Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Ильютко, Е. А. Севостьянов, Об открытых дискретных отображениях с неограниченной характеристикой на римановых многообразиях, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 4, 65–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8493>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:22:26

УДК 517.548.2+514.764.2

Д. П. Ильютко, Е. А. Севостьянов

Об открытых дискретных отображениях с неограниченной характеристикой на римановых многообразиях

Работа посвящена изучению вопросов, находящихся на стыке теории пространственных квазиконформных отображений и теории римановых поверхностей. Получены теоремы о локальном поведении одного класса открытых дискретных отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности между произвольными римановыми многообразиями. Для указанных отображений установлена также возможность их продолжения в изолированные точки границы области. В качестве приложений получены некоторые результаты о локальном поведении классов Соболева и Орлича–Соболева.

Библиография: 52 названия.

Ключевые слова: риманово многообразие, модуль семейств кривых и поверхностей, отображение с ограниченным и конечным искажением, локальное и граничное поведение отображений, класс Орлича–Соболева.

DOI: 10.4213/sm8493

§ 1. Введение

1.1. В последнее время активно развивается теория отображений на римановых многообразиях и общих метрических пространствах, в частности, – теория квазиконформных отображений и отображений с конечным искажением (см., например, [1]–[12]). Основы теории квазиконформных отображений, как известно, заложены академиком М. А. Лаврентьевым (см., например, [13], [14]), что в дальнейшем дало почву для зарождения теории отображений с ограниченным искажением по Ю. Г. Решетняку и теории отображений с конечным искажением (см. [2], [3], [6], [15]–[21]). Здесь же хотелось бы указать на работы, связанные с классами Соболева и пространствами Карно–Каратеодори новосибирской школы математиков (см. [22]–[31]).

Среди указанных работ можно выделить публикации, в которых за основу определения изучаемого класса берутся верхние и нижние оценки искажения конформного модуля семейств кривых ([1], [3], [7]–[9], [11] и [32]–[35]). Следует отметить, что в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ подобные оценки установлены, в основном, для всех известных классов отображений, таких как аналитические функции на плоскости, квазиконформные отображения, а также пространственные

Первый автор частично поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 13-01-00664 и №16-01-00378) и Программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-581.2014.1).

отображения с ограниченным и конечным искажением (см., например, [5], [20] и [33]–[35]).

Подход к определению отображений при помощи модулей семейств кривых позволяет получить интересные приложения к классам Соболева и Орлича–Соболева (см. [1], [3], [5], [7] и [9]–[11]). Так, в недавней публикации [1] установлены результаты о локальном и граничном поведении гомеоморфизмов классов Орлича–Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ на римановых многообразиях, где ключевым условием на класс $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ является так называемое условие типа Кальдерона на функцию φ (см. эту же работу). Здесь же обсуждаются вопросы о поведении так называемых нижних Q -гомеоморфизмов и кольцевых Q -гомеоморфизмов, имеющих важное техническое значение. Следует упомянуть статью [7] и монографию [8], где соответствующие проблемы были рассмотрены в пространстве $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$.

Чтобы некоторым образом подытожить отдельные результаты работ [1], [7], [8], [11] и [32]–[35], мы уходим в настоящей статье от изучения гомеоморфизмов на римановых многообразиях, переходя к описанию свойств аналогичных классов открытых дискретных отображений с конечным искажением. Необходимо отметить, что рассмотрение локальных гомеоморфизмов и отображений с ветвлением существенно отличается от случая гомеоморфизмов и требует более тонкого подхода (см., например, [5], [16], [17], [20], [34] и [35]). Основное внимание в настоящей работе уделяется следующим вопросам:

- 1) локальные свойства классов Орлича–Соболева и Q -отображений;
- 2) устранение изолированных особенностей Q -отображений;
- 3) связь Q -отображений с классами Орлича–Соболева.

1.2. Перейдем к определениям и формулировкам основных результатов. Следующие понятия могут быть найдены, например, в [36] и [37]. Напомним, что n -мерным топологическим многообразием $\mathbb{M}^n$ называется хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную некоторому открытому множеству в $\mathbb{R}^n$. *Картой* на многообразии $\mathbb{M}^n$ будем называть пару (U, φ) , где U – открытое множество пространства $\mathbb{M}^n$ и φ – соответствующий гомеоморфизм множества U на открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Если $p \in U$ и $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, то соответствующие числа $x^1, \dots, x^n$ называются *локальными координатами точки p* . *Гладким многообразием* называется само множество $\mathbb{M}^n$ вместе с соответствующим набором карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, так, что объединение всех U_α по параметру α дает все множество $\mathbb{M}^n$ и, кроме того, отображение, осуществляющее переход от одной системы локальных координат к другой, принадлежит классу C^∞ .

Напомним, что *римановой метрикой* на гладком многообразии $\mathbb{M}^n$ называется положительно определенное гладкое симметричное тензорное поле типа $(0, 2)$. В частности, компоненты римановой метрики g_{kl} в различных локальных координатах (U, x) и (V, y) взаимосвязаны посредством тензорного закона

$$\tilde{g}_{ij}(x) = g_{kl}(y(x)) \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j}.$$

Римановым многообразием будем называть гладкое многообразие вместе с римановой метрикой на нем. Длину гладкой кривой $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, соединяющей точки $\gamma(t_1) = M_1 \in \mathbb{M}^n$, $\gamma(t_2) = M_2 \in \mathbb{M}^n$, и n -мерный объем области A на римановом многообразии определим согласно соотношениям

$$l(\gamma) := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt, \quad v(A) = \int_A \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \cdots dx^n. \quad (1.1)$$

Ввиду положительной определенности тензора $g = g_{ij}(x)$ имеем: $\det g_{ij} > 0$. Геодезическим расстоянием между точками p_1 и p_2 , принадлежащими риманову многообразию $\mathbb{M}^n$, будем называть наименьшую длину всех кусочно-гладких кривых в $\mathbb{M}^n$, соединяющих точки p_1 и p_2 . Геодезическое расстояние между точками p_1 и p_2 будем обозначать через $d(p_1, p_2)$ (всюду далее d обозначает геодезическое расстояние, если не оговорено противное). В частности, шаром $B(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{M}^n$ и радиуса $r > 0$ на римановом многообразии $\mathbb{M}^n$ мы будем называть следующее множество:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n \mid d(x, x_0) < r\}.$$

Так как риманово многообразие, вообще говоря, не предполагается связным, расстояние между любыми точками многообразия может быть не определено. Хорошо известно, что любая точка p риманова многообразия $\mathbb{M}^n$ имеет окрестность $U \ni p$ (называемую далее *нормальной окрестностью точки p*) и соответствующее координатное отображение $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ так, что геодезические сферы с центром в точке p и радиуса r , лежащие в окрестности U , переходят при отображении φ в евклидовы сферы того же радиуса, а пучок геодезических кривых, исходящих из точки p , переходит в пучок радиальных отрезков в $\mathbb{R}^n$ (см. [36; леммы 5.9 и 6.11, а также комментарии на стр. 77]). Локальные координаты $\varphi(p) = (x^1, \dots, x^n)$ в этом случае называются *нормальными координатами* точки p . Стоит отметить, что в случае связного многообразия $\mathbb{M}^n$ открытые множества метрического пространства $(\mathbb{M}^n, d)$ порождают топологию исходного топологического пространства $\mathbb{M}^n$ (см. [36; лемма 6.2]). Заметим, что в нормальных координатах всегда тензорная матрица $g_{ij}(x)$ в точке p – единичная (а в силу непрерывности g в точках, близких к p , эта матрица сколь угодно близка к единичной (см. [36; предложение 5.11, п. (с)]).

1.3. Напомним определения классов Соболева и отображений с конечным искажением, которые будут необходимы нам в дальнейшем (см. [1], [6] и [38]). Всяду ниже в этой статье будут рассматриваться только непрерывные отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ области $D \subset \mathbb{R}^n$, либо $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ области $D \subset \mathbb{M}^n$, где $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}_*^n$ далее обозначают римановы многообразия размерности n с геодезическими расстояниями d и d_* соответственно, если только не оговорено противное.

Пусть U – открытое множество, $U \subset \mathbb{R}^n$, $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция, $u \in L_{\text{loc}}^1(U)$. Здесь и далее $dm(x)$ означает элемент объема в $\mathbb{R}^n$, соответствующий мере Лебега m . Предположим, что найдется функция $v \in L_{\text{loc}}^1(U)$ такая, что

$$\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) u(x) dm(x) = - \int_U \varphi(x) v(x) dm(x)$$

для любой функции $\varphi \in C_1^0(U)$. Тогда будем говорить, что функция v является *обобщенной производной первого порядка функции u по переменной x_i* , и обозначать

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) := v.$$

Функция $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(U)$, если u имеет обобщенные производные первого порядка по каждой из переменных в U .

Пусть G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}(G)$, пишут $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(G)$, если все координатные функции $f = (f_1, \dots, f_n)$ обладают обобщенными частными производными первого порядка, которые локально интегрируемы в G в первой степени. Если дополнительно

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in L_{\text{loc}}^p(G), \quad p \geq 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

то говорят, что $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}(G)$.

Пусть теперь область $D \subset \mathbb{M}^n$, тогда будем говорить, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ принадлежит классу $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(D)$, если каждая пара точек $p \in D$ и $f(p) \in f(D)$ имеет окрестности $U \subset D$, $V \subset f(D)$, в которых $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\varphi(U))$, где $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ – соответствующие карты, переводящие U и V в некоторые открытые подмножества $\mathbb{R}^n$.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Полагаем в точках дифференцируемости $x \in D$ отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\|f'(x)\| = \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}, \quad J(x, f) = \det f'(x),$$

где, как обычно, $f'(x)$ – матрица Якоби отображения f в точке x . Отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ будем называть *отображением с конечным искажением*, если $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(D)$ и для некоторой функции $K(x): D \rightarrow [1, \infty)$ выполнено условие

$$\|f'(x)\|^n \leq K(x)|J(x, f)|$$

при почти всех $x \in D$ (см. [6; гл. VI, п. 6.3]). В некоторых случаях условие $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(D)$ заменяют более сильным требованием $f \in W_{\text{loc}}^{1,n}(D)$. В дальнейшем, если речь идет об отображении f с конечным искажением, мы считаем, что $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}$.

Пусть X и Y – два топологических пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ будем называется *открытым*, если $f(A)$ открыто в Y для любого открытого $A \subset X$, и *дискретным*, если для каждого $y \in Y$ любые две различные точки множества $f^{-1}(y)$ имеют попарно непересекающиеся окрестности. Пусть теперь D – область на римановом многообразии $\mathbb{M}^n$ и $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ – некоторое открытое дискретное отображение. Определим якобиан отображения в точке $x \in D$ как

$$J(x, f) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{v_*(f(B(x, r)))}{v(B(x, r))},$$

где v и v_* – объем в $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}_*^n$ соответственно. Заметим, что в нормальных координатах определенный таким образом якобиан открытого дискретного отображения f совпадает в почти всех точках дифференцируемости с обычным якобианом (определителем якобиевой матрицы) (см. [39; п. V.3.2, теорема 2]). Полагаем

$$L(x, f) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{d_*(f(x), f(y))}{d(x, y)}, \quad l(x, f) = \liminf_{y \rightarrow x} \frac{d_*(f(x), f(y))}{d(x, y)},$$

где d и d_* – геодезические расстояния на $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}_*^n$ соответственно. Предположим, что область $D \subset \mathbb{M}^n$, тогда отображение $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ называется *отображением с конечным искажением*, если для почти всех $x \in D$ и некоторой почти всюду конечной функции $K(x) < \infty$ выполнено неравенство

$$L^n(x, f) \leq K(x)J(x, f).$$

Здесь “почти всех” понимается в соответствующей карте в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, полагаем

$$K_O(x, f) = \begin{cases} \frac{L^n(x, f)}{|J(x, f)|}, & J(x, f) \neq 0, \\ 1, & f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Используя средства линейной алгебры и переходя к нормальным координатам в соответствующей карте в $\mathbb{R}^n$, мы можем показать, что $K_O(x, f) \geq 1$ (см. [15; гл. I, п. 2.1, соотношения (2.7), (2.8)]). Пусть $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – неубывающая функция, $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ – отображение класса $W_{\text{loc}}^{1,1}$. Будем говорить, что $f \in W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$, если в произвольных локальных координатах

$$\int_G \varphi(|\nabla f(x)|) dm(x) < \infty \quad (1.3)$$

для любой компактной подобласти $G \subset D$, где

$$|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^2}.$$

Класс $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ называется *классом Орлича–Соболева*.

1.4. Остановимся на некоторых примерах классов Орлича–Соболева. Для этой цели укажем одно из условий на функцию φ , для которой из выполнения условия (1.3) в одной конкретной карте ψ будет следовать также выполнение условия (1.3) в любой другой карте. Пусть $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – неубывающая функция, такая что при некоторых постоянных $C > 0$, $T > 0$ и всех $t \geq T$ выполнено неравенство вида

$$\varphi(2t) \leq C\varphi(t). \quad (1.4)$$

Покажем, что в этом случае определение класса Орлича–Соболева не зависит от карты. Пусть $\psi_1: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi_2: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ – различные локальные координаты, определенные в окрестностях $U, V \subset \mathbb{M}^n$ точки $x \in \mathbb{M}^n$, а $\psi_3: Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi_4: W \rightarrow \mathbb{R}^n$ – различные локальные координаты, определенные в окрестностях Z и W точки $f(x) \in \mathbb{M}_*^n$. Предположим, нам известно, что $\psi_3 \circ f \circ \psi_1^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$. Необходимо проверить, что в этом случае также $\psi_4 \circ f \circ \psi_2^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$.

Сначала заметим, что $\psi_4 \circ f \circ \psi_2^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,1}$. Действительно, поскольку отображение перехода $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ принадлежит классу C^∞ на открытом множестве $\psi_2(V) \subset \mathbb{R}^n$, то $\psi_3 \circ f \circ \psi_1^{-1} \circ \psi_1 \circ \psi_2^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ ввиду инвариантности классов Соболева относительно квазиизометрий [38; п. 1.1.7]. Далее, если $\psi_4 \circ \psi_3^{-1}$ – квазиизометрия, то и

$$F := \psi_4 \circ f \circ \psi_2^{-1} = \psi_4 \circ \psi_3^{-1} \circ \psi_3 \circ f \circ \psi_1^{-1} \circ \psi_1 \circ \psi_2^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,1}.$$

Для завершения доказательства утверждения о включении $\psi_4 \circ f \circ \psi_2^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ осталось установить импликацию

$$\varphi(|\nabla \psi_3(f(\psi_1^{-1}(x)))|) \in L_{\text{loc}}^1 \quad \implies \quad \varphi(|\nabla \psi_4(f(\psi_2^{-1}(x)))|) \in L_{\text{loc}}^1.$$

Для удобства обозначим $\alpha(z) := (\psi_4 \circ \psi_3^{-1})(z)$ и $\beta(x) = (\psi_1 \circ \psi_2^{-1})(x)$. Фиксируя $1 \leq i \leq n$, будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial z_k}(z) \frac{\partial(\psi_3 \circ f \circ \psi_1^{-1})(y)}{\partial y_j} \frac{\partial \beta}{\partial x_i}(x),$$

где $y = \beta(x)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, и $z = (\psi_3 \circ f \circ \psi_1^{-1})(y)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$. Пусть G – компактная подобласть открытого множества $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$, тогда ввиду гладкости многообразия найдется постоянная $C_i > 0$, зависящая от G , такая, что

$$\left| \frac{\partial \beta}{\partial x_i}(x) \right| \leq C_i.$$

Ввиду тех же соображений при каждом $k \in \mathbb{N}$ найдется постоянная $B_k > 0$ такая, что

$$\left| \frac{\partial \alpha}{\partial z_k}(z) \right| \leq B_k$$

в соответствующей области в $\mathbb{R}^n$. Для удобства обозначим

$$\alpha_k := \frac{\partial \alpha}{\partial z_k}(z), \quad \beta_j = \frac{\partial(\psi_3 \circ f \circ \psi_1^{-1})(y)}{\partial y_j}, \quad \gamma_i := \frac{\partial \beta}{\partial x_i}(x).$$

Тогда при некоторой постоянной $A(n)$, зависящей только от n ,

$$|\nabla F(x)|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j,k=1}^n \alpha_k \beta_j \gamma_i \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n A(n) M N \left(\frac{\partial(\psi_3 \circ f \circ \psi_1^{-1})(y)}{\partial y_j} \right)^2,$$

где $N = \max_{1 \leq i \leq n} C_i^2$ и $M = \max_{1 \leq k \leq n} B_k^2$. Окончательно, из последнего неравенства заключаем, что для некоторой постоянной $K > 0$, зависящей от области G и размерности пространства n , выполняется соотношение

$$|\nabla F(x)| \leq K |\nabla \psi_3(f(\psi_1^{-1}(x)))|. \quad (1.5)$$

Заметим, что $G = G_1 \cup G_2$, где $G_1 = \{x \in G \mid |\nabla F(x)| < T\}$ и $G_2 = \{x \in G \mid |\nabla F(x)| \geq T\}$, и T соответствует условию (1.4). Тогда при некоторой, вообще говоря, новой постоянной $C_1 > 0$, зависящей от области G и размерности пространства n , из условий (1.4), (1.5) и неубывания функции φ мы получим

$$\int_G \varphi(|\nabla F(x)|) dm(x) \leq C_1 \left(\varphi(T)m(G_1) + \int_{G_2} \varphi(|\nabla \psi_3(f(\psi_1^{-1}(x)))|) dm(x) \right) < \infty,$$

что и требовалось установить. Таким образом, для корректности определения класса Орлича–Соболева W_{loc}^φ достаточно требовать условие (1.3) в какой-либо одной карте, как только функция φ удовлетворяет ограничению (1.4).

Простые примеры таких функций легко указать:

- 1) степенная функция $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha \geq 0$;
- 2) логарифмическая функция $\varphi(t) = \log t$;
- 3) функции вида $\varphi(t) = t^\alpha + \log^\beta t$ и $\varphi(t) = t^\alpha \log^\beta t$, где $\alpha, \beta \geq 0$.

В общем же случае указанных функций φ довольно много (см. [40; гл. I, § 4, п. 4]).

1.5. Пусть (X, d) и (X', d') – метрические пространства с расстояниями d и d' соответственно. Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f: X \rightarrow X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k} , которая сходится локально равномерно в X (т.е. равномерно на любых компактных подмножествах X) к непрерывной функции $f: X \rightarrow X'$.

Введенное понятие очень тесно связано со следующим. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f: X \rightarrow X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех таких x , что $d(x, x_0) < \delta$ и для всех $f \in \mathfrak{F}$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$. Согласно одной из версий теоремы Арцела–Асколи (см., например, [21; п. 20.4]) если (X, d) – сепарабельное метрическое пространство, а (X', d') – компактное метрическое пространство, то семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f: X \rightarrow X'$ нормально тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно.

Здесь и далее равностепенная непрерывность, а также наличие предела в точке $x_0 \in \mathbb{M}^n$ для отображения $f: \mathbb{M}^n \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ понимаются в смысле геодезических расстояний d и d' на $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}_*^n$ соответственно.

1.6. Пусть (X, d, μ) – произвольное метрическое пространство с метрикой d , наделенное мерой μ и $B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$. Следующее определение может быть найдено, например, в [10; п. 4]. Будем говорить, что интегрируемая в $B(x_0, r)$ функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in \text{FMO}(x_0)$, если

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \bar{\varphi}_\varepsilon| d\mu(x) < \infty,$$

где

$$\bar{\varphi}_\varepsilon = \frac{1}{\mu(B(x_0, \varepsilon))} \int_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x) d\mu(x).$$

1.7. Пусть D – подмножество $\mathbb{M}^n$. Для отображения $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ множества, $E \subset D$ и $y \in \mathbb{M}_*^n$ определим *функцию кратности* $N(y, f, E)$ как число прообразов точки y во множестве E , т.е.

$$N(y, f, E) = \text{card}\{x \in E \mid f(x) = y\}, \quad N(f, E) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, E). \quad (1.6)$$

1.8. *Кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (открытого интервала (a, b) либо полуоткрытого интервала вида $[a, b)$ или $(a, b]$) в $\mathbb{M}^n$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{M}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ , а если $f: \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ – произвольное отображение, то $f(\Gamma) := \{f \circ \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Длину произвольной кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{M}^n$, лежащей на многообразии $\mathbb{M}^n$, можно определить как точную верхнюю грань сумм $\sum_{i=1}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$ по всевозможным разбиениям $a \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq b$. Следующие определения в случае пространства $\mathbb{R}^n$ могут быть найдены, например, в [21; гл. I, разд. 1–6] (см. также [41; гл. II]). Борелева функция $\rho: \mathbb{M}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{M}^n$, если линейный интеграл по натуральному параметру s каждой (локально спрямляемой) кривой $\gamma \in \Gamma$ от функции ρ удовлетворяет условию

$$\int_{\gamma} \rho(\gamma(s)) ds \geq 1.$$

В этом случае мы пишем: $\rho \in \text{adm } \Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^n(x) dv(x).$$

При этом если $\text{adm } \Gamma = \emptyset$, то полагаем $M(\Gamma) = \infty$ (см. [21; разд. 6, с. 16] либо [41; с. 176]). Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$. Именно, модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M(\emptyset) = 0$, обладает свойством монотонности относительно семейств кривых,

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \implies M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2), \quad (1.7)$$

а также свойством полуаддитивности:

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i) \quad (1.8)$$

(см. [21; гл. I, теорема 6.2] в $\mathbb{R}^n$ либо [41; теорема 1] в случае более общих пространств с мерами). Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорировано* семейством Γ_2 , пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2 . В этом случае

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 \implies M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2) \quad (1.9)$$

(см. [21; гл. I, теорема 6.4] либо [41; свойство (с)] в случае более общих пространств с мерами).

1.9. Следующее определение для случая $\mathbb{R}^n$ может быть найдено, например, в работе [34]. Пусть $x_0 \in D$, $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая относительно меры v функция, и число $r_0 > 0$ таково, что шар $\overline{B(x_0, r_0)}$ лежит вместе со своим замыканием в некоторой нормальной окрестности U точки x_0 . Пусть также $0 < r_1 < r_2 < r_0$, $A = A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r_1 < d(x, x_0) < r_2\}$, $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$, – геодезические сферы с центром в точке x_0 и радиусов r_1 и r_2 соответственно, а $\Gamma(S_1, S_2, A)$ обозначает семейство всех кривых, соединяющих S_1 и S_2 внутри области A . Отображение $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ условимся называть *кольцевым Q -отображением в точке $x_0 \in D$* , если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \eta^n(d(x, x_0)) dv(x) \quad (1.10)$$

выполнено в кольце A для произвольных r_1, r_2 , указанных выше, и для каждой измеримой функции $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (1.11)$$

Отображения типа кольцевых Q -отображений были предложены к изучению О. Мартио и изучались им совместно с В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым (см. [9], а также [2]). В пространстве $\mathbb{R}^n$ кольцевые Q -отображения являются обобщением аналитических функций на плоскости, $Q \equiv 1$, квазиконформных отображений, $Q \leq K = \text{const}$, и отображений с ограниченным искажением, $Q \leq K = \text{const}$ (см. [32; теорема 1, лемма 6]). Кроме того, вторым автором настоящей статьи было показано, что в области $D \subset \mathbb{R}^n$ произвольные открытые дискретные отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{\text{loc}}^{1,n}$, имеющие меру множества точек ветвления, равную нулю, и внешняя дилатация $K_O(x, f)$ которых локально суммируема в степени $n - 1$, являются кольцевыми Q -отображениями при $Q = K_O^{n-1}(x, f)$ (см. [33; следствие 2]). Для гомеоморфизмов класса $W_{\text{loc}}^{1,n}$ таких, что $f^{-1} \in W_{\text{loc}}^{1,n}$, этот результат установлен О. Мартио, В. И. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым (см. [9; теоремы 8.1 и 8.6]) и Е. С. Афанасьевой (Е. С. Смоловой) на римановых многообразиях (см. [11; лемма 6]).

1.10. Пусть (X, d, μ) – метрическое пространство с метрикой d , наделенное локально конечной борелевской мерой μ . Следуя [43; п. 7.22] будем говорить, что борелева функция $\rho: X \rightarrow [0, \infty]$ является *верхним градиентом* функции $u: X \rightarrow \mathbb{R}$, если для всех спрямляемых кривых γ , соединяющих точки x и $y \in X$, выполняется неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_{\gamma} \rho ds,$$

где, как обычно, $\int_{\gamma} \rho ds$ обозначает линейный интеграл от функции ρ по кривой γ . Будем также говорить, что в указанном пространстве X выполняется $(1; p)$ -неравенство Пуанкаре, если найдутся постоянные $C \geq 1$ и $\tau > 0$ такие, что для каждого шара $B \subset X$, произвольной локально ограниченной непрерывной функции $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ и любого ее верхнего градиента ρ выполняется

следующее неравенство:

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u - u_B| d\mu(x) \leq C(\text{diam } B) \left(\frac{1}{\mu(\tau B)} \int_{\tau B} \rho^p d\mu(x) \right)^{1/p},$$

где

$$u_B := \frac{1}{\mu(B)} \int_B u d\mu(x).$$

Метрическое пространство (X, d, μ) назовем $\tilde{Q}$ -регулярным по Альфорсу при некотором $\tilde{Q} \geq 1$, если при каждом $x_0 \in X$ и некоторой постоянной $C \geq 1$

$$\frac{1}{C} R^{\tilde{Q}} \leq \mu(B(x_0, R)) \leq C R^{\tilde{Q}}$$

(здесь, в частности, постоянная C не зависит от x_0). Заметим, что локально римановы многообразия являются n -регулярными по Альфорсу (см. [1; лемма 5.1]), где в качестве μ выступает мера объема v на многообразии, определенная вторым соотношением в (1.1). Следует также заметить, что если риманово многообразие $\tilde{Q}$ -регулярно по Альфорсу, то $\tilde{Q} = n$ (см. рассуждения на с. 61 в работе [43] о совпадении $\tilde{Q}$ с хаусдорфовой размерностью пространства X , а также [1; лемма 5.1] о совпадении топологической и хаусдорфовых размерностей областей риманового многообразия).

1.11. Всюду далее в статье через $\mathfrak{F}_{\varphi, Q, B_R, N, K}(D)$ обозначается семейство открытых дискретных отображений $f: D \rightarrow B_R \setminus K$ класса $W_{\text{loc}}^{1, \varphi}$, имеющих конечное искажение, таких, что $N(f, D) \leq N$ и $K_O^{n-1}(x, f) \leq Q(x)$ почти всюду. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $n \geq 3$, многообразие $\mathbb{M}_*^n$ связно, является n -регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}_*^n$ выполнено $(1; n)$ -неравенство Пуанкаре. Пусть $B_R \subset \mathbb{M}_*^n$ – некоторый фиксированный шар радиуса R , гомеоморфный некоторой области в $\mathbb{R}^n$ относительно некоторой фиксированной карты и такой, что $\overline{B_R}$ – компакт, $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – неубывающая измеримая по Лебегу функция, D – область в $\mathbb{M}^n$, $N \in \mathbb{N}$, $Q: D \rightarrow [1, \infty]$ – функция, измеримая относительно меры v , и K – невырожденный континуум в B_R . Пусть выполнено условие

$$\int_1^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)} \right]^{1/(n-2)} dt < \infty \quad (1.12)$$

и, кроме того, $Q \in \text{ФМО}(x_0)$. Тогда семейство $\mathfrak{F}_{\varphi, Q, B_R, N, K}(D)$ является равномерно непрерывным в точке $x_0 \in D$ (определение класса ФМО см. в п. 1.6).

Всюду далее через $\mathfrak{R}_{x_0, Q, B_R, K}(D)$ обозначается семейство открытых дискретных кольцевых Q -отображений $f: D \rightarrow B_R \setminus K$ в точке $x_0 \in D$. Важнейшим результатом на пути доказательства теоремы 1.1 является также следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $n \geq 2$, многообразие $\mathbb{M}_*^n$ связно, является n -регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}_*^n$ выполнено $(1; n)$ -неравенство Пуанкаре. Пусть $B_R \subset \mathbb{M}_*^n$ – некоторый фиксированный шар радиуса R , D – область

в $\mathbb{M}^n$, $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ – функция, измеримая относительно меры ν , и K – невырожденный континуум в B_R . Тогда семейство отображений $\mathfrak{R}_{x_0, Q, B_R, K}(D)$ является равностепенно непрерывным в точке $x_0 \in D$, если $Q \in \text{FMO}(x_0)$.

Ввиду теоремы Арцела–Асколи (см., например, [21; п. 20.4] либо [34; § 4]) имеем также следующее

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Предположим, что в условиях теоремы 1.2 многообразие $\mathbb{M}_*^n$ является компактным. Если $\mathfrak{R}_{D, Q, B_R, K}(D)$ – семейство, состоящее из всех открытых дискретных отображений $f: D \rightarrow B_R \setminus K$, являющихся кольцевыми Q -отображениями в каждой точке $x_0 \in D$ и, кроме того, $Q \in \text{FMO}(x_0)$ в каждой точке $x_0 \in D$, то класс $\mathfrak{R}_{D, Q, B_R, K}(D)$ образует нормальное семейство отображений.*

Еще один важный результат, близкий по технике доказательств к сформулированным выше, касается устранения изолированных особенностей кольцевых отображений.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть $n \geq 2$, многообразие $\mathbb{M}_*^n$ связно, является n -регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}_*^n$ выполнено $(1; n)$ -неравенство Пуанкаре. Пусть $B_R \subset \mathbb{M}_*^n$ – некоторый фиксированный шар радиуса R , такой что $\overline{B_R}$ является компактом в $\mathbb{M}_*^n$ и $\overline{B_R} \neq \mathbb{M}_*^n$. Пусть также D – область в $\mathbb{M}^n$ и $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ – функция, измеримая относительно меры ν . Пусть $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow B_R$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 \in D$. Тогда f имеет непрерывное продолжение $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$, как только $Q \in \text{FMO}(x_0)$.*

§ 2. О нормальных семействах одного подвида отображений с неограниченной характеристикой

2.1. Всюду далее

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}^n \mid d(x, x_0) = r\},$$

$$A(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{M}^n \mid r_1 < d(x, x_0) < r_2\},$$

$d(A)$ – геодезический диаметр множества $A \subset \mathbb{M}^n$. Далее, если не оговорено противное, граница ∂D области $D \subset \mathbb{M}^n$ и замыкание $\overline{D}$ области D понимаются в смысле геодезического расстояния d .

В настоящем параграфе нас интересуют вопросы локального поведения на многообразиях так называемых Q -отображений, введенных в рассмотрение выше. Здесь нас будут интересовать только открытые дискретные отображения, поскольку более общие классы требуют применения принципиально иной техники исследования. Изучение локального поведения Q -отображений является важным этапом исследования классов Орлича–Соболева, о которых речь пойдет в § 4.

2.2. Перед тем как мы приступим к изложению вспомогательных результатов и основной части настоящего параграфа, дадим еще одно важное определение (см. [20; гл. II, § 3]). Пусть D – область риманового многообразия $\mathbb{M}^n$,

$n \geq 2$, $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$, $n \geq 2$, – отображение, $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ – некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha: [a, c] \rightarrow D$, $c \leq b$, называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x , если

- (1) $\alpha(a) = x$;
- (2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c]}$;
- (3) $c < c' \leq b$,

то не существует кривой $\alpha': [a, c'] \rightarrow D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a, c]}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c']}$. Имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $n \geq 2$, D – область в $\mathbb{M}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ – открытое дискретное отображение, $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ – кривая и точка $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{M}^n$ и рассмотрим $f(x_0) \in \mathbb{M}_*^n$. Пусть φ и ψ – отображения, задающие локальные координаты в окрестности точек x_0 и $f(x_0)$ соответственно. Поскольку точка $f(x_0)$ принадлежит многообразию $\mathbb{M}_*^n$, найдется окрестность V этой точки, гомеоморфная множеству $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$. В силу непрерывности отображения f , найдется окрестность U точки x_0 , такая что $f(U) \subset V$. С другой стороны, не ограничивая общности, можно считать, что U гомеоморфна открытому множеству $\varphi(U)$ в $\mathbb{R}^n$. Мы можем также считать, что множества $\varphi(U)$ и $\psi(V)$ являются областями в $\mathbb{R}^n$, тогда $f^* = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ – открытое дискретное отображение между областями $\varphi(U)$ и $\psi(V)$ в $\mathbb{R}^n$. Для таких отображений существование максимальных поднятий локально вытекает из соответствующего результата Рикмана в n -мерном евклидовом пространстве (см. [20; гл. II, теорема 3.2, шаг 2 доказательства]). Отсюда вытекает локальное существование максимальных поднятий и на многообразиях. Глобальное существование максимальных поднятий может быть установлено аналогично доказательству шага 1 указанной выше теоремы.

2.3. Пусть A – открытое подмножество многообразия $\mathbb{M}^n$, а C – компактное подмножество A . *Конденсатором* будем называть пару множеств $E = (A, C)$. *Емкостью* конденсатора E называется следующая величина:

$$\text{cap } E = \text{cap}(A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u(x)|^n dv(x), \quad (2.1)$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных непрерывных функций $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем в A , таких что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}$. В формуле (2.1), как обычно, $|\nabla u| = (\sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2)^{1/2}$.

Следующее утверждение имеет важное значение для доказательства дальнейших результатов (см. [20; гл. II, предложение 10.2 и замечание 10.8]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $n \geq 2$, $E = (A, C)$ – произвольный конденсатор в $\mathbb{M}^n$, и пусть Γ_E – семейство всех кривых вида $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ таких, что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда

$$\text{cap } E = M(\Gamma_E).$$

2.4. Пусть $x_0 \in D$, $A = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая относительно меры v функция, U – некоторая нормальная окрестность точки x_0 , $r_0 := \text{dist}(x_0, \partial U)$. Обозначим через $\mathcal{E}$ конденсатор вида $\mathcal{E} = (B(x_0, \varepsilon_0), \overline{B(x_0, \varepsilon)})$, где $\varepsilon < \varepsilon_0 < r_0$. Следующие леммы могут быть полезными при исследовании свойства равностепенной непрерывности открытых дискретных кольцевых Q -отображений в наиболее общей ситуации.

ЛЕММА 2.1. Пусть $n \geq 2$, D – область в $\mathbb{M}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ – открытое дискретное отображение такое, что соотношение

$$\text{cap } f(\mathcal{E}) \leq \int_A Q(x) \eta^n(d(x, x_0)) dv(x) \quad (2.2)$$

выполнено для некоторого ε_0 , $0 < \varepsilon_0 < r_0$, и произвольного $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$ (где $\varepsilon'_0 \in (0, \varepsilon_0)$ – некоторое фиксированное число), а также для каждой измеримой функции $\eta: (\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что имеет место (1.11) при $r_1 = \varepsilon$, $r_2 = \varepsilon_0$. Пусть также для некоторого семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon: (\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$, выполнено условие

$$\int_{\varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \psi_\varepsilon^n(d(x, x_0)) dv(x) \leq F(\varepsilon, \varepsilon_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'_0), \quad (2.3)$$

где $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$ – некоторая функция и

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi_\varepsilon(t) dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'_0). \quad (2.4)$$

Тогда

$$\text{cap } f(\mathcal{E}) \leq F(\varepsilon, \varepsilon_0) / I^n(\varepsilon, \varepsilon_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon'_0). \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{cap } f(\mathcal{E}) = 0$, то выполнение неравенства очевидно. Пусть $\text{cap } f(\mathcal{E}) \neq 0$. Рассмотрим семейство измеримых функций $\eta_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t) / I(\varepsilon, \varepsilon_0)$, $t \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Заметим, что для всех таких $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$ выполнено:

$$\int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \eta_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Тогда из соотношений (2.2) и (2.3) с учетом (2.4) вытекает неравенство (2.5).

2.5.

ЛЕММА 2.2. Пусть $n \geq 2$, D – область в $\mathbb{M}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 \in D$, $r_0 > 0$ таково, что шар $B(x_0, r_0)$ лежит со своим замыканием в некоторой нормальной окрестности U точки x_0 . Предположим, что для некоторого числа $0 < \varepsilon_0 < r_0$, некоторого $\varepsilon'_0 \in (0, \varepsilon_0)$ и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon: (\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$, выполнено условие (2.3), где $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$ – некоторая функция, и, кроме того, для произвольных $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$ выполнено условие (2.4). Тогда для конденсатора $E = (B(x_0, \varepsilon_0), \overline{B(x_0, \varepsilon)})$ и при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$ имеет место соотношение (2.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим конденсатор $E = (A, C)$, где A и C таковы, как указано в условии леммы. Если $\text{сар } f(E) = 0$, то выполнение неравенства (2.5) очевидно. Пусть $\text{сар } f(E) \neq 0$.

Пусть Γ_E – семейство всех кривых вида $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ таких, что $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$ для произвольного компакта $F \subset A$, где $|\gamma| = \{x \in \mathbb{M}^n \mid \exists t \in [a, b] : \gamma(t) = x\}$ – носитель кривой γ . Напомним, что $\text{сар } E = M(\Gamma_E)$ (см. предложение 2.2). Для конденсатора $f(E)$ рассмотрим семейство кривых $\Gamma_{f(E)}$. Заметим также, что каждая кривая $\gamma \in \Gamma_{f(E)}$ имеет максимальное поднятие при отображении f , лежащее в A с началом в C (см. предложение 2.1). Пусть Γ^* – семейство всех максимальных поднятий кривых $\Gamma_{f(E)}$ при отображении f с началом в C . Покажем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$.

Предположим противное, т.е. что существует кривая $\beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ семейства $\Gamma_{f(E)}$, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha: [a, c] \rightarrow B(x_0, \varepsilon_0)$ лежит в некотором компакте K внутри $B(x_0, \varepsilon_0)$. Следовательно, его замыкание $\bar{\alpha}$ – компакт в $B(x_0, \varepsilon_0)$. Заметим, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\bar{\beta}$ – компакт в $f(B(x_0, \varepsilon_0))$, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{f(E)}$. Рассмотрим предельное множество G кривой α при $t_k \rightarrow c$,

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k)\}, \quad t_k \in [a, c), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = c.$$

Отметим, что, переходя к подпоследовательностям, мы можем ограничиться монотонными последовательностями t_k . Для $x \in G$ в силу непрерывности f будем иметь $f(\alpha(t_k)) \rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty$, где $t_k \in [a, c)$, $t_k \rightarrow c$ при $k \rightarrow \infty$. Однако $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \rightarrow \beta(c)$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $B(x_0, \varepsilon_0)$. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\bar{\alpha}$ (см. [42; гл. I, п. 3.6])

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha([t_k, c)) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha([t_k, c)) \neq \emptyset$$

ввиду монотонности последовательности связных множеств $\alpha([t_k, c))$ и, таким образом, G является связным согласно [42; гл. I, п. 9.12]. Таким образом, в силу дискретности f , G не может состоять более чем из одной точки и кривая $\alpha: [a, c] \rightarrow B(x_0, \varepsilon_0)$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha: [a, c] \rightarrow K \subset B(x_0, \varepsilon_0)$, причем $f(\alpha(c)) = \beta(c)$. Снова по предложению 2.1 можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c, b]}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α' , получаем новое поднятие α'' кривой β , которое определено на $[a, c']$, $c' \in (c, b)$, что противоречит максимальнойности поднятия α . Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_E$.

Кроме того, заметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$, и, следовательно, ввиду свойства (1.9)

$$M(\Gamma_{f(E)}) \leq M(f(\Gamma^*)). \quad (2.6)$$

Рассмотрим

$$S_\varepsilon = S(x_0, \varepsilon), \quad S_{\varepsilon_0} = S(x_0, \varepsilon_0),$$

где ε_0 – из условия леммы и $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$. Заметим, что поскольку $\Gamma^* \subset \Gamma_E$, то $\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0 - \delta)) < \Gamma^*$ при сколь угодно малых $\delta > 0$, и, следовательно, $f(\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0 - \delta))) < f(\Gamma^*)$. Значит,

$$M(f(\Gamma^*)) \leq M(f(\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0 - \delta)))). \quad (2.7)$$

Из соотношений (2.6) и (2.7) следует, что

$$M(\Gamma_{f(E)}) \leq M(f(\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0 - \delta)))).$$

и, таким образом, по предложению 2.2

$$\text{cap } f(E) \leq M(f(\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0 - \delta)))). \quad (2.8)$$

Пусть $\eta(t)$ произвольная неотрицательная измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(t) dt = 1.$$

Рассмотрим семейство измеримых функций

$$\eta_\delta(t) = \frac{\eta(t)}{\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0-\delta} \eta(t) dt}.$$

Заметим, что так как

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(t) dt = 1,$$

то $\delta > 0$ можно выбрать так, что

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0-\delta} \eta(t) dt > 0.$$

Поскольку

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0-\delta} \eta_\delta(t) dt = 1,$$

то по определению кольцевого Q -отображения в точке x_0 мы получим

$$\begin{aligned} & M(f(\Gamma(S_\varepsilon, S_{\varepsilon_0-\delta}, A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0 - \delta)))) \\ & \leq \frac{1}{\left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0-\delta} \eta(t) dt\right)^n} \int_{\varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \eta^n(d(x, x_0)) dv(x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \rightarrow 0$ и учитывая соотношение (2.8), получаем

$$\text{cap } f(E) \leq \int_{\varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \eta^n(d(x, x_0)) dv(x)$$

для произвольной неотрицательной измеримой функции $\eta(t)$ такой, что

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(t) dt = 1.$$

Необходимое заключение вытекает теперь из леммы 2.1.

Лемма 2.2 доказана.

2.6. Попутно, в ходе доказательства леммы 2.2, нами также было установлено следующее утверждение.

ЛЕММА 2.3. Пусть $n \geq 2$, D – область в $\mathbb{M}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 \in D$. Тогда отображение f удовлетворяет также оценке (2.2), каковы бы ни были $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < r_0$, где $r_0 := \text{dist}(x_0, \partial U)$, а U – некоторая нормальная окрестность точки x_0 .

Справедливо следующее утверждение (см. [44; предложение 4.7]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть X – $\tilde{Q}$ -регулярное по Альфорсу метрическое пространство с мерой, в котором выполняется $(1; n)$ -неравенство Пуанкаре так, что $\tilde{Q} - 1 \leq n \leq \tilde{Q}$. Тогда для произвольных континуумов E и F , содержащихся в шаре $B(x_0, R)$, и некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство

$$M(\Gamma(E, F, X)) \geq \frac{1}{C} \frac{\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\}}{R^{1+n-\tilde{Q}}}.$$

2.7. Следующие утверждения доказаны вторым автором в $\mathbb{R}^n$ (совместно с Р. Р. Салимовым) даже в несколько более сильном варианте (см. [34]), где предполагается, что заданное семейство отображений выпускает некоторое множество положительной емкости. Однако для римановых многообразий мы рассмотрим лишь случай ограниченного в смысле геодезического расстояния семейства отображений.

ЛЕММА 2.4. Пусть $n \geq 2$, многообразие $\mathbb{M}_*^n$ связно, является n -регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}_*^n$ выполнено $(1; n)$ -неравенство Пуанкаре. Предположим, что D – область в $\mathbb{M}^n$, $x_0 \in D$, $\overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \subset U$, U – некоторая нормальная окрестность точки x_0 . Пусть $\mathfrak{L}_{x_0, Q, B_R, K}(D)$ – семейство открытых дискретных отображений $f: D \rightarrow B_R \setminus K$, удовлетворяющих соотношению (2.2) в точке $x_0 \in D$ для произвольных $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где $B_R \subset \mathbb{M}_*^n$ – некоторый фиксированный шар радиуса R , K – невырожденный континуум в B_R .

Предположим также, что для некоторого числа $\varepsilon'_0 \in (0, \varepsilon_0)$ и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon: (\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$, выполнено условие (2.3), где некоторая заданная функция $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$ удовлетворяет условию $F(\varepsilon, \varepsilon_0) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ определяется соотношением (2.4).

Тогда семейство отображений $\mathfrak{L}_{x_0, Q, B_R, K}(D)$ является равностепенно непрерывным в точке x_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathfrak{L}_{x_0, Q, B_R, K}(D)$. Полагаем $A := B(x_0, r_0) \subset D$. Заметим, что при указанных условиях $\bar{A}$ является компактным подмножеством D . Тогда при каждом $0 < \varepsilon < r_0$ множество $C := \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ является компактным подмножеством $B(x_0, r_0)$, поскольку C есть замкнутое подмножество компактного пространства $\bar{A}$ (см. [45; гл. 4, п. II, теорема 2]). Таким образом, $E = (A, C)$ – конденсатор в $\mathbb{M}^n$.

Рассмотрим семейство кривых $\Gamma_{f(E)}$ для конденсатора $f(E)$ в терминах предложения 2.2. Заметим, что подсемейство неспрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E)}$ имеет нулевой модуль, и что оставшееся подсемейство, состоящее из всех спрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E)}$, состоит из кривых $\beta: [a, b] \rightarrow f(D)$, имеющих предел при $t \rightarrow b$. Заметим, что указанный предел принадлежит множеству $\partial f(A)$. Из сказанного следует, что

$$M(\Gamma_{f(E)}) = M(\Gamma(f(C), \partial f(A), f(A))). \quad (2.10)$$

Заметим, что $\Gamma(K, f(C), \mathbb{M}_*^n) > \Gamma(f(C), \partial f(A), f(A))$ (см. [45; § 46, п. I, теорема 1]), так что ввиду (1.9)

$$M(\Gamma(f(C), \partial f(A), f(A))) \geq M(\Gamma(K, f(C), \mathbb{M}_*^n)). \quad (2.11)$$

Ввиду предложения 2.3 получим

$$M(\Gamma(K, f(C), \mathbb{M}_*^n)) \geq \frac{1}{C_1} \frac{\min\{\text{diam } f(C), \text{diam } K\}}{R}. \quad (2.12)$$

По лемме 2.2 $M(\Gamma_{f(E)}) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и, следовательно, ввиду (2.10), (2.11) и (2.12) получаем, что

$$\min\{\text{diam } f(C), \text{diam } K\} = \text{diam } f(C)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из соотношений (2.5) и (2.12) также вытекает, что для любого $\sigma > 0$ найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\sigma)$ такое, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\text{diam } f(C) \leq \sigma,$$

что и означает равностепенную непрерывность семейства $\mathfrak{L}_{x_0, Q, B_R, K}(D)$ в точке x_0 .

2.8. На основании лемм 2.3 и 2.4 получаем также следующее утверждение.

ЛЕММА 2.5. Пусть $n \geq 2$, многообразие $\mathbb{M}_*^n$ связно, является n -регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}_*^n$ выполнено $(1; n)$ -неравенство Пуанкаре. Предположим, D – область в $\mathbb{M}^n$ и $B_R \subset \mathbb{M}_*^n$ – некоторый фиксированный шар радиуса R , K – невырожденный континуум в B_R .

Предположим также, что для некоторого числа $0 < \varepsilon_0 < \infty$ такого, что $\overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \subset U$ (U – некоторая нормальная окрестность точки x_0), некоторого $\varepsilon'_0 \in (0, \varepsilon_0)$ и семейства неотрицательных измеримых по Лебегу функций $\{\psi_\varepsilon(t)\}$, $\psi_\varepsilon: (\varepsilon, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon'_0)$, выполнено условие (2.3), где некоторая заданная функция $F(\varepsilon, \varepsilon_0)$ удовлетворяет условию

$$F(\varepsilon, \varepsilon_0) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)),$$

а $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ определяется соотношением (2.4).

Тогда семейство отображений $\mathfrak{R}_{Q, x_0, B_R, K}(D)$ является равностепенно непрерывным в точке x_0 .

2.9. Следующее утверждение вытекает из [10; лемма 4.1] и [1; следствие 5.1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. В произвольном римановом многообразии $\mathbb{M}^n$ функция $Q(x)$ класса ФМО в точке x_0 удовлетворяет соотношению (2.3), где функция $G(\varepsilon) := F(\varepsilon, \varepsilon_0)/I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)$ удовлетворяет условию: $G(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и

$$\psi_\varepsilon(t) \equiv \psi(t) := \frac{1}{t \log(1/t)}.$$

2.10. Доказательство теоремы 1.2 вытекает из леммы 2.5 на основании предложения 2.4.

2.11. Элементом площади гладкой гиперповерхности H на римановом многообразии $\mathbb{M}^n$ будем называть выражение вида

$$d\mathcal{A} = \sqrt{\det g_{\alpha\beta}^*} du^1 \cdots du^{n-1},$$

где $g_{\alpha\beta}^*$ – риманова метрика на H , порожденная исходной римановой метрикой g_{ij} согласно соотношению

$$g_{\alpha\beta}^* = g_{ij}(x(u)) \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \quad (2.13)$$

Здесь $x(u)$ обозначает параметризацию поверхности H такую, что $\nabla_u x \neq 0$.

2.12. Справедливо следующее утверждение, обобщающее теорему 1.2.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $n \geq 2$, многообразие $\mathbb{M}_*^n$ связно, является n -регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}_*^n$ выполнено $(1; n)$ -неравенство Пуанкаре. Пусть $B_R \subset \mathbb{M}_*^n$ – некоторый фиксированный шар радиуса R , D – область в $\mathbb{M}^n$, $Q: D \rightarrow [1, \infty]$ – функция, измеримая относительно меры объема v , K – невырожденный континуум в B_R . Обозначим через $\mathfrak{R}_{x_0, Q, B_R, K}(D)$ семейство открытых дискретных кольцевых Q -отображений $f: D \rightarrow B_R \setminus K$ в точке $x_0 \in D$. Тогда семейство отображений $\mathfrak{R}_{x_0, Q, B_R, K}(D)$ является равностепенно непрерывным в точке $x_0 \in D$, если при некотором $\delta(x_0) > 0$ выполняется равенство

$$\int_0^{\delta(x_0)} \left(\int_{S(x_0, t)} Q(x) d\mathcal{A} \right)^{1/(1-n)} dt = \infty. \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем

$$P_{Q, n}(t) := \left(\int_{S(x_0, t)} Q(x) d\mathcal{A} \right)^{1/(1-n)}.$$

Достаточно показать, что условие (2.14) влечет выполнение условия (2.3) леммы 2.5. Можно считать, что $B(x_0, \delta(x_0))$ лежит в нормальной окрестности точки x_0 . Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} P_{Q, n}(t), & t \in (0, \delta(x_0)), \\ 0, & t \notin (0, \delta(x_0)). \end{cases}$$

Заметим теперь, что требование вида (2.4) выполняется при $\varepsilon_0 = \delta(x_0)$ и всех достаточно малых ε . Далее установим неравенство

$$\int_{\varepsilon < d(x, x_0) < \delta(x_0)} Q(x) \psi^n(d(x, x_0)) dv(x) \leq C \int_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} P_{Q,n}(t) dt \quad (2.15)$$

при некоторой постоянной $C > 0$. Для этого покажем, что к левой части соотношения (2.15) применим аналог теоремы Фубини. Рассмотрим в окрестности точки $x_0 \in S(z_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ локальную систему координат $z^1, \dots, z^n$, $n-1$ базисных векторов которой взаимно ортогональны и лежат в плоскости, касательной к сфере, а последний базисный вектор перпендикулярен этой плоскости. Пусть $r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1}$ сферические координаты точки $x = x(\theta)$ в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что $n-1$ приращений переменных $z^1, \dots, z^{n-1}$ вдоль сферы при фиксированном r равны $dz^1 = r d\theta^1, \dots, dz^{n-1} = r d\theta^{n-1}$, а приращение переменной z^n по r равно $dz^n = dr$. В таком случае,

$$dv(x) = \sqrt{\det g_{ij}(x)} r^{n-1} dr d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}.$$

Рассмотрим параметризацию сферы $S(0, r)$ $x = x(\theta)$, $\theta = (\theta^1, \dots, \theta^{n-1})$, $\theta_i \in (-\pi, \pi]$. Заметим, что $\partial x^\alpha / \partial \theta^\beta = 1$ при $\alpha = \beta$ и $\partial x^\alpha / \partial \theta^\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n-1$. Тогда в обозначениях соотношения (2.13) имеем: $g_{\alpha\beta}^*(\theta) = g_{\alpha\beta}(x(\theta))r^2$,

$$d\mathcal{A} = \sqrt{\det g_{\alpha\beta}(x(\theta))} r^{n-1} d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_{S(x_0, r)} Q(x) \psi^n(d(x, x_0)) d\mathcal{A} \\ &= \psi^n(r) r^{n-1} \int_{\Pi} \sqrt{\det g_{\alpha\beta}(x(\theta))} Q(x(\theta)) d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\Pi = (-\pi, \pi]^{n-1}$ — прямоугольная область изменения параметров $\theta^1, \dots, \theta^{n-1}$. Напомним, что в нормальной системе координат геодезические сферы переходят в обычные сферы того же радиуса с центром в нуле, а пучок геодезических, исходящих из точки многообразия, переходит в пучок радиальных отрезков в $\mathbb{R}^n$ (см. [36; леммы 5.9 и 6.11]), так что кольцу $\{x \in \mathbb{M}^n \mid \varepsilon < d(x, x_0) < \delta(x_0)\}$ соответствует та часть $\mathbb{R}^n$, в которой $r \in (\varepsilon, \delta(x_0))$. Согласно сказанному выше, применяя классическую теорему Фубини (см., например, [47; гл. III, п. 8.1]),

$$\begin{aligned} & \int_{\varepsilon < d(x, x_0) < \delta(x_0)} Q(x) \psi^n(d(x, x_0)) dv(x) \\ &= \int_{\varepsilon}^{\delta(x_0)} \int_{\Pi} \sqrt{\det g_{ij}(x)} Q(x) \psi^n(r) r^{n-1} d\theta^1 \dots d\theta^{n-1} dr. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Поскольку в нормальных координатах тензорная матрица g_{ij} сколь угодно близка к единичной в окрестности данной точки, то $C_2 \det g_{\alpha\beta}(x) \leq \det g_{ij}(x) \leq$

$C_1 \det g_{\alpha\beta}(x)$. Учитывая сказанное и сравнивая (2.16) и (2.17), приходим к соотношению (2.15). Но тогда также

$$\int_{\varepsilon < d(x, x_0) < \delta(x_0)} Q(x) \psi^n(d(x, x_0)) dv(x) = o(I^n(\varepsilon, \delta(x_0)))$$

ввиду соотношения (2.14). Утверждение теоремы 2.1 следует теперь из леммы 2.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В ходе доказательства теоремы 2.1 мы доказали следующий аналог теоремы Фубини на римановых многообразиях: существует нормальная окрестность U точки $x_0 \in \mathbb{M}^n$ и постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, удовлетворяющих ограничениям $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \text{dist}(x_0, \partial U)$, выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} C_1 \int_{\varepsilon_1 < d(x, x_0) < \varepsilon_2} Q(x) dv(x) &\leq \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \int_{S(x_0, r)} Q(x) d\mathcal{A} dr \\ &\leq C_2 \int_{\varepsilon_1 < d(x, x_0) < \varepsilon_2} Q(x) dv(x). \end{aligned}$$

Более того, из теоремы Фубини, примененной к обычному пространству $\mathbb{R}^n$, вытекает, что функция $\sqrt{\det g_{ij}(x)} Q(x)$ измерима относительно меры площади $d\mathcal{A}$ для почти всех евклидовых сфер $\tilde{S}(x_0, r)$ (см., например, [47; гл. III, теорема 8.1]). Однако, тогда функция $Q(x)$ также измерима на почти всех сферах $S(x_0, r)$, поскольку, как показывают приведенные выше рассуждения, измеримость функции Q на этих сферах эквивалентна измеримости функции $\sqrt{\det g_{\alpha\beta}(x)} Q(x)$ на евклидовых сферах $\tilde{S}(x_0, r)$. С другой стороны,

$$\sqrt{\det g_{\alpha\beta}(x)} Q(x) = \frac{\sqrt{\det g_{ij}(x)}}{\sqrt{\det g_{ij}(x)}} \sqrt{\det g_{\alpha\beta}(x)} Q(x) = G_1(x) G_2(x),$$

где

$$G_1(x) := \frac{\sqrt{\det g_{\alpha\beta}(x)}}{\sqrt{\det g_{ij}(x)}}, \quad G_2(x) := \sqrt{\det g_{ij}(x)} Q(x)$$

– измеримые функции относительно меры площади $d\mathcal{A}$ для почти всех r . Следовательно, $Q(x)$ измерима на почти всех сферах $S(x_0, r)$ как произведение двух измеримых функций.

Ввиду теоремы Арцела–Асколи (см., например, [21; п. 20.4]) имеем также следующее

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Предположим, что в условиях теоремы 1.2 многообразие $\mathbb{M}_*^n$ является компактным. Если $\mathfrak{R}_{D, Q, B_R, K}(D)$ – это семейство, состоящее из всех открытых дискретных отображений $f: D \rightarrow B_R \setminus K$, являющихся кольцевыми Q -отображениями в каждой точке $x_0 \in D$, и, кроме того, условие (2.14) выполнено в каждой точке $x_0 \in D$, то класс $\mathfrak{R}_{D, Q, B_R, K}(D)$ образует нормальное семейство отображений.*

§ 3. Устранение изолированных особенностей кольцевых Q -отображений на римановых многообразиях

3.1. Из теории аналитических функций известно, что аналитическая функция $\varphi: D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ области $D \subset \mathbb{C}$, не принимающая пару комплексных значений, может быть продолжена до мероморфной функции $\varphi: D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ (т.е. имеет место непрерывное аналитическое продолжение функции φ в точку z_0 , при этом здесь возможно также бесконечное значение продолженной функции (см. [48; гл. VIII, § 4]). Аналогичный результат остается справедливым также для отображений $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ с ограниченным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, не принимающих значения из некоторого множества E , имеющего положительную конформную емкость (см. [17; теорема 4.1]; см. также [20; гл. III, теорема 2.9 и гл. VII, теорема 1.1]). Не столь давно в работе [34] был доказан некоторый аналог приведенного выше утверждения для более широкого класса открытых дискретных кольцевых Q -отображений в $\mathbb{R}^n$. Наша ближайшая цель – получить аналогичный результат об устранении изолированных особенностей для открытых дискретных кольцевых Q -отображений на римановых многообразиях. Начнем со следующей важнейшей леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть $n \geq 2$, D – область в $\mathbb{M}^n$, $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ – кольцевое Q -отображение в точке $x_0 \in D$. Предположим, что найдется $\varepsilon_0 > 0$ и измеримая по Лебегу функция $\psi(t): (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ со следующим свойством. Для любого $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ найдется $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2]$ такое, что

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_2) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_2} \psi(t) dt < \infty \quad (3.1)$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ и, кроме того, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(d(x, x_0)) dv(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)). \quad (3.2)$$

Если Γ – семейство всех кривых $\gamma(t): (0, 1) \rightarrow D \setminus \{x_0\}$ таких, что $\gamma(t_k) \rightarrow x_0$ при некоторой последовательности $t_k \rightarrow 0$, $\gamma(t) \not\equiv x_0$, то $M(f(\Gamma)) = 0$.

В частности, условие (3.1) автоматически выполнено, как только функция $\psi \in L_{\text{loc}}^1(0, \varepsilon_0)$ удовлетворяет условию: $\psi(t) > 0$ при почти всех $t \in (0, \varepsilon_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что шар $B(x_0, \varepsilon_0)$ лежит в нормальной окрестности точки x_0 . Заметим, что

$$\Gamma > \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i, \quad (3.3)$$

где Γ_i – семейство кривых $\alpha_i(t): (0, 1) \rightarrow \mathbb{M}^n$ таких, что $\alpha_i(1) \in \{0 < d(x, x_0) = r_i < \varepsilon_0\}$, где r_i – некоторая последовательность такая, что $r_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и $\alpha_i(t_k) \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$ для той же самой последовательности $t_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Зафиксируем $i \geq 1$. По соотношению (3.1) леммы найдется $\varepsilon_1 \in (0, r_i]$

такое, что $I(\varepsilon, r_i) > 0$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$. Заметим, что при указанных $\varepsilon > 0$ функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{\psi(t)}{I(\varepsilon, r_i)}, & t \in (\varepsilon, r_i), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, r_i) \end{cases}$$

удовлетворяет условию нормировки вида (1.11) в кольце $A(x_0, \varepsilon, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon < d(x, x_0) < r_i\}$ и, следовательно, ввиду соотношения (1.10) (поскольку f является кольцевым Q -отображением в точке x_0)

$$\begin{aligned} & M(f(\Gamma(S(x_0, \varepsilon), S(x_0, r_i), A(x_0, \varepsilon, r_i)))) \\ & \leq \int_{A(x_0, \varepsilon, r_i)} Q(x) \eta^n(d(x, x_0)) dv(x) \leq \mathfrak{F}_i(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\mathfrak{F}_i(\varepsilon) = \frac{1}{(I(\varepsilon, r_i))^n} \int_{\varepsilon < d(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(d(x, x_0)) dv(x).$$

Принимая во внимание (3.2), получаем $\mathfrak{F}_i(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Заметим, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\Gamma_i > \Gamma(S(x_0, \varepsilon), S(x_0, r_i), A(x_0, \varepsilon, r_i)). \quad (3.5)$$

Таким образом, при каждом фиксированном $i = 1, 2, \dots$ из (3.4) и (3.5) получаем

$$M(f(\Gamma_i)) \leq \mathfrak{F}_i(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ и каждом фиксированном $i \in \mathbb{N}$. Однако левая часть неравенства (3.6) не зависит от ε , и, следовательно, $M(f(\Gamma_i)) = 0$. Наконец, из (3.3) и свойства полуаддитивности модуля (1.8) вытекает, что $M(f(\Gamma)) = 0$.

3.2. Основным техническим утверждением, позволяющим получать результаты об устранимых особенностях открытых дискретных кольцевых Q -отображений в наиболее общей ситуации, является следующая лемма.

ЛЕММА 3.2. Пусть $n \geq 2$, $\mathbb{M}_*^n$ — связно, является n -регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}_*^n$ выполнено $(1; n)$ -неравенство Пуанкаре. Пусть также D — область в $\mathbb{M}^n$, $B_R \subset \mathbb{M}_*^n$ — некоторый фиксированный шар радиуса R такой, что $\overline{B_R}$ — компакт в $\mathbb{M}_*^n$ и $\overline{B_R} \neq \mathbb{M}_*^n$, $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow B_R$ — открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 \in D$. Предположим, что существует $\varepsilon_0 > 0$ и измеримая по Лебегу функция $\psi: (0, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty]$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0]$ найдется $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_2]$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ выполнено соотношение (3.1), и, кроме того, при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнено соотношение (3.2). Тогда f имеет непрерывное продолжение $f: D \rightarrow \overline{B_R}$ (непрерывность понимается в смысле геодезического расстояния d_* в $\mathbb{M}_*^n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\overline{B(x_0, \varepsilon_0)}$ лежит в нормальной окрестности U точки x_0 . В частности, $\overline{B(x_0, \varepsilon_0)}$ — компакт в U . Предположим противное, а именно, что отображение f не может быть продолжено по

непрерывности в точку x_0 . Поскольку $\overline{B_R}$ – компакт, то предельное множество $C(f, x_0)$ непусто. Тогда найдутся две последовательности x_j и x'_j , принадлежащие $B(x_0, \varepsilon_0) \setminus \{x_0\}$, $x_j \rightarrow x_0$, $x'_j \rightarrow x_0$, такие, что $d_*(f(x_j), f(x'_j)) \geq a > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что x_j и x'_j лежат внутри шара $B(x_0, \varepsilon_0)$. Полагаем $r_j = \max\{d(x_j, x_0), d(x'_j, x_0)\}$. Заметим, что при достаточно малых r_j множество $\overline{B(x_0, r_j)} \setminus \{x_0\}$ является связным ввиду определения риманова многообразия $\mathbb{M}^n$. В таком случае, соединим точки x_j и x'_j замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(x_0, r_j)} \setminus \{x_0\}$. Обозначим эту кривую символом C_j и рассмотрим конденсатор $E_j = (B(x_0, \varepsilon_0) \setminus \{x_0\}, C_j)$. В силу открытости и непрерывности отображения f пара $f(E_j)$ также является конденсатором. Рассмотрим семейства кривых Γ_{E_j} и $\Gamma_{f(E_j)}$ (см. обозначения предложения 2.2). Пусть Γ_j^* – семейство всех максимальных поднятий семейства кривых $\Gamma_{f(E_j)}$ при отображении f с началом в C_j , лежащих в $B(x_0, \varepsilon_0) \setminus \{x_0\}$. Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 2.2, имеем $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$. Поскольку $\Gamma_{f(E_j)} > f(\Gamma_j^*)$, мы получим

$$M(\Gamma_{f(E_j)}) \leq M(f(\Gamma_j^*)) \leq M(f(\Gamma_{E_j})). \quad (3.7)$$

Заметим, что семейство Γ_{E_j} может быть разбито на два подсемейства:

$$\Gamma_{E_j} = \Gamma_{E_{j_1}} \cup \Gamma_{E_{j_2}}, \quad (3.8)$$

где $\Gamma_{E_{j_1}}$ – семейство всех кривых $\alpha(t): [a, c) \rightarrow B(x_0, \varepsilon_0) \setminus \{x_0\}$ с началом в C_j , таких что найдется $t_k \in [a, c): \alpha(t_k) \rightarrow x_0$ при $t_k \rightarrow c - 0$; $\Gamma_{E_{j_2}}$ – семейство всех кривых $\alpha(t): [a, c) \rightarrow B(x_0, \varepsilon_0) \setminus \{x_0\}$ с началом в C_j , таких что найдется $t_k \in [a, c): \text{dist}(\alpha(t_k), \partial B(x_0, \varepsilon_0)) \rightarrow 0$ при $t_k \rightarrow c - 0$.

В силу соотношений (3.7) и (3.8)

$$M(\Gamma_{f(E_j)}) \leq M(f(\Gamma_{E_{j_1}})) + M(f(\Gamma_{E_{j_2}})). \quad (3.9)$$

Заметим, что $M(f(\Gamma_{E_{j_1}})) = 0$ ввиду леммы 3.1. Кроме того, заметим, что при достаточно больших $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{E_{j_2}} > \Gamma(S(x_0, r_j), S(x_0, \varepsilon_0 - 1/m), A(x_0, r_j, \varepsilon_0 - 1/m))$. Рассмотрим теперь кольцо $A_j = \{x \in \mathbb{M}^n \mid r_j < d(x, x_0) < \varepsilon_0 - 1/m\}$ и семейство функций

$$\eta_j(t) = \begin{cases} \frac{\psi(t)}{I(r_j, \varepsilon_0 - 1/m)}, & t \in \left(r_j, \varepsilon_0 - \frac{1}{m}\right), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus \left(r_j, \varepsilon_0 - \frac{1}{m}\right). \end{cases}$$

Имеем

$$\int_{r_j}^{\varepsilon_0 - 1/m} \eta_j(t) dt = \frac{1}{I(r_j, \varepsilon_0 - 1/m)} \int_{r_j}^{\varepsilon_0 - 1/m} \psi(t) dt = 1.$$

Таким образом, по определению кольцевого Q -отображения в точке x_0 и условию (3.9) мы получаем, что

$$M(f(\Gamma_{E_j})) \leq \frac{1}{I(r_j, \varepsilon_0 - 1/m)^n} \int_{r_j < d(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(d(x, x_0)) dv(x),$$

откуда, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем соотношение

$$M(f(\Gamma_{E_j})) \leq \mathcal{S}(r_j) := \frac{1}{I(r_j, \varepsilon_0)^n} \int_{r_j < d(x, x_0) < \varepsilon_0} Q(x) \psi^n(d(x, x_0)) dv(x).$$

В силу условия (3.2) $\mathcal{S}(r_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда ввиду (3.7) получаем, что

$$M(\Gamma_{f(E_j)}) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \quad (3.10)$$

С другой стороны, рассмотрим семейство кривых $\Gamma_{f(E_j)}$ для конденсатора $f(E_j)$ в терминах предложения 2.2. Заметим, что подсемейство неспрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E_j)}$ имеет нулевой модуль и что оставшееся подсемейство, состоящее из всех спрямляемых кривых семейства $\Gamma_{f(E_j)}$, состоит из кривых $\beta: [a, b) \rightarrow f(D \setminus \{x_0\})$, имеющих предел при $t \rightarrow b$ (здесь учтено, что $\overline{B_R}$ — компакт в $\mathbb{M}_*^n$). Обратим внимание, что указанный предел принадлежит множеству $\partial f(A)$, где $A := B(x_0, \varepsilon_0) \setminus \{x_0\}$. Из сказанного следует:

$$M(\Gamma_{f(E_j)}) = M(\Gamma(f(C_j), \partial f(A), f(A))). \quad (3.11)$$

Покажем, что найдется невырожденный континуум K такой, что $K \subset \partial f(A)$. Допустим, что $\dim \partial f(A) = 0$ (где $\dim$ обозначает топологическую размерность множества), тогда ввиду [46; гл. IV, п. 5, следствие 1] множество $\partial f(A)$ не разбивает $\mathbb{M}_*^n$. Последнее означает, что множество $\mathbb{M}_*^n \setminus \partial f(A)$ все еще является областью. Ввиду связности многообразия $\mathbb{M}_*^n$ точки $x_1 \in f(A)$ и $x_2 \in \mathbb{M}_*^n \setminus \overline{f(A)}$ могут быть соединены кривой γ , целиком лежащей в $\mathbb{M}_*^n \setminus \partial f(A)$. Последнее противоречит [45; § 46, п. I, теорема 1]. Значит, существует невырожденный континуум $K \subset \partial f(A)$, что и требовалось установить.

Ввиду предложения 2.3 и того, что $d_*(f(x_j), f(x'_j)) \geq a > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$ ввиду предположения, мы получим

$$\begin{aligned} M(\Gamma(f(C_j), \partial f(A), f(A))) &= M(\Gamma(f(C_j), \partial f(A), \mathbb{M}_*^n)) \\ &\geq M(\Gamma(f(C_j), K, \mathbb{M}_*^n)) \geq \frac{1}{C} \frac{\min\{\text{diam } f(C_j), \text{diam } K\}}{R} \geq \delta > 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Однако неравенства (3.11) и (3.12) противоречат (3.10). Полученное противоречие опровергает предположение, что f не имеет предела при $x \rightarrow x_0$ в $\mathbb{M}_*^n$. Лемма 3.2 доказана.

3.3. Из леммы 3.2 немедленно вытекает справедливость утверждения теоремы 1.2. Справедлив также следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $n \geq 2$, $\mathbb{M}_*^n$ — связно, является n -регулярным по Альфорсу, кроме того, в $\mathbb{M}_*^n$ выполнено $(1; n)$ -неравенство Пуанкаре. Пусть также D — область в $\mathbb{M}^n$, $B_R \subset \mathbb{M}_*^n$ — некоторый фиксированный шар радиуса R , такой что $\overline{B_R}$ — компакт в $\mathbb{M}_*^n$ и $\overline{B_R} \neq \mathbb{M}_*^n$, $f: D \setminus \{x_0\} \rightarrow B_R$ — открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 \in D$. Предположим, при некотором $\delta(x_0) > 0$ выполняется равенство (2.14). Тогда f имеет непрерывное продолжение $f: D \rightarrow \overline{B_R}$ (непрерывность понимается в смысле геодезического расстояния d_* в $\mathbb{M}_*^n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3.1 проводится аналогично доказательству второй части теоремы 2.1 на основе леммы 3.2.

§ 4. О нормальности классов Орлича–Соболева на римановых многообразиях

4.1. Для дальнейшего изложения материала понятия площади поверхности и поверхностного интеграла требуется несколько расширить, не ограничиваясь исключительно гладкими и однолиственными поверхностями, как это было в п. 2.11. Пусть далее ω – открытое множество в $\mathbb{R}^k$ или в более общем виде – k -мерное многообразие, где $k = 1, \dots, n-1$. Тогда k -мерной поверхностью S на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ называется произвольное непрерывное отображение $S: \omega \rightarrow \mathbb{M}^n$. Поверхности в $\mathbb{M}^n$ размерности $k = n-1$ принято называть *гиперповерхностями*. Функцией кратности $N(S, y)$ поверхности S называется число прообразов $y \in \mathbb{M}^n$. Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S . Хорошо известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, т.е. для каждой последовательности $y_m \in \mathbb{M}^n$, $m = 1, 2, \dots$, такой, что $y_m \rightarrow y \in \mathbb{M}^n$ при $m \rightarrow \infty$, выполняется условие $N(S, y) \geq \liminf_{m \rightarrow \infty} N(S, y_m)$ (см., например, [39; с. 160]). Отсюда следует, что функция $N(S, y)$ является измеримой по Борелю и, следовательно, измеримой относительно произвольной хаусдорфовой меры $\mathcal{H}^k$ (см., например, [47; теорема II, (7.6)]). Здесь хаусдорфовы меры соответствуют геодезическому расстоянию на римановом многообразии $\mathbb{M}^n$.

В настоящем параграфе $\mathcal{H}^k$, $k = 1, \dots, n$ обозначает k -мерную меру Хаусдорфа на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$ относительно геодезического расстояния d . Точнее, если A – множество в $\mathbb{M}^n$, то

$$\mathcal{H}^k(A) := \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^k(A), \quad \mathcal{H}_\varepsilon^k(A) := \inf \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam } A_i)^k,$$

где инфимум берется по всем покрытиям A множествами A_i с $\text{diam } A_i < \varepsilon$ (см., например, [46]). Отметим, что $\mathcal{H}^k$ является *внешней мерой* в смысле Каратеодори (см. [47]).

Напомним, что k -мерной хаусдорфовой площадью борелевского множества B в $\mathbb{M}^n$ (либо просто площадью B при $k = n-1$), ассоциированной с поверхностью $S: \omega \rightarrow \mathbb{M}^n$, мы называем величину

$$\mathcal{A}_S(B) = \mathcal{A}_S^k(B) := \int_B N(S, y) d\mathcal{H}^k y$$

(см., например, [49; п. 3.2.1]). Поверхность S называется *спрямляемой* (квадрируемой), если $\mathcal{A}_S(\mathbb{M}^n) < \infty$ (см., например, [9; п. 9.2]). Соответственно, для борелевской функции $\rho: \mathbb{M}^n \rightarrow [0, \infty]$ ее *интеграл над поверхностью S* определяем равенством

$$\int_S \rho d\mathcal{A} := \int_{\mathbb{M}^n} \rho(y) N(S, y) d\mathcal{H}^k y.$$

4.2. Пусть $n \geq 2$, и Γ – семейство k -мерных поверхностей S . Борелевскую функцию $\rho: \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ будем называть *допустимой* для семейства Γ , сокращенно $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_S \rho^k d\mathcal{A} \geq 1 \tag{4.1}$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Для заданного числа $p \in (0, \infty)$ p -модулем семейства Γ назовем величину

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{M}^n} \rho^p(x) dv(x).$$

Мы также полагаем $M(\Gamma) = M_n(\Gamma)$, а величину $M(\Gamma)$ в этом случае называем *модулем семейства* Γ . Заметим, что модуль семейств поверхностей, определенный таким образом, представляет собой внешнюю меру в пространстве всех k -мерных поверхностей (см. [41]).

4.3. Пусть $p \geq 1$. Говорят, что некоторое свойство P выполнено для p -почти всех поверхностей области D , если оно имеет место для всех поверхностей, лежащих в D , кроме, быть может, некоторого их подсемейства, p -модуль которого равен нулю. (Как правило, если речь идет о конформном модуле, говорят, что указанное свойство выполнено для *почти всех поверхностей* области D , опуская приставку “ n ” в выражении “ n -почти всех”). В частности, говорят, что некоторое свойство выполнено для p -почти всех кривых области D , если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D , кроме, быть может, некоторого их подсемейства, p -модуль которого равен нулю.

Будем говорить, что измеримая относительно меры объема v функция $\rho: \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ p -обобщенно допустима для семейства Γ k -мерных поверхностей S в $\mathbb{M}^n$, для краткости $\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$, если соотношение (4.1) выполнено для p -почти всех поверхностей S семейства Γ . Обобщенный p -модуль $\overline{M}_p(\Gamma)$ семейства Γ определяется равенством

$$\overline{M}_p(\Gamma) = \inf \int_{\mathbb{M}^n} \rho^p(x) dv(x),$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям $\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$. В случае $p = n$ мы используем обозначения $\overline{M}(\Gamma)$ и $\rho \in \text{ext adm } \Gamma$ соответственно. Очевидно, что при каждом $p \in (0, \infty)$, $k = 1, \dots, n-1$, и для каждого семейства k -мерных поверхностей Γ в $\mathbb{M}^n$, выполнено равенство $\overline{M}_p(\Gamma) = M_p(\Gamma)$.

4.4. Следующий класс отображений представляет собой обобщение квазиконформных отображений в смысле кольцевого определения по Герингу (см. [50]) и отдельно исследуется различными авторами (см., например, [9; гл. 9]). Пусть $n \geq 2$, D и D' – заданные области в $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}_*^n$ соответственно, $x_0 \in \overline{D}$ и $Q: D \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая функция относительно меры объема v . Пусть U – нормальная окрестность, содержащая точку x_0 . Будем говорить, что $f: D \rightarrow D'$ – *нижнее Q -отображение в точке x_0* , как только

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq \inf_{\rho \in \text{ext adm } \Sigma_\varepsilon} \int_{D \cap A(\varepsilon, \varepsilon_0, x_0)} \frac{\rho^n(x)}{Q(x)} dv(x) \quad (4.2)$$

для каждого кольца $A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \sup_{x \in U} d(x, x_0)$, где Σ_ε обозначает семейство всех пересечений геодезических сфер $S(x_0, r)$ с областью D , $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Мы не будем пока останавливаться на примерах таких отображений, однако заметим, что, как показывает один из основных результатов настоящей работы, указанные примеры несложно указать (см. теорему 4.2).

4.5. Следующее утверждение вносит некоторую ясность в использование выражения “почти всех поверхностей” в случае, когда речь идет о семействе геодезических сфер $\{S(x_0, r)\}$ (см. по этому поводу также [9; лемма 9.1]). Суть в том, что это понятие может использоваться как относительно параметра r , так и относительно модуля семейств поверхностей согласно пункту 4.3. Однако, как показано в приведенном ниже утверждении, между двумя этими интерпретациями не имеется никакой разницы.

ЛЕММА 4.1. Пусть D – область риманова многообразия $\mathbb{M}^n$, $n \geq 2$, и $x_0 \in D$. Если некоторое свойство P имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$, лежащих в некоторой нормальной окрестности U точки x_0 , где “почти всех” понимается в смысле модуля семейств поверхностей, и, кроме того, множество $E = \{r \in \mathbb{R} \mid P \text{ имеет место для } S(x_0, r) \cap D\}$ измеримо по Лебегу, то P также имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r)$, лежащих в некоторой нормальной окрестности U точки x_0 , относительно линейной меры Лебега по параметру $r \in \mathbb{R}$. Обратно, пусть P имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ относительно линейной меры Лебега по $r \in \mathbb{R}$, тогда P также имеет место для почти всех поверхностей $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ в смысле модуля семейств поверхностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть некоторое свойство P имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$, где “почти всех” понимается в смысле модуля семейств поверхностей. Покажем, что P также имеет место для почти всех сфер $D(x_0, r)$ по отношению к параметру $r \in \mathbb{R}$. Поскольку произвольная область D может быть покрыта не более чем счетным объединением концентрических шаров, $D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_0, R_i)$, то для установления заключения теоремы достаточно рассмотреть случай, когда $D \subset B(0, R)$, $0 < R < \infty$.

Предположим, что заключение леммы не является верным. Тогда найдется семейство Γ сфер $D(x_0, r)$, лежащих в некоторой нормальной окрестности U точки x_0 , для которого свойство P выполнено в смысле почти всех поверхностей относительно модуля, однако нарушается для некоторого множества индексов $r \in \mathbb{R}$ положительной меры.

Ввиду регулярности меры Лебега m_1 найдется борелевское множество $B \subset \mathbb{R}$ такое, что $m_1(B) > 0$ и свойство P нарушается для почти всех $r \in B$. Пусть $\rho: \mathbb{M}^n \rightarrow [0, \infty]$ – допустимая функция для семейства Γ . Учитывая, что B – борелево, мы можем считать, что $\rho \equiv 0$ вне $E = \{x \in B(0, R) \mid \exists r \in B : d(x, x_0) = r\}$, поскольку в этом случае множество E , очевидно, борелево. По неравенству Гёльдера

$$\int_E \rho^{n-1}(x) dv(x) \leq \left(\int_E \rho^n(x) dv(x) \right)^{(n-1)/n} \left(\int_E dv(x) \right)^{1/n},$$

и, следовательно, ввиду замечания 2.1

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho^n(x) dv(x) \geq \frac{\left(\int_E \rho^{n-1}(x) dv(x) \right)^{n/(n-1)}}{\left(\int_E dv(x) \right)^{1/(n-1)}} \geq \frac{(m_1(B))^{n/(n-1)}}{c}$$

для некоторого $c > 0$, т.е. $M(\Gamma) > 0$, что противоречит предположению леммы. Первая часть леммы 4.1 доказана.

Достаточность. Пусть P имеет место для почти всех r относительно меры Лебега и всех соответствующих этим r сфер $D(x_0, r)$, $r \in \mathbb{R}$. Покажем, что P также выполняется для почти всех поверхностей $D(x_0, r) := S(x_0, r) \cap D$ в смысле модуля семейств поверхностей.

Обозначим через Γ_0 семейство всех пересечений $D_r := D(x_0, r)$ сфер $S(x_0, r)$ с областью D , для которых P не имеет места. Пусть R обозначает множество всех $r \in \mathbb{R}$ таких, что $D_r \in \Gamma_0$. Если $m_1(R) = 0$, то ввиду аналога теоремы Фубини (см. замечание 2.1) мы получаем, что $v(E) = 0$, где $E = \{x \in D \mid d(x, x_0) = r \in R\}$. Рассмотрим функцию $\rho_1: \mathbb{M}^n \rightarrow [0, \infty]$, определенную символом ∞ при $x \in E$ и доопределенную нулем в остальных точках. Отметим, что найдется борелева функция $\rho_2: \mathbb{M}^n \rightarrow [0, \infty]$, совпадающая почти всюду с ρ_1 (см. [49; п. 2.3.5]). Таким образом,

$$M(\Gamma_0) \leq \int_E \rho_2^n dv(x) = \int_E \rho_1^n dv(x) = 0,$$

следовательно, $M(\Gamma_0) = 0$.

Лемма 4.1 полностью доказана.

4.6. Следующее утверждение не имеет прямого отношения к исследованию отображений, однако, как будет видно далее, является весьма полезным (см. [9; лемма 9.2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть (X, μ) – измеримое пространство с конечной мерой μ , $q \in (1, \infty)$, и пусть $\varphi: X \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая функция. Полагаем

$$I(\varphi, q) = \inf_{\alpha} \int_X \varphi \alpha^q d\mu, \quad (4.3)$$

где инфимум берется по всем измеримым функциям $\alpha: X \rightarrow [0, \infty]$ таким, что

$$\int_X \alpha d\mu = 1.$$

Тогда

$$I(\varphi, q) = \left[\int_X \varphi^{-\lambda} d\mu \right]^{-1/\lambda},$$

где $\lambda = q'/q$, $1/q + 1/q' = 1$, т.е. $\lambda = 1/(q-1) \in (0, \infty)$. Точная нижняя грань в (4.3) достигается на функции

$$\rho = \left(\int_X \varphi^{1/(1-\alpha)} d\mu \right)^{-1} \varphi^{1/(1-\alpha)}.$$

4.7. Обратимся теперь к изучению соотношений вида (4.2), на основе которых, фактически, получаются все основные дальнейшие результаты нашей работы. Отметим, что условие (4.2) представляет собой неравенство, равносильное бесконечной серии неравенств по ρ , и потому в большинстве случаев

может оказаться весьма затруднительным для проверки. Следующее утверждение облегчает решение указанной проблемы ввиду возможности проверки всего одного неравенства по отношению к фиксированному семейству Σ_ε , а не бесконечного их ряда. Имеет место следующее утверждение, являющееся обобщением теоремы 9.2 в [9].

ЛЕММА 4.2. Пусть $n \geq 2$, D и D' – заданные области в $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}_*^n$, соответственно, $x_0 \in \overline{D}$ и $Q: D \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая функция. Если отображение $f: D \rightarrow D'$ является нижним Q -отображением в точке x_0 , то при произвольном $\varepsilon_0 > 0$ таком, что $\overline{B(x_0, \varepsilon_0)}$ лежит в нормальной окрестности U точки x_0 , и некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеем

$$M(f(\Sigma_\varepsilon)) \geq C_1 \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{n-1}(r)} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 \in (0, d_0), \quad (4.4)$$

где, как и выше, Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D , $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$,

$$\|Q\|_{n-1}(r) = \left(\int_{D(x_0, r)} Q^{n-1}(x) d\mathcal{A} \right)^{1/(n-1)}$$

– L_{n-1} -норма функции Q над пересечением $D \cap S(x_0, r) = D(x_0, r) = \{x \in D \mid d(x, x_0) = r\}$.

Обратно, если соотношение (4.4) выполнено при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и некоторой постоянной $C_1 > 0$, то f является нижним $(C_2 Q)$ -отображением в точке x_0 , где $C_2 > 0$ – также некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства положим

$$P(x) = P(Q, \rho, n, x) := \frac{\rho^n(x)}{Q(x)}, \quad \psi(r) := \inf_{\alpha \in I(r)} \int_{D(x_0, r)} \frac{\alpha^q(x)}{Q(x)} d\mathcal{H}^{n-1},$$

где $q = n/(n-1) > 1$ и $I(r)$ обозначает множество всех измеримых функций α на сфере $D(x_0, r) = S(x_0, r) \cap D$ таких, что

$$\int_{D(x_0, r)} \alpha(x) d\mathcal{H}^{n-1} = 1.$$

Не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что $\|Q\|_{n-1}(r) < \infty$ при почти всех $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Относительно функции $\rho \in \text{ext adm } \Sigma_\varepsilon$ положим

$$A_\rho(r) := \int_{D(x_0, r)} \rho^{n-1}(x) d\mathcal{A}$$

и заметим, что $A_\rho(r)$ – измеримая по Лебегу функция относительно параметра r ввиду замечания 2.1. Следовательно, множество $E \subset \mathbb{R}$ всех таких $r > 0$, для которых

$$A_\rho(r) = \int_{D(x_0, r)} \rho^{n-1}(x) d\mathcal{A} \neq 0,$$

измеримо по Лебегу и, значит, по лемме 4.1

$$A_\rho(r) = \int_{D(x_0, r)} \rho^{n-1}(x) d\mathcal{A} \neq 0$$

при почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$. Пусть A_{Σ_ε} обозначает класс всех измеримых относительно меры v функций $\rho: \mathbb{M}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, удовлетворяющих условию

$$\int_{D(x_0, r)} \rho^{n-1} d\mathcal{A} = 1$$

для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$. Для удобства обозначим $D_\varepsilon := D \cap A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0)$. Поскольку $A_{\Sigma_\varepsilon} \subset \text{ext adm } \Sigma_\varepsilon$, мы получим

$$\inf_{\rho \in \text{ext adm } \Sigma_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon} P(x) dv(x) \leq \inf_{\rho \in A_{\Sigma_\varepsilon}} \int_{D_\varepsilon} P(x) dv(x). \quad (4.5)$$

С другой стороны, для заданной функции $\rho \in \text{ext adm } \Sigma_\varepsilon$ ввиду замечания 2.1 мы получим, что для некоторой постоянной $C = C(x_0) > 0$

$$\begin{aligned} \inf_{\beta \in A_{\Sigma_\varepsilon}} \int_{D_\varepsilon} \beta^n(x) Q^{-1}(x) dv(x) &\leq \int_{D_\varepsilon} P(x) dv(x) \\ &\leq C \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} (A_\rho(r))^{n/(1-n)} \int_{D(x_0, r)} P(x) d\mathcal{A} dr \leq C \int_{D_\varepsilon} P(x) dv(x) \end{aligned} \quad (4.6)$$

поскольку $A_\rho(r) \geq 1$ для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$ ввиду леммы 4.1. (Здесь был использован тот факт, что точная нижняя грань любой величины не превосходит любого ее фиксированного значения.) Из (4.5) и (4.6) мы будем иметь

$$\inf_{\rho \in A_{\Sigma_\varepsilon}} \int_{D_\varepsilon} P(x) dv(x) \geq \inf_{\rho \in \text{ext adm } \Sigma_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon} P(x) dv(x) \geq \frac{1}{C} \inf_{\rho \in A_{\Sigma_\varepsilon}} \int_{D_\varepsilon} P(x) dv(x). \quad (4.7)$$

Покажем, что

$$\frac{1}{C} \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(r) dr \leq \inf_{\rho \in A_{\Sigma_\varepsilon}} \int_{D_\varepsilon} P(x) dv(x) \leq C \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(r) dr. \quad (4.8)$$

Прежде всего, ввиду предложения 4.1 имеем

$$\psi(r) = (\|Q\|_{n-1}(r))^{-1} = \left(\int_{D(x_0, r)} Q^{n-1}(x) d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{-1/(n-1)}. \quad (4.9)$$

Следовательно, ввиду замечания 2.1 функция $\psi(r)$ измерима по r , так что интеграл в правой части (4.8) определен корректно.

Пусть $\rho \in A_{\Sigma_\varepsilon}$, тогда функция $\rho_r(x) := \rho|_{S(x_0, r)}$ измерима по отношению к хаусдорфовой мере $\mathcal{H}^{n-1}$ для п.в. $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$ ввиду замечания 2.1. Следовательно,

$$\int_{D_\varepsilon} P(x) dv(x) \geq \frac{1}{C} \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \int_{D(x_0, r)} \rho_r^n(x) Q^{-1}(x) d\mathcal{H}^{n-1} dr \geq \frac{1}{C} \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(r) dr.$$

Переходя к $\inf$ по всем $\rho \in A_{\Sigma_\varepsilon}$, мы получим

$$\inf_{\rho \in A_{\Sigma_\varepsilon}} \int_{D_\varepsilon} P(x) dv(x) \geq \frac{1}{C} \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(r) dr. \quad (4.10)$$

Докажем теперь верхнее неравенство в (4.8). Ввиду предложения 4.1 точная нижняя грань выражения

$$\psi(\alpha, r) = \int_{D(x_0, r)} \alpha^q(x) Q^{-1}(x) d\mathcal{H}^{n-1}$$

по всем $\alpha \in I(r)$ достигается на функции

$$\alpha_0(x) := Q^{n-1}(x) \left(\int_{D(x_0, r)} Q^{n-1}(x) \right)^{-1} d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Ввиду сделанного выше предположения $\|Q\|_{n-1}(r) < \infty$ при почти всех $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$. Следовательно, $\alpha_0^{1/(n-1)} \in A_{\Sigma_\varepsilon}$ и, значит,

$$\inf_{\rho \in \text{ext adm } \Sigma_\varepsilon} \int_{D_\varepsilon} P(x) dv(x) \leq \int_{D_\varepsilon} \alpha_0^{n/(n-1)}(x) Q^{-1}(x) dv(x) \leq C \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(r) dr. \quad (4.11)$$

Из неравенств (4.10) и (4.11) следует неравенство (4.8). Окончательно, ввиду равенства (4.9) из (4.8) вытекает, что

$$\frac{1}{C} \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} (\|Q\|_{n-1}(r))^{-1} dr \leq \inf_{\rho \in A_{\Sigma_\varepsilon}} \int_{D_\varepsilon} P(x) dv(x) \leq C \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} (\|Q\|_{n-1}(r))^{-1} dr. \quad (4.12)$$

Выше были изложены некоторые наводящие соображения, благодаря которым мы можем теперь приступить непосредственно к доказательству леммы.

Необходимость. Пусть f – нижнее Q -отображение в точке x_0 , тогда f удовлетворяет соотношению (4.2). Однако ввиду соотношений (4.7) и (4.12) имеем соотношение (4.4) при некоторой постоянной $C_1 := 1/C^2$.

Достаточность. Пусть мы имеем соотношение (4.4), выполненное при некоторой постоянной $C_1 > 0$, тогда ввиду соотношений (4.7) и (4.12) f является нижним $(C_2 Q)$ -отображением в точке x_0 , где $C_2 := C/C_1$.

4.8. Надо сказать, что аналогичное условие к (4.4), облегчающее проверку бесконечной серии неравенств в (1.10), также имеет место (см. ниже). Следующее утверждение в пространстве $\mathbb{R}^n$ было доказано вторым автором настоящей работы в [35; теорема 1]. Ниже мы приводим более общий случай этого утверждения для римановых многообразий. Всюду далее

$$q_{x_0}(r) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} Q(x) d\mathcal{A}. \quad (4.13)$$

Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 4.3. Пусть $n \geq 2$, D – заданная область в $\mathbb{M}^n$, $x_0 \in D$ и $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая функция относительно меры объема v . Предположим, что

$f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 \in D$ и E – конденсатор вида $E = (B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)})$, $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(x_0, \partial U)$, где U – некоторая нормальная окрестность точки x_0 . Полагаем

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{1/(n-1)}(r)}. \quad (4.14)$$

Тогда для конденсатора $f(E) = (f(B(x_0, r_2)), f(\overline{B(x_0, r_1)}))$ выполнено условие:

$$\text{cap } f(E) \leq \frac{C}{I^{n-1}}, \quad (4.15)$$

где C – некоторая постоянная, зависящая только от окрестности U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и прежде, $S_i := S(x_0, r_i)$. Заметим, что пара множеств

$$f(E) = (f(B(x_0, r_2)), f(\overline{B(x_0, r_1)}))$$

действительно является конденсатором, поскольку f открыто и непрерывно в D , следовательно, $f(\overline{B(x_0, r_1)})$ – компактное подмножество $f(B(x_0, r_2))$. Не ограничивая общности рассуждений, мы можем полагать, что $I \neq 0$, так как в противном случае соотношение (4.15), очевидно, выполнено. Можно также считать, что $I \neq \infty$, так как в противном случае в соотношении (4.15) можно рассмотреть $Q(x) + \delta$ (со сколь угодно малым δ) вместо $Q(x)$, а затем перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Пусть $I \neq \infty$. Тогда $q_{x_0}(r) \neq 0$ п.в. на (r_1, r_2) . Полагаем

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)}, & t \in (r_1, r_2), \\ 0, & t \notin (r_1, r_2). \end{cases} \quad (4.16)$$

Тогда ввиду замечания 2.1

$$\int_A Q(x) \psi^n(d(x, x_0)) dv(x) \leq CI, \quad (4.17)$$

где C – некоторая постоянная, зависящая только от окрестности U и $A = A(x_0, r_1, r_2)$ – геодезическое кольцо с центром в точке x_0 и радиусами r_1 и r_2 . Заметим, что функция $\eta_1(t) = \psi(t)/I$, $t \in (r_1, r_2)$, удовлетворяет соотношению вида (1.11), поскольку

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta_1(t) dt = 1,$$

поэтому согласно соотношению (4.17) и определению кольцевого Q -отображения (см. (1.10)) получаем, что

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \eta_1^n(d(x, x_0)) dv(x) \leq \frac{C}{I^{n-1}}, \quad (4.18)$$

где $S_i = S(x_0, r_i)$. Пусть Γ_E и $\Gamma_{f(E)}$ – семейства кривых в смысле обозначений предложения 2.2. По этому предложению

$$\text{cap } f(E) = \text{cap}(f(B(x_0, r_2)), f(\overline{B(x_0, r_1)})) = M(\Gamma_{f(E)}). \quad (4.19)$$

Пусть Γ^* – семейство максимальных поднятий семейства кривых $\Gamma_{f(E)}$ с началом в $\overline{B(x_0, r_1)}$. Так же, как и при доказательстве леммы 2.2, получаем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Заметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$ и что для достаточно малых $\delta > 0$, $\Gamma_E > \Gamma(S(x_0, r_2 - \delta), S(x_0, r_1), A(x_0, r_1, r_2 - \delta))$. Следовательно, ввиду соотношения (4.18) получаем

$$\begin{aligned} M(\Gamma_{f(E)}) &\leq M(f(\Gamma^*)) \leq M(f(\Gamma_E)) \\ &\leq M(f(\Gamma(S(x_0, r_1), S(x_0, r_2 - \delta), A(x_0, r_1, r_2 - \delta)))) \\ &\leq C \left(\int_{r_1}^{r_2 - \delta} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} \right)^{1-n}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Согласно нашему предположению, что $I \neq \infty$, функция $1/(t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t))$ суммируема на (r_1, r_2) и ввиду абсолютной непрерывности интеграла (см., например, [47; гл. I, теоремы 12.7 и 13.2])

$$\int_{r_1}^{r_2 - \delta} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} \rightarrow \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Тогда ввиду (4.20)

$$M(\Gamma_{f(E)}) \leq C \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t q_{x_0}^{1/(n-1)}(t)} \right)^{1-n}. \quad (4.21)$$

Объединяя (4.19) и (4.21), получаем соотношение (4.15). Лемма 4.3 доказана.

4.9. Обратное утверждение к лемме 4.3 верно, вообще говоря, в несколько ином виде. Перед этим, однако, приведем еще одно утверждение (см. [1; лемма 4.2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $x_0 \in \mathbb{M}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \text{dist}(x_0, \partial U)$, U – некоторая нормальная окрестность точки x_0 , $Q: \mathbb{M}^n \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая функция, локально интегрируемая относительно меры v в U . Полагаем

$$\eta_0(r) = \frac{1}{I r q_{x_0}^{1/(n-1)}(r)},$$

где I – величина, определенная в (4.8). Тогда

$$\int_A Q(x) \eta_0^n(d(x, x_0)) dv(x) \leq \int_A Q(x) \eta^n(d(x, x_0)) dv(x)$$

для любой измеримой по Лебегу функции $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1.$$

4.10. Заметим, что из замечания 2.1 также следует

$$\int_A Q(x) \psi^n(d(x, x_0)) dv(x) \geq C_1 I,$$

где ψ определяется из соотношения (4.16), а I – из (4.14). В таком случае, из леммы 4.3 и предложения 4.2 мы можем получить следующее утверждение, содержащее, в частности, необходимое условие принадлежности отображения f классу открытых дискретных кольцевых Q -отображений в фиксированной точке x_0 на римановых многообразиях.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $n \geq 2$, D – заданная область в $\mathbb{M}^n$, $x_0 \in D$ и $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая функция относительно меры объема v , причем $Q \in L^1_{\text{loc}}(U)$, где U – некоторая нормальная окрестность точки x_0 . Пусть, кроме того, $\varepsilon_0 := \text{dist}(x_0, \partial U)$. Если $f: D \rightarrow \mathbb{M}^n_*$ – открытое дискретное кольцевое Q -отображение в точке $x_0 \in D$, то для некоторой постоянной $C > 0$, любых $0 < r_1 < r_2 < \varepsilon_0$ и произвольного конденсатора $E = (B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)})$ емкость конденсатора $f(E) = (f(B(x_0, r_2)), f(\overline{B(x_0, r_1)}))$ удовлетворяет условию

$$\text{cap } f(E) \leq \frac{C}{I^{n-1}}, \quad (4.22)$$

где $I = I(x_0, r_1, r_2)$ задается соотношением (4.14). Обратно, если соотношение (4.22) выполнено, то отображение f удовлетворяет неравенствам (2.2) в точке x_0 при Q^* вместо Q , где $Q^* := C_1 Q$, а C_1 – некоторая постоянная.

4.11. Пусть G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$ – открытый n -мерный интервал. Отображение $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу ACL (абсолютно непрерывно на линиях), если f абсолютно непрерывно на почти всех линейных сегментах в I , параллельных координатным осям. Отображение $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу ACL в G , когда сужение $f|_I$ принадлежит классу ACL для каждого интервала $I, \bar{I} \subset G$. Следующие важные сведения, касающиеся емкости пары множеств относительно области, могут быть найдены в работе В. Цимера [51]. Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и C_0, C_1 – непересекающиеся компактные множества, лежащие в замыкании G . Полагаем $R = G \setminus (C_0 \cup C_1)$ и $R^* = R \cup C_0 \cup C_1$. Конформной емкостью пары C_0, C_1 относительно замыкания G называется величина

$$C[G, C_0, C_1] = \inf \int_R |\nabla u|^n dm(x),$$

где точная нижняя грань берется по всем функциям u , непрерывным в R^* , $u \in \text{ACL}(R)$, таким что $u = 1$ на C_1 и $u = 0$ на C_0 . Указанные функции будем называть допустимыми для величины $C[G, C_0, C_1]$. Мы будем говорить, что множество $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ разделяет C_0 и C_1 в R^* , если $\sigma \cap R$ замкнуто в R и найдутся непересекающиеся множества A и B , являющиеся открытыми в $R^* \setminus \sigma$ такие, что $R^* \setminus \sigma = A \cup B$, $C_0 \subset A$ и $C_1 \subset B$. Пусть Σ обозначает класс всех множеств, разделяющих C_0 и C_1 в R^* . Для числа $n' = n/(n-1)$ определим величину

$$\widetilde{M}_{n'}(\Sigma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Sigma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^{n'} dm(x), \quad (4.23)$$

где запись $\rho \in \widetilde{\text{adm}}\Sigma$ означает, что ρ – неотрицательная борелевская функция в $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$\int_{\sigma \cap R} \rho d\mathcal{H}^{n-1} \geq 1 \quad \forall \sigma \in \Sigma. \quad (4.24)$$

Заметим, что согласно результату Цимера

$$\widetilde{M}_{n'}(\Sigma) = C[G, C_0, C_1]^{-1/(n-1)} \quad (4.25)$$

(см. [51; теорема 3.13]). Заметим также, что согласно результату Хессе

$$M(\Gamma(E, F, D)) = C[D, E, F], \quad (4.26)$$

как только $(E \cap F) \cap \partial D = \emptyset$ (см. [52; теорема 5.5]).

4.12. Дальнейшие исследования работы опираются на две важные взаимосвязи на римановых многообразиях: с одной стороны, устанавливается взаимосвязь нижних Q -отображений с неравенством (2.2), с другой стороны, – взаимосвязь классов Орлича–Соболева с нижними Q -отображениями. Нас интересует случай исключительно открытых дискретных отображений, поскольку рассмотрение иных классов требует применения принципиально иного аппарата. Имеет место следующая

ЛЕММА 4.4. Пусть $n \geq 2$, D – заданная область в $\mathbb{M}^n$, $x_0 \in D$ и $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая функция, интегрируемая в степени $n-1$ относительно меры v в некоторой нормальной окрестности U точки x_0 . Предположим, U^* – некоторая область в $\mathbb{M}_*^n$ такая, что $\bar{U}^*$ – компакт, и гомеоморфная какой-либо области в $\mathbb{R}^n$ относительно некоторой фиксированной карты. Если $f: D \rightarrow U^*$ – открытое дискретное нижнее Q -отображение в точке x_0 , то существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\text{cap } f(\mathcal{E}) \leq \int_A Q^*(x) \eta^n(d(x, x_0)) dv(x)$$

при $Q^* = CQ^{n-1}$ для произвольного конденсатора $\mathcal{E} = (B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)})$ в кольце $A = A(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < \varepsilon_0 := \text{dist}(x_0, \partial U)$, для каждой измеримой функции $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что имеет место (1.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4.1 достаточно установить, что при некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$\text{cap } f(E) \leq \frac{C_1}{I^{*n-1}},$$

где E – конденсатор вида $E = (B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)})$, $q_{x_0}^*(r)$ – среднее значение функции $Q^{n-1}(x)$ над сферой $S(x_0, r)$ (см. соотношение (4.13)) и

$$I^* = I^*(x_0, r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{*1/(n-1)}(r)}.$$

При $\varepsilon \in (r_1, r_2)$ рассмотрим шар $B(x_0, \varepsilon)$. Пусть φ – то отображение, которое гомеоморфно отображает U^* на $D_* \subset \mathbb{R}^n$. Полагаем

$$C_0 = \partial\varphi(f(B(x_0, r_2))), \quad C_1 = \varphi(f(\overline{B(x_0, r_1)})), \quad \sigma = \partial\varphi(f(B(x_0, \varepsilon))).$$

Поскольку область D_* ограничена в $\mathbb{R}^n$, найдется шар $B_R \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $\overline{\varphi(f(B(x_0, r_2)))} \subset B_R$. Полагаем $G := B_R$.

Поскольку f – непрерывно и открыто, $\overline{\varphi(f(B(x_0, r_1)))}$ – компактное подмножество $\varphi(f(B(x_0, \varepsilon)))$ так же, как $\overline{\varphi(f(B(x_0, \varepsilon)))}$ – компактное подмножество $\varphi(f(B(x_0, r_2)))$. В частности,

$$\overline{\varphi(f(B(x_0, r_1)))} \cap \partial\varphi(f(B(x_0, \varepsilon))) = \emptyset.$$

Пусть, как и выше, $R = G \setminus (C_0 \cup C_1)$ и $R^* = R \cup C_0 \cup C_1$, тогда $R^* = G$. Заметим, что σ разделяет C_0 и C_1 в $R^* = G$. Действительно, множество $\sigma \cap R$ замкнуто в R , кроме того, пусть $A := G \setminus \overline{\varphi(f(B(x_0, \varepsilon)))}$ и $B = \varphi(f(B(x_0, \varepsilon)))$, тогда A и B открыты в $G \setminus \sigma$, $C_0 \subset A$, $C_1 \subset B$ и $G \setminus \sigma = A \cup B$.

Пусть Σ – семейство всех множеств, отделяющих C_0 от C_1 в G . Поскольку для открытых отображений $\partial f(O) \subset f(\partial O)$, где O – компактная подобласть D , мы получим $\partial f(B(x_0, r)) \subset f(\partial B(x_0, r))$, $r \in (0, \varepsilon_0)$.

Ниже по тексту $\bigcup_{r \in (r_1, r_2)} \partial f(B(x_0, r))$ либо $\bigcup_{r \in (r_1, r_2)} f(S(x_0, r))$ понимается как объединение борелевских множеств в семейство, а не в теоретико-множественном смысле (см. [51; п. 3, с. 464]). Пусть

$$\rho^{n-1} \in \widetilde{\text{adm}} \bigcup_{r \in (r_1, r_2)} \partial f(B(x_0, r))$$

в смысле соотношения (4.24), тогда также мы можем утверждать, что

$$\rho \in \text{adm} \bigcup_{r \in (r_1, r_2)} \partial f(B(x_0, r))$$

в смысле соотношения (4.1) (здесь $k := n - 1$). Поскольку (ввиду открытости отображения f) имеет место включение $\partial f(B(x_0, r)) \subset f(S(x_0, r))$, мы получим, что $\rho \in \text{adm} \bigcup_{r \in (r_1, r_2)} f(S(x_0, r))$ и, следовательно, согласно (4.23) будем иметь

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{n'}(\Sigma) &\geq \widetilde{M}_{n'}\left(\bigcup_{r \in (r_1, r_2)} \partial f(B(x_0, r))\right) \geq \widetilde{M}_{n'}\left(\bigcup_{r \in (r_1, r_2)} f(S(x_0, r))\right) \\ &\geq M\left(\bigcup_{r \in (r_1, r_2)} f(S(x_0, r))\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Однако, ввиду (4.25) и (4.26), найдутся такие постоянные K_1 и K_2 , что

$$\frac{K_2}{(M(\Gamma(C_0, C_1, G)))^{1/(n-1)}} \leq \widetilde{M}_{n'}(\Sigma) \leq \frac{K_2}{(M(\Gamma(C_0, C_1, G)))^{1/(n-1)}}. \quad (4.28)$$

Пусть $\Gamma_{\varphi(f(E))}$ – семейство всех кривых для конденсатора $\varphi(f(E))$ в обозначениях предложения 2.2. Пусть также $\Gamma_{\varphi(f(E))}^*$ обозначает семейство всех спрямляемых кривых семейства $\Gamma_{\varphi(f(E))}$, тогда заметим, что семейства $\Gamma_{\varphi(f(E))}^*$ и

$\Gamma(C_0, C_1, G)$ имеют одинаковые семейства допустимых метрик ρ и, значит,

$$M(\Gamma_{\varphi(f(E))}) = M(\Gamma(C_0, C_1, G)).$$

Из (4.28) и предложения 2.2 мы получим, что

$$\widetilde{M}^{n-1}(\Sigma) \leq \frac{K_2}{\text{cap } \varphi(f(E))}. \quad (4.29)$$

Окончательно, из (4.27) и (4.29) следует неравенство

$$\text{cap } f(E) \leq \frac{K_3}{M(\bigcup_{r \in (r_1, r_2)} f(S(x_0, r)))^{n-1}}. \quad (4.30)$$

По лемме 4.2 и из (4.30) мы имеем

$$\text{cap } f(E) \leq \frac{K_4}{\left(\int_{r_1}^{r_2} dr / (\|Q\|_{n-1}(r)) \right)^{n-1}} = \frac{K_4}{I^{*n-1}},$$

что и доказывает утверждение леммы 4.4.

4.13. Настоящий пункт посвящен взаимосвязи классов Орлича–Соболева с нижними Q -отображениями при $n \geq 3$.

Напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ между пространствами с мерами (X, Σ, μ) и (Y, Σ', μ') обладает N -свойством (Лузина), если из условия $\mu(S) = 0$ следует, что $\mu'(f(S)) = 0$. Следующее вспомогательное утверждение получено в работе [7] (см. теорема 1 и следствие 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию (1.12). Тогда

1) Если $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое отображение класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(D)$, то f имеет почти всюду полный дифференциал в D .

2) Любое непрерывное отображение $f \in W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ обладает N -свойством относительно $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа, более того, локально абсолютно непрерывно на почти всех сферах $S(x_0, r)$ с центром в заданной предписанной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, на почти всех таких сферах $S(x_0, r)$ выполнено условие $\mathcal{H}^{n-1}(f(E)) = 0$, как только $|\nabla f| = 0$ на множестве $E \subset S(x_0, r)$. (Здесь “почти все” понимается относительно линейной меры Лебега по параметру r .)

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $n \geq 3$, D – заданная область в $\mathbb{M}^n$. Пусть $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию (1.12). Тогда каждое открытое дискретное отображение $f: D \rightarrow \mathbb{M}_*^n$ с конечным искажением класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ такое, что $N(f, D) < \infty$, является нижним Q -отображением в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ при $Q(x) = N(f, D)K_O(x, f)$, где внешняя дилатация $K_O(x, f)$ отображения f в точке x определена соотношением (1.2), а кратность $N(f, D)$ определена соотношением (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что f дифференцируемо почти всюду ввиду предложения 4.3. Пусть B – борелево множество всех точек $x \in D$, в которых f имеет полный дифференциал $f'(x)$ и $J(x, f) \neq 0$ в локальных координатах. Применяя теорему Кирсбрауна и свойство единственности аппроксимативного дифференциала (см. [49; пп. 2.10.43 и 3.1.2]), мы видим, что множество B представляет собой не более чем счетное объединение борелевских множеств B_l , $l = 1, 2, \dots$, таких, что сужения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшецевыми гомеоморфизмами (см., например, [49; пп. 3.2.2, 3.1.4 и 3.1.8]). Без ограничения общности мы можем полагать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также символом B_* множество всех точек $x \in D$, в которых f имеет полный дифференциал, однако $f'(x) = 0$.

Ввиду построения множество $B_0 := D \setminus (B \cup B_*)$ имеет меру объема v , равную нулю. Следовательно, по [9; теорема 9.1] $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in \bar{D}$, где “почти всех” следует понимать в смысле конформного модуля семейств поверхностей. Заметим, что функция $\psi(r) := \mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r)$ измерима по Лебегу ввиду теоремы Фубини ([47; гл. III, п. 8.1]), поэтому множество $E \subset \mathbb{R}$ всех $r \in \mathbb{R}$ таких, что $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$, измеримо по Лебегу. По лемме 4.1 также $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ при почти всех $r \in \mathbb{R}$.

Ввиду предложения 4.3 из условия $\mathcal{H}^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$ вытекает, что $\mathcal{H}^{n-1}(f(B_0 \cap S_r)) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$. По этому предположению также $\mathcal{H}^{n-1}(f(B_* \cap S_r)) = 0$, поскольку f – отображение с конечным искажением и, значит, $\nabla f = 0$ почти всюду, где $J(x, f) = 0$.

Пусть U – нормальная окрестность точки x_0 , Γ – семейство всех пересечений сфер S_r , $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 := \text{dist}(x_0, \partial U)$, с областью D . Для заданной функции $\rho_* \in \text{adm } f(\Gamma)$, $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0 ,

$$\rho(x) := \rho_*(f(x))L(x, f) \quad \text{при } x \in D \setminus B_0.$$

Пусть $D_r^* \in f(\Gamma)$, $D_r^* = f(D \cap S_r)$. Заметим, что

$$D_r^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} f(S_r \cap B_i) \cup f(S_r \cap B_*),$$

и, следовательно, для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_{D_r^*} \rho_*^{n-1}(y) d\mathcal{A}_* \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_{f(S_r \cap B_i)} \rho_*^{n-1}(y) N(y, f, S_r \cap B_i) d\mathcal{H}^{n-1}y \\ &\quad + \int_{f(S_r \cap B_*)} \rho_*^{n-1}(y) N(y, f, S_r \cap B_*) d\mathcal{H}^{n-1}y. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Учитывая доказанное выше, из (4.31) мы имеем

$$1 \leq \int_{D_r^*} \rho_*^{n-1}(y) d\mathcal{A}_* \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{f(S_r \cap B_i)} \rho_*^{n-1}(y) N(y, f, S_r \cap B_i) d\mathcal{H}^{n-1}y \quad (4.32)$$

для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$. Рассуждая по отдельности на каждом $B_i, i = 1, 2, \dots$, ввиду [49; п. 1.7.6 и теорема 3.2.5] получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_i \cap S_r} \rho^{n-1} d\mathcal{A} &= \int_{B_i \cap S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) L^{n-1}(x, f) d\mathcal{A} \\ &= \int_{B_i \cap S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \frac{L^{n-1}(x, f)}{\frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}} \frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}} d\mathcal{A} \geq \int_{B_i \cap S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}} d\mathcal{A} \\ &= \int_{f(B_i \cap S_r)} \rho_*^{n-1} N(y, f, S_r \cap B_i) d\mathcal{H}^{n-1} y \end{aligned} \quad (4.33)$$

для почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$. Из (4.32) и (4.33) вытекает, что $\rho \in \text{ext adm } \Gamma$.

Замена переменных на каждом $B_l, l = 1, 2, \dots$ (см., например, [49; теорема 3.2.5]), и свойство счетной аддитивности интеграла приводят к оценке

$$\int_D \frac{\rho^n(x)}{K_O(x, f)} dv(x) \leq \int_{f(D)} N(f, D) \rho_*^n(y) dv(y),$$

что и завершает доказательство теоремы 4.2.

4.14.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1.1. Пусть $x_0 \in D$ – фиксированная точка и $f_m \in \mathfrak{F}_{\varphi, Q, B_R, N, K}(D)$. Из теоремы 4.2 следует, что f_m является нижним $N(f, D)K_O(x, f)$ -отображением в точке x_0 . В таком случае, по лемме 4.4 отображение f_m удовлетворяет оценке

$$\text{cap } f(\mathcal{E}) \leq \int_A Q^*(x) \eta^n(d(x, x_0)) dv(x)$$

при $Q^* = CN^{n-1}(f, D)Q^{n-1}$, некоторой постоянной $C > 0$, произвольного конденсатора $\mathcal{E} = (B(x_0, r_2), \overline{B(x_0, r_1)})$, любых $0 < r_1, r_2 < r_0 := \text{dist}(x_0, \partial U)$, U – некоторая нормальная окрестность точки x_0 , и каждой измеримой функции $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$, удовлетворяющей 1.11. Поскольку $Q \in \text{FMO}(x_0)$, то по предложению 2.4 функция Q удовлетворяет соотношению (2.3), где $G(\varepsilon) := F(\varepsilon, \varepsilon_0)/I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)$ удовлетворяет условию: $G(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\psi_\varepsilon(t) \equiv \psi(t) := 1/t \log(1/t)$. Необходимое заключение следует теперь из леммы 2.4.

4.15. Аналогичное заключение имеет место и при другом условии на функцию Q (его доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1 с учетом элементов доказательства теоремы 2.1).

ТЕОРЕМА 4.3. *Заключение теоремы 1.1 имеет место, если вместо условия $Q \in \text{FMO}(x_0)$ потребовать, чтобы*

$$\int_0^{\delta(x_0)} \left(\int_{S(x_0, t)} Q(x) d\mathcal{A} \right)^{1/(1-n)} dt = \infty.$$

§ 5. Некоторые примеры

5.1. Для простоты ограничимся случаем $\mathbb{M}^n = \mathbb{M}_*^n = \mathbb{R}^n$. Прежде всего приведем ниже некоторое правило подсчета величины $K_O(x, f)$, определенной в соотношении (1.2). Заметим, что в $\mathbb{R}^n$, в точках x дифференцируемости отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$L(x, f) = \|f'(x)\| := \sup_{|h|=1} |f'(x)h|,$$

где $f'(x)$ – матрица Якоби отображения f в точке x . Предположим, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируемо в точке $x_0 \in D$ и матрица Якоби $f'(x_0)$ невырождена, $J(x_0, f) = \det f'(x_0) \neq 0$. Тогда найдутся системы векторов $e_1, \dots, e_n$ и $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ и положительные числа $\lambda_1(x_0), \dots, \lambda_n(x_0)$, $\lambda_1(x_0) \leq \dots \leq \lambda_n(x_0)$, такие что $f'(x_0)e_i = \lambda_i(x_0)\tilde{e}_i$ (см. [15; гл. I, теорема 2.1]), при этом,

$$|J(x_0, f)| = \lambda_1(x_0) \cdots \lambda_n(x_0), \quad \|f'(x_0)\| = \lambda_n(x_0),$$

$$K_O(x_0, f) = \frac{\lambda_n^n(x_0)}{\lambda_1(x_0) \cdots \lambda_n(x_0)},$$

см. [15; гл. I, п. 2.1, соотношение (2.5)]. Числа $\lambda_1(x_0), \dots, \lambda_n(x_0)$ называются *главными значениями*, а векторы $e_1, \dots, e_n$ и $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ – *главными векторами* отображения $f'(x_0)$.

Заметим, что производная

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

отображения f по направлению $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ в точке его дифференцируемости x_0 может быть вычислена по правилу:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = f'(x_0)e.$$

Таким образом, путем прямого вычисления можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть отображение $f: B(0, p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \rho(|x|), \quad (5.1)$$

где функция $\rho(t): (0, p) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и дифференцируема почти всюду. Тогда f также дифференцируемо почти всюду, при этом в каждой точке дифференцируемости отображения f в качестве главных векторов $e_{i_1}, \dots, e_{i_n}$ и $\tilde{e}_{i_1}, \dots, \tilde{e}_{i_n}$ можно взять $(n-1)$ линейно независимых касательных векторов к сфере $S(0, r)$ в точке x_0 , где $|x_0| = r$, и один ортогональный к ним вектор в указанной точке.

Соответствующие главные растяжения (называемые касательными растяжениями и радиальным растяжением) равны

$$\lambda_r(x_0) := \lambda_{i_1}(x_0) = \dots = \lambda_{i_{n-1}}(x_0) = \frac{\rho(r)}{r}$$

и $\lambda_r(x_0) := \lambda_{i_n} = \rho'(r)$ соответственно.

Заметим, что для главных растяжений λ_{i_k} , $k \in 1, 2, \dots, n$, мы намеренно использовали двойную индексацию, поскольку, как мы условились выше, конечную последовательность λ_i , $i \in 1, 2, \dots, n$, мы предполагаем возрастающей по i : $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Естественно, что в фиксированной точке x_0 радиальные растяжения $\lambda_{i_1}(x_0) = \dots = \lambda_{i_{n-1}}(x_0) = \rho(r)/r$ могут быть не больше касательного растяжения $\lambda_{i_n} = \rho'(r)$, и наоборот.

5.2. Отметим, что ограничения на функцию Q , присутствующие в формулировках теорем 1.1 и 4.3, нельзя, вообще говоря, заменить условием $Q \in L^p$ ни для какого (сколь угодно большого) $p > 0$ и для любой неубывающей функции $\varphi(t)$. Для простоты рассмотрим случай, когда $D = \mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$, $n \geq 2$. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – произвольная неубывающая функция. Для каждого $p \geq 1$ существуют функция $Q: \mathbb{B}^n \rightarrow [1, \infty]$, $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$ и равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов $g_m: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g_m \in W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(\mathbb{B}^n)$, имеющих конечное искажение, таких, что $K_O^{n-1}(x, g_m) \leq Q(x)$, при этом семейство $\{g_m(x)\}_{m=1}^\infty$ не является равномерно непрерывным в точке $x_0 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующий пример. Зафиксируем числа $p \geq 1$ и $\alpha \in (0, n/p(n-1))$. Можно считать, что $\alpha < 1$ в силу произвольности выбора p . Зададим последовательность гомеоморфизмов $g_m: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$g_m(x) = \begin{cases} \frac{1 + |x|^\alpha}{|x|} x, & \frac{1}{m} \leq |x| < 1, \\ \frac{1 + (1/m)^\alpha}{(1/m)} x, & 0 < |x| < \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Заметим, что каждое отображение g_m переводит шар $D = \mathbb{B}^n$ в шар $D' = B(0, 2)$ и что последовательность g_m постоянна при $|x| \geq 1/m$, а именно, $g_m(x) \equiv g(x)$ при всех x : $1/m < |x| < 1$, $m = 1, 2, \dots$, где

$$g(x) = \frac{1 + |x|^\alpha}{|x|} x.$$

Нетрудно видеть, что $g_m \in \text{ACL}(\mathbb{B}^n)$. Действительно, отображения

$$g_m^{(1)}(x) = \frac{1 + (1/m)^\alpha}{(1/m)} x, \quad m = 1, 2, \dots,$$

являются отображениями класса C^1 , скажем, в шаре $B(0, 1/m + \varepsilon)$ при малых $\varepsilon > 0$, а отображения

$$g_m^{(2)}(x) = \frac{1 + |x|^\alpha}{|x|} x$$

– отображениями класса C^1 , скажем, в кольце

$$A\left(0, \frac{1}{m} - \varepsilon, 1\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{m} - \varepsilon < |x| < 1\right\}$$

при малых $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает, что гомеоморфизмы g_m являются липшицевыми в $\mathbb{B}^n$ и, значит, $g_m \in \text{ACL}(\mathbb{B}^n)$ (см., например, [21; разд. 5, с. 12]).

Далее, в каждой регулярной точке $x \in D$ отображения $g_m: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ вычислим внешнюю дилатацию отображения g_m в точке x (см. соотношение (1.2)). Поскольку каждое g_m имеет вид (5.1), согласно предложению 5.1 получаем, что, во-первых, $K_O(x, g_m) = 1$ при $x \in B(0, 1/m)$, во-вторых, при $1/m \leq |x| < 1$ имеем

$$\lambda_\tau(x) = \frac{|x|^\alpha + 1}{|x|}, \quad \lambda_r(x) = \alpha|x|^{\alpha-1}, \quad \|g'_m(x)\| = \frac{|x|^\alpha + 1}{|x|},$$

$$|J(x, g_m)| = \left(\frac{|x|^\alpha + 1}{|x|} \right)^{n-1} \alpha|x|^{\alpha-1}, \quad K_O(x, g_m) = \begin{cases} \frac{1 + |x|^\alpha}{\alpha|x|^\alpha}, & \frac{1}{m} \leq |x| \leq 1, \\ 1, & 0 < |x| < \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Заметим, что при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ и некотором $c_m > 0$ имеет место неравенство $\|g'_m(x)\| \leq c_m$, кроме того, нетрудно видеть, что $|\nabla g_m(x)| \leq n^{1/2} \|g'_m(x)\|$ при почти всех $x \in \mathbb{B}^n$. Тогда ввиду неубывания функции φ

$$\int_{\mathbb{B}^n} \varphi(|\nabla g_m(x)|) dm(x) \leq \varphi(n^{1/2} c_m) m(\mathbb{B}^n) < \infty,$$

т.е. $g_m \in W^{1,\varphi}(\mathbb{B}^n)$. Отображения g_m имеют конечное искажение, поскольку их якобиан почти всюду не равен нулю; кроме того,

$$K_O^{n-1}(x, f) \leq Q(x), \quad \text{где} \quad Q = \left(\frac{1 + |x|^\alpha}{\alpha|x|^\alpha} \right)^{n-1},$$

и

$$Q(x) \leq \frac{C}{|x|^{\alpha(n-1)}}, \quad C := \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{n-1}.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^n} (Q(x))^p dm(x) &\leq C^p \int_{\mathbb{B}^n} \frac{dm(x)}{|x|^{p\alpha(n-1)}} \\ &= C^p \int_0^1 \int_{S(0,r)} \frac{d\mathcal{A}}{|x|^{p\alpha(n-1)}} dr = \omega_{n-1} C^p \int_0^1 \frac{dr}{r^{(n-1)(p\alpha-1)}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Хорошо известно, что интеграл

$$I := \int_0^1 \frac{dr}{r^\beta}$$

сходится при $\beta < 1$. Таким образом, интеграл в правой части соотношения (5.2) сходится, поскольку показатель степени $\beta := (n-1)(p\alpha-1)$ удовлетворяет условию $\beta < 1$ при $\alpha \in (0, n/p(n-1))$.

Отсюда вытекает, что $Q(x) \in L^p(\mathbb{B}^n)$. С другой стороны, легко видеть, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} |g(x)| = 1 \quad (5.3)$$

и g отображает проколотый шар $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ на кольцо $1 < |y| < 2$. Тогда ввиду (5.3) мы получаем

$$|g_m(x)| = |g(x)| \geq 1 \quad \forall x : |x| \geq \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

т.е. семейство $\{g_m\}_{m=1}^\infty$ не является равностепенно непрерывным в нуле. Теорема 5.1 доказана.

5.3. Приведем еще один интересный, на наш взгляд, пример, касающийся выполнения условия (4.14) в формулировках основных утверждений работы. Хотя мы и не можем в буквальном смысле назвать это условие необходимым и достаточным условием равностепенной непрерывности соответствующего семейства отображений, условие (4.14) все же является условием, “близким” к необходимому в следующем смысле.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – произвольная неубывающая функция и $0 < \varepsilon_0 < 1$. Для каждой измеримой по Лебегу функции $Q: \mathbb{B}^n \rightarrow [1, \infty]$, $Q \in L_{\text{loc}}(\mathbb{B}^n)$, такой, что

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_0^{1/(n-1)}(t)} < \infty,$$

найдется семейство равномерно ограниченных отображений $f_m \in W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(\mathbb{B}^n)$ с конечным искажением со следующими свойствами:

1) $K_O^{n-1}(x, f_m) \leq \tilde{Q}(x)$, где $\tilde{Q}$ – некоторая измеримая по Лебегу функция такая, что

$$\tilde{q}_0(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(0,r)} \tilde{Q}(x) d\mathcal{H}^{n-1} = q_0(r) \quad \text{для п.в. } r \in (0, 1);$$

2) последовательность f_m не является равностепенно непрерывной в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность отображений $f_m: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ определим следующим образом: $f_m(x) = (x/|x|)\rho_m(|x|)$, $f_m(0) := 0$, где

$$\rho_m(r) = \exp\left\{-\int_r^1 \frac{dt}{t q_{0,m}^{1/(n-1)}(t)}\right\}, \quad q_{0,m}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{|x|=r} Q_m(x) d\mathcal{A},$$

$$Q_m(x) = \begin{cases} Q(x), & |x| > \frac{1}{m}, \\ 1, & |x| \leq \frac{1}{m}. \end{cases}$$

Заметим, что $f_m \in \text{ACL}$ при любом $m \in \mathbb{N}$ и отображения f_m дифференцируемы почти всюду в $\mathbb{B}^n$. Согласно предложению 5.1

$$\|f'_m(x)\| = \frac{\exp\left\{-\int_{|x|}^1 (t q_{0,m}^{1/(n-1)}(t))^{-1} dt\right\}}{|x|},$$

$$|J(x, f_m)| = \frac{\exp\left\{-n \int_{|x|}^1 (t q_{0,m}^{1/(n-1)}(t))^{-1} dt\right\}}{|x|^n q_{0,m}^{1/(n-1)}(|x|)}.$$

Заметим, что $J(x, f_m) \neq 0$ при почти всех x . Покажем теперь, что $\varphi(|\nabla f_m(x)|) \in L^1(\mathbb{B}^n)$. Используя теорему Фубини, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^n} \varphi(|\nabla f_m(x)|) dm(x) &\leq \int_{\mathbb{B}^n} \varphi(n^{1/2} \|f'_m(x)\|) dm(x) \\ &= \omega_{n-1} \int_0^1 r^{n-1} \varphi \left(n^{1/2} \frac{\exp \left\{ - \int_r^1 (t q_{0,m}^{1/(n-1)}(t))^{-1} dt \right\}}{r} \right) dr \\ &= \omega_{n-1} \left(\int_0^{1/m} \psi(r) dr + \int_{1/m}^1 \psi(r) dr \right) = \omega_{n-1} (I_1 + I_2), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_0^{1/m} \psi(r) dr, \quad I_2 := \int_{1/m}^1 \psi(r) dr, \\ \psi(r) &:= r^{n-1} \varphi \left(n^{1/2} \frac{\exp \left\{ - \int_r^1 (t q_{0,m}^{1/(n-1)}(t))^{-1} dt \right\}}{r} \right). \end{aligned}$$

Заметим, прежде всего, что

$$I_2 \leq \varphi(n^{1/2}m) \frac{m-1}{m} \leq \varphi(n^{1/2}m).$$

Далее, заметим, что

$$I_1 \leq \int_0^{1/m} r^{n-1} \varphi \left(n^{1/2} \frac{\exp \left\{ - \int_r^{1/m} (t q_{0,m}^{1/(n-1)}(t))^{-1} dt \right\}}{r} \right) dr \leq \varphi(n^{1/2}m).$$

В таком случае, из соотношений (5.4) вытекает

$$\int_{\mathbb{B}^n} \varphi(|\nabla f_m(x)|) dm(x) \leq 2\omega_{n-1} \varphi(n^{1/2}m),$$

т.е. $\varphi(|\nabla f_m(x)|) \in L^1(\mathbb{B}^n)$.

Заметим, что

$$K_O(x, f_m) = q_{0,m}^{1/(n-1)}(|x|) \leq q_0^{1/(n-1)}(|x|)$$

и, значит, $K_O^{n-1}(x, f_m) \leq q_0(|x|)$ при почти всех $x \in \mathbb{B}^n$. Полагаем $\tilde{Q}(x) := q_0(|x|)$, тогда будем иметь $\tilde{q}_0(r) = q_0(r)$ для почти всех $r \in (0, 1)$.

Заметим также, что $|f_m(x)| \leq 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и, таким образом, семейство отображений $\{f_i(x)\}_{i=1}^\infty$ равномерно ограничено. Осталось показать, что построенная таким образом последовательность отображений f_m не является равномерно непрерывной в нуле. Для произвольной последовательности x_m такой, что $|x_m| = 1/m$, $m = 1, 2, \dots$, имеем $|f_m(x_m)| \geq \sigma$, где σ не зависит

от m . Окончательно, для некоторого числа σ и произвольного элемента последовательности $1/(m-1)$, $m = 2, 3, \dots$, найдется $x_m \in \mathbb{B}^n$ и элемент семейства отображений $f_m \in \{f_l(x)\}_{l=1}^\infty$ такие, что $|x_m - 0| < 1/(m-1)$ и, в то же время, $|f_m(x_m) - f_m(0)| \geq \sigma$. Таким образом, семейство отображений $\{f_l(x)\}_{l=1}^\infty$ не является равностепенно непрерывным в нуле. Теорема 5.2 доказана.

Авторы выражают благодарность А. Т. Фоменко за внимание к работе и рецензенту за полезные замечания и предложения.

Список литературы

- [1] Е. С. Афанасьева, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, “Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях”, *Укр. матем. вестн.*, **8**:3 (2011), 319–342; англ. пер.: E. S. Afanasieva, V. I. Ryazanov, R. R. Salimov, “On mappings in the Orlicz–Sobolev classes on Riemannian manifolds”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **181**:1 (2012), 1–17.
- [2] C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskiĭ, O. Martio, M. Vuorinen, “On conformal dilatation in space”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **2003**:22 (2003), 1397–1420.
- [3] M. Cristea, “Open discrete mappings having local ACL^n inverses”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **55**:1–3 (2010), 61–90.
- [4] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami equation. A geometric approach*, Dev. Math., **26**, Springer-Verlag, New York, 2012, xiv+301 pp.
- [5] I. Holopainen, P. Pankka, “Mappings of finite distortion: global homeomorphism theorem”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **29**:1 (2004), 59–80.
- [6] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometric function theory and non-linear analysis*, Oxford Math. Monogr., The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 2001, xvi+552 pp.
- [7] Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, “К теории классов Орлича–Соболева”, *Алгебра и анализ*, **25**:6 (2013), 50–102; англ. пер.: D. A. Kovtonyuk, V. I. Ryazanov, R. R. Salimov, E. A. Sevost'yanov, “Toward the theory of the Orlicz–Sobolev classes”, *St. Petersburg Math. J.*, **25**:6 (2014), 929–963.
- [8] Д. Ковтонюк, Р. Салимов, Е. Севостьянов, *К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева*, Наукова думка, Киев, 2013, 303 с.
- [9] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Monogr. Math., Springer, New York, 2009, xii+367 pp.
- [10] В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, “Слабо плоские пространства и границы в теории отображений”, *Укр. матем. вестн.*, **4**:2 (2007), 199–234; англ. пер.: V. I. Ryazanov, R. R. Salimov, “Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory”, *Ukr. Math. Bull.*, **4**:2 (2007), 199–234.
- [11] Е. С. Смолова, “Граничное поведение кольцевых Q -гомеоморфизмов в метрических пространствах”, *Укр. матем. журн.*, **62**:5 (2012), 682–689; англ. пер.: E. S. Smolovaya, “Boundary behavior of ring Q -homeomorphisms in metric spaces”, *Ukrainian Math. J.*, **62**:5 (2010), 785–793.
- [12] В. А. Зорич, “Квазиконформные погружения римановых многообразий и теорема пикаровского типа”, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:3 (2000), 37–48; англ. пер.: V. A. Zorich, “Quasiconformal immersions of Riemannian manifolds and a Picard type theorem”, *Funct. Anal. Appl.*, **34**:3 (2000), 188–196.
- [13] М. А. Лаврентьев, “Основная задача теории квази-конформных отображений плоских областей”, *Матем. сб.*, **21(63)**:2 (1947), 285–320.
- [14] М. А. Лаврентьев, “Основная теорема теории квази-конформных отображений плоских областей”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **12**:6 (1948), 513–554.

- [15] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982, 286 с.; англ. пер.: Yu. G. Reshetnyak, *Space mappings with bounded distortion*, Transl. Math. Monogr., **73**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, xv+362 pp.
- [16] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, “Definitions for quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, **448** (1969), 1–40.
- [17] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, “Distortion and singularities of quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, **465** (1970), 1–13.
- [18] В. М. Миклюков, “Об устранимых особенностях квазиконформных отображений в пространстве”, *Докл. АН СССР*, **188**:3 (1969), 525–527.
- [19] В. М. Миклюков, “Граничные свойства n -мерных квазиконформных отображений”, *Докл. АН СССР*, **193**:3 (1970), 525–527; англ. пер.: V. M. Miklyukov, “Boundary properties of n -dimensional quasi-conformal mappings”, *Soviet Math. Dokl.*, **11** (1970), 969–971.
- [20] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **26**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, x+213 pp.
- [21] J. Väisälä, *Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971, xiv+144 pp.
- [22] С. К. Водопьянов, “О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно”, *Матем. тр.*, **5**:2 (2002), 91–137; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, “Closure of classes of mappings with bounded distortion on Carnot groups”, *Siberian Adv. Math.*, **14**:1 (2004), 1–42.
- [23] S. K. Vodopyanov, “Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups”, *The interaction of analysis and geometry*, Contemp. Math., **424**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 303–344.
- [24] С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, *Пространства Соболева и специальные классы отображений*, НГУ, Новосибирск, 1981, 72 с.
- [25] С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, “О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными”, *УМН*, **34**:1(205) (1979), 17–65; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, V. M. Gol'dstein, Yu. G. Reshetnyak, “On geometric properties of functions with generalized first derivatives”, *Russian Math. Surveys*, **34**:1 (1979), 19–74.
- [26] С. К. Водопьянов, А. В. Грешнов, “Аналитические свойства квазиконформных отображений на группах Карно”, *Сиб. матем. журн.*, **36**:6 (1995), 1317–1327; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, A. V. Greshnov, “Analytic properties of quasiconformal mappings on Carnot groups”, *Siberian Math. J.*, **36**:6 (1995), 1142–1151.
- [27] А. В. Грешнов, “Локальная аппроксимация равномерно регулярных квазипространств Карно–Каратеодори и их касательными конусами”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:2 (2007), 290–312; англ. пер.: A. V. Greshnov, “Local approximation of uniformly regular Carnot–Carathéodory quasispaces by their tangent cones”, *Siberian Math. J.*, **48**:2 (2007), 229–248.
- [28] Д. В. Исангулова, “Класс отображений с ограниченным удельным колебанием и интегрируемость отображений с ограниченным искажением на группах Карно”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:2 (2007), 313–334; англ. пер.: D. V. Isangulova, “The class of mappings with bounded specific oscillation, and integrability of mappings with bounded distortion on Carnot groups”, *Siberian Math. J.*, **48**:2 (2007), 249–267.
- [29] I. Markina, “Singularities of quasiregular mappings on Carnot groups”, *Sci. Ser. A Math. Sci. (N.S.)*, **11** (2005), 69–81.
- [30] A. Ukhlov, S. K. Vodop'yanov, “Mappings associated with weighted Sobolev spaces”, *Complex analysis and dynamical systems III*, Contemp. Math., **455**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 369–382.

- [31] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, “Пространства Соболева и (P, Q) -квазиконформные отображения групп Карно”, *Сиб. матем. журн.*, **39**:4 (1998), 776–795; англ. пер.: S. K. Vodop'yanov, A. D. Ukhlov, “Sobolev spaces and (P, Q) -quasiconformal mappings of Carnot groups”, *Siberian Math. J.*, **39**:4 (1998), 665–682.
- [32] Е. А. Полецкий, “Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений”, *Матем. сб.*, **83(125)**:2(10) (1970), 261–272; англ. пер.: E. A. Poletskii, “The modulus method for nonhomeomorphic quasiconformal mappings”, *Math. USSR-Sb.*, **12**:2 (1970), 260–270.
- [33] Е. А. Севостьянов, “Обобщение одной леммы Е. А. Полецкого на классы пространственных отображений”, *Укр. матем. журн.*, **61**:7 (2009), 969–975; англ. пер.: E. A. Sevost'yanov, “Generalization of one Poletskij lemma to classes of space mappings”, *Ukrainian Math. J.*, **61**:7 (2009), 1151–1157.
- [34] Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, “Теория кольцевых Q -отображений в геометрической теории функций”, *Матем. сб.*, **201**:6 (2010), 131–158; англ. пер.: R. R. Salimov, E. A. Sevost'yanov, “The theory of shell-based Q -mappings in geometric function theory”, *Sb. Math.*, **201**:6 (2010), 909–934.
- [35] Е. А. Севостьянов, “Об интегральной характеристизации некоторых обобщений квазирегулярных отображений и значении условия расходимости интеграла в геометрической теории функций”, *Укр. матем. журн.*, **61**:10 (2009), 1367–1380; англ. пер.: E. A. Sevost'yanov, “On the integral characterization of some generalized quasiregular mappings and the significance of the conditions of divergence of integrals in the geometric theory of functions”, *Ukrainian Math. J.*, **61**:10 (2009), 1610–1623.
- [36] J. M. Lee, *Riemannian manifolds. An introduction to curvature*, Grad. Texts in Math., **176**, Springer-Verlag, New York, 1997, xvi+224 pp.
- [37] Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин, *Дифференциальная геометрия. Первое знакомство*, Изд-во МГУ, М., 1990, 384 с.
- [38] В. Г. Мазья, *Пространства Соболева*, Изд-во ЛГУ, Л., 1985, 416 с.; англ. пер.: V. G. Maz'ya, *Sobolev spaces*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985, xix+486 pp.
- [39] T. Rado, P. V. Reichelderfer, *Continuous transformations in analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **LXXXV**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1955, vii+442 pp.
- [40] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутницкий, *Выпуклые функции и пространства Орлица*, Физматгиз, М., 1958, 271 с.; англ. пер.: M. A. Krasnosel'skij, Ya. B. Rutitskij, *Convex functions and Orlicz spaces*, P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961, xi+249 pp.
- [41] B. Fuglede, “Extremal length and functional completion”, *Acta Math.*, **98** (1957), 171–219.
- [42] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **28**, Amer. Math. Soc., New York, 1942, x+278 pp.
- [43] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001, x+140 pp.
- [44] T. Adamowicz, N. Shanmugalingam, “Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **35** (2010), 609–626.
- [45] К. Куратовский, *Топология*, т. 2, Мир, М., 1969, 624 с.; пер. с англ.: K. Kuratowski, *Topology*, II, Academic Press, New York, 1968, 622 pp.
- [46] В. Гуревич, Г. Волмэн, *Теория размерности*, ИЛ, М., 1948, 232 с.; пер. с англ.: W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1948, vii+165 pp.
- [47] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949, 496 с.; пер. с англ.: S. Saks, *Theory of the integral*, 2nd ed., Monografie Matematyczne, **7**, G. E. Stechert, Warszawa–New York, 1937, vi+347 pp.

- [48] И. И. Привалов, *Введение в теорию функций комплексного переменного*, 13-е изд., Наука, М., 1984, 432 с.
- [49] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987, 760 с.; пер. с англ.: Н. Federer, *Geometric measure theory*, Grundlehren Math. Wiss., **153**, Springer-Verlag, New York, 1969, xiv+676 pp.
- [50] F. W. Gehring, “Rings and quasiconformal mappings in space”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103**:3 (1962), 353–393.
- [51] W. P. Ziemer, “Extremal length and conformal capacity”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **126**:3 (1967), 460–473.
- [52] J. Hesse, “A p -extremal length and p -capacity equality”, *Ark. Mat.*, **13** (1975), 131–144.

Денис Петрович Илютко

(Denis P. Il'yutko)

Механико-математический факультет,

Московский государственный университет

имени М.В.Ломоносова

E-mail: ilyutko@yandex.ru

Поступила в редакцию

21.02.2015 и 16.07.2015

Евгений Александрович Севостьянов

(E. A. Sevost'yanov)

Житомирский государственный университет

им. И. Франко, Украина

E-mail: esevostyanov2009@mail.ru