Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Карагулян, О расходимости треугольных и эксцентрисических сферических сумм двойных рядов Фурье, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 1, 73–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8494>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:45:25

УДК 517.52

Г. А. Карагулян

О расходимости треугольных и эксцентрических сферических сумм двойных рядов Фурье

Строится непрерывная функция на торе с почти всюду расходящимися треугольными суммами двойных рядов Фурье. Аналогичная теорема устанавливается также для эксцентрических сферических сумм.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: расходящиеся треугольные суммы, двойные ряды Фурье.

DOI: 10.4213/sm8494

§ 1. Введение

Согласно классической теореме Л. Карлесона (см. [1]) ряд Фурье произвольной функции из $L^2(\mathbb{T})$ сходится почти всюду. Позднее Р. А. Хант в [2], П. Шёлин в [3] и Н. А. Антонов в [4] установили такое же свойство рядов Фурье функций из более широких функциональных классов. В настоящее время наилучшим является результат Н. А. Антонова [4], согласно которому ряд Фурье произвольной функции из класса $L \log L \log \log L(\mathbb{T})$ сходится почти всюду (п.в.).

Вопрос о сходимости почти всюду кратных рядов Фурье хорошо исследован для различных типов частичных сумм. Если $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ – произвольная функция с двойным рядом Фурье

$$\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} c_{nm} e^{i(nx+my)} \quad (1.1)$$

и если $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область, то через

$$S_G(x, y, f) = \sum_{(n,m) \in G} c_{nm} e^{i(nx+my)} \quad (1.2)$$

мы обозначим сумму ряда (1.1) по области G . Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ – произвольный многоугольник, содержащий начало координат. Положим

$$\lambda P = \{(\lambda x, \lambda y) : (x, y) \in P\}, \quad \lambda > 0.$$

Ч. Фефферман (см. [5]) показал, что если $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, то

$$S_{\lambda P}(x, y, f) \rightarrow f(x, y) \quad \text{п.в. при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Случай, когда P является прямоугольником или квадратом, рассмотрен П. Шёлином в [3] и Н. А. Антоновым в [4]. В случае прямоугольника сходимость (1.3) имеет место для любой $f \in L(\log L)^3 \log \log L$ (см. [3]). Если же P является квадратом, то (1.3) выполнено, если $f \in L(\log L)^2 \log \log L$ (см. [4]). Н. Р. Тевзадзе (см. [6]) показал, что для любой последовательности прямоугольников $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \dots \subset \mathbb{R}^2$ со сторонами, параллельными осям координат, частичные суммы $S_{R_k}(x, y, f)$ сходятся почти всюду для любой функции $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$.

Отметим, что во всех вышеупомянутых теоремах сходимости частичные суммы зависят от одного параметра. Следующий результат Ч. Феффермана (см. [7]) показывает, что прямоугольные частичные суммы

$$S_{NM}(x, y, f) = \sum_{|n| \leq N, |m| \leq M} c_{nm} e^{i(nx+my)}$$

с двумя независимыми параметрами N и M ведут себя по-иному.

ТЕОРЕМА А (Ч. Фефферман). *Существует непрерывная действительная функция $f \in C(\mathbb{T}^2)$ такая, что*

$$\limsup_{N, M \rightarrow \infty} |S_{NM}(x, y, f)| = \infty$$

при любых $(x, y) \in \mathbb{T}^2$.

Отметим, что в упомянутых выше теоремах сходимости для двойных рядов Фурье области, по которым ведется суммирование, являются многоугольниками с фиксированными направлениями сторон. В настоящей работе будет показано, что ситуация принципиально меняется при незначительном варьировании направлений сторон многоугольников, по которым ведется суммирование.

Рассмотрим ромбы

$$\Delta(a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a|x| + b|y| \leq 1\}, \quad a, b > 0. \quad (1.4)$$

Если $\Delta = \Delta(a, b)$, то обозначим

$$\rho(\Delta) = \frac{\max\{a, b\}}{\min\{a, b\}}.$$

Ясно, что если Δ – квадрат, то $\rho(\Delta) = 1$. Отметим, что области

$$\Delta(a, b) \cap \mathbb{R}_+^2 \quad (1.5)$$

являются треугольниками с вершиной в начале координат. Ясно, что двойной ряд (1.1), соответствующий произвольной действительной функции $f \in L(\mathbb{T}^2)$, может быть записан в действительном виде (через синусы и косинусы) и что сумма (1.2), соответствующая ромбу (1.4), совпадает с частичными суммами ряда Фурье по треугольнику (1.5).

Мы говорим, что последовательность областей G_k является *полной*, если $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = \mathbb{R}^2$.

Следующий результат является эквивалентной переформулировкой теоремы Ч. Феффермана из [5].

ТЕОРЕМА В (Ч. Фефферман). Пусть Δ_k , $k = 1, 2, \dots$, – полная возрастающая последовательность квадратов вида (1.4) (т.е. имеем $\rho(\Delta_k) = 1$). Тогда для любой функции $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\Delta_k}(x, y, f) = f(x, y)$$

почти всюду.

В настоящей работе мы устанавливаем следующий результат, показывающий, что условие $\rho(\Delta_k) = 1$ в теореме В нельзя заменить на условие $\rho(\Delta_k) \rightarrow 1$.

ТЕОРЕМА 1. Существуют непрерывная действительная функция $f \in C(\mathbb{T}^2)$ и полная последовательность областей Δ_k , $k = 1, 2, \dots$, вида (1.4) такие, что $\Delta_k \subset \Delta_{k+1}$, $\rho(\Delta_k) \rightarrow 1$ и

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |S_{\Delta_k}(x, y, f)| = \infty \quad (1.6)$$

почти всюду.

Пример функции $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$, $1 \leq p < \infty$, удовлетворяющей такому же соотношению (1.6), был построен в [8]. Аналогичная теорема расходимости для рядов Уолша–Фурье была получена в [9].

Ниже мы получим аналогичную теорему расходимости для некоторых сферических сумм. Пусть $B = B(x_0, y_0, r)$ – открытый круг радиуса r с центром в точке (x_0, y_0) . Рассмотрим величину

$$\tau(B) = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{r},$$

характеризующую эксцентричность круга относительно начала координат. Мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Существуют непрерывная функция $f \in C(\mathbb{T}^2)$ и полная последовательность кругов U_k , $k = 1, 2, \dots$, такие, что $\tau(U_k) \rightarrow 0$ и

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |S_{U_k}(x, y, f)| = \infty \quad (1.7)$$

почти всюду.

При доказательстве теорем мы воспользуемся методом, примененным в работе [10], где была показана неограниченность максимального преобразования Гильберта по направлениям на плоскости с произвольным бесконечным набором направлений.

К сожалению, нам не удалось доказать теорему 2 с условием $\tau(U_k) = 0$ вместо условия $\tau(U_k) \rightarrow 0$. Такой результат дал бы отрицательный ответ на известный вопрос о сходимости почти всюду сферических частичных сумм двойных рядов Фурье.

§ 2. Вспомогательные леммы

Пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ – одномерный тор, и пусть $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Если E – измеримое по Лебегу подмножество тора $\mathbb{T}$ или тора $\mathbb{T}^2$, то через $\mathbb{I}_E$ мы будем обозначать характеристическую функцию множества E , а через $|E|$ – его меру Лебега. Для $n \in \mathbb{N}$ и измеримого множества $E \subset \mathbb{T}^2$ положим

$$E(n) = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : (nx, ny) \in E\}.$$

Ясно, что $|E(n)| = |E|$. Далее, хорошо известно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A \cap B(n)| = \frac{|A||B|}{4\pi^2}, \quad 4\pi^2 = |\mathbb{T}^2|. \quad (2.1)$$

Этот результат следует из теоремы Фейера (см., например, [11; ч. 2, теорема (4.15)]).

Следующие две леммы основаны на стандартных вероятностных рассуждениях о независимости.

ЛЕММА 1. Пусть $n_0 > 0$ – натуральное число, и пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда для любой последовательности измеримых множеств $E_k \subset \mathbb{T}^2$, $k = 1, 2, \dots, l$, таких, что $|E_k| > 4\pi^2\alpha$, существуют натуральные числа $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_l$, удовлетворяющие условию

$$\left| \bigcup_{k=1}^l E_k(n_k) \right| > 4\pi^2(1 - (1 - \alpha)^l). \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.1) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |(A \cup B(n))^c| &= \lim_{n \rightarrow \infty} (4\pi^2 - |A| - |B(n)| + |A \cap B(n)|) \\ &= 4\pi^2 - |A| - |B| + \frac{|A||B|}{4\pi^2} = \frac{(4\pi^2 - |A|)(4\pi^2 - |B|)}{4\pi^2} = \frac{|A^c| \cdot |B^c|}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

Выбирая достаточно малое $\delta > 0$ и применяя данное соотношение $l - 1$ раз, мы находим натуральные числа $1 = n_1 < n_2 < \dots < n_l$ такие, что

$$\begin{aligned} |(E_1 \cup E_2(n_2) \cup \dots \cup E_l(n_l))^c| &< \frac{|E_1^c| |E_2^c| \dots |E_l^c|}{(4\pi^2)^{l-1}} + \delta \\ &< \frac{(4\pi^2 - 4\pi^2\alpha)^l}{(4\pi^2)^{l-1}} = 4\pi^2(1 - \alpha)^l. \end{aligned}$$

Отсюда получаем (2.2).

ЛЕММА 2. Пусть $E_k \subset \mathbb{T}^2$ – последовательность измеримых множеств таких, что $|E_k| > 4\pi^2\alpha$, $k = 1, 2, \dots$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда существует бесконечная последовательность натуральных чисел $0 < n_1 < n_2 < \dots$ такая, что

$$\left| \bigcap_{l \geq 1} \bigcup_{k \geq l} E_k(n_k) \right| = 4\pi^2 = |\mathbb{T}^2|. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 1 к семейству множеств

$$\{E_j : k^2 < j \leq (k+1)^2\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

мы находим натуральные числа n_j такие, что

$$\left| \bigcup_{j=k^2+1}^{(k+1)^2} E_j(n_j) \right| > 4\pi^2(1 - (1 - \alpha)^{2k+1}), \quad k = 0, 1, \dots$$

Отсюда вытекает, что $|\bigcup_{k \geq l} E_k(n_k)| = 4\pi^2$ для всех $l = 1, 2, \dots$, что в свою очередь дает (2.3).

ЛЕММА 3. Пусть $f \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$. Тогда

$$\left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : |f(x, y)| > \frac{\|f\|_1}{8\pi^2} \right\} \right| \geq \frac{4\pi^2}{8\pi^2(\|f\|_\infty/\|f\|_1) - 1}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : |f(x, y)| > \frac{\|f\|_1}{8\pi^2} \right\},$$

имеем

$$\|f\|_1 \leq (4\pi^2 - |E|) \frac{\|f\|_1}{8\pi^2} + |E| \|f\|_\infty.$$

Отсюда после несложных преобразований получаем (2.4).

Для любого натурального числа $n > 2$, представленного в виде

$$n = 2^k + j, \quad 1 \leq j \leq 2^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

определим

$$\bar{n} = 2^{k-1} + \left\lceil \frac{j+1}{2} \right\rceil, \quad (2.5)$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа. Мы говорим, что последовательность действительных функций $f_n(x, y)$, $n = 2, 3, \dots, 2^m$, $f_n \not\equiv 0$, образует *дерево*, если

$$\text{supp } f_n \subset \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : (-1)^{j+1} \cdot f_{\bar{n}}(x) > 0\}.$$

Типичным примером такой последовательности функций является система Хаара с исключенной первой функцией.

Следующий результат установлен в [10]. Случай системы Хаара рассмотрен в [12] (см. также [13; п. 3.5]).

ЛЕММА 4. Существует перестановка σ чисел $\{2, 3, \dots, 2^m\}$ такая, что

$$\sup_{2 \leq l \leq 2^m} \left| \sum_{n=2}^l f_{\sigma(n)}(x, y) \right| \geq \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{2^m} |f_n(x, y)|$$

для любой системы $f_n(x, y)$, $n = 2, 3, \dots, 2^m$, образующей *дерево*.

Для любого натурального числа p обозначим

$$\begin{aligned}\delta_p^k &= \left(\frac{2\pi(k-1)}{|p|}, \frac{2\pi k}{|p|} \right), \\ \delta_p^{k,j} &= \delta_p^k \times \delta_p^j = \left(\frac{2\pi(k-1)}{|p|}, \frac{2\pi k}{|p|} \right) \times \left(\frac{2\pi(j-1)}{|p|}, \frac{2\pi j}{|p|} \right), \quad k, j \in \mathbb{Z}, \\ Q_p &= \{ \delta_p^{k,j} : 1 \leq k, j \leq |p| \}.\end{aligned}$$

Далее, для $\gamma > 1$ и последовательности натуральных чисел p_n , $n = 2, 3, \dots, \nu = 2^m$, такой, что $1 \leq |p_2| < |p_3| < \dots < |p_\nu|$ и $p_n |p_{n+1}|$ (p_n делит p_{n+1}), мы рассмотрим систему функций

$$a_n(x, y) = a_n(x, y) = \frac{\mathbb{I}_{E_n}(x, y)}{\sqrt{m}} e^{i(p_n x + q_n y)}, \quad n \geq 2, \quad (2.6)$$

где $E_2 = \mathbb{T}^2$, а E_n есть объединение всех прямоугольников $\delta \in Q_{p_n}$, удовлетворяющих условию

$$\bar{\delta} \subset \{ (x, y) \in E_n : (-1)^{j+1} \cos(p_n x + q_n y) > 0 \}, \quad (2.7)$$

$$\sup_{(x,y) \in \delta} \left| \sum_{k=2}^{\bar{n}} a_k(x, y) + \frac{e^{i(p_n x + q_n y)}}{\sqrt{m}} \right| \leq \gamma. \quad (2.8)$$

Отметим, что некоторые из множеств E_n могут быть пустыми. Кроме этого, для удобства дальнейшего рассмотрения предположим, что

$$E_n = \emptyset, \quad n > \nu = 2^m.$$

Для $k = 1, 2, \dots, m-1$ рассмотрим набор

$$\mathcal{E}_k = \{ E_n : 2^k < n \leq 2^{k+1} \}.$$

В следующих соотношениях раскрываются некоторые структурные свойства множеств E_n :

$$E_n \cap E_{n'} = \emptyset, \quad 2^k < n < n' \leq 2^{k+1}, \quad (2.9)$$

$$E_n \in \mathcal{E}_k \implies E_{2n-1}, E_{2n} \in \mathcal{E}_{k+1}, \quad (2.10)$$

$$E_{2n-1} \cup E_{2n} \subset E_n. \quad (2.11)$$

Ясно, что соотношения (2.6)–(2.8) определяют систему (2.6) единственным образом.

Из (2.9) и (2.11) мы получаем, что

$$\sum_{n=2}^{\nu} |a_n(x, y)| \leq \sum_{n=2}^{\nu} \frac{\mathbb{I}_{E_n}(x, y)}{\sqrt{m}} \leq \sqrt{m}. \quad (2.12)$$

Таким образом, если $\gamma \geq \sqrt{m}$, то условие (2.8) выполнено при всех δ , а это показывает, что $a_n(x, y)$ не зависит от γ . В этом случае множество E_n и функция $a_n(x, y)$ обозначаются соответственно через F_n и $b_n(x, y)$.

ЛЕММА 5. Пусть $p_n |p_{n+1}| \geq |p_n| \sqrt{m}$, $n = 2, 3, \dots, \nu - 1$. Тогда

$$\left| \left\{ \max_{2 \leq n \leq \nu} \left| \sum_{k=2}^n b_k(x, y) \right| > \lambda \right\} \right| \leq \frac{c}{\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad (2.13)$$

где $c > 0$ – абсолютная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $p_n > 0$, $n = 2, 3, \dots, \nu$. Так как F_n состоит из квадратов, принадлежащих Q_{p_n} , то из (2.6) получаем

$$\int_{\delta_{p_n}^j} b_n(t, y) dt = 0.$$

Для $n = 2, 3, \dots, \nu$ положим

$$f_n(x, y) = \frac{p_{n+1}}{2\pi} \sum_{j=1}^{p_{n+1}} \left[\int_{\delta_{p_{n+1}}^j} b_n(t, y) dt \cdot \mathbb{I}_{\delta_{p_{n+1}}^j}(x) \right], \quad (2.14)$$

где $p_{\nu+1} > p_\nu \sqrt{m}$ взяты произвольно при условии, что $p_\nu |p_{\nu+1}|$. Из определения функции $b_n(x, y)$ (см. (2.6)–(2.8) в случае $\gamma > \sqrt{m}$) мы заключаем, что

$$\text{supp } f_n \subset \text{supp } b_n \subset F_n, \quad n = 2, 3, \dots, \nu. \quad (2.15)$$

Для каждого фиксированного y функция $f_n(x, y)$ является постоянной на каждом из интервалов $\delta_{p_{n+1}}^j$, $j = 1, 2, \dots, p_{n+1}$, по отношению к переменной x . Таким образом,

$$\int_{\delta_{p_{n+1}}^j} f_{n+1}(t, y) dt = \sum_{k: \delta_{p_{n+2}}^k \subset \delta_{p_{n+1}}^j} \int_{\delta_{p_{n+2}}^k} b_{n+1}(t, y) dt = \int_{\delta_{p_{n+1}}^j} b_{n+1}(t, y) dt = 0.$$

Это означает, что функции (2.14) образуют последовательность мартингал-разностей по отношению к x . Отсюда, применяя хорошо известное мартингалное неравенство (см. [14; гл. IV, п. 5.1]) и далее используя (2.9) и (2.11), мы получаем

$$\int_{\mathbb{T}^2} \max_{2 \leq n \leq \nu} \left| \sum_{k=2}^n f_k(x, y) \right|^2 dx dy \lesssim \sum_{k=2}^{\nu} \|f_k\|_2^2 \leq \sum_{k=2}^{\nu} \|b_k\|_2^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{\nu} |E_k| \leq 1. \quad (2.16)$$

С другой стороны, если $x \in \delta_{p_{k+1}}^j$, то

$$|f_k(x, y) - b_k(x, y)| \leq \frac{p_{k+1}}{2\pi} \int_{\delta_{p_{k+1}}^j} |b_k(t, y) - b_k(x, y)| dt \quad (2.17)$$

$$\leq \sup_{|t-x| \leq 2\pi/p_{k+1}} \frac{|\cos p_k t - \cos p_k x|}{\sqrt{m}} \leq \frac{2\pi p_k}{p_{k+1} \sqrt{m}} \leq \frac{2\pi}{m}. \quad (2.18)$$

В комбинации с (2.12) и (2.15) это дает

$$\sum_{k=2}^{\nu} |f_k(x, y) - b_k(x, y)| \leq \frac{2\pi}{m} \sum_{k=2}^{\nu} \mathbb{I}_{F_k}(x, y) \leq 2\pi.$$

Отсюда с учетом (2.16) получаем

$$\int_{\mathbb{T}^2} \max_{2 \leq n \leq \nu} \left| \sum_{k=2}^n b_k(x, y) \right|^2 dx dy \leq 2 \int_{\mathbb{T}^2} \max_{2 \leq n \leq \nu} \left| \sum_{k=2}^n f_k(x, y) \right|^2 dx dy + 8\pi^2 \lesssim 1.$$

Из последней оценки и неравенства Чебышёва вытекает (2.13).

ЛЕММА 6. Пусть c – константа из (2.13), и пусть $\gamma \geq c + 2$. Предположим, что $2p_{\bar{n}}|p_n$ и

$$|p_n| > 20\nu(|p_{\bar{n}}| + |q_{\bar{n}}|). \quad (2.19)$$

Тогда

$$\sum_{n=2}^{\nu} \int_{\mathbb{T}^2} |\operatorname{Re}(a_n(x, y))| dx dy > 2\sqrt{m}. \quad (2.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы всегда можем считать, что $p_n, q_n > 0$, $n = 2, 3, \dots, \nu$. Доказательство (2.20) основывается на оценке

$$\left| \bigcup_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} E_n \right| > 10. \quad (2.21)$$

Для того чтобы установить (2.21), рассмотрим множества U_n и V_n , являющиеся по определению объединениями квадратов $\delta \in Q_{p_n}$, удовлетворяющих соответственно условиям

$$\bar{\delta} \subset \{(x, y) \in E_{\bar{n}} : (-1)^{j+1} \cos(p_{\bar{n}}x + q_{\bar{n}}y) > 0\}, \quad (2.22)$$

$$\bar{\delta} \cap \{(x, y) \in E_{\bar{n}} : (-1)^{j+1} \cos(p_{\bar{n}}x + q_{\bar{n}}y) > 0\} \neq \emptyset. \quad (2.23)$$

Покажем, что

$$E_n \subset U_n \subset E_{\bar{n}} \cap V_n, \quad (2.24)$$

$$E_n \subset \overline{V_{2n}} \cup \overline{V_{2n-1}}, \quad (2.25)$$

$$|V_n \setminus U_n| < \frac{1}{\nu}, \quad (2.26)$$

$$U_n \setminus E_n \subset \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{1 \leq n \leq \nu} \left| \sum_{k=1}^n a_k(x, y) \right| > \gamma - 2 \right\}. \quad (2.27)$$

Включения (2.24) немедленно вытекают из определения множеств E_n , U_n и V_n (см. (2.7), (2.22), (2.23)).

Пользуясь (2.5), несложно установить, что $\overline{2n-1} = \overline{2n} = n$. Таким образом, по определению V_{2n} и V_{2n-1} суть объединения квадратов $\delta \in Q_{p_n}$, удовлетворяющих соответственно соотношениям

$$\bar{\delta} \cap \{(x, y) \in E_n : \cos(p_{\bar{n}}x + q_{\bar{n}}y) > 0\} \neq \emptyset,$$

$$\bar{\delta} \cap \{(x, y) \in E_n : \cos(p_{\bar{n}}x + q_{\bar{n}}y) < 0\} \neq \emptyset.$$

Это в свою очередь влечет (2.25).

Чтобы установить (2.26), мы заметим, что множество $V_n \setminus U_n$, $n = 2^k + j$, состоит из квадратов $\delta \in Q_{p_n}$ таких, что

$$\bar{\delta} \cap \{(x, y) \in E_{\bar{n}} : (-1)^{j+1} \cos(p_{\bar{n}}x + q_{\bar{n}}y) = 0\} \neq \emptyset. \quad (2.28)$$

Далее, отметим, что если

$$\delta_{p_n}^{\alpha_1, \beta} \subset V_n \setminus U_n \quad (2.29)$$

и если натуральные числа α_2 удовлетворяют соотношению

$$\alpha_1 + \frac{p_n}{2p_{\bar{n}}} \cdot \frac{1}{3\nu} + 1 < \alpha_2 < \alpha_1 + \frac{p_n}{2p_{\bar{n}}} \left(1 - \frac{1}{3\nu}\right) - 1, \quad (2.30)$$

то

$$\delta_{p_n}^{\alpha_2, \beta} \cap (V_n \setminus U_n) = \emptyset. \quad (2.31)$$

В самом деле, рассуждая от противного, предположим что условия (2.29), (2.30) выполнены, а (2.31) – нет. Тогда в соответствии с (2.28) мы можем найти точки

$$(x_1, y_1) \in \overline{\delta_{p_n}^{\alpha_1, \beta}}, \quad (x_2, y_2) \in \overline{\delta_{p_n}^{\alpha_2, \beta}} \quad (2.32)$$

такие, что $\cos(p_{\bar{n}}x_1 + q_{\bar{n}}y_1) = \cos(p_{\bar{n}}x_2 + q_{\bar{n}}y_2) = 0$, откуда

$$p_{\bar{n}}x_1 + q_{\bar{n}}y_1 = \frac{\pi}{2} + \pi l_1, \quad p_{\bar{n}}x_2 + q_{\bar{n}}y_2 = \frac{\pi}{2} + \pi l_2$$

при некоторых натуральных числах l_1, l_2 . Отсюда мы заключаем, что

$$p_{\bar{n}}(x_2 - x_1) + q_{\bar{n}}(y_2 - y_1) = \pi(l_2 - l_1). \quad (2.33)$$

Далее, из (2.19), (2.30), (2.32) следует, что

$$\begin{aligned} |p_{\bar{n}}(x_2 - x_1) + q_{\bar{n}}(y_2 - y_1)| &\leq \frac{2\pi p_{\bar{n}}(\alpha_2 - \alpha_1 + 1)}{p_n} + \frac{2\pi q_{\bar{n}}}{p_n} \\ &< \pi \left(1 - \frac{1}{3\nu}\right) + \frac{\pi}{10\nu} < \pi. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Соединяя (2.33) и (2.34), мы получаем $l_1 = l_2$, что в свою очередь дает

$$p_{\bar{n}}(x_2 - x_1) = q_{\bar{n}}(y_1 - y_2). \quad (2.35)$$

С другой стороны, из (2.19), (2.30), (2.32) имеем

$$q_{\bar{n}}(y_1 - y_2) \leq \frac{2\pi q_{\bar{n}}}{p_n} < \frac{\pi}{10\nu}, \quad (2.36)$$

$$p_{\bar{n}}(x_2 - x_1) > \frac{2\pi p_{\bar{n}}(\alpha_2 - \alpha_1 - 1)}{p_n} > \frac{2\pi p_{\bar{n}}}{p_n} \cdot \frac{p_n}{2p_{\bar{n}}} \cdot \frac{1}{3\nu} = \frac{\pi}{3\nu}. \quad (2.37)$$

Окончательно, сопоставляя (2.35)–(2.37), мы получаем противоречие.

Таким образом,

$$(2.29), (2.30) \implies (2.31). \quad (2.38)$$

Для $1 \leq k \leq p_n$ и $1 \leq k \leq p_{\bar{n}}$ рассмотрим квадраты

$$\left\{ \delta_{p_n}^{k,j} : \frac{(k-1)p_n}{2p_{\bar{n}}} < j \leq \frac{kp_n}{2p_{\bar{n}}} \right\}. \quad (2.39)$$

Так как $2p_{\bar{n}}$ делит p_n , то или все такие квадраты лежат внутри $E_{\bar{n}}$, или все они лежат вне $E_{\bar{n}}$. Из (2.19) и (2.38) вытекает, что число тех квадратов $\delta_{p_n}^{k,j}$ из набора (2.39), которые содержатся в $V_n \setminus U_n$, не превосходит величины

$$\frac{2}{3\nu} \cdot \frac{p_n}{2p_{\bar{n}}} + 3 < \frac{1}{\nu} \cdot \frac{p_n}{2p_{\bar{n}}}.$$

Таким образом, число всех квадратов $\delta \in Q_{p_n}$ таких, что $\delta \subset V_n \setminus U_n$, оценивается сверху числом $(p_n)^2/\nu$, где $(p_n)^2$ – число всех квадратов $\delta \in Q_{p_n}$. Отсюда получаем

$$|V_n \setminus U_n| < \frac{(p_n)^2}{\nu} \cdot \frac{4\pi^2}{(p_n)^2} = \frac{1}{\nu}.$$

Если пара (x, y) содержится во множестве из левой части (2.27), то по определению U_n (см. (2.22)) и E_n (см. (2.7), (2.8)) существует единственный квадрат $\delta \in Q_{p_n}$ такой, что $(x, y) \in \delta \subset U_n$ и $\delta \cap E_n = \emptyset$. Из (2.22) следует, что $\delta \subset E_{\bar{n}}$, откуда с учетом (2.7), (2.8) получаем

$$\sup_{(u,v) \in \delta} \left| \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k(u, v) + \frac{e^{i(p_n u + q_n v)}}{\sqrt{m}} \right| > \gamma. \quad (2.40)$$

В силу (2.40) найдется точка $(x_0, y_0) \in \delta$ такая, что

$$\left| \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k(x_0, y_0) + \frac{e^{i(p_n x_0 + q_n y_0)}}{\sqrt{m}} \right| > \gamma. \quad (2.41)$$

С другой стороны, для произвольных $(x, y), (x', y') \in \delta$ имеем

$$\begin{aligned} & |e^{i(p_{\bar{n}}x + q_{\bar{n}}y)} - e^{i(p_{\bar{n}}x' + q_{\bar{n}}y')}| \\ & \leq |e^{i(p_{\bar{n}}x + q_{i\bar{n}}y)} - e^{i(p_{\bar{n}}x + q_{i\bar{n}}y')}| + |e^{i(p_{\bar{n}}x + q_{\bar{n}}y')} - e^{i(p_{\bar{n}}x' + q_{\bar{n}}y')}| \\ & = |e^{iq_{\bar{n}}y} - e^{iq_{\bar{n}}y'}| + |e^{ip_{\bar{n}}x} - e^{ip_{\bar{n}}x'}| \\ & \leq \sqrt{2}(q_{\bar{n}}|y - y'| + p_{\bar{n}}|x - x'|) \leq \frac{4\pi(p_{\bar{n}} + q_{\bar{n}})}{p_n} < \frac{1}{\nu}, \end{aligned}$$

что дает

$$r = \sup_{(x,y), (x',y') \in \delta} \left| \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k(x, y) - \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k(x', y') \right| \leq 1.$$

Воспользовавшись неравенством (2.41), получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k(x, y) \right| \geq \left| \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k(x_0, y_0) \right| - r \\ & \geq \left| \sum_{k=1}^{\bar{n}} a_k(x_0, y_0) + \frac{e^{p_n x_0 + q_n y_0}}{\sqrt{m}} \right| - \frac{|e^{p_n x_0 + q_n y_0}|}{\sqrt{m}} - 1 > \gamma - 2, \end{aligned}$$

откуда вытекает (2.27). Далее, из (2.25) получаем

$$E_n \setminus (E_{2n-1} \cup E_{2n}) \subset (\overline{V_{2n-1}} \setminus E_{2n-1}) \cup (\overline{V_{2n}} \setminus E_{2n}).$$

С учетом этого имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} E_n &= \mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{n=2}^{2^{m-1}} (E_n \setminus (E_{2n-1} \cup E_{2n})) \supset \mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{n=3}^{\nu} (\overline{V_n} \setminus E_n) \\ &= \mathbb{T}^2 \setminus \left(\bigcup_{n=3}^{\nu} (\overline{V_n} \setminus U_n) \cup (U_n \setminus E_n) \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Теперь из (2.26) находим, что

$$\left| \bigcup_{n=3}^{\nu} \overline{V_n} \setminus U_n \right| = \left| \bigcup_{n=3}^{\nu} V_n \setminus U_n \right| \leq 1.$$

Далее, лемма 6 с учетом (2.27) дает

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{n=3}^{\nu} (U_n \setminus E_n) \right| &\leq \left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{1 \leq n \leq \nu} \left| \sum_{k=1}^n a_k(x, y) \right| > \gamma - 2 \right\} \right| \\ &\leq \frac{c}{\gamma - 2} \leq \frac{c + 2}{\gamma} < 1. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Сопоставляя (2.42) и (2.43), получаем

$$\left| \sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} E_n \right| \geq |\mathbb{T}^2| - 2 \geq 10,$$

что доказывает (2.21). Используя свойства множеств E_n (см. (2.9)–(2.11)), из (2.21) получаем

$$\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} |E_n| \geq \sum_{n=2^{m-1}+1}^{2^m} |E_n| > 10$$

при любом $k = 1, 2, \dots, m$, что дает

$$\sum_{n=2}^{\nu} |E_n| \geq 10m. \quad (2.44)$$

С другой стороны, поскольку E_n – объединение квадратов $\delta \in Q_{p_n}$, то

$$\begin{aligned} \int_{E_n} |\cos(p_n x + q_n y)| dx dy &= \sum_{\delta \in Q_{p_n}, \delta \subset E_n} \int_{\delta} |\cos(p_n x + q_n y)| dx dy \\ &= \sum_{\delta \in Q_{p_n}, \delta \subset E_n} \frac{1}{p_n q_n} \int_{\mathbb{T}^2} |\cos(x + y)| dx dy = 4\pi \sum_{\delta \in Q_{p_n}, \delta \subset E_n} \frac{1}{p_n q_n} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{\delta \in Q_{p_n}, \delta \subset E_n} |\delta| = \frac{|E_n|}{\pi}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Сопоставление (2.44) и (2.45) дает

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\nu} \int_{\mathbb{T}^2} |\operatorname{Re}(a_n(x, y))| dx dy &= \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{n=2}^{\nu} \int_{E_n} |\cos(p_n x + q_n y)| dx dy \\ &\geq \frac{1}{\pi \sqrt{m}} \sum_{n=2}^{\nu} |E_n| \geq 2\sqrt{m}. \end{aligned}$$

Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть σ – перестановка натуральных чисел $\{2, 3, \dots, 2^m\}$ из леммы 4. Тогда если γ и p_n удовлетворяют условиям леммы 6, то

$$\left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{2 \leq n \leq \nu} \left| \sum_{j=1}^n a_{\sigma(j)}(x, y) \right| > \frac{\sqrt{m}}{120} \right\} \right| > 1. \quad (2.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система функций

$$u_n(x, y) = \frac{\mathbb{I}_{E_n}(x, y)}{\sqrt{m}} \cos(p_n x + q_n y) = \operatorname{Re}(a_n(x, y)),$$

где $n = 2, 3, \dots, \nu = 2^m$, образует дерево, поскольку по определению (см. (2.7), (2.8)) мы имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(u_n(x, y)) &\subset E_n \subset \{(x, y) \in E_{\bar{n}} : (-1)^{j+1} \cos(p_{\bar{n}} x + q_{\bar{n}} y) > 0\} \\ &= \{(x, y) \in E_{\bar{n}} : (-1)^{j+1} u_{\bar{n}}(x, y) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 : (-1)^{j+1} u_{\bar{n}}(x, y) > 0\}. \end{aligned}$$

Следовательно, по лемме 4

$$\sup_{2 \leq l \leq \nu} \left| \sum_{n=2}^l a_{\sigma(n)}(x, y) \right| \geq \sup_{2 \leq l \leq \nu} \left| \sum_{n=2}^l u_{\sigma(n)}(x, y) \right| \geq \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\nu} |u_n(x, y)|. \quad (2.47)$$

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \sum_{n=2}^{\nu} |u_n(x, y)|. \quad (2.48)$$

Имеем $\|f\|_1 > 2\sqrt{m}$ по лемме 6. С другой стороны, $\|f\|_{\infty} \leq \sqrt{m}$, поскольку

$$0 \leq f(x, y) \leq \sum_{n=2}^{\nu} \frac{\mathbb{I}_{E_n}(x, y)}{\sqrt{m}} \leq \sqrt{m}.$$

Таким образом, по лемме 3

$$\left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : |f(x, y)| > \frac{\sqrt{m}}{4\pi^2} \right\} \right| > \frac{4\pi^2}{8\pi^2(\|f\|_{\infty}/\|f\|_1) - 1} \geq \frac{4\pi^2}{4\pi^2 - 1} > 1.$$

Сопоставляя эту оценку с (2.47), (2.48), мы получаем (2.46).

ЛЕММА 8. Если $\gamma > 1$ и p_n делит p_{n+1} , то

$$\left| \sum_{k=2}^{\nu} a_k(x, y) \right| \leq \gamma, \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x, y) \in \mathbb{T}^2$. Имеем

$$(x, y) \in E_n \setminus (E_{2n-1} \cup E_{2n}) \quad (2.49)$$

при натуральном $2 \leq n \leq 2^m$. Тогда из определения множеств E_n (см. (2.7), (2.8)) получаем

$$\left| \sum_{k=2}^n a_k(x, y) \right| \leq \gamma,$$

и $a_k(x, y) = 0$ при $k > n$. Отсюда имеем

$$\left| \sum_{k=2}^{\nu} a_k(x, y) \right| = \left| \sum_{k=2}^n a_k(x, y) \right| \leq \gamma,$$

что доказывает лемму 8.

Любая конечная сумма вида

$$T(x, y) = \sum_{(n,m) \in G} c_{nm} e^{i(nx+my)},$$

где $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область, называется *двойным тригонометрическим полиномом*. Спектр данного полинома определяется следующим образом:

$$\text{спек}(T) = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 : c_{nm} \neq 0\}.$$

Рассмотрим секторы

$$\begin{aligned} V(\alpha, \beta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \\ r \geq 0, \alpha \leq \theta < \beta\}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$. Доказательство следующей основной леммы использует технику из [10].

ЛЕММА 9. Если S_n , $n = 2, 3, \dots, \nu = 2^m$, $m \geq 10$, – произвольная последовательность секторов вида (2.50), то существует последовательность полиномов $T_n(x, y)$, $n = 2, 3, \dots, \nu$, такая, что

$$\text{спек } T_n \subset S_n, \quad n = 2, 3, \dots, \nu, \quad (2.51)$$

$$\left\| \sum_{n=1}^{\nu} T_n \right\|_{\infty} \leq c_1, \quad (2.52)$$

$$\left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{2 \leq n \leq \nu} \left| \sum_{j=1}^n T_j(x, y) \right| > c_2 \sqrt{m} \right\} \right| > 1, \quad (2.53)$$

где $c_1, c_2 > 0$ – некоторые абсолютные константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ – перестановка чисел $\{2, 3, \dots, \nu = 2^m\}$ из леммы 4, и пусть

$$\gamma = c + 2,$$

где c – константа из (2.13). Рассмотрим натуральные числа p_n, q_n и двойные тригонометрические полиномы $f_n(x, y)$, удовлетворяющие соотношениям

$$2p_{\bar{n}}|p_n|, \quad (2.54)$$

$$|p_n| > 20m(|p_{\bar{n}}| + |q_{\bar{n}}|), \quad (2.55)$$

$$\text{spec}(f_n(x, y)e^{i(p_n x + q_n y)}) \subset S_{\sigma^{-1}(n)}, \quad 2 \leq n \leq \nu, \quad (2.56)$$

$$0 \leq f_n(x, y) \leq \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2, \quad (2.57)$$

$$\left| f_n(x, y) - \frac{\mathbb{I}_{E_n}(x, y)}{\sqrt{m}} \right| < \frac{1}{\nu}, \quad (x, y) \in E_n \cup (E_{\bar{n}})^c, \quad 2 \leq n \leq \nu, \quad (2.58)$$

где множества $E_n \subset \mathbb{T}^2$, $n = 2, 3, \dots, \nu$, определены выше с использованием (2.7) и (2.8).

Будем рассуждать по индукции. На первом шаге, предположив, что

$$E_2 = \mathbb{T}^2, \quad f_2(x, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{m}},$$

зафиксируем натуральные числа p_2 и q_2 такие, что $(p_2, q_2) \in S_{\sigma^{-1}(2)}$. Понятно, что соотношения (2.54)–(2.58) выполнены при $n = 2$. Теперь предположим, что (2.54)–(2.58) выполнены при всех $n < l$, в частности для $\bar{l}$. Поскольку $\bar{E}_l \subset E_{\bar{l}}$ и $E_{\bar{l}}$ – открытое множество, то мы можем найти полином $f_l(x, y)$, удовлетворяющий (2.57) и (2.58) (при $n = l$). Так как

$$\text{spec}(f_n(x, y)e^{i(p_n x + q_n y)}) = \text{spec}(f_n) + (p_n, q_n),$$

то мы можем найти натуральные числа p_n и q_n , удовлетворяющие (2.54)–(2.56) (при $n = l$). Тем самым шаг индукции обоснован.

Теперь мы определим требуемые полиномы следующим образом:

$$T_n(x, y) = f_{\sigma(n)}(x, y)e^{i(p_{\sigma(n)}x + q_{\sigma(n)}y)}, \quad 2 \leq n \leq \nu.$$

Вместе с $T_n(x, y)$ мы также рассмотрим систему функций $a_n(x, y)$, определенную в (2.6). Из (2.56) получаем

$$\text{spec}(T_n) = \text{spec}(f_{\sigma(n)}(x, y)e^{i(p_{\sigma(n)}x + q_{\sigma(n)}y)}) \subset S_n,$$

что дает (2.51). Если $(x, y) \in \mathbb{T}^2$, то

$$(x, y) \in E_n \setminus (E_{2n-1} \cup E_{2n})$$

при некотором натуральном числе $2 \leq n \leq 2^m$. Отсюда вытекает, что $(x, y) \in E_j \cup (E_{\bar{j}})^c$ при $2 \leq j \leq \nu$ и $j \neq 2n, 2n - 1$. Таким образом,

$$\left| f_j(x, y) - \frac{\mathbb{I}_{E_j}(x, y)}{\sqrt{m}} \right| < \frac{1}{\nu}, \quad 2 \leq j \leq \nu, \quad j \neq 2n, 2n - 1,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\nu} |T_j(x, y) - a_{\sigma(n)}(x, y)| &= \sum_{j=1}^{\nu} \left| f_j(x, y) - \frac{\mathbb{I}_{E_j}(x, y)}{\sqrt{m}} \right| \\ &\leq \sum_{j \neq 2n, 2n-1} \left| f_j(x, y) - \frac{\mathbb{I}_{E_j}(x, y)}{\sqrt{m}} \right| + 1 \leq 2. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Отсюда с использованием леммы 8 получаем

$$\left| \sum_{n=1}^{\nu} T_n(x, y) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{\nu} a_n(x, y) \right| + 2 \leq \gamma + 2 = c + 4,$$

что в свою очередь дает (2.52). Из (2.59) также вытекает, что

$$\begin{aligned} \max_{2 \leq l \leq \nu} \left| \sum_{j=2}^l T_j(x, y) \right| &\geq \max_{2 \leq l \leq \nu} \left| \sum_{j=2}^l a_{\sigma(j)}(x, y) \right| - \sum_{j=2}^{\nu} |T_j(x, y) - a_{\sigma(j)}(x, y)| \\ &\geq \max_{2 \leq l \leq \nu} \left| \sum_{j=2}^l a_{\sigma(j)}(x, y) \right| - 2. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Сопоставляя (2.60) с леммой 7, мы получаем

$$\begin{aligned} &\left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{2 \leq l \leq \nu} \left| \sum_{j=2}^l T_n(x, y) \right| > \frac{\sqrt{m}}{240} \right\} \right| \\ &> \left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{2 \leq l \leq \nu} \left| \sum_{j=2}^l a_{\sigma(n)}(x, y) \right| > \frac{\sqrt{m}}{120} \right\} \right| > 1. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает (2.53).

Лемма 10 доказана.

ЛЕММА 10. Для любых $\delta > 0$ и $m, s \in \mathbb{N}$ существуют последовательности областей Δ_n вида (1.4) и полиномов Q_n , $n = 2, 3, \dots, \nu = 2^m$, такие, что

$$\rho(\Delta_n) < 1 + \delta, \quad n = 2, 3, \dots, \nu, \quad (2.61)$$

$$\Delta_1 = \Delta(s, s), \quad \Delta_n \subset \Delta_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots, \nu - 1, \quad (2.62)$$

$$\text{спец } Q_n \subset (\Delta_n \setminus \Delta_{n-1}) \cap \mathbb{R}_+^2, \quad n = 2, 3, \dots, \nu, \quad (2.63)$$

$$\left\| \sum_{j=2}^{\nu} Q_j \right\|_{\infty} \leq c_1, \quad (2.64)$$

$$\left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{2 \leq n \leq \nu} \left| \sum_{j=2}^n Q_j(x, y) \right| > c_2 \sqrt{m} \right\} \right| > 1. \quad (2.65)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим секторы

$$V_n = V\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varepsilon}{n}, \pi\right) \subset (-\infty, 0] \times [0, +\infty), \quad n = 2, 3, \dots, \nu,$$

вида (2.50) и определим множества $S_n = V_n \setminus V_{n-1}$. Применяя лемму 9, мы находим полиномы $T_n(x, y)$ со свойствами (2.51)–(2.53). Далее, имеем $\text{спес}(T_n) \subset [-l, 0] \times [0, l]$, $n = 2, 3, \dots, \nu$, при некотором $l > s$. Обозначим

$$Q_n(x, y) = T_n(x, y)e^{ilx},$$

$$\Theta_n = ((l, 0) + V_n) \cap \mathbb{R}_+^2, \quad n = 2, 3, \dots, \nu.$$

Отметим, что Θ_n – это треугольники вида (1.5), а области

$$\Delta_n = \Theta_n \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-x, y) \in \Theta_n\}$$

$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-x, -y) \in \Theta_n\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, -y) \in \Theta_n\}$$

имеют вид (1.4). Ясно, что (2.61) выполнено при достаточно малом ε . Отсюда сразу получаем (2.62) и (2.63). Соотношение (2.64) вытекает из (2.52), а (2.65) – из (2.53), поскольку

$$\left| \sum_{j=2}^n Q_j(x, y) \right| = \left| \sum_{j=2}^n T_j(x, y) \right|.$$

Лемма доказана.

Следующий результат является вариантом леммы 10, где вместо треугольников рассматриваются круги. Лемма 11 будет использована при доказательстве теоремы 2.

ЛЕММА 11. *Для любых $\delta > 0$ и $m, r \in \mathbb{N}$ существуют последовательности кругов U_n и полиномов Q_n , $n = 2, 3, \dots, \nu = 2^m$, такие, что*

$$\tau(U_n) < \delta, \quad n = 2, 3, \dots, \nu, \quad (2.66)$$

$$B(0, 0, r) \subset U_n, \quad n = 2, 3, \dots, \nu, \quad (2.67)$$

$$\text{спес } Q_n \subset \left(U_n \setminus \bigcup_{k=2}^{n-1} U_k \right), \quad n = 2, 3, \dots, \nu, \quad (2.68)$$

$$\left\| \sum_{j=2}^{\nu} Q_j \right\|_{\infty} \leq c_1, \quad (2.69)$$

$$\left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{2 \leq n \leq \nu} \left| \sum_{j=2}^n Q_j(x, y) \right| > c_2 \sqrt{m} \right\} \right| > 1. \quad (2.70)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим секторы

$$V_n = V(\theta_{2n+1}, \theta_{2n}), \quad n = 2, 3, \dots, \nu,$$

где

$$\theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{k}.$$

Применяя лемму 9, мы находим полиномы $T_n(x, y)$ со свойствами (2.51)–(2.53). Обозначим

$$Q_n(x, y) = T_n(x, y)e^{iRx},$$

$$\Theta_n = (R, 0) + V_n, \quad n = 2, 3, \dots, \nu,$$

где число R будет определено позже. Имеем

$$\text{spec}(Q_n) \subset \Theta_n.$$

Рассмотрим последовательность кругов

$$B_n = B\left(0, -R \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{n}, \frac{R}{\cos(\varepsilon/n)}\right)$$

и прямых L_n , заданных следующим образом:

$$x = R + t \cos(\theta_n), \quad y = t \sin(\theta_n).$$

Отметим, что граница сектора Θ_n состоит из прямых L_{2n} и L_{2n-1} . Помимо этого прямая L_n является касательной к кругу B_n в точке $(R, 0)$. Простой подсчет показывает, что

$$\tau(B_n) = \sin \frac{\varepsilon}{n} < \sin \varepsilon. \quad (2.71)$$

Как следствие получаем, что при достаточно большом R прямые L_n хорошо приближаются граничными окружностями кругов B_n , откуда получаем

$$\text{spec}(Q_n) \subset B_k, \quad k > 2n, \quad (2.72)$$

$$\text{spec}(Q_n) \cap B_k = \emptyset, \quad k \leq 2n. \quad (2.73)$$

Обозначим $U_n = B_{2n}$. Из (2.71) следует, что при достаточно малом ε выполнено (2.66). Далее, выбирая R достаточно большим, мы получаем (2.67). Легко проверить, что соотношение (2.68) вытекает из (2.72) и (2.73). Тогда из (2.52) получаем (2.69), а из (2.53) следует (2.70), поскольку

$$\left| \sum_{j=2}^n Q_j(x, y) \right| = \left| \sum_{j=2}^n T_j(x, y) \right|.$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательства теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Зафиксируем натуральные числа μ_k , $k = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\mu_{k+1} - \mu_k = 2^{k^6} - 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Применяя соответствующее число раз лемму 10, определим полиномы $Q_n(x, y)$ и области Δ_n , $n = 1, 2, \dots$, вида (1.4) со следующими свойствами:

$$\rho(\Delta_n) < 1 + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

$$\Delta_{n-1} \subset \Delta_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

$$\text{spec } Q_n \subset (\Delta_n \setminus \Delta_{n-1}) \cap \mathbb{R}_+^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

$$\left\| \sum_{j=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} Q_j \right\|_{\infty} < c_1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

$$\left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{\mu_k < n \leq \mu_{k+1}} \left| \sum_{j=\mu_k+1}^n Q_j(x, y) \right| > c_2 k^3 \right\} \right| > 1. \quad (3.6)$$

Ясно, что мы можем определить $g_n(x, y)$ равным одному из следующих вещественных полиномов:

$$\operatorname{Re}(Q_n(x, y)), \quad \operatorname{Im}(Q_n(x, y)).$$

Тогда

$$\left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{\mu_k < n \leq \mu_{k+1}} \left| \sum_{j=\mu_k+1}^n g_j(x, y) \right| > \frac{c_2 k^3}{2} \right\} \right| > \frac{1}{2}. \quad (3.7)$$

Каждый полином $g_n(x, y)$ можно считать комплексным, откуда в силу (3.4) получаем

$$\operatorname{спес} g_n \subset \Delta_n \setminus \Delta_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим действительную функцию

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{j=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} g_j(n_k x, n_k y), \quad (3.8)$$

где $n_k \nearrow \infty$ — последовательность натуральных чисел, которую мы определим ниже. Ряд (3.8) сходится равномерно, поэтому f непрерывна. Обозначим

$$E_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{\mu_k < n \leq \mu_{k+1}} \left| \sum_{j=\mu_k+1}^n g_j(x, y) \right| > \frac{c_2 k^3}{2} \right\},$$

$$\tilde{\Delta}_j = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{u}{n_k}, \frac{v}{n_k} \right) \in \Delta_j \right\}, \quad \mu_k < j \leq \mu_{k+1}.$$

Ясно, что каждое $\tilde{\Delta}_j$ является областью вида (1.4), откуда в силу (3.2)–(3.4), (3.7) получаем соответственно

$$\rho(\tilde{\Delta}_n) < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

$$\tilde{\Delta}_{n-1} \subset \tilde{\Delta}_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.10)$$

$$\operatorname{спес} (g_n(n_k x, n_k y)) \subset \tilde{\Delta}_n \setminus \tilde{\Delta}_{n-1}, \quad \mu_k < n \leq \mu_{k+1}, \quad (3.11)$$

$$|E_k| > \frac{1}{2}. \quad (3.12)$$

Воспользовавшись леммой 2, мы можем найти натуральные числа n_k такие, что

$$\left| \bigcap_{l \geq 1} \bigcup_{k \geq l} E_k(n_k) \right| = 4\pi^2. \quad (3.13)$$

Ясно, что если $(x, y) \in E_k(n_k)$, то

$$\max_{\mu_k < n \leq \mu_{k+1}} \left| \sum_{j=\mu_k+1}^n g_j(n_k x, n_k y) \right| > \frac{c_2 k^3}{2}. \quad (3.14)$$

Далее, из (3.10) и (3.11) находим

$$|S_{\tilde{\Delta}_n}(x, y, f) - S_{\tilde{\Delta}_{\mu_k}}(x, y, f)| = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{j=\mu_k+1}^n g_j(n_k x, n_k y) \right|$$

при всех $\mu_k < n \leq \mu_{k+1}$. Сопоставляя это с (3.14), получаем

$$\max_{\mu_k < n \leq \mu_{k+1}} |S_{\tilde{\Delta}_n}(x, y, f) - S_{\tilde{\Delta}_{\mu_k}}(x, y, f)| > \frac{c_2 k}{2}, \quad (x, y) \in E_k(n_k),$$

откуда в силу (3.13) получаем, что суммы $S_{\tilde{\Delta}_n}(x, y, f)$ расходятся почти всюду. Теорема 1 доказана.

Мы не будем доказывать теорему 2 детально, так как ее доказательство протекает по той же схеме, как и для теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Зафиксируем натуральные числа μ_k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условию (3.1). Применяя лемму 10, находим полиномы $Q_n(x, y)$ и круги B_n , $n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\begin{aligned} \tau(U_n) &< \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, \dots, \nu, \\ \text{спес } Q_n &\subset \left(U_n \setminus \bigcup_{k=2}^{n-1} U_k \right), \quad n = 1, 2, \dots, \\ \left\| \sum_{j=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} Q_j \right\|_{\infty} &< c_1, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{\mu_k < n \leq \mu_{k+1}} \left| \sum_{j=\mu_k+1}^n Q_j(x, y) \right| > c_2 k^3 \right\} \right| &> 1. \end{aligned}$$

Тогда функция

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{j=\mu_k+1}^{\mu_{k+1}} Q_j(n_k x, n_k y),$$

где n_k – соответствующим образом определенные натуральные числа, удовлетворяют искомому соотношению (1.7). Оставшаяся часть доказательства в точности следует рассуждениям из доказательства теоремы 1. Оставляем детальную проверку нашему терпеливому читателю.

Список литературы

- [1] L. Carleson, “On convergence and growth of partial sums of Fourier series”, *Acta Math.*, **116** (1966), 135–157.
- [2] R. A. Hunt, “On the convergence of Fourier series”, *Orthogonal expansions and their continuous analogues* (Edwardsville, Ill., 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill., 1968, 235–255.
- [3] P. Sjölin, “Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series”, *Ark. Mat.*, **9** (1971), 65–90.
- [4] N. Yu. Antonov, “Convergence of Fourier series”, *East J. Approx.*, **2:2** (1996), 187–196.
- [5] C. Fefferman, “On the convergence of multiple Fourier series”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77:5** (1971), 744–745.
- [6] Н. Р. Тевзадзе, “О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом”, *Сообщ. АН Груз. ССР*, **58:2** (1970), 277–279.

- [7] C. Fefferman, “On the divergence of multiple Fourier series”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77**:2 (1971), 191–195.
- [8] Г. А. Карагулян, К. Р. Мурадян, “О сходящихся треугольных суммах двойных рядов Фурье”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **50**:4 (2015), 51–67; англ. пер.: G. A. Karagulyan, K. R. Muradyan, “Divergent triangular sums of double Fourier series”, *J. Contemp. Math. Anal.*, **50**:4 (2015), 196–207.
- [9] G. A. Karagulyan, K. R. Muradyan, “On the divergence of Walsh and Haar series by sectorial and triangular regions”, *Proc. Yerevan State Univ. Phys. Math. Sci.*, **234**:2 (2014), 3–12.
- [10] G. A. Karagulyan, “On unboundedness of maximal operators for directional Hilbert transforms”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:10 (2007), 3133–3141.
- [11] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965, 615 с.; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1959, xii+383 pp.
- [12] Е. М. Никишин, П. Л. Ульянов, “Об абсолютной и безусловной сходимости”, *УМН*, **22**:3(135) (1967), 240–242.
- [13] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984, 496 с.; англ. пер.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, xii+451 pp.
- [14] Ж. Невё, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969, 309 с.; пер. с фр.: J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1964, xiii+203 pp.

Григорий Арташесович Карагулян
(Grigori A. Karagulyan)

Institute of Mathematics,
National Academy of Sciences of Armenia,
Yerevan, Armenia
E-mail: g.karagulyan@yahoo.com

Поступила в редакцию
22.02.2015 и 16.07.2015