Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кашин, О методе Лунина нахождения больших подматриц с малой нормой, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 7, 95–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8495>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:41:04

УДК 517.983

Б. С. Кашин

О методе Лунина нахождения больших подматриц с малой нормой

С использованием подхода, предложенного А. А. Луниным в 1989 г., даются оценки сверху норм больших подматриц данной $(N \times n)$ -матрицы, задающей оператор единичной нормы из пространства l_2^n в l_1^N .

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: подматрица, операторная норма, лемма Лунина, задача Кадисона–Зингера.

DOI: 10.4213/sm8495

Работа посвящена оценкам норм подматриц данной $(N \times n)$ -матрицы

$$A = \{a_{ij}\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Ниже мы используем следующие обозначения:

$(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$;

$\langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$;

$\{e_i\}_{i=1}^n$ – канонический базис в $\mathbb{R}^n$;

$[x]$ – целая часть числа $x \in \mathbb{R}$;

$\#B$ или $|B|$ – число элементов в конечном множестве B ;

l_p^n , $1 \leq p \leq \infty$, – линейное пространство над $\mathbb{R}$ векторов $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ с нормой

$$\|x\|_p = \|x\|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, & p = \infty; \end{cases}$$

B_p^n – единичный шар в l_p^n ;

S^{n-1} – единичная сфера в l_2^n .

Рассматривая матрицу (1) как оператор из l_p^n в l_q^N , положим

$$\|A\|_{(p,q)} = \sup_{x \in B_p^n} \|Ax\|_{l_q^N}.$$

В случае, когда $p = q = 2$, полагаем для краткости $\|A\|_{(2,2)} \equiv \|A\|$. Для $\Omega \subset \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$, $k \leq |\Omega|$, E_Ω^k – семейство всех k -элементных подмножеств Ω . Пусть также $E_{\langle N \rangle}^k \equiv E_N^k$. Если $\omega = \{i_\nu\}_{\nu=1}^k \in E_N^k$, то $A(\omega)$ – $(k \times n)$ -подматрица матрицы A вида

$$A(\omega) = \{a_{i_\nu, j}, \nu = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n\}. \quad (2)$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Вопрос о нахождении для данной матрицы A с $\|A\| = 1$ достаточно большой подматрицы с малой нормой естественно возникает в разных задачах анализа, теоретической информатики и их приложений. В 1980 г. автором была установлена

ТЕОРЕМА А (см. [1], [2]). *Для данного $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $C(\varepsilon)$ такая, что при $C(\varepsilon) \cdot n \leq N$ каждая $(N \times n)$ -матрица A с $\|A\| = 1$ содержит $(n \times n)$ -подматрицу $A(\omega)$ вида (2), для которой*

$$\|A(\omega)\| \leq \varepsilon.$$

В доказательстве теоремы А в [2] использован переход к оценкам $(2, 1)$ -норм случайных подматриц матрицы A и теорема факторизации Гротендика для операторов из l_2^n в l_1^k . Указанная теорема Гротендика позволяет получить оценки $(2, 2)$ -нормы подматриц, если известна $(2, 1)$ -норма матрицы. Вопрос о точной оценке постоянной $C(\varepsilon)$ в [1], [2] решен не был. Отметим при этом, что из утверждения теоремы А при $\varepsilon = 1/2$ сразу следует оценка сверху для $C(\varepsilon)$ вида $C(\varepsilon) \leq B \cdot (1/\varepsilon)^d$, где B, d – абсолютные постоянные.

Неулучшаемая по порядку оценка

$$C(\varepsilon) \leq B \cdot \varepsilon^{-2}, \quad B - \text{абсолютная постоянная}, \quad (3)$$

была установлена А. А. Луниным в замечательной работе [3], написанной, когда ее автору еще не исполнилось 19 лет. Неравенство (3) было получено как следствие такого результата.

ТЕОРЕМА В (см. [3]). *Существует такая абсолютная постоянная B , что для любой $(N \times n)$ -матрицы A , $n \leq N$, найдется набор $\omega \in E_N^n$, для которого*

$$\|A(\omega)\|_{(2,1)} \leq B \frac{n}{N} \|A\|_{(2,1)}.$$

В основе доказательства теоремы В лежала

ЛЕММА (см. [3]). *Существует такая абсолютная постоянная $c_0 > 0$, что для любой $(N \times n)$ -матрицы A и любого натурального $\mu > c_0 n$ выполнение соотношения*

$$2\mu + 4(\mu^3 n)^{1/4} \leq N$$

влечет существование набора $\Omega \subset E_N^\mu$, для которого

$$\|A(\Omega)\|_{(2,1)} \leq \frac{1}{2} \left(1 + 9 \left(\frac{n}{\mu} \right)^{1/8} \right) \cdot \|A\|_{(2,1)}. \quad (4)$$

Лемма Лунина обеспечивает для любого $\delta > 0$ при $N/n \geq C_1(\delta)$ существование в каждой $(N \times n)$ -матрице A с $\|A\|_{(2,1)} = 1$ $(\mu \times n)$ -подматрицы с $\mu > N(1/2 - \delta)$ и $(2, 1)$ -нормой $\leq (1/2 + \delta)$. Искомый набор ω в теореме В находился многократным применением леммы и итерированием оценки (4).

Работа Лунина [3] была опубликована в период между двумя публикациями Бургейна и Цафрири [4], [5], посвященными близким вопросам. В [4] был получен следующий, широко известный в настоящее время результат, получивший название теоремы об ограниченной обратимости.

ТЕОРЕМА С. Для некоторых абсолютных положительных постоянных c_3 и c_4 и каждого линейного оператора $A: l_2^n \rightarrow l_2^n$ с $\|A(e_i)\|_2 = 1$, $i = 1, \dots, n$, найдется набор $\omega \in E_n^k$, $k \geq c_3 n / \|A\|^2$, такой, что для любых чисел $\{a_i\}_{i \in \omega}$ имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{i \in \omega} a_i A(e_i) \right\|_2 \geq c_4 \left(\sum_{i \in \omega} a_i^2 \right)^{1/2}.$$

При доказательстве теоремы С в [4] также использовался переход к оценкам $(2, 1)$ -нормы. В [5] для оценок $(2, 1)$ -нормы подматриц были дополнительно привлечены нетривиальные идеи из теории вероятностей, что позволило, в частности, дать другое доказательство оценки (3). Кроме того, в [5] был предложен метод оценок $(2, 2)$ -нормы подматриц, не использующий результаты о $(2, 1)$ -нормах. С помощью этого метода в [5] было дано частичное (при ограничениях на абсолютные величины элементов $(n \times n)$ -матрицы A) решение известной старой задачи Кадисона–Зингера (см. [6]).

Важные результаты в рассматриваемой тематике были получены Рудельсоном и Вершининым (см. [7], [8]).

Новый эффективный метод получения как верхних, так и нижних оценок норм подматриц был предложен Батсоном, Спилманом и Сриваставой (см. [9]). В [9] установлена

ТЕОРЕМА D. Пусть A – матрица вида (1), $u_i = \{a_{ij}\}_{j=1}^n$, $i = 1, \dots, N$, $z_j = \{a_{ij}\}_{i=1}^N$, $j = 1, \dots, n$, – ее строки и столбцы соответственно, причем $\{z_j\}_{j=1}^n$ – ортонормированная система в $\mathbb{R}^N$. Для каждого $\delta > 0$ найдутся набор $\omega \in E_N^s$, $s \leq (1 + \delta)n$, и положительные числа $\{\lambda_i\}_{i \in \omega}$ такие, что для любого $v \in \mathbb{R}^n$

$$b(\delta) \|v\|_2^2 \leq \sum_{i \in \omega} \lambda_i |(v, u_i)|^2 \leq B(\delta) \|v\|_2^2, \quad (5)$$

где $b(\delta)$, $B(\delta)$ – положительные постоянные, зависящие лишь от δ .

Для ортонормированных по столбцам матриц с равными l_2^n нормами строк из теоремы D непосредственно вытекает, что найдется подматрица $A(\omega)$ вида (2), $|\omega| = k \leq (1 + \delta)n$, такая, что для любого $v \in \mathbb{R}^n$

$$\|Av\|_{l_2^k} \geq b(\delta) \left(\frac{n}{N} \right)^{1/2} \|v\|_{l_2^n}.$$

Вопрос о существовании таких подматриц возник в [10]; о приложениях см. [11] и [12]. Задача о существовании в этом случае безвесового аналога соотношений (5) существенно более сложна. Подход к ней открывает работа Маркуса, Спилмана и Сриваставы [13], посвященная решению задачи Кадисона–Зингера. Точнее, в [13] с использованием, в частности, идей из [9] был установлен следующий результат, который, как было показано ранее Вивером (см. [14]), влечет положительное решение задачи Кадисона–Зингера.

ТЕОРЕМА E. Пусть в условиях теоремы D $\|u_i\|_2 \leq \delta$, $i = 1, \dots, N$. Существует разложение

$$\langle N \rangle = \omega_1 \cup \omega_2, \quad \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset, \quad (6)$$

такое, что

$$\|A(\omega_1)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta, \quad \|A(\omega_2)\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta.$$

Отличие теоремы Е от предыдущих результатов в том, что она позволяет при естественных ограничениях на матрицу A разбивать ее на две подматрицы существенно меньшей нормы. Так как $\max(|\omega_1|, |\omega_2|) \geq N/2$ (см. (6)), то теорема Е при малых δ дает близкую к окончательной оценку сверху нормы большой подматрицы матрицы A . Эта оценка в определенном смысле аналогична лемме Лунина. Естественно в этой связи попытаться применить метод работы [3] к получению аналогов теоремы Е. В этом направлении установлена

ТЕОРЕМА 1. Для каждой пары чисел (δ, δ') с $0 < \delta < 1/6$, $0 < \delta' < 1 - 6\delta$ найдется постоянная $C(\delta, \delta')$ такая, что для любой $(N \times n)$ -матрицы A с $\varkappa(A) \equiv N/n > C(\delta, \delta')$ найдется разложение $\langle N \rangle$ на непересекающиеся части

$$\langle N \rangle = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \Delta$$

такое, что

$$\begin{aligned} \|A(\omega_1)\|_{(2,1)} &\leq \left(\frac{1}{2} + \varkappa^{-\delta}\right) \|A\|_{(2,1)}, & \|A(\omega_2)\|_{(2,1)} &\leq \left(\frac{1}{2} + \varkappa^{-\delta}\right) \|A\|_{(2,1)}, \\ |\Delta| &\leq N\varkappa^{-\delta'}, & |\omega_1| = |\omega_2| &= \frac{N - |\Delta|}{2}. \end{aligned}$$

По мнению автора, возможности метода работы [3] не исчерпаны, и вызывает сожаление отсутствие информации об этой работе в обзорных статьях по рассматриваемой тематике.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть матрица A фиксирована и $u_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, N$, – ее строки. Пусть также $v(A)$ – одна из линейных комбинаций с коэффициентами ± 1 векторов u_i , норма $\|\cdot\|_2$ которой максимальна. Отметим, что

$$\|v(A)\|_{l_2^n} = \|A\|_{(2,1)}. \quad (7)$$

Для $\omega \subset \langle N \rangle$ положим

$$v(\omega) = v(A(\omega)).$$

Фиксируем пару чисел (c, d) с $0 < c < d/2 < 1/2$ так, что

$$d - 2c > \delta', \quad \min\{c, 1 - d\} > 2\delta. \quad (8)$$

Для этого достаточно положить $c = 1 - d = 2\delta + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда $0 < c < 1/3 < d/2$, $d < 1 - 2\delta < 1$ и $d - 2c = 1 - 3c > \delta'$.

Ниже, не ограничивая общности, считаем, что $\varkappa(A) \equiv \varkappa = N/n$ достаточно велико и $\|A\|_{(2,1)} = 1$. Пусть

$$\alpha = \varkappa^{-c}, \quad l = [N\varkappa^{-d}],$$

где c, d выбраны выше (см. (8)).

Рассмотрим подмножества $\omega \subset \langle N \rangle$ такие, что $|\omega| = l$ и $\|A(\omega)\|_{(2,1)} \geq \alpha$. Среди всех возможных семейств таких непересекающихся подмножеств найдем наибольшее по числу элементов семейство U , $\#U = q$. Тогда для

$$\tilde{\Delta} = \bigcup_{\omega \in U} \omega \quad (9)$$

имеем

$$|\tilde{\Delta}| = ql, \quad (10)$$

$$q^{1/2}\alpha \leq \|A\|_{(2,1)} = 1. \quad (11)$$

Чтобы обосновать левое неравенство в (11), отметим (см. также (7)), что

$$1 \geq \|A(\tilde{\Delta})\|_{(2,1)} \geq \text{Aver}_{\varepsilon_\omega = \pm 1} \left\| \sum_{\omega \in U} \varepsilon_\omega v(\omega) \right\|_2 = \left(\sum_{\omega \in U} \|v(\omega)\|_2^2 \right)^{1/2} \geq \alpha q^{1/2}.$$

Через $\text{Aver}_{\varepsilon(\omega)} f$ мы обозначаем среднее значение по знакам $\varepsilon(\omega) = \pm 1$ функции f , зависящей от выбора знаков.

Из (11) вытекает, что $q \leq \alpha^{-2}$ и

$$\#\tilde{\Delta} + 1 = ql + 1 \leq \alpha^{-2}l + 1 = \varkappa^{-2c}[N\varkappa^{-d}] + 1 \leq N\varkappa^{-(d-2c)} + 1 \leq N\varkappa^{-\delta'}. \quad (12)$$

Если $N - \#\tilde{\Delta}$ четно, то полагаем $\Delta = \tilde{\Delta}$, иначе полагаем $\Delta = \tilde{\Delta} \cup g$, где g – любое число из $\langle N \rangle \setminus \tilde{\Delta}$. В обоих случаях из (12) вытекает, что

$$|\Delta| \leq N\varkappa^{-\delta'}. \quad (13)$$

Пусть $\Omega = \langle N \rangle \setminus \Delta$ и $|\Omega| = 2\mu$. Рассмотрим семейство E_Ω^μ всех μ элементарных подмножеств Ω . Для $\omega \in E_\Omega^\mu$ положим $\bar{\omega} = \Omega \setminus \omega$. Пусть также

$$\beta = \min_{\omega \in E_\Omega^\mu} \max \{ \|A(\omega)\|_{(2,1)}, \|A(\bar{\omega})\|_{(2,1)} \}. \quad (14)$$

Наша цель – оценить β сверху.

Положим $\rho = \varkappa^{-1}$ и, пользуясь стандартной оценкой мощности ε -сетей на евклидовой сфере, выберем на сфере S^{n-1} 0.9ρ -сеть (по норме l_2^n) Λ с числом элементов $\leq (3/\rho)^n$. Тогда, учитывая, что ρ достаточно мало, мы получаем, что для любого $z \in S^{n-1}$ найдется $y \in \Lambda$ такой, что угол между векторами z и y меньше ρ :

$$\angle\{z, y\} < \rho.$$

Следовательно, для некоторой пары (y_1, y_2) , $y_1 \in \Lambda$, $y_2 \in \Lambda$,

$$\#\{\omega \in E_\Omega^\mu : \angle\{v(\omega), y_1\} < \rho, \angle\{v(\bar{\omega}), y_2\} < \rho\} \geq \left(\frac{\rho}{3}\right)^{2n} C_{2\mu}^\mu. \quad (15)$$

Пусть Ψ – семейство подмножеств ω , для которых выполнено

$$\begin{aligned} \angle\{v(\omega), y_1\} < \rho, \quad \angle\{v(\bar{\omega}), y_2\} < \rho, \\ \Psi_1 = \{\omega \in \Psi : \|A(\omega)\|_{(2,1)} \geq \beta\}, \quad \Psi_2 = \{\bar{\omega} : \omega \in \Psi, \|A(\bar{\omega})\|_{(2,1)} \geq \beta\}. \end{aligned}$$

Из определения числа β (см. (14)) следует, что выполняется по крайней мере одно из неравенств:

- 1) $\#\Psi_1 \geq \frac{1}{2}\#\Psi$;
- 2) $\#\Psi_2 \geq \frac{1}{2}\#\Psi$.

Полагая при выполнении 1) $y_0 = y_1$, $\Psi_0 = \Psi_1$, а в противном случае $y_0 = y_2$, $\Psi_0 = \Psi_2$, мы с учетом (15) можем утверждать, что

$$\#\Psi_0 \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\rho}{3}\right)^{2n} C_{2\mu}^\mu, \quad \angle\{v(\omega), y_0\} < \rho, \quad (15')$$

если $\omega \in \Psi_0$.

Пусть σ – такое взаимно однозначное отображение отрезка натурального ряда $\langle 2\mu \rangle$ на Ω , что последовательность абсолютных величин скалярных произведений $g_\nu = |(u_{\sigma(\nu)}, y_0)|$, $\nu = 1, 2, \dots, 2\mu$, не возрастает. Тогда:

- а) если $\omega \in \Psi_0$, $\omega = (i_1, \dots, i_\mu)$, то

$$\sum_{i \in \omega} g_{\sigma^{-1}(i)} > \beta \cos \rho; \quad (16)$$

- б) выполнено

$$0 \leq g_1 + \dots + g_l \leq \|A(Q)\| \leq \alpha, \quad (17)$$

где $Q = \sigma(\langle l \rangle)$.

Правое неравенство в (17) вытекает из свойства максимальности семейства U (см. (9)), а левое очевидно.

Пусть $s = [2\mu/l]$. Разобьем множество Ω на части $\Phi_1, \dots, \Phi_{s+1}$ так, что

$$\Phi_1 = Q, \quad |\Phi_j| = l, \quad j = 1, \dots, s,$$

для (возможно, пустого) множества Φ_{s+1} имеет место оценка $|\Phi_{s+1}| < l$ и если $k \in \Phi_j$, $k' \in \Phi_{j'}$, $j < j'$, то

$$g_{\sigma^{-1}(k)} \geq g_{\sigma^{-1}(k')}.$$

Покажем, что найдется набор $\omega_0 \in \Psi_0$ такой, что

$$|\omega_0 \cap \Phi_\nu| \leq \frac{1+\varepsilon}{2} |\Phi_\nu|, \quad \nu = 1, \dots, s, \quad \varepsilon = \varkappa^{-\delta}. \quad (18)$$

Оценим для данного ν , $1 \leq \nu \leq s$, количество P_ν наборов $\omega \in E_\Omega^\mu$, для которых имеет место неравенство

$$|\omega \cap \Phi_\nu| > \frac{1+\varepsilon}{2} |\Phi_\nu|. \quad (19)$$

При этом мы можем считать, что

$$\Omega = \langle 2\mu \rangle, \quad \Phi_\nu = \langle |\Phi_\nu| \rangle.$$

В этом случае набору ω можно взаимно однозначно сопоставить вектор $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{2\mu}$ с $\varepsilon_j = +1$, если $j \in \omega$, и $\varepsilon_j = -1$, если $j \notin \omega$. Тогда

$$P_\nu \leq \#\left\{ \{\varepsilon_j\}_{j=1}^{2\mu}, \varepsilon_j = \pm 1 : \left| \sum_1^{|\Phi_\nu|} \varepsilon_j \right| \geq \varepsilon |\Phi_\nu| \right\}.$$

Последняя величина очевидным образом оценивается через функцию распределения полинома по системе Радемахера $\sum_{j=1}^{|\Phi_\nu|} r_j(t)$ (см. [15]).

В итоге получаем

$$P_\nu \leq 2^{2\mu} \cdot 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2} |\Phi_\nu|\right).$$

Следовательно, количество P наборов $\omega \in E_\Omega^\mu$, для которых неравенство (19) имеет место хотя бы при одном ν , не превосходит

$$2^{2\mu} \frac{4\mu}{l} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 l}{2}\right). \quad (20)$$

Проверим, что $|\Psi_0| > P$. Для этого достаточно показать (см. (15'), (20)), что

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{3}\right)^{2n} C_{2\mu}^\mu > 2^{2\mu} \frac{4\mu}{l} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 l}{2}\right), \quad (21)$$

или, учитывая выбор параметров ρ, ε, l и оценку $C_{2\mu}^\mu \geq (1/(3\sqrt{\mu}))2^{2\mu}$, что

$$\frac{1}{16\kappa^d} \exp\left(\frac{\kappa^{-2\delta} N \kappa^{-d}}{3}\right) \geq 3\sqrt{N} \exp(2n \ln 3\kappa). \quad (22)$$

Вспоминая, что $N = n\kappa$ и $1 - 2\delta - d > 0$, мы легко убеждаемся в справедливости оценки (22).

Тем самым, установлено существование набора $\omega_0 \in \Psi_0$ со свойством (18). Для такого набора $\omega_0 = (i_1, \dots, i_\mu)$, используя свойства отображения σ и соотношения (16)–(18), находим

$$\begin{aligned} \beta \cos \rho &\leq \sum_{i \in \omega_0} g_{\sigma^{-1}(i)} = \sum_{\nu=1}^s \sum_{i \in \Phi_\nu \cap \omega_0} g_{\sigma^{-1}(i)} + \sum_{i \in \Phi_{s+1}} g_{\sigma^{-1}(i)} \\ &\leq \sum_{i \in \Phi_1} g_{\sigma^{-1}(i)} + \sum_{\nu=2}^s \frac{1+\varepsilon}{2} \sum_{i \in \Phi_{\nu-1}} g_{\sigma^{-1}(i)} + \sum_{i \in \Phi_{s+1}} g_{\sigma^{-1}(i)} \\ &\leq \alpha + \frac{1+\varepsilon}{2} \|A\|_{(2,1)} + \frac{\|A\|_{(2,1)}}{s}. \end{aligned}$$

Таким образом (см. определение параметров α, l, s, ρ и ε),

$$\beta \leq \left[\kappa^{-c} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \kappa^{-\delta} \right) + \kappa^{-d} \right] (\cos \kappa^{-1})^{-1}. \quad (23)$$

Учитывая, что в силу (8)

$$\kappa^{-d/2} < \kappa^{-c} < \kappa^{-2\delta},$$

и используя неравенство $(\cos \kappa^{-1})^{-1} < 1 + 1/\kappa^2$ из (23), выводим, что

$$\beta \leq \frac{1}{2} + \kappa^{-\delta}.$$

Тем самым (см. (15)), утверждение теоремы 1 доказано.

Автор выражает благодарность С. В. Конягину и К. С. Рютину за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Б. С. Кашин, “Об одном свойстве билинейных форм”, *Сообщ. АН ГрузССР*, **97**:1 (1980), 29–32.
- [2] Б. С. Кашин, “О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m ”, *Изв. АН АрмССР. Матем.*, **15**:5 (1980), 379–394; англ. пер.: B. S. Kashin, “On some properties of matrices of bounded operators from the space l_2^n into l_2^m ”, *Soviet J. Contemporary Math. Anal.*, **15**:5 (1980), 44–57.
- [3] А. А. Луин, “Об операторных нормах подматриц”, *Матем. заметки*, **45**:3 (1989), 94–100; англ. пер.: A. A. Lunin, “Operator norms of submatrices”, *Math. Notes*, **45**:3 (1989), 248–252.
- [4] J. Bourgain, L. Tzafriri, “Invertibility of ‘large’ submatrices with applications to the geometry of Banach spaces and harmonic analysis”, *Israel J. Math.*, **57**:2 (1987), 137–224.
- [5] J. Bourgain, L. Tzafriri, “On a problem of Kadison and Singer”, *J. Reine Angew. Math.*, **420** (1991), 1–43.
- [6] R. V. Kadison, I. M. Singer, “Extensions of pure states”, *Amer. J. Math.*, **81**:2 (1959), 383–400.
- [7] M. Rudelson, “Almost orthogonal submatrices of an orthogonal matrix”, *Israel J. Math.*, **111**:1 (1999), 143–155.
- [8] R. Vershynin, “John’s decompositions: selecting a large part”, *Israel J. Math.*, **122**:1 (2001), 253–277.
- [9] J. Batson, D. A. Spielman, N. Srivastava, “Twice-Ramanujan sparsifiers”, *SIAM J. Comput.*, **41**:6 (2012), 1704–1721.
- [10] B. Kashin, L. Tzafriri, *Some remarks on the restrictions of operators to coordinate subspaces*, Preprint № 12, Hebrew Univ. of Jerusalem, Jerusalem, 1993/94, 14 pp., www.mi.ras.ru/~kashin/download/preprint93.pdf.
- [11] S. Nitzan, A. Olevskii, A. Ulanovskii, “A few remarks on sampling of signals with small spectrum”, *Ортогональные ряды, теория приближений и смежные вопросы*, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Бориса Сергеевича Кашина, Тр. МИАН, **280**, МАИК, М., 2013, 247–254; англ. пер.: Sh. Nitzan, A. Olevskii, A. Ulanovskii, “A few remarks on sampling of signals with small spectrum”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **280** (2013), 240–247.
- [12] P. Youssef, “Restricted invertibility and the Banach–Mazur distance to the cube”, *Mathematica*, **60**:1 (2014), 201–218.
- [13] A. W. Marcus, D. A. Spielman, N. Srivastava, “Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison–Singer problem”, *Ann. of Math. (2)*, **182**:1 (2015), 327–350; arXiv: 1306.3969.
- [14] N. Weaver, “The Kadison–Singer problem in discrepancy theory”, *Discrete Math.*, **278**:1–3 (2004), 227–239.
- [15] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., АФЦ, М., 1999, x+550 с.; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, xii+451 pp.

Борис Сергеевич Кашин
(Boris S. Kashin)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: kashin@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
24.02.2015