \subset \{(v, \varphi) : \varphi = \bar{\psi} + h_*(v, \bar{\psi})\}, \quad j = 1, 2.$$

А отсюда и из свойства единственности слоя, проходящего через какую-либо выбранную точку, заключаем, что

$$\Phi_*(v, v_1, \bar{\psi}_1) = \Phi_*(v, v_2, \bar{\psi}_2) = \bar{\psi} + h_*(v, \bar{\psi}) \quad \forall v \in B. \quad (3.47)$$

На завершающем этапе доказательства обратимся к оператору T_1 , определенному формулами (3.12), (3.13), и заметим, что в силу свойства $T_1(\Phi_1^*) = \Phi_0^*$ компонент из (3.26) выполняется равенство $T_1(\Phi_*(v, v_1, \varphi_1)) = \Phi_*(v, v_0, \varphi_0)$, где $(v_1, \varphi_1) = \widetilde{\Pi}((v_0, \varphi_0))$. Применяя его к (3.47), убеждаемся, что

$$\begin{aligned} T_1(\Phi_*(v, v_j, \bar{\psi}_j)) &= \psi_j + h_*(v, \psi_j), \quad j = 1, 2, \\ \psi_1 + h_*(v, \psi_1) &= \psi_2 + h_*(v, \psi_2) \quad \forall v \in B. \end{aligned} \quad (3.48)$$

И наконец, полагая во втором соотношении (3.48) $v = 0$ и принимая во внимание тождество $h_*(0, \psi) \equiv 0$, приходим к выводу, что $\psi_1 = \psi_2$. А это противоречит исходному предположению $\psi_1 \neq \psi_2$. Лемма 6 доказана.

Полученной информации уже достаточно для того, чтобы разобраться с геометрической структурой множества (1.5). Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 7. *Аттрактор A является соленоидом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала, что соленоидом будет аттрактор

$$A_* = \bigcap_{n \geq 0} \Pi_*^n(K) \quad (3.49)$$

отображения (3.35). В связи с этим в качестве последовательности замкнутых вложенных множеств (1.13) возьмем $K_n = \Pi_*^{n-1}(K)$, а все гомеоморфизмы $F_n: K_n \rightarrow K_{n+1}$ положим равными Π_* . Убедимся, далее, что в нашем случае выполняются требования а) и б) из определения 5.

Действительно, множество (3.49) как пересечение убывающей последовательности замкнутых и связных множеств K_n само замкнуто и связно, а значит, совершенно. Покажем теперь, что оно нигде не плотно в K . С этой целью воспользуемся представлением

$$A_* = \bigcup_{\varphi \in S} A_\varphi \times \{\varphi\}, \quad (3.50)$$

где $A_\varphi \subset B$ – сечение A_* (образ множества $A_* \cap (B \times \{\varphi\})$ при естественной проекции $(v, \varphi) \rightarrow v$). Требуемое свойство будет заведомо выполняться, если мы убедимся, что при любом $\varphi \in S$ сечение A_φ является вполне разрывным множеством.

Предположим противное: существует такое $\varphi_0 \in S$, что отвечающее ему сечение A_{φ_0} содержит связное подмножество $B_0 \subset B$, состоящее более чем из одной точки. Далее, фиксируем две точки $v_1, v_2 \in B_0$, $v_1 \neq v_2$ и рассмотрим соответствующие им отрицательные полутраектории

$$(v_{-n,1}, \varphi_{-n,0}) = \Pi_*^{-n}((v_1, \varphi_0)), \quad (v_{-n,2}, \varphi_{-n,0}) = \Pi_*^{-n}((v_2, \varphi_0)). \quad (3.51)$$

Заметим, что, во-первых, последовательности (3.51) определены при всех $n \geq 0$, поскольку точки (v_j, φ_0) , $j = 1, 2$, принадлежат аттрактору (3.50); во-вторых, у них одинаковые (по модулю 2π) вторые компоненты $\varphi_{-n,0}$, так как прообразы $\Pi_*^{-n}(B_0 \times \{\varphi_0\})$ связного множества $B_0 \times \{\varphi_0\}$ связны и в силу треугольной структуры отображения (3.35) целиком лежат в соответствующих слоях $\varphi = \text{const} \pmod{2\pi}$. А отсюда и из неравенств (3.37), (3.38) вытекает (см. аналогичное место в доказательстве леммы 4), что

$$\|v_1 - v_2\| \leq q^n \|v_{-n,1} - v_{-n,2}\| \leq 2rq^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, имеем $v_1 = v_2$, что противоречит исходному допущению.

Проверка условия б) из определения 5 также не вызывает затруднений. Действительно, в нашем случае отображение $\mathcal{F}_{n,v}$ не зависит от v и имеет вид

$$\varphi \rightarrow g_*^n(\varphi) \pmod{2\pi}; \quad (3.52)$$

здесь и далее через g_*^n обозначается суперпозиция из n отображений

$$\varphi \rightarrow g_*(\varphi) \pmod{2\pi}. \quad (3.53)$$

Остается заметить, что в силу леммы 6 отображение (3.53) является неособым эндоморфизмом степени m . Тем самым, неособым будет и эндоморфизм (3.52), а его степень задается равенством $d_n = m^n$.

Итак, мы показали, что аттрактор (3.49) отображения (3.35) представляет собой соленоид. Следовательно, соленоидальную структуру имеет и исходный аттрактор A , поскольку $A = \gamma(A_*)$, где γ – гомеоморфизм (3.32). Лемма 7 доказана.

§ 4. Завершение доказательства теоремы 1

Для того чтобы завершить доказательство теоремы 1, осталось показать, что $\Pi|_A$ – топологическое перемешивание. В связи с этим изучим более детально свойства эндоморфизма (3.53).

Предположим, что $\varphi_0 \in S$ – периодическая точка отображения (3.53) периода n_0 , т.е. $g_*^{n_0}(\varphi_0) = \varphi_0 \pmod{2\pi}$. Будем называть эту точку отталкивающей, если она является аттрактором (в смысле определения 2) для $(g_*^{n_0})^{-1}$. Подчеркнем, что поскольку g_* – локальный гомеоморфизм, то отображение $(g_*^{n_0})^{-1}$ заведомо определено в некоторой окрестности $U \subset S$ точки $\varphi = \varphi_0$.

ЛЕММА 8. *Любая периодическая точка эндоморфизма (3.53) отталкивающая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним сначала некоторые известные результаты из гиперболической теории из работ [2]–[4], [10]. А именно, для любой точки $w_0 \in A$ рассмотрим ее неустойчивое многообразие

$$W^u(w_0) = \{w \in A : \rho(\Pi^{-n}(w), \Pi^{-n}(w_0)) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty\}. \quad (4.1)$$

Заметим, что в отличие от (3.40) здесь мы предполагаем, что $w \in A$. Это не ограничивает общности, так как гиперболический аттрактор A вместе с любой своей точкой целиком включает ее неустойчивое многообразие. Далее, известно, что связная компонента множества (4.1), содержащая точку $w_0 = (v_0, \varphi_0)$, допускает аналогичное (3.42) локальное представление

$$W_\delta^u(w_0) = \{(v, \varphi) \in K : v = V_*(\varphi, v_0, \varphi_0), |\varphi - \varphi_0| \leq \delta\}, \quad (4.2)$$

где $\delta > 0$ – некоторая универсальная (не зависящая от $w_0 \in A$) постоянная, вектор-функция $V_*(\varphi, v_0, \varphi_0)$ непрерывна по $(\varphi, v_0, \varphi_0)$ вместе со своей производной по φ и

$$V_*(\varphi_0, v_0, \varphi_0) = v_0, \quad V_*(\varphi, v_0, \varphi_0 + 2\pi) \equiv V_*(\varphi, v_0, \varphi_0), \quad \left. \frac{\partial V_*}{\partial \varphi} \right|_{(\varphi_0, v_0, \varphi_0)} = a_*(w_0)$$

($a_*(w)$ – вектор-функция, определяющая подпространство E_w^u). В дальнейшем нам потребуется еще свойство инвариантности

$$\Pi(W_\delta^u(w_0)) \subset W_{\delta'}^u(\Pi(w_0)), \quad (4.3)$$

где постоянная $\delta' > 0$ также универсальна, т.е. не зависит от $w_0 \in A$.

Приступим теперь непосредственно к доказательству леммы. Предположим, что отображение (3.53) имеет некоторую периодическую точку φ_0 периода n_0 . Тогда в силу соотношений (3.35), (3.37), (3.38) отображение $\Pi_*^{n_0}$ переводит слой $\{(v, \varphi) \in K : v \in B, \varphi = \varphi_0\}$ в себя и является в нем сжимающим. Тем самым оно имеет в указанном слое единственную неподвижную точку $w_0 = (v_0, \varphi_0) \in A_*$, где A_* – аттрактор (3.49). Далее, нетрудно увидеть, что

точка $w_1 = (v_1, \varphi_1)$, где $w_1 = \gamma(w_0)$, γ – гомеоморфизм (3.32), является периодической для Π с тем же периодом n_0 . В свою очередь, этот факт вместе со свойством инвариантности (4.3) позволяет в некоторой достаточно малой окрестности точки $\varphi = \varphi_1$ определить одномерное отображение $\varphi \rightarrow G(\varphi) \pmod{2\pi}$, индуцированное отображением Π^{n_0} на многообразии $W_\delta^u(w_1)$. Что же касается отображения $g_*^{n_0}$, то оно локально (в окрестности точки $\varphi = \varphi_0$) индуцировано отображением $\Pi_*^{n_0}$ на инвариантном множестве $\gamma^{-1}(W_\delta^u(w_1))$.

Из неравенства (1.11) следует, что $\varphi = \varphi_1$ – отталкивающая неподвижная точка для G . А поскольку (в силу топологической сопряженности операторов Π^{n_0} и $\Pi_*^{n_0}$) отображения G и $g_*^{n_0}$ локально топологически сопряжены (т.е. сопряжены в окрестностях точек $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_0$ соответственно), то $\varphi = \varphi_0$ – отталкивающая неподвижная точка для $g_*^{n_0}$. Лемма 8 доказана.

Опираясь на установленную лемму, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

ЛЕММА 9. *Эндоморфизм (3.53) топологически сопряжен с линейным эндоморфизмом окружности*

$$g_m: \varphi \rightarrow m\varphi \pmod{2\pi}. \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно известному результату М. Шуба (см. [15]) найдется такое неубывающее непрерывное отображение

$$\varphi \rightarrow \varkappa(\varphi), \quad \varkappa(\varphi + 2\pi) \equiv \varkappa(\varphi) + 2\pi, \quad (4.5)$$

что

$$\varkappa \circ g_* = g_m \circ \varkappa. \quad (4.6)$$

Точнее говоря, в [15] существование полусопрягающего отображения (4.5) установлено при условиях $g_* \in C^1$ и $g'_* \neq 0$. Но, как известно, данный факт сохраняется для произвольного неособого непрерывного эндоморфизма степени m .

Действительно, привлекая поднятие $g_m(\varphi) = m\varphi$ эндоморфизма (4.4), перепишем равенство (4.6) в форме

$$\varkappa(\varphi) = \frac{1}{m} \varkappa(g_*(\varphi)).$$

Обозначим затем через $\mathcal{T}$ оператор, порожденный правой частью этого уравнения в полном метрическом пространстве $\mathcal{H}$, состоящем из непрерывных по $\varphi \in \mathbb{R}$ неубывающих функций $\varkappa(\varphi)$ вида (4.5). Метрику в $\mathcal{H}$ зададим соотношением

$$\rho(\varkappa_1, \varkappa_2) = \max_{\varphi \in \mathbb{R}} |\varkappa_1(\varphi) - \varkappa_2(\varphi)|$$

(максимум здесь заведомо достигается, так как в силу (4.5) разность $\varkappa_1 - \varkappa_2$ периодична с периодом 2π). Нетрудно увидеть, что оператор $\mathcal{T}$ переводит $\mathcal{H}$ в себя и является сжимающим с константой сжатия $q = 1/|m| < 1$. Тем самым он допускает в указанном пространстве единственную неподвижную точку.

Возвращаясь к доказательству леммы, убедимся сначала, что между периодическими точками диффеоморфизмов (3.53) и (4.4) имеет место взаимно однозначное соответствие. В самом деле, если ψ_0 – периодическая точка g_m периода n_0 и полный прообраз $\varkappa^{-1}(\psi_0)$ состоит из одной точки φ_0 , то тогда в силу вытекающего из (4.6) соотношения

$$\varkappa \circ g_*^{n_0} = g_m^{n_0} \circ \varkappa \quad (4.7)$$

выполняется равенство $g_*^{n_0}(\varphi_0) = \varphi_0 \pmod{2\pi}$. Предположим теперь, что

$$\varkappa^{-1}(\psi_0) = [\varphi_1, \varphi_2] \subset S, \quad [\varphi_1, \varphi_2] \neq S$$

(случай $[\varphi_1, \varphi_2] = S$ противоречит свойству (4.5)). Тогда согласно (4.7)

$$g_*^{n_0}([\varphi_1, \varphi_2]) = [\varphi_1, \varphi_2]. \quad (4.8)$$

Далее, переходя (если это необходимо) от равенства (4.8) к вытекающему из него соотношению $g_*^{2n_0}([\varphi_1, \varphi_2]) = [\varphi_1, \varphi_2]$, без ограничения общности будем считать, что $g_*^{n_0}$ не убывает на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$. Но поскольку в силу леммы 8 все неподвижные точки отображения $g_*^{n_0}$ отталкивающие, то равенство (4.8) невозможно по очевидным топологическим причинам. Тем самым, с необходимостью $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$.

Верно и обратное утверждение: если $g_*^{n_0}(\varphi_0) = \varphi_0 \pmod{2\pi}$, то в силу (4.7) точка $\psi_0 = \varkappa(\varphi_0)$ периодическая с периодом n_0 для g_m .

Рассмотрим теперь интервалы постоянства (если таковые имеются) функции $\varkappa(\varphi)$ из (4.5), лежащие на окружности S , и пусть (φ_1, φ_2) – один из них. Покажем, что

$$(\varphi_1, \varphi_2) \cap g_*^n((\varphi_1, \varphi_2)) = \emptyset \quad \forall n \geq 1. \quad (4.9)$$

В предположении противного $(\varphi_1, \varphi_2) \cap g_*^{n_0}((\varphi_1, \varphi_2)) \neq \emptyset$ при некотором натуральном n_0 . Далее, возьмем такую точку $\varphi_0 \in (\varphi_1, \varphi_2)$, что выполняется включение $g_*^{n_0}(\varphi_0) \in (\varphi_1, \varphi_2)$, и положим $\psi_0 = \varkappa(\varphi_0)$. Но тогда из соотношения (4.7) имеем $g_m^{n_0}(\psi_0) = \psi_0 \pmod{2\pi}$ и в то же время $\varkappa^{-1}(\psi_0) = [\varphi_1, \varphi_2]$. Последнее, как было установлено выше, невозможно.

Привлекая равенство (4.6), нетрудно увидеть, что на интервале $g_*((\varphi_1, \varphi_2))$ функция $\varkappa(\varphi)$ также является постоянной. Далее, указанный интервал не может совпадать со всей окружностью S (это противоречит свойству (4.5) функции $\varkappa(\varphi)$) и не может быть пустым, поскольку g_* – неособый эндоморфизм. Таким образом, заменяя в (4.9) интервал (φ_1, φ_2) на $g_*((\varphi_1, \varphi_2))$, убеждаемся, что

$$g_*((\varphi_1, \varphi_2)) \cap g_*^n((\varphi_1, \varphi_2)) = \emptyset \quad \forall n \geq 2$$

и так далее. В результате получается последовательность непустых попарно непересекающихся интервалов $g_*^n((\varphi_1, \varphi_2))$, $n \geq 0$, принадлежащих окружности S . А отсюда с необходимостью следует, что их длины стремятся к нулю, т.е.

$$|\exp(i\varphi_n^1) - \exp(i\varphi_n^2)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (4.10)$$

где $\varphi_n^j = g_*^n(\varphi_j)$, $j = 1, 2$, $n \geq 0$.

Последующий способ действий таков. Выберем на аттракторе A_* отображения (3.35) две точки $w_1 = (v_1, \varphi_1)$ и $w_2 = (v_2, \varphi_2)$, лежащие соответственно в пересечениях $A_* \cap \{(v, \varphi) : \varphi = \varphi_j\}$, $j = 1, 2$ (упомянутые пересечения не пусты, так как A_* – солениод). Далее, положим $(v_n^j, \varphi_n^j) = \Pi_*^n(w_j)$, $j = 1, 2$, $n \geq 0$, и заметим, что в силу (3.35)–(3.38) выполняются неравенства

$$\|v_n^1 - v_n^2\| \leq q \|v_{n-1}^1 - v_{n-1}^2\| + \delta_n, \quad n \geq 1,$$

где согласно (4.10)

$$\delta_n = \max_{v \in B} \|f_*(v, \varphi_{n-1}^1) - f_*(v, \varphi_{n-1}^2)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

А отсюда несложно вывести, что

$$\begin{aligned} \|v_n^1 - v_n^2\| &\leq q^n \|v_1 - v_2\| + \sum_{j=1}^n q^{n-j} \delta_j \leq q^n \|v_1 - v_2\| \\ &+ \max_{s \in \mathbb{N}} \delta_s \sum_{j=n-\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} q^j + \frac{1}{1-q} \max_{\lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq s \leq n} \delta_s \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Полученные предельные равенства (4.10), (4.11) означают, что $w_1 \in W^s(w_2)$. Далее, из (3.41) следует, что начиная с некоторого номера n_0 обе точки (v_n^j, φ_n^j) , $j = 1, 2$, будут принадлежать одному и тому же слою $\mathcal{L}((v_n^1, \varphi_n^1))$. Но в случае отображения (3.35) слоение (3.29) распрямлено (слои имеют вид (3.39)). Тем самым, $\varphi_n^1 = \varphi_n^2 \pmod{2\pi}$ при любом $n \geq n_0$, а значит, каждый интервал $g_*^n((\varphi_1, \varphi_2))$ при $n \geq n_0$ либо пуст, либо совпадает с S . Но это, как уже было сказано выше, невозможно.

Полученное противоречие свидетельствует о том, что на самом деле отображение (4.5) не имеет интервалов постоянства, т.е. является строго монотонно возрастающим. Таким образом, оно и есть искомый гомеоморфизм окружности S , сопрягающий эндоморфизмы (3.53) и (4.4). Лемма 9 доказана.

Установленная лемма позволяет более детально разобраться со структурой множества (3.41) и получить следующее утверждение.

ЛЕММА 10. *Для любой точки $w_0 \in A$ найдется такая последовательность $w_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, что*

$$W^s(w_0) = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}(w_n), \quad \overline{\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}(w_n)} = K. \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполним в отображении (3.35) замену $\varphi = \varkappa^{-1}(\psi)$, $\psi \rightarrow \varphi$, где $\varkappa$ – гомеоморфизм (4.5), построенный в процессе доказательства леммы 9. В результате получим отображение

$$\Pi_{**}: \begin{aligned} v &\rightarrow f_{**}(v, \varphi), \\ \varphi &\rightarrow m\varphi \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $f_{**}(v, \varphi) = f_*(v, \varkappa^{-1}(\varphi))$. Далее, рассмотрим аттрактор $A_{**} = \bigcap_{n \geq 0} \Pi_{**}^n(K)$ этого отображения и для произвольной точки $w_0 = (v_0, \varphi_0) \in A_{**}$ выпишем

аналог формулы (3.41). Принимая во внимание тот факт, что для отображения (4.13) слоение (3.29) распрямлено (имеет вид (3.39)), последовательно убеждаемся в справедливости равенств

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Pi_{**}^n(w_0)) &= \{(v, \varphi) : \varphi = m^n \varphi_0 \pmod{2\pi}\}, \\ \Pi_{**}^{-n} \mathcal{L}(\Pi_{**}^n(w_0)) &= \bigcup_{j=0}^{|m|^n-1} \left\{ (v, \varphi) : \varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi j}{m^n} \pmod{2\pi} \right\}, \\ W^s(w_0) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{|m|^n-1} \left\{ (v, \varphi) : \varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi j}{m^n} \pmod{2\pi} \right\}.\end{aligned}$$

А поскольку множество точек $\{\varphi_0 + 2\pi j/m^n, j = 0, 1, \dots, |m|^n - 1, n \geq 0\}$ всюду плотно на окружности S , то для любой точки $w_0 \in A_{**}$ требуемые свойства (4.12) имеют место. Остается добавить, что после перехода от Π_{**} к Π (т.е. после обращения соответствующих замен) эти свойства сохраняются. Лемма 10 доказана.

Две заключительные леммы касаются структуры неблуждающего множества $\Omega = NW(\Pi|_A)$ диффеоморфизма (1.1). Отметим сразу, что поскольку A – локально максимальное гиперболическое множество (так как оно гиперболический аттрактор), то периодические точки отображения (1.1) плотны в Ω . Кроме того, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 11. *Для любой точки $w_0 \in \Omega$ ее неустойчивое многообразие $W^u(w_0)$ целиком содержится в Ω .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала w_0 – любая периодическая точка из Ω . Рассмотрим ее локальное неустойчивое многообразие (4.2), являющееся отрезком кривой класса C^1 , и ее устойчивое многообразие $W^s(w_0)$, состоящее в силу (4.12) из счетного числа слоев (k -мерных поверхностей), всюду плотных в K . При этом те из поверхностей, которые проходят вблизи точки w_0 , с необходимостью пересекают общим образом кривую $W_\delta^u(w_0)$ (данный факт – следствие малости δ в (4.2), C^1 -гладкости локальных многообразий и трансверсальности пересечения $W_\delta^s(w_0) \cap W_\delta^u(w_0)$).

Из всего вышесказанного следует, что трансверсальные гомоклинические точки периодической точки w_0 плотны в $W_\delta^u(w_0)$. А поскольку все такие точки неблуждающие (см. [3]) и множество Ω замкнутое, то автоматически $W_\delta^u(w_0) \subset \Omega$. Что же касается глобального многообразия $W^u(w_0)$, то в силу известной формулы

$$W^u(w_0) = \bigcup_{n \geq 0} \Pi^n [W_\delta^u(\Pi^{-n}(w_0))] \quad (4.14)$$

и факта инвариантности Ω оно также принадлежит неблуждающему множеству.

В случае произвольной точки $w_0 \in \Omega$ по-прежнему $W_\delta^u(w_0) \subset \Omega$, так как периодические точки плотны в Ω и их локальные неустойчивые многообразия

плотны в семействе кривых $\{W_\delta^u(w_0), w_0 \in \Omega\}$. А отсюда, воспользовавшись в очередной раз формулой (4.14), заключаем, что $W^u(w_0) \subset \Omega$. Лемма 11 доказана.

Как известно (см. [16]), если локально максимальное гиперболическое множество обладает описанным в лемме 11 свойством, то оно является аттрактором. Тем самым, в нашем случае Ω будет аттрактором. Однако ниже для полноты изложения приводится независимое доказательство этого факта.

ЛЕММА 12. *Справедливо равенство $\Omega = A$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для обоснования леммы достаточно убедиться в том, что $\Omega_* = A_*$, где Ω_* – неблуждающее множество отображения (3.35), а A_* – его аттрактор (3.49).

Рассмотрим специальную окрестность V_ε , $\varepsilon > 0$, множества Ω_* , которая определяется равенствами

$$V_\varepsilon = \bigcup_{\varphi \in S} \Omega_{\varphi, \varepsilon} \times \{\varphi\}, \quad \Omega_{\varphi, \varepsilon} = \bigcup_{v_0 \in \Omega_\varphi} O_\varepsilon(v_0). \quad (4.15)$$

Здесь Ω_φ – сечение множества Ω_* (см. соответствующее место в доказательстве леммы 7), через $O_\varepsilon(v_0)$ обозначен открытый шар в $\mathbb{R}^k$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке v_0 , а ε выбрано настолько малым, что $V_\varepsilon \subset \text{int } K$.

Покажем сначала, что

$$\Pi_*(V_\varepsilon) \subset V_\varepsilon \quad (4.16)$$

при всех достаточно малых ε . В связи с этим фиксируем произвольно точку $w_0 = (v_0, \varphi_0) \in V_\varepsilon$. Согласно (4.15) для нее найдется такая точка $\bar{w}_0 = (\bar{v}_0, \varphi_0)$ из Ω_* (с той же самой координатой φ_0), что $\|v_0 - \bar{v}_0\| < \varepsilon$. Далее, положим $\Pi_*(w_0) = (v_1, \varphi_1)$, $\Pi_*(\bar{w}_0) = (\bar{v}_1, \varphi_1)$ и заметим, что, во-первых, согласно (3.35) у этих точек вторые координаты по-прежнему совпадают; во-вторых, имеем $\Pi_*(\bar{w}_0) \in \Omega_*$ и в силу (3.37), (3.38)

$$\|v_1 - \bar{v}_1\| \leq q\|v_0 - \bar{v}_0\| < q\varepsilon < \varepsilon.$$

А это значит, что $\Pi_*(w_0) \in O_\varepsilon(\bar{v}_0) \times \{\varphi_1\} \subset V_\varepsilon$.

Покажем теперь, что множество V_ε открыто. Для этого нам потребуется понятие трубчатой окрестности. Предположим, что в $\text{int } K$ задана некоторая непрерывная кривая

$$\{(v, \varphi) : v = v_*(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}, \quad (4.17)$$

содержащая внутри себя точку $w_0 = (v_0, \varphi_0)$, т.е. $\varphi_0 \in (\varphi_1, \varphi_2)$, $v_*(\varphi_0) = v_0$. Тогда трубчатой окрестностью точки w_0 назовем подмножество из K вида

$$\bigcup_{\varphi_1 < \varphi < \varphi_2} O_\varepsilon(v_*(\varphi)) \times \{\varphi\}, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.18)$$

Подчеркнем, что в силу своего определения множество (4.18) заведомо открыто в K .

Заметим, далее, что согласно лемме 11 любая точка w_0 из Ω_* принадлежит этому множеству вместе с некоторой непрерывной кривой вида (4.17). А именно, таковой является кривая $\gamma^{-1}[W_\delta^u(\gamma(w_0))]$, где W_δ^u – локальное неустойчивое многообразие (4.2), γ – гомеоморфизм (3.32). Следовательно, если мы построим по каждой такой кривой трубчатую окрестность (4.18) с тем же самым ε , что и в (4.15), то полученная окрестность будет принадлежать V_ε . А это значит, что само множество V_ε открыто, так как оно есть объединение трубчатых окрестностей всех точек $w_0 \in \Omega_*$.

Завершая доказательство леммы, убедимся, что Ω_* – аттрактор отображения (3.35). Для этого воспользуемся определением 2. Условие а) из данного определения в нашем случае справедливо, поскольку для любой окрестности $\tilde{U} \supset \Omega_*$ можно так уменьшить $\varepsilon > 0$ в (4.15), что будет выполняться включение $\tilde{V} = V_\varepsilon \subset \tilde{U}$. А отсюда и из (4.16) следует, что

$$\Pi_*^n(\tilde{V}) \subset \tilde{V} \subset \tilde{U} \quad \forall n \geq 0.$$

Что же касается условия б), то оно справедливо автоматически, так как неблуждающее множество $\Omega_* = NW(\Pi_*|_{A_*}) = NW(\Pi_*|_K)$ притягивает все точки из K .

Итак, мы установили, что множество Ω_* является аттрактором с областью притяжения, равной всему кольцу K . Но в силу сказанного в § 1 такой аттрактор совпадает с максимальным, т.е. $\Omega_* = A_*$. Лемма 12 доказана.

Подводя итог, отметим, что теперь у нас есть все необходимое для завершения доказательства теоремы 1. Действительно, из равенства $\Omega = A$ и факта связности множества A вытекает, что спектральное разложение Ω тривиально (состоит из одной компоненты A). Как известно (см. [3]), в этом случае сужение $\Pi|_\Omega = \Pi|_A$ является топологическим перемешиванием. Теорема 1 полностью доказана.

§ 5. Заключение

В первую очередь применим результаты теоремы 1 к серии модельных примеров соленоидальных отображений, встречающихся в литературе. Все эти примеры содержатся в классе трехмерных отображений, имеющих в комплексной форме записи вид

$$\begin{aligned} \Pi: \quad & z \rightarrow c_1 z + c_2 \exp(i\varphi), \\ & \varphi \rightarrow m\varphi \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \geq 2$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *При выполнении условий*

$$c_1 \neq 0, \quad c_2 \neq 0, \quad |c_1| + |c_2| < 1, \quad |c_1| < |c_2| \sin \frac{\pi}{|m|} \quad (5.2)$$

оператор (5.1) диффеоморфно отображает кольцо $K = \{(z, \varphi) : |z| \leq 1, \varphi \in S\}$ в себя и имеет в K перемешивающий гиперболический аттрактор, являющийся солениодом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из первых трех условий (5.2) следует, что $\Pi(K) \subset K$ и отображение Π – локальный диффеоморфизм (его якобиан в любой точке кольца K отличен от нуля). Убедимся теперь, что Π отображает K на $\Pi(K)$ взаимно однозначно.

В предположении противного имеем

$$c_1(z_1 - z_2) = c_2(\exp(i\varphi_2) - \exp(i\varphi_1)), \quad m\varphi_1 = m\varphi_2 \pmod{2\pi} \quad (5.3)$$

при некоторых $(z_1, \varphi_1), (z_2, \varphi_2) \in K$, $(z_1, \varphi_1) \neq (z_2, \varphi_2)$. Далее, из второго равенства (5.3) следует, что $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi s/m$, где s принимает одно из значений $s = 1, \dots, |m| - 1$ (случай $s = 0$ исключен, так как он влечет за собой равенство $(z_1, \varphi_1) = (z_2, \varphi_2)$). Подставляя это выражение в первое соотношение из (5.3), приходим к выводу, что

$$c_1(z_1 - z_2) = c_2 \exp(i\varphi_1) \left(\exp \frac{2\pi i s}{m} - 1 \right). \quad (5.4)$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$\begin{aligned} |c_1(z_1 - z_2)| &\leq 2|c_1|, \\ \left| c_2 \exp(i\varphi_1) \left(\exp \frac{2\pi i s}{m} - 1 \right) \right| &= 2|c_2| \left| \sin \frac{\pi s}{m} \right| \geq 2|c_2| \min_{1 \leq s \leq |m|-1} \left| \sin \frac{\pi s}{m} \right| = 2|c_2| \sin \frac{\pi}{|m|}. \end{aligned}$$

А отсюда и из последнего условия (5.2) заключаем, что равенство (5.4) невозможно.

Итак, мы установили, что отображение (5.1) является диффеоморфизмом. Далее, нетрудно заметить, что в случае (5.1) постоянные (1.15) имеют вид

$$\alpha_1 = |c_1|, \quad \alpha_2 = |c_2|, \quad \beta_1 = |m|, \quad \beta_2 = 0.$$

А отсюда и из (5.2) следует, что условия (1.16) здесь выполняются автоматически. Остается воспользоваться теоремой 1 и убедиться, что диффеоморфизм (5.1) имеет требуемый аттрактор. Теорема 2 доказана.

Во многих книгах по нелинейной динамике приведены конкретные отображения из класса (5.1). Например, в [2] рассматривался случай

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad m = 2,$$

в [3] – случай

$$c_1 = \frac{1}{10}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad m = 2,$$

в [4] – случай

$$c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad m = 2,$$

в [5] – случай

$$c_1 = (2m)^{-1}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad |m| \geq 2$$

и так далее. Во всех перечисленных ситуациях требования (5.2) выполняются.

Еще один класс диффеоморфизмов, к которому применима наша теорема 1, возникает при изучении известной бифуркации типа катастрофы голубого неба. Как показано в [17], в конечном итоге проблема исследования такой бифуркации сводится к рассмотрению диффеоморфизмов вида

$$\Pi(\mu): \begin{cases} v \rightarrow f(v, \varphi, \mu), \\ \varphi \rightarrow \theta(\mu) + m\varphi + g_0(\varphi) + g_1(v, \varphi, \mu) \pmod{2\pi}, \end{cases} \quad (5.5)$$

зависящих от вспомогательного малого параметра $\mu \in (0, \mu_0]$. Считаем, что, во-первых, функции f, g_0, g_1 периодичны по φ с периодом 2π ; во-вторых, по переменным $(v, \varphi) \in \tilde{K}$, где $\tilde{K}$ – полоса (3.5), функции f, g_1 принадлежат пространствам $C^l(\tilde{K}; \mathbb{R}^k)$ и $C^l(\tilde{K})$ соответственно ($l \geq 1$) и стремятся к нулю при $\mu \rightarrow +0$ в метриках указанных пространств; в-третьих, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \geq 2$, $g_0(\varphi) \in C^l(\mathbb{R})$, а функция $\theta(\mu)$ непрерывно зависит от μ и $\theta(\mu) \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow +0$.

ТЕОРЕМА 3. *При выполнении условия*

$$\beta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\varphi \in S} |m + g'_0(\varphi)| > 1 \quad (5.6)$$

и при всех достаточно малых $\mu > 0$ диффеоморфизм (5.5) допускает в кольце (1.2) гиперболический перемешивающий аттрактор типа соленоида Смейла–Вильямса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение аналогичные (1.15) величины

$$\begin{aligned} \alpha_1(\mu) &= \max_{(v, \varphi) \in K} \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(v, \varphi, \mu) \right\|, & \alpha_2(\mu) &= \max_{(v, \varphi) \in K} \left\| \frac{\partial f}{\partial \varphi}(v, \varphi, \mu) \right\|, \\ \beta_1(\mu) &= \min_{(v, \varphi) \in K} \left| m + g'_0(\varphi) + \frac{\partial g_1}{\partial \varphi}(v, \varphi, \mu) \right|, & \beta_2(\mu) &= \max_{(v, \varphi) \in K} \left\| \frac{\partial g_1}{\partial v}(v, \varphi, \mu) \right\|. \end{aligned}$$

Заметим, далее, что в силу условий, наложенных на правые части из (5.5), справедливы предельные равенства

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow +0} \alpha_1(\mu) &= \lim_{\mu \rightarrow +0} \alpha_2(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \beta_2(\mu) = 0, & \lim_{\mu \rightarrow +0} \beta_1(\mu) &= \beta_0 > 1, \\ \max_{(v, \varphi) \in K} \|f(v, \varphi, \mu)\| &\rightarrow 0, & \mu &\rightarrow +0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из (5.6), (5.7), в свою очередь, следует, что при всех достаточно малых $\mu > 0$ диффеоморфизм $\Pi(\mu)$ переводит кольцо (1.2) в себя и удовлетворяет ограничениям (1.16). Тем самым, в силу теоремы 1 он имеет аттрактор с требуемыми свойствами. Теорема 3 доказана.

Принципиальное различие между разобранными примерами состоит в том, что в случае отображения (5.1) в проверке нуждаются лишь факты включения $\Pi(K) \subset K$ и диффеоморфности (гиперболичность аттрактора здесь получается автоматически). В случае же отображения (5.5) непосредственная проверка его взаимной однозначности весьма затруднительна, так как при малых μ оно C^l -близко к отображению

$$v \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow \theta(\mu) + m\varphi + g_0(\varphi) \pmod{2\pi}$$

с нулевым якобианом. Однако, мы а priori знаем, что оператор $\Pi(\mu)$ диффеоморфизм, поскольку он является оператором последования Пуанкаре по траекториям некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкими правыми частями.

Необходимо добавить, что аттрактор (1.5) отображения (1.1) относится к классу так называемых растягивающихся одномерных аттракторов, так как его топологическая размерность равна единице и совпадает с размерностью неустойчивого подпространства E_w^u . Как известно (см. [18], [19]), такие аттракторы являются обобщенными соленидами, т.е. пределами обратного спектра отображений комплексов, снабженных гладкой структурой. Точнее говоря, ограничения динамических систем на растягивающиеся аттракторы топологически сопряжены со сдвигowymi отображениями соленидов.

В нашем случае это означает следующее. Пусть $X = \prod_{j=1}^{\infty} S_j$ – прямое произведение счетного числа окружностей S , наделенное тихоновской топологией, а X_{∞} – подмножество X , состоящее из последовательностей вида

$$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots), \quad \varphi_n = g_m(\varphi_{n+1}), \quad n \geq 1,$$

где g_m – эндоморфизм (4.4). Далее, обозначим через G_m сдвиговое отображение, действующее на произвольный элемент из X_{∞} по правилу

$$G_m: (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots) \rightarrow (g_m(\varphi_1), \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots).$$

Из содержащейся в [18], [19] общей теории следует, что операторы $\Pi|_A$ и $G_m|_{X_{\infty}}$ топологически сопряжены.

В заключение отметим, что результаты настоящей работы имеют непустое пересечение с результатами статьи [20], в которой рассматривался случай, когда функция $g(v, \varphi) = g(\varphi)$ из (1.1) не зависит от v . В указанном случае $\beta_2 = 0$, а условия (1.16) принимают вид

$$\max_{(v, \varphi) \in K} \left\| \frac{\partial f}{\partial v}(v, \varphi) \right\| < 1, \quad \min_{\varphi \in S} |m + g'(\varphi)| > 1. \quad (5.8)$$

Из приведенных в [20] построений вытекает, что при $g(v, \varphi) = g(\varphi)$ и при выполнении требований (5.8) аттрактор A отображения (1.1) совпадает с его неблуждающим множеством $\Omega = NW(\Pi|_K)$. То же самое установлено и нами (см. лемму 12) несколько иным способом.

Список литературы

- [1] С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1(151) (1970), 113–185; пер. с англ.: S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
- [2] С. Robinson, *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*, 2nd ed., Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999, xiv+506 pp.
- [3] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999, 768 с.; пер. с англ.: A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia Math. Appl., **54**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, xviii+802 pp.
- [4] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений*, МЦНМО, М., 2005, 464 с.; пер. с англ.: B. Hasselblatt, A. Katok, *A first course in dynamics with a panorama of recent developments*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, x+424 pp.
- [5] Ю. С. Ильяшенко, В. Ли, *Нелокальные бифуркации*, МЦНМО, М., 1999, 416 с.; пер. с англ.: Yu. Ilyashenko, W. Li, *Nonlocal bifurcations*, Math. Surveys Monogr., **66**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, xiv+286 pp.
- [6] Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “О катастрофах голубого неба”, *Докл. РАН*, **342**:5 (1995), 596–599; англ. пер.: D. V. Turaev, L. P. Shil’nikov, “Blue sky catastrophes”, *Dokl. Math.*, **51**:3 (1995), 404–407.
- [7] L. P. Shilnikov, D. V. Turaev, “Simple bifurcations leading to hyperbolic attractors”, *Comput. Math. Appl.*, **34**:2–4 (1997), 173–193.
- [8] Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике*, Ч. 1, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2004, 416 с.; пер. с англ.: L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev, L. O. Chua, *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics*, v. I, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, **4**, World Scientific, River Edge, NJ, 1998, xxiv+392 pp.
- [9] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, М., 2004, 405 с.
- [10] Д. В. Аносов, В. В. Солодов, “Гл. 1. Гиперболические множества”, *Динамические системы с гиперболическим поведением. Динамические системы – 9*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **66**, ВИНТИ, М., 1991, 12–99; англ. пер.: D. V. Anosov, V. V. Solodov, “Hyperbolic sets”, *Dynamical systems IX*, Encyclopaedia Math. Sci., **66**, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 10–92.
- [11] J. M. Aarts, R. J. Fokkink, “The classification of solenoids”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **111**:4 (1991), 1161–1163.
- [12] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed., Addison-Wesley Studies in Nonlinearity, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989, xviii+336 pp.
- [13] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, “On Devaney’s definition of chaos”, *Amer. Math. Monthly*, **99**:4 (1992), 332–334.
- [14] Л. П. Шильников, “Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа”, *Матем. сб.*, **74(116)**:3 (1967), 378–397; англ. пер.: L. P. Šilnikov, “On a Poincaré–Birkhoff problem”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:3 (1967), 353–371.
- [15] M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. J. Math.*, **91**:1 (1969), 175–199.
- [16] Я. Б. Песин, “Эргодическая теория гладких динамических систем. Гл. 7. Общая теория гладких гиперболических динамических систем”, *Динамические системы – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **2**, ВИНТИ, М., 1985, 123–173; англ. пер.: Ya. B. Pesin, “General theory of smooth

- hyperbolic dynamical systems”, *Dynamical systems II*, Encyclopaedia Math. Sci., **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 108–151.
- [17] Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике*, Ч. 2, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2009, 548 с.; пер. с англ.: L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev, L. O. Chua, *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics*, v. II, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, **5**, World Scientific, River Edge, NJ, 2001, i–xxiv and 393–957 pp.
- [18] R. F. Williams, “One-dimensional non-wandering sets”, *Topology*, **6**:4 (1967), 473–487.
- [19] R. F. Williams, “Expanding attractors”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43** (1974), 169–203.
- [20] Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова, “О нульмерных соленоидальных базисных множествах”, *Матем. сб.*, **202**:3 (2011), 47–68; англ. пер.: E. V. Zhuzhoma, N. V. Isaenkov, “Zero-dimensional solenoidal base sets”, *Sb. Math.*, **202**:3 (2011), 351–372.

Сергей Дмитриевич Глызин
(Sergey D. Glyzin)

Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию
16.02.2015

Андрей Юрьевич Колесов
(Andrei Yu. Kolesov)

Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова
E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Николай Христович Розов
(Nikolai Kh. Rozov)

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
E-mail: fpo.mgu@mail.ru