Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Плотников, Ю. А. Плотникова, Разложение двоичных мер и объединение замкнутых $\mathcal{U}$ -множеств для рядов по системе Хаара, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 3, 137–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:26:20

УДК 517.518.113+517.518.117+517.518.36

М. Г. Плотников, Ю. А. Плотникова

Разложение двоичных мер и объединение замкнутых $\mathcal{U}$ -множеств для рядов по системе Хаара

Устанавливается ряд свойств конечно-аддитивных функций множества (квазимер) и борелевских мер на многомерных двоичных группах $\mathbb{G}^m$. Полученные результаты применяются к теории рядов по системе Хаара: показывается, что для обширного семейства классов кратных рядов Хаара на $\mathbb{G}^m$ счетное объединение замкнутых множеств единственности также является множеством единственности.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: многомерная двоичная группа, кратные ряды Хаара, $\mathcal{U}$ -множество, квазимера, борелевская мера.

DOI: 10.4213/sm8492

Введение

Одним из фундаментальных результатов теории тригонометрических рядов является теорема Бари о структуре множеств единственности (см. [1; гл. 14]): *объединение счетного числа замкнутых множеств единственности для тригонометрических рядов также является множеством единственности*. Пусть $\{f_n\}$ – система функций, заданных на некотором множестве X . Напомним, что множество $A \subset X$ называется *множеством единственности* (иначе, $\mathcal{U}$ -множеством) для рядов $\sum_n a_n f_n(x)$ по системе $\{f_n\}$, если любой сходящийся к нулю вне этого множества ряд является *тривиальным*, что означает выполнение равенства $a_n = 0$ для всех n . Теорему Бари обобщили Н. Н. Холщевникова в [2], а также К. Карлет и Г. Дебс (см. [3; с. 44]).

Теоремы подобного типа устанавливались и для ортогональных рядов, отличных от тригонометрических. Из результатов работ [4] и [5] вытекают аналогии теоремы Бари для класса рядов Хаара

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) \tag{0.1}$$

таких, что $a_n H_n(x) = o_x(n)$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $x \in [0, 1]$ (класс Арутюнян–Талаляна), а также для его многомерных аналогов. В [6] теорема типа Бари

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00417) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3682.2014.1). Работа второго автора выполнена при частичной финансовой поддержке гранта ВГМХА-2014.

доказана для классов рядов (0.1), чьи коэффициенты при некотором $p \in [0, 1]$ удовлетворяют условию

$$a_n = o(n^{p-1/2})$$

при $n \rightarrow \infty$ (классы Вэйда). В [7] содержится обобщение результата Вэйда на случай кратных рядов Хаара.

В настоящей работе мы распространим теорему Бари на широкое и в некотором смысле естественно возникающее семейство классов одномерных и кратных рядов Хаара. А именно, теорема об объединении множеств единственности будет доказана для любого класса таких рядов, обладающего *свойством наследственности*. Последнее означает, что если некоторый ряд входит в данный класс, то в него входит и любой другой ряд, частичные суммы которого мажорируются частичными суммами первого. Использование термина “свойство наследственности” восходит к теории множеств, где он применяется по отношению к частично упорядоченным множествам, содержащим вместе с любым своим элементом все элементы, не превосходящие данный. В нашем случае можно ввести частичную упорядоченность на множестве всех рядов Хаара, сказав, что ряд (S) предшествует ряду (S^*) , если модули всех частичных сумм первого ряда не превосходят аналогичных второго.

В работе будут рассматриваться m -кратные ряды Хаара. Основные результаты являются новыми и для одномерных рядов Хаара и получаются из общего случая редукцией к случаю $m = 1$.

При доказательстве основных результатов будет еще раз показана глубокая связь между рядами Хаара и порождаемыми ими конечно-аддитивными двоичными мерами (называемыми *квазимерами*). Эта связь уже вскрывалась во многих статьях (см., например, [7]–[12]). Из рассуждений и результатов настоящей работы будет видно, что справедливость теоремы Бари для рядов Хаара тесно связана с доказанной ниже теоремой о разложении двоичных мер: *любая двоичная мера, сосредоточенная на счетном объединении $\bigcup_i A_i$ замкнутых множеств, есть сумма мер, каждая из которых сосредоточена на одном из множеств A_i .*

Для тригонометрических рядов не имеется настолько тесной связи между рядами и порожденными ими функциями множества; доказательства классической теоремы Бари и упомянутых выше ее следствий используют совершенно иные принципы.

Работа построена следующим образом. В § 1 и в § 2 содержатся определения и вспомогательные факты, относящиеся к многомерной двоичной группе $\mathbb{G}^m$, а также к аддитивным функциям множества на $\mathbb{G}^m$. В § 3 доказывается, что любая нетривиальная квазимера мажорирует некоторую нетривиальную неотрицательную квазимеру (теорема 3.1). Это техническое утверждение является многомерным аналогом результата К. Йонеды [13] и играет важную роль в дальнейших рассуждениях.

В § 4 доказываются теоремы о разложении неотрицательных квазимер на группе $\mathbb{G}^m$, которые сосредоточены на объединении замкнутых множеств

(теоремы 4.2 и 4.3). Эти теоремы представляют самостоятельный интерес. Но основная роль этих теорем – применение к вопросам единственности кратных рядов Хаара.

В § 5 приведены определение рядов Хаара на группе $\mathbb{G}^m$ различных типов их сходимости, а также хорошо известные факты о представлении рядов Хаара в виде квазимер, дополненные рядом вспомогательных утверждений.

Основные результаты, относящиеся к вопросам единственности для одномерных и кратных рядов Хаара, представлены в § 6. Здесь доказывается (теорема 6.3) теорема типа Бари об объединении множеств единственности для рядов (5.1) из классов, обладающих свойством наследственности, а также приводятся примеры таких классов.

§ 1. Многомерная двоичная группа: определения и основные факты

Всюду $\mathbb{N}$ обозначает множество целых неотрицательных чисел, $\mathbb{N}_+$ – множество натуральных чисел.

Везде здесь считаем, что у нас выбрано и фиксировано произвольное $m \in \mathbb{N}_+$. Если $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$, то $2^{\mathbf{k}}$ обозначает вектор $(2^{k_1}, \dots, 2^{k_m}) \in \mathbb{N}_+^m$. Будем писать $\mathbf{1}$ для m -мерного вектора $(1, \dots, 1)$ и $\mathbf{0}$ – для m -мерного вектора $(0, \dots, 0)$. Пусть

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{N}^m, \quad \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{N}^m.$$

Тогда полагаем $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, если $a_q \leq b_q$ для всех $q = 1, \dots, m$.

Далее Σ обозначает множество $\{0, 1\}^m$, т.е. множество всех m -мерных векторов $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ таких, что $\sigma_s = 0$ или $\sigma_s = 1$, $s = 1, \dots, m$.

Пусть $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – система функций Хаара. Обычно система $\{H_n\}$ рассматривается на отрезке $[0, 1]$ (см., например, [14; гл. 3]). Но ее более естественной областью определения является так называемая двоичная группа Кантора $\mathbb{G}$. Она представляет собой множество последовательностей $t = (t_j, j \in \mathbb{N})$ таких, что $t_j \in \{0, 1\}$ для всех $j \in \mathbb{N}$ (см., например, [15; гл. 1], [16; гл. 1]). Каждому элементу $t \in \mathbb{G}$ можно приписать его двоичное разложение, т.е. ряд $\sum_{j=0}^{\infty} t_j 2^{-j-1}$. Отображение, сопоставляющее любому $t \in \mathbb{G}$ данный ряд, устанавливает взаимно однозначное соответствие между группой $\mathbb{G}$ и модифицированным отрезком $[0, 1]^*$, т.е. отрезком $[0, 1]$, в котором точки вида $i/2^k$ ($i, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 2^k - 1$) считаются дважды: “левая” точка $i/2^k - 0$, соответствующая бесконечному двоичному разложению, и “правая” точка $i/2^k + 0$, соответствующая конечному двоичному разложению.

Положим $\Delta_0^0 := \mathbb{G}$. Пусть $k \in \mathbb{N}_+$,

$$p = \sum_{j=0}^{k-1} p_j 2^j, \quad p_j \in \{0, 1\}, \quad 0 \leq j \leq k-1,$$

$$\Delta_p^{(k)} := \{t = (t_j, j \in \mathbb{N}) \in \mathbb{G} : t_j = p_{k-1-j}, j = 0, \dots, k-1\}.$$

Множества $\Delta_p^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}_+$, $p \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$, называются *двоичными интервалами* ранга k на $\mathbb{G}$. Множества

$$\Delta_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{k})} := \Delta_{p_1}^{(k_1)} \times \dots \times \Delta_{p_m}^{(k_m)}, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m, \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{N}^m, \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq 2^{\mathbf{k}} - \mathbf{1}, \quad (1.1)$$

называются *двоичными интервалами* ранга $\mathbf{k}$ на $\mathbb{G}^m$. Всякий двоичный интервал (1.1) можно представлять как множество

$$\left[\frac{p_1}{2^{k_1}}, \frac{p_1 + 1}{2^{k_1}} - 0 \right] \times \dots \times \left[\frac{p_m}{2^{k_m}}, \frac{p_m + 1}{2^{k_m}} - 0 \right] \subset ([0, 1]^*)^m.$$

Двоичные интервалы

$$\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)} := \Delta_{\mathbf{p}}^{(k, \dots, k)} \quad (1.2)$$

называются *двоичными кубами* ранга k . Каждый двоичный куб ранга k является объединением 2^m попарно не пересекающихся двоичных кубов ранга $k + 1$. Для кубов (1.2) такое объединение имеет следующий явный вид:

$$\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)} = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} \Delta_{2\mathbf{p} + \sigma}^{(k+1)}. \quad (1.3)$$

Любые два двоичных куба, стоящие под знаком объединения справа в (1.3), называются *смежными*.

Топология на $\mathbb{G}^m$ состоит из пустого множества и всевозможных объединений двоичных интервалов. Каждый двоичный интервал является одновременно замкнутым и открытым множеством в данной топологии. Данная топология порождается некоторой стандартной метрикой (детали см. в [16; введение]). Будем писать $d(E)$ для диаметра множества $E \subset \mathbb{G}^m$ в данной метрике. Для всякого двоичного интервала (1.1) мы имеем (см. [16; введение])

$$d(\Delta_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{k})}) = \sqrt{2^{-2k_1} + \dots + 2^{-2k_m}}.$$

Параметр регулярности двоичного интервала (1.1) (параметр регулярности вектора $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{N}_+^m$) есть величина $\text{reg } \Delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{p}}$ (соответственно $\text{reg } \mathbf{a}$), равная $\min_{i,j} \{2^{k_i}/2^{k_j}\}$ (соответственно $\min_{i,j} \{a_i/a_j\}$).

Группа $\mathbb{G}^m$ является компактной абелевой группой. Пусть μ обозначает нормированную меру Хаара на $\mathbb{G}^m$. Таким образом, μ – регулярная борелевская мера на $\mathbb{G}^m$, причем $\mu(\mathbb{G}^m) = 1$. При этом

$$\mu(\Delta_{\mathbf{p}}^{(\mathbf{k})}) = 2^{-(k_1 + \dots + k_m)}$$

для каждого двоичного интервала (1.1).

Набор Γ подмножеств $\mathbb{G}^m$ будем называть *дизъюнктивным*, если множества из этого набора попарно не пересекаются. Как всегда, $\bigsqcup_{I \in \Gamma} I$ обозначает объединение множеств из дизъюнктивного набора Γ (*дизъюнктивное объединение*).

Покрытием множества $A \subset \mathbb{G}^m$ называется набор Γ подмножеств $\mathbb{G}^m$ такой, что $A \subset \bigcup_{I \in \Gamma} I$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пусть $\Delta \subset \mathbb{G}^m$ – двоичный куб и Γ – дизъюнктивный набор двоичных кубов такой, что

$$\bigcup_{I \in \Gamma} I = \Delta. \quad (1.4)$$

Тогда набор Γ конечен.

Действительно, существует конечное подпокрытие $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ куба Δ , так как все двоичные кубы в $\mathbb{G}^m$ замкнуты и открыты одновременно. В силу (1.4) и того, что набор Γ дизъюнктивен, $\tilde{\Gamma} = \Gamma$. Значит, набор Γ конечен, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Из каждого покрытия Γ , состоящего из двоичных кубов, произвольного множества $A \subset \mathbb{G}^m$ можно выбрать дизъюнктивное подпокрытие $\tilde{\Gamma}$. Подпокрытие $\tilde{\Gamma}$ можно получить, выкинув из набора Γ все кубы, лежащие в других кубах из этого набора.

§ 2. Конечно- и счетно-аддитивные функции множества на многомерной двоичной группе: некоторые факты

Пусть $\mathcal{B}$ обозначает множество всех двоичных интервалов (1.1), и пусть $\mathcal{B}_\rho$, $\rho \in (0, 1]$, – множество всех двоичных интервалов Δ с $\text{reg } \Delta \geq \rho$. Ясно, что $\mathcal{B}_1$ совпадает с множеством всех двоичных кубов (1.2).

Функции множества $\tau: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть $\mathcal{B}$ -функциями. Конечно-аддитивные $\mathcal{B}$ -функции называются *квазимерами* (см. [16; гл. 7]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Любая неотрицательная квазимера τ на $\mathbb{G}^m$ продолжается до борелевской меры [16; § 7.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть двоичный куб Δ представлен в виде дизъюнктивного объединения 2^m смежных двоичных кубов: $\Delta = \bigsqcup_{s=1}^{2^m} \Delta_s$. Будем говорить, что функция множества τ , определенная на двоичных кубах Δ и Δ_s ($s = 1, \dots, 2^m$), является Δ -аддитивной, если

$$\tau(\Delta) = \sum_{s=1}^{2^m} \tau(\Delta_s). \quad (2.1)$$

Используя структуру двоичных кубов, несложно установить следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть функция множества τ задана на всех двоичных кубах. Предположим, что τ является Δ -аддитивной для всех двоичных кубов Δ . Тогда τ является конечно-аддитивной на полукольце, состоящем из всех двоичных кубов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $k_0 \in \mathbb{N}$, а на всех двоичных кубах ранга не меньше чем k_0 задана функция множества τ . Предположим, что τ является $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ -аддитивной для каждого двоичного куба $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ ранга $k \geq k_0$. Тогда τ единственным образом продолжается до квазимеры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (2.1), можно определить единственным образом функцию множества τ последовательно на всех двоичных кубах Δ рангов $n_0 - 1, n_0 - 2, \dots, 0$ так, чтобы она была Δ -аддитивной на таких кубах. Тем самым, τ единственным образом Δ -аддитивно продолжается на все двоичные кубы Δ . Из этого факта получаем с учетом предложения 2.3, что τ является конечно-аддитивной на полукольце, состоящем из всех двоичных кубов. Отсюда согласно теореме о продолжении конечно-аддитивной функции множества с полукольца на порожденное им кольцо (см., например, [17; гл. 5]) вытекает, что τ единственным образом продолжается до квазимеры. Предложение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть τ – $\mathcal{B}$ -функция. Тогда $\mathcal{B}$ -производная $\mathcal{B}$ -функции τ в точке $\mathbf{t}$ определяется формулой

$$D_{\mathcal{B}}\tau(\mathbf{t}) = \lim_{\mu(\Delta)} \frac{\tau(\Delta)}{\mu(\Delta)} \quad \text{при } \Delta \in \mathcal{B}, \quad \Delta \ni \mathbf{t}, \quad d(\Delta) \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Заменив в (2.2) $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}_\rho$ ($\rho \in (0, 1]$), получим определение $\mathcal{B}_\rho$ -производной $\mathcal{B}$ -функции τ в точке $\mathbf{t}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Скажем, что квазимера τ *сосредоточена на множестве* $A \subset \mathbb{G}^m$, если $D_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{t}) = 0$ для всех $\mathbf{t} \in \mathbb{G}^m \setminus A$.

Для замкнутых множеств A определение 2.6 допускает более удобную формулировку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Если множество $A \subset \mathbb{G}^m$ замкнуто, то квазимера τ сосредоточена на множестве A тогда и только тогда, когда $\tau(\Delta) = 0$ для всех $\Delta \in \mathcal{B}$ таких, что $\Delta \subset \mathbb{G}^m \setminus A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Доказательство необходимости в упрощенном виде представляет собой рассуждения, имеющиеся, например, в [7; лемма 1]. Предположим обратное. Тогда $\tau(\Delta) \neq 0$ для некоторого двоичного интервала $\Delta \subset \mathbb{G}^m \setminus A$. Без ограничения общности можно считать, что $\tau(\Delta) > 0$.

Так как τ конечно-аддитивна, найдется двоичный куб $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)} \subset \Delta$ вида (1.2) такой, что $\tau(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}) > 0$. Далее, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\tau(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}) > \varepsilon \cdot \mu(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}).$$

Рассмотрим представление (1.3). В силу аддитивности τ для некоторого $\sigma \in \Sigma$ имеем

$$\tau(\Delta_{2\mathbf{p}+\sigma}^{(k+1)}) > \varepsilon \cdot \mu(\Delta_{2\mathbf{p}+\sigma}^{(k+1)}).$$

Повторяя рассуждения многократно, можно найти вложенную последовательность $\{\Delta^{(l)}\}_{l=k}^{\infty}$ двоичных кубов такую, что куб $\Delta^{(l)}$ имеет ранг l , $\Delta^{(k)} = \Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ и

$$\tau(\Delta^{(l)}) > \varepsilon \cdot \mu(\Delta^{(l)}), \quad l = k, k+1, \dots \quad (2.3)$$

Возьмем точку $\mathbf{t}_0 = \bigcap_{l=k}^{\infty} \Delta^{(l)}$. Имеем

$$\mathbf{t}_0 \in \Delta_{\mathbf{p}}^{(k)} \subset \Delta \subset \mathbb{G}^m \setminus A.$$

Кроме того, формула (2.3) влечет неравенство $D_{\mathcal{B}_1} \tau(\mathbf{t}) \geq \varepsilon > 0$. Это неравенство противоречит тому, что квазимера τ сосредоточена на множестве $A \subset \mathbb{G}^m$. Полученное противоречие доказывает необходимость условий предложения.

Достаточность. Пусть $\tau(\Delta) = 0$, если $\Delta \in \mathcal{B}$ и $\Delta \subset \mathbb{G}^m \setminus A$. Выберем и зафиксируем произвольную точку $\mathbf{t} \in \mathbb{G}^m \setminus A$. Тогда все двоичные кубы Δ достаточно малой меры Хаара, содержащие точку $\mathbf{t}$, обладают тем свойством, что $\Delta \subset \mathbb{G}^m \setminus A$. По условию $\tau(\Delta) = 0$ для всех таких Δ , откуда $D_{\mathcal{B}_1}(\mathbf{t}) = 0$. Это означает в силу определения 2.6 и произвольности выбора точки $\mathbf{t} \in \mathbb{G}^m \setminus A$, что квазимера τ сосредоточена на множестве A .

Предложение доказано полностью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Рассмотрим произвольный двоичный куб (1.2), а также его представление (1.3). Пусть ψ – произвольная квазимера. Тогда*

$$|\psi(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)})| \leq \sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{k+1}^{2\mathbf{p}+\sigma})|. \quad (2.4)$$

Доказательство очевидно.

§ 3. О существовании неотрицательных квазимер, мажорирующихся заданной квазимерой

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть ψ – нетривиальная квазимера на $\mathbb{G}^m$. Тогда найдется нетривиальная квазимера τ такая, что для всех двоичных кубов Δ справедливо соотношение*

$$0 \leq \tau(\Delta) \leq |\psi(\Delta)|. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как квазимера ψ нетривиальна, найдется двоичный куб $\tilde{\Delta}$ ранга k_0 такой, что $\psi(\tilde{\Delta}) \neq 0$. Положим

$$\tau(\Delta) = 0, \quad \text{если } \Delta \text{ – двоичный куб, } \text{rank } \Delta \geq k_0, \quad \Delta \cap \tilde{\Delta} = \emptyset, \quad (3.2)$$

где $\text{rank } \Delta$ обозначает ранг двоичного куба Δ . Кроме того, пусть

$$\tau(\tilde{\Delta}) = |\psi(\tilde{\Delta})|. \quad (3.3)$$

Далее, выберем и зафиксируем произвольный двоичный куб $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ в форме (1.2) такой, что $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)} \subsetneq \tilde{\Delta}$. Ясно, что $k \geq k_0 + 1$. Тогда для каждого $s = k_0, \dots, k$ существует единственный двоичный куб $\Delta_{\mathbf{p}_s}^{(s)}$ ранга s такой, что $\Delta_{\mathbf{p}_s}^{(s)} \supset \Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$. Очевидно, что если кубы $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ и $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ являются смежными, то

$$\Delta_{\mathbf{p}_s}^{(s)} = \Delta_{\mathbf{p}_s}^{(s)}, \quad s = k_0, \dots, k-1. \quad (3.4)$$

Заметим также, что

$$\Delta_{\mathbf{p}_k}^{(k)} = \Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}, \quad \Delta_{\mathbf{p}_{k_0}}^{(k_0)} = \tilde{\Delta}.$$

Рассмотрим представление (1.3) и введем величину

$$\text{dil}(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}) = \begin{cases} \frac{|\psi(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)})|}{\sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{k+1}^{2\mathbf{p}+\sigma})|}, & \text{если } \sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{k+1}^{2\mathbf{p}+\sigma})| \neq 0, \\ 1, & \text{если } \sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{k+1}^{2\mathbf{p}+\sigma})| = 0. \end{cases}$$

Учитывая (2.4), получаем соотношение

$$0 \leq \text{dil}(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}) \leq 1. \quad (3.5)$$

Положим

$$\tau(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}) = |\psi(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)})| \cdot \prod_{s=k_0}^{k-1} \text{dil}(\Delta_{\mathbf{p}_s}^{(s)}). \quad (3.6)$$

Из (1.3), (3.4) и (3.6) получаем, что если двоичные кубы $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ и $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ являются смежными, то

$$\tau(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}) = |\psi(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)})| \cdot \prod_{s=k_0}^{k-1} \text{dil}(\Delta_{\mathbf{p}_s}^{(s)}). \quad (3.7)$$

Во-первых, согласно (3.2), (3.3), (3.5) и (3.6) имеем $\tau(\Delta) \geq 0$ для всех двоичных кубов Δ .

Во-вторых, из (3.2) и (3.3) сразу получается соотношение (3.1) для двоичного куба $\Delta = \tilde{\Delta}$, а также для двоичных кубов Δ таких, что $\Delta \cap \tilde{\Delta} = \emptyset$. Для двоичных кубов $\Delta \subset \tilde{\Delta}$ соотношение (3.1) также имеет место в силу (3.5) и (3.6). Итак, соотношение (3.1) справедливо для всех двоичных кубов Δ .

Далее, (3.3) влечет неравенство $\tau(\tilde{\Delta}) > 0$. Значит, функция множества τ не является тривиальной.

Установим теперь, что τ продолжается до квазимеры. Сначала докажем Δ -аддитивность τ для всех двоичных кубов Δ ранга $k \geq k_0$. Выберем произвольный куб $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ с $k \geq k_0$. Заметим, что либо $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)} \cap \tilde{\Delta} = \emptyset$, либо $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)} \subset \tilde{\Delta}$. Рассмотрим отдельно оба этих случая.

Если $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)} \cap \tilde{\Delta} = \emptyset$, то

$$\Delta_{2\mathbf{p}+\sigma}^{(k+1)} \cap \tilde{\Delta} = \emptyset \quad \text{для всех } \sigma \in \Sigma. \quad (3.8)$$

Имеем с учетом (3.2) и (3.8), что $\tau(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}) = 0$ и $\tau(\Delta_{2\mathbf{p}+\sigma}^{(k+1)}) = 0$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Отсюда сразу вытекает, что функция множества τ является $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ -аддитивной в этом случае.

Пусть теперь $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)} \subset \tilde{\Delta}$. Имеем с учетом (3.6) и (3.7)

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \Sigma} \tau(\Delta_{2\mathbf{p}+\sigma}^{(k+1)}) &= \left(\sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{2\mathbf{p}+\sigma}^{(k+1)})| \right) \cdot \prod_{s=k_0}^k \frac{|\psi(\Delta_{\mathbf{p}_s}^{(s)})|}{\sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{2\mathbf{p}_s+\sigma}^{(s+1)})|} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{2\mathbf{p}+\sigma}^{(k+1)})| \right) \cdot \frac{|\psi(\Delta_{\mathbf{p}_k}^{(k)})|}{\sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{2\mathbf{p}_k+\sigma}^{(k+1)})|} \cdot \prod_{s=k_0}^{k-1} \frac{|\psi(\Delta_{\mathbf{p}_s}^{(s)})|}{\sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{2\mathbf{p}_s+\sigma}^{(s+1)})|} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{2\mathbf{p}+\sigma}^{(k+1)})| \right) \cdot \frac{|\psi(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)})|}{\sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{2\mathbf{p}+\sigma}^{(k+1)})|} \cdot \prod_{s=k_0}^{k-1} \frac{|\psi(\Delta_{\mathbf{p}_s}^{(s)})|}{\sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{2\mathbf{p}_s+\sigma}^{(s+1)})|} \\ &= |\psi(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)})| \cdot \prod_{s=k_0}^{k-1} \frac{|\psi(\Delta_{\mathbf{p}_s}^{(s)})|}{\sum_{\sigma \in \Sigma} |\psi(\Delta_{2\mathbf{p}_s+\sigma}^{(s+1)})|} = \tau(\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что функция множества τ является $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ -аддитивной и в этом случае.

Таким образом, τ является $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ -аддитивной для каждого двоичного куба $\Delta_{\mathbf{p}}^{(k)}$ ранга $k \geq k_0$. Тогда τ единственным образом продолжается до квазимера согласно предложению 2.4.

Теорема 3.1 доказана полностью.

§ 4. О разложении квазимера на многомерной двоичной группе

ЛЕММА 4.1. Пусть заданы множество $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} A_i$, где $A_i \subset \mathbb{G}^m$ – замкнутые множества, а также неотрицательная квазимера τ . Рассмотрим борелевскую меру τ_* , являющуюся продолжением квазимера τ (см. замечание 2.1). Если квазимера τ сосредоточена на множестве A , то для всех $\Delta \in \mathcal{B}$ справедливо равенство

$$\tau_*(\Delta \cap A) = \tau(\Delta). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С одной стороны, τ_* является борелевской мерой, что влечет

$$\tau_*(\Delta \cap A) \leq \tau_*(\Delta) = \tau(\Delta). \quad (4.2)$$

С другой стороны, выберем и зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Воспользуемся тем, что квазимера τ сосредоточена на множестве A . Тогда для всякого $\mathbf{t} \in \Delta \setminus A$ найдется двоичный куб $I_{\mathbf{t}}$ такой, что

$$\mathbf{t} \in I_{\mathbf{t}} \subset \Delta, \quad (4.3)$$

$$\tau(I_{\mathbf{t}}) < \varepsilon \cdot \mu(I_{\mathbf{t}}). \quad (4.4)$$

Набор $\Gamma = \{I_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in \Delta \setminus A\}$ образует покрытие множества $\Delta \setminus A$, из которого можно выбрать согласно замечанию 1.2 дизъюнктное подпокрытие $\tilde{\Gamma}$. Учитывая (4.3), получаем равенство

$$\Delta \setminus A = \bigsqcup_{I \in \tilde{\Gamma}} (I \setminus A).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 \tau(\Delta) &= \tau_*(\Delta) = \tau_*(\Delta \cap A) + \tau_*(\Delta \setminus A) = \tau_*(\Delta \cap A) + \sum_{I \in \tilde{\Gamma}} \tau_*(I \setminus A) \\
 &\leq \tau_*(\Delta \cap A) + \sum_{I \in \tilde{\Gamma}} \tau_*(I) = \tau_*(\Delta \cap A) + \sum_{I \in \tilde{\Gamma}} \tau(I) \\
 &\stackrel{\text{см. (4.4)}}{\leq} \tau_*(\Delta \cap A) + \varepsilon \cdot \sum_{I \in \tilde{\Gamma}} \mu(I) = \tau_*(\Delta \cap A) + \varepsilon \cdot \mu\left(\bigsqcup_{I \in \tilde{\Gamma}} (I \setminus A)\right) \\
 &\leq \tau_*(\Delta \cap A) + \varepsilon \cdot \mu(\mathbb{G}^m) = \tau_*(\Delta \cap A) + \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Цепочка (4.5) влечет неравенство

$$\tau(\Delta) \leq \tau_*(\Delta \cap A) + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, имеем неравенство

$$\tau(\Delta) \leq \tau_*(\Delta \cap A). \tag{4.6}$$

Формула (4.1) вытекает из формул (4.2) и (4.6). Лемма доказана.

Основная идея доказательства следующей теоремы схожа с рассуждениями из работы [18].

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть заданы множество $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} A_i$, где $A_i \subset \mathbb{G}^m$ – замкнутые множества, а также неотрицательная квазимера τ , сосредоточенная на множестве A . Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}_+$ найдется неотрицательная квазимера τ_i , сосредоточенная на множестве A_i и такая, что

$$\tau(\Delta) = \sum_{i \in \mathbb{N}_+} \tau_i(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{B}. \tag{4.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть τ_* – продолжение квазимеры τ до борелевской меры. Положим

$$\tau_i(\Delta) = \tau_*(\Delta \cap B_i), \quad B_i = A_i \setminus \left(\bigcup_{j < i} A_j \right). \tag{4.8}$$

1) Выберем произвольное $i \in \mathbb{N}_+$. Пусть для $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_p \in \mathcal{B}$ выполнено равенство

$$\Delta = \bigsqcup_{s=1}^p \Delta_s. \tag{4.9}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 \tau_i(\Delta) &\stackrel{\text{см. (4.8)}}{=} \tau_*(\Delta \cap B_i) \stackrel{\text{см. (4.9)}}{=} \tau_*\left(\left(\bigsqcup_{s=1}^p \Delta_s\right) \cap B_i\right) \\
 &= \sum_{s=1}^p \tau_*(\Delta_s \cap B_i) \stackrel{\text{см. (4.8)}}{=} \sum_{s=1}^p \tau_i(\Delta_s).
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Мы воспользовались тем, что τ_* является борелевской мерой. Цепочка (4.10) означает с учетом произвольности $i \in \mathbb{N}_+$, что все τ_i , $i \in \mathbb{N}_+$, являются квазимерами.

2) Из (4.8) и неотрицательности меры τ_* вытекает неотрицательность всех квазимер τ_i , $i \in \mathbb{N}_+$.

3) Фиксируем произвольное $i \in \mathbb{N}_+$. Выберем произвольный двоичный интервал $\Delta \subset \mathbb{G}^m \setminus A_i$. Тогда

$$\tau_i(\Delta) \stackrel{\text{см. (4.8)}}{=} \tau_*(\Delta \cap B_i) = \tau_*(\emptyset) = 0.$$

Отсюда получаем с учетом предложения 2.7, что квазимера τ_i сосредоточена на множестве A_i .

4) Пусть Δ – произвольный двоичный интервал. Заметим, что множества B_i из (4.8) попарно не пересекаются и $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} B_i = A$. С учетом данного факта имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}_+} \tau_i(\Delta) &\stackrel{\text{см. (4.8)}}{=} \sum_{i \in \mathbb{N}_+} \tau_*(\Delta \cap B_i) = \tau_*\left(\Delta \cap \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}_+} B_i\right)\right) \\ &= \tau_*(\Delta \cap A) \stackrel{\text{см. (4.1)}}{=} \tau(\Delta). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Из (4.11) вытекает равенство (4.7). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 4.2. Если дополнительно квазимера τ не является тривиальной, то найдется $i_0 \in \mathbb{N}_+$ такое, что квазимера τ_{i_0} также нетривиальна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если квазимера τ не является тривиальной, то получаем $\tau(\mathbb{G}^m) > 0$. Тогда $\tau_{i_0}(\mathbb{G}^m) > 0$ для некоторого $i_0 \in \mathbb{N}_+$ в силу формулы (4.7). Теорема доказана.

§ 5. Кратные ряды Хаара на многомерной двоичной группе: определения и основные факты

Система Хаара $\{H_n\}$ на $\mathbb{G}$ определяется так. Полагают $H_0 \equiv 1$; если же $n = 2^k + p$, $k = 0, 1, \dots$, $p = 0, \dots, 2^k - 1$, то

$$H_n(t) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при } t \in \Delta_{2^p}^{(k+1)}, \\ -2^{k/2} & \text{при } t \in \Delta_{2^{p+1}}^{(k+1)}, \\ 0 & \text{при } t \in \mathbb{G} \setminus \Delta_p^{(k)}. \end{cases}$$

m -кратный ряд Хаара на $\mathbb{G}^m$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} a_{\mathbf{n}} H_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} a_{n_1, \dots, n_m} \prod_{i=1}^m H_{n_i}(t^i), \\ \mathbf{n} &= (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m, \quad \mathbf{t} = (t^1, \dots, t^m) \in \mathbb{G}^m. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Если

$$\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_q) \in (\mathbb{N}_+)^m,$$

то $\mathbf{N}$ -я *прямоугольная частичная сумма* $S_{\mathbf{N}}$ ряда (5.1) в точке $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{G}^m$ определяется формулой

$$S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) := \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{n_m=0}^{N_m-1} a_{n_1, \dots, n_m} \prod_{i=1}^m H_{n_i}(t^i).$$

Если $N \in \mathbb{N}_+$, то выражение

$$S_N(\mathbf{t}) \stackrel{\text{def}}{=} S_{N, \dots, N}(\mathbf{t})$$

называется N -й *кубической частичной суммой* ряда (5.1) в точке $\mathbf{t} \in \mathbb{G}^m$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Из структуры функций Хаара вытекает, что для любых $\mathbf{N} \in (\mathbb{N}_+)^m$ и $\mathbf{t} \in \mathbb{G}^m$ найдется вектор $2^{\mathbf{k}} \in \mathbb{N}^m$ такой, что $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) = S_{2^{\mathbf{k}}}(\mathbf{t})$. При этом $N/2 \leq 2^{\mathbf{k}} \leq 2\mathbf{N}$.

Ряд (5.1) *сходится по прямоугольникам* к сумме $S(\mathbf{t})$ в точке $\mathbf{t}$, если

$$S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) \rightarrow S(\mathbf{t}) \quad \text{при} \quad \min_i \{N_1, \dots, N_m\} \rightarrow \infty. \quad (5.2)$$

Если $\rho \in (0, 1]$, то, добавив в (5.2) дополнительное ограничение $\text{reg } \mathbf{N} \geq \rho$, получим ρ -сходимость ряда (5.1) к сумме $S(\mathbf{t})$. 1-сходимость иначе называется *сходимостью по кубам*. При $m = 1$ все указанные виды сходимости превращаются в обычную сходимость.

Хорошо известно (см., например, [7], [8]), что каждый ряд (5.1) порождает квазимеру ψ по следующему правилу:

$$\psi(\Delta) = S_{2^{\mathbf{k}}}(\mathbf{t})\mu(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{B}. \quad (5.3)$$

Здесь $\mathbf{t}$ – произвольная точка двоичного интервала Δ , причем значение правой части (5.3) не зависит от выбора $\mathbf{t} \in \Delta$.

Соответствие между рядами (5.1) и квазимерами на $\mathbb{G}^m$ является линейным изоморфизмом, если естественным образом наделить множество рядов (5.1) и множество квазимер структурой линейного пространства.

Сходимость ряда (5.1) связана с $\mathcal{B}$ - или $\mathcal{B}_\rho$ -дифференцируемостью порожденной им квазимеры. Этот факт выражают следующие три предложения, утверждения которых хорошо известны и сразу вытекают из формулы (5.3) и замечания 5.1. В этих предложениях, а также в предложении 5.5 будем считать, что заданы ряд (S) вида (5.1) и квазимера ψ , порожденная данным рядом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Ряд (S) *сходится по прямоугольникам в точке* $\mathbf{t} \in \mathbb{G}^m$ *к конечной сумме* S *тогда и только тогда, когда* $D_{\mathcal{B}}\psi(\mathbf{t}) = S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть $\rho \in (0, 1]$. Если ряд (S) ρ -сходится в точке $\mathbf{t} \in \mathbb{G}^m$ к конечной сумме S , то $D_{\mathcal{B}_\rho}\psi(\mathbf{t}) = S$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть задана точка $\mathbf{t} \in \mathbb{G}^m$. Предположим, что все двоичные интервалы Δ достаточно малого диаметра, содержащие точку $\mathbf{t}$, обладают тем свойством, что $\psi(\Delta) = 0$. Тогда ряд (S) сходится к нулю в точке $\mathbf{t}$ по прямоугольникам или в смысле ρ -сходимости при каждом $\rho \in (0, 1]$.

Из предложений 5.2 и 5.3, а также из определения 2.6 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Пусть задано множество $A \subset \mathbb{G}^m$. Предположим, что ряд (S) сходится к нулю по прямоугольникам или в смысле ρ -сходимости при некотором $\rho \in (0, 1]$ в каждой точке $\mathbf{t} \in \mathbb{G}^m \setminus A$. Тогда квазимера ψ сосредоточена на множестве A .

§ 6. Теорема Бари для одномерных и кратных рядов Хаара

Здесь под сходимостью понимается либо сходимость по прямоугольникам, либо ρ -сходимость при некотором $\rho \in (0, 1]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Пусть Θ – некоторый класс рядов (5.1). Скажем, что множество $A \subset \mathbb{G}^m$ является $\mathcal{U}_\Theta$ -множеством, если любой ряд $(S) \in \Theta$, сходящийся к нулю всюду на $\mathbb{G}^m \setminus A$, является тривиальным, т.е. все его коэффициенты равны нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Пусть Θ – некоторый класс рядов (5.1). Будем говорить, что Θ обладает свойством наследственности, если он подчинен следующему условию. Пусть (S) и (S^*) – произвольные ряды вида (5.1) такие, что для N -х кубических частичных сумм S_N и S_N^* соответственно этих рядов имеем

$$|S_{2^k}(\mathbf{t})| \leq |S_{2^k}^*(\mathbf{t})| \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{G}^m.$$

Тогда если $(S^*) \in \Theta$, то $(S) \in \Theta$.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть Θ – произвольный класс рядов (5.1), обладающий свойством наследственности. Если множества $A_i \subset \mathbb{G}^m$ ($i \in \mathbb{N}_+$) являются замкнутыми $\mathcal{U}_\Theta$ -множествами, то множество $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} A_i$ является $\mathcal{U}_\Theta$ -множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что A не является $\mathcal{U}_\Theta$ -множеством. Тогда существует нетривиальный ряд Хаара $(S^*) \in \Theta$, сходящийся к нулю вне A .

Рассмотрим квазимеру ψ , порожденную рядом (S^*) . Тогда ψ сосредоточена на множестве A согласно предложению 5.5. Воспользуемся теоремой 3.1 и найдем квазимеру τ , удовлетворяющую условию (3.1). Применим теорему 4.2 и возьмем квазимеры τ_i ($i \in \mathbb{N}_+$) из утверждения этой теоремы. Одна из этих квазимер τ_{i_0} является нетривиальной в силу теоремы 4.3. Рассмотрим ряд (S) , порождающий квазимеру τ_{i_0} .

Так как квазимера τ_{i_0} является нетривиальной, ряд (S) также нетривиален. Далее, из (3.1) и (4.7) следует, что

$$0 \leq \tau_{i_0}(\Delta) \leq |\psi(\Delta)| \quad \text{для всех двоичных кубов } \Delta. \quad (6.1)$$

Пусть S_N и S_N^* – N -е кубические частичные суммы рядов (S) и (S^*) соответственно. Из формул (5.3) и (6.1) следует, что

$$|S_{2^k}(\mathbf{t})| \leq |S_{2^k}^*(\mathbf{t})| \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{G}^m. \quad (6.2)$$

Так как $(S^*) \in \Theta$, а класс Θ обладает свойством наследственности, то формула (6.2) влечет $(S) \in \Theta$.

Докажем теперь, что ряд (S) сходится к нулю вне A_{i_0} . Квазимера τ_{i_0} сосредоточена на замкнутом множестве A_{i_0} . Значит, в силу предложения 2.7 $\tau_{i_0}(\Delta) = 0$ для всех двоичных интервалов $\Delta \subset \mathbb{G}^m \setminus A_{i_0}$. Отсюда получаем с учетом предложения 5.4, что ряд (S) сходится к нулю всюду на $\mathbb{G}^m \setminus A_{i_0}$.

Таким образом, найден нетривиальный ряд $(S) \in \Theta$, который сходится к нулю вне A_{i_0} . Это противоречит тому, что A_{i_0} является $\mathcal{U}_\Theta$ -множеством. Полученное противоречие доказывает, что множество A является $\mathcal{U}_\Theta$ -множеством. Теорема доказана.

Нетрудно проверить, что все классы рядов (5.1), построенные ниже в примерах 6.4–6.8, обладают свойством наследственности, и для таких классов справедлива теорема Бари. В примерах 6.4–6.6 S_N обозначает N -ю кубическую частичную сумму, а в примерах 6.7 и 6.8 – частичную сумму ряда (S) вида (5.1).

ПРИМЕР 6.4. Рассмотрим произвольную последовательность $\{\Phi(N)\}_{N \in \mathbb{N}_+}$ неотрицательных чисел. Пусть Θ_Φ^1 – класс рядов (5.1) таких, что

$$|S_{2^k}(\mathbf{t})| \leq \Phi(2^k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{G}^m.$$

ПРИМЕР 6.5. Рассмотрим произвольную последовательность $\{\Phi(N)\}_{N \in \mathbb{N}_+}$ неотрицательных чисел. Пусть Θ_Φ^2 обозначает класс рядов (5.1) таких, что

$$|S_N(\mathbf{t})| \leq \Phi(N), \quad N \in \mathbb{N}_+, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{G}^m.$$

ПРИМЕР 6.6. Предположим, что для каждого $\mathbf{t} \in \mathbb{G}^m$ задана некоторая последовательность $\{\Phi_{\mathbf{t}}(N)\}_{N \in \mathbb{N}_+}$ неотрицательных чисел. Пусть Θ_Φ^3 – класс рядов (5.1) таких, что

$$|S_N(\mathbf{t})| \leq \Phi_{\mathbf{t}}(N), \quad N \in \mathbb{N}_+.$$

ПРИМЕР 6.7. Пусть Θ_{AT} – класс одномерных ($m = 1$) рядов (5.1), удовлетворяющих в каждой точке $t \in \mathbb{G}$ условию

$$a_n H_n(t) = o_t(n) \quad (6.3)$$

(класс Арутюняна–Талаляна). Несложно показать, что условие (6.3) эквивалентно тому, что $S_N(t) = o_t(N)$ при $N \rightarrow \infty$.

ПРИМЕР 6.8. Пусть $p > 0$ и $\Theta_{W,p}$ – класс одномерных ($m = 1$) рядов (5.1), удовлетворяющих условию

$$a_n = o(n^{p-1/2}) \quad (6.4)$$

(класс Вэйда). Нетрудно показать, что условие (6.4) эквивалентно тому, что $S_N(t) = o(N^p)$ равномерно по $t \in \mathbb{G}$ при $N \rightarrow \infty$.

Список литературы

- [1] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961, 936 с.; англ. пер.: N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series*, v. I, II, The Macmillan Co., New York, 1964, xxiii+553 pp., xix+508 pp.
- [2] Н. Н. Холщевникова, “О сумме меньше континуума замкнутых $\mathcal{U}$ -множеств”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 1981, № 1, 51–55; англ. пер.: N. N. Kholshchevnikova, “Less-than-continuum sum of closed $\mathcal{U}$ -sets”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **36**:1 (1981), 60–64.
- [3] A. S. Kechris, A. Louveau, *Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **128**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, viii+367 pp.
- [4] Г. М. Мушегян, “О множествах единственности для системы Хаара”, *Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем.*, **2**:6 (1967), 350–361.
- [5] В. А. Скворцов, “О множествах единственности для многомерных рядов Хаара”, *Матем. заметки*, **14**:6 (1973), 789–798; англ. пер.: V. A. Skvortsov, “Uniqueness sets for multiple Haar series”, *Math. Notes*, **14**:6 (1973), 1011–1016.
- [6] W. R. Wade, “Sets of uniqueness for Haar series”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **30**:3–4 (1977), 265–281.
- [7] М. Г. Плотников, “Квазимеры, хаусдорфовы p -меры и ряды Уолша и Хаара”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 157–188; англ. пер.: M. G. Plotnikov, “Quasi-measures, Hausdorff p -measures and Walsh and Haar series”, *Izv. Math.*, **74**:4 (2010), 819–848.
- [8] В. А. Скворцов, А. А. Талалян, “Некоторые вопросы единственности кратных рядов по системе Хаара и тригонометрической системе”, *Матем. заметки*, **46**:2 (1989), 104–113; англ. пер.: V. A. Skvortsov, A. A. Talalyan, “Some uniqueness questions of multiple Haar and trigonometric series”, *Math. Notes*, **46**:2 (1989), 646–653.
- [9] G. E. Tkebuchava, “On the divergence of spherical sums of double Fourier–Haar series”, *Anal. Math.*, **20**:2 (1994), 147–153.
- [10] V. Skvortsov, “Henstock–Kurzweil type integrals in $\mathcal{P}$ -adic harmonic analysis”, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, **20**:2 (2004), 207–224.
- [11] R. D. Getsadze, “On divergence of the general terms of the double Fourier–Haar series”, *Arch. Math. (Basel)*, **86**:4 (2006), 331–339.
- [12] Г. Г. Ониани, “О сходимости двойных рядов Фурье–Хаара по растяжениям множества”, *Матем. сб.*, **205**:7 (2014), 73–94; англ. пер.: G. G. Oniani, “The convergence of double Fourier–Haar series over homothetic copies of sets”, *Sb. Math.*, **205**:7 (2014), 983–1003.
- [13] K. Yoneda, “A generalized measure concentrated on a closed set of measure zero”, *Acta Math. Hungar.*, **83**:4 (1999), 327–338.
- [14] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., АФЦ, М., 1999, x+550 с.; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, xii+451 pp.
- [15] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987, 344 с.; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991, xiv+368 pp.
- [16] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis*, Adam Hilger, Ltd., Bristol, 1990, x+560 pp.

- [17] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 7-е изд., Физматлит, М., 2004, 572 с.; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, v. 1, 2, Graylock Press, Albany, N.Y., 1957, 1961, ix+129 pp., ix+128 pp.
- [18] Т. П. Лукашенко, “О рекурсивных разложениях мер”, *Матем. заметки*, **91**:5 (2012), 720–729; англ. пер.: Т. П. Lukashenko, “On recursive decompositions of measures”, *Math. Notes*, **91**:5 (2012), 671–679.

Михаил Геннадьевич Плотников
(Mikhail G. Plotnikov)

Вологодская государственная молочнохозяйственная
академия имени Н. В. Верещагина
E-mail: mgplotnikov@gmail.com

Поступила в редакцию
21.02.2015 и 04.07.2015

Юлия Александровна Плотникова
(Julia A. Plotnikova)

Вологодская государственная молочнохозяйственная
академия имени Н. В. Верещагина
E-mail: japlotnikova@yandex.ru