Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Бородин, Приближение наимпростейшими дробями с ограничением на полюсы. II, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 3, 19–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:01:55

УДК 517.538.5

П. А. Бородин

Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы. II

Доказывается, что если не разбивающий комплексную плоскость $\mathbb{C}$ компакт K лежит в объединении $\widehat{E} \setminus E$ ограниченных компонент дополнения к другому компакт E , то наипростейшие дроби (логарифмические производные многочленов) с полюсами из E плотны в пространстве $AC(K)$ функций, непрерывных на компакте K и аналитических в его внутренних точках. Доказывается также, что если не разбивающий плоскость компакт K лежит в дополнении $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ к замыканию двусвязной области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ с ограниченными компонентами связности границы E^+ и E^- , то разности $r_1 - r_2$ наипростейших дробей, у которых полюсы r_1 лежат на E^+ , а полюсы r_2 — на E^- , плотны в пространстве $AC(K)$.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: наипростейшие дроби, равномерное приближение, ограничение на полюсы, нейтральное распределение, конденсатор.

DOI: 10.4213/sm8500

§ 1. Введение

Настоящая работа является продолжением статьи [1]. Речь идет о равномерном приближении наипростейшими дробями, т.е. дробями вида

$$r(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}, \quad a_k \in \mathbb{C},$$

на компактах K комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Понятно, что сколь угодно точно могут приближаться лишь функции, непрерывные на K и аналитические в его внутренних точках, составляющие банахово пространство $AC(K)$ с равномерной нормой.

В [2] показано, что наипростейшие дроби с полюсами из $\mathbb{C} \setminus K$ плотны в пространстве $AC(K)$ (везде ниже мы будем писать “плотны” вместо “образуют всюду плотное множество”) тогда и только тогда, когда компакт K имеет связное дополнение.

В [1] была поставлена задача о нахождении условий на компакт E , не пересекающийся с заданным компактом K со связным дополнением, необходимых или достаточных для того, чтобы наипростейшие дроби с полюсами из E были плотны в пространстве $AC(K)$. В частности, была доказана

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-01-00510, № 14-01-91158, № 15-01-08335) и фонда Дмитрия Зимина “Династия”.

ТЕОРЕМА А. Пусть K и E – непересекающиеся компакты в комплексной плоскости. Если разность $K \setminus \widehat{E}$ содержит бесконечно много точек, то наимпростейшие дроби с полюсами из E не плотны в пространстве $AC(K)$.

Здесь $\widehat{E}$ обозначает объединение компакта E со всеми ограниченными компонентами связности дополнения $\mathbb{C} \setminus E$.

В связи с теоремой А естественно возникла

ЗАДАЧА. Пусть K – компакт со связным дополнением, и не пересекающийся с ним компакт E таков, что $\widehat{E} \supset K$. Верно ли, что наимпростейшие дроби с полюсами из E плотны в $AC(K)$?

Как было отмечено в [1], в случае, когда K лежит в одной компоненте связности множества $\widehat{E} \setminus E$, положительное решение этой задачи вытекает из одного результата Кореваара [3]. Кроме того, в [1] было доказано, что если E содержит такие взаимно внешние замкнутые спрямляемые жордановы контуры $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, что K лежит в объединении $\bigcup_{j=1}^m \text{Int } \Gamma_j$ внутренностей этих контуров, то наимпростейшие дроби с полюсами из E плотны в $AC(K)$.

Цель настоящей работы – дать положительный ответ на вопрос задачи. Доказательство соответствующего основного результата (теорема 1) существенно использует некоторые идеи из уже упоминавшейся работы [3]. Кроме того, доказана теорема 2 о плотности в пространстве $AC(K)$ разностей $r_1 - r_2$ наимпростейших дробей (т.е. логарифмических производных рациональных функций) со специальными ограничениями на расположение полюсов.

§ 2. Основной результат

ТЕОРЕМА 1. Пусть K – компакт со связным дополнением, и не пересекающийся с ним компакт E таков, что $K \subset \widehat{E}$. Тогда наимпростейшие дроби с полюсами из E плотны в пространстве $AC(K)$.

Рассуждения в пп. 4–7 нижеследующего доказательства этой теоремы заимствованы из [3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. 1. Разность $\widehat{E} \setminus E$ разбивается на не более чем счетное число областей G_j , которые образуют открытое покрытие K . Выделим конечное подпокрытие: $K \subset \bigcup_{j=1}^N G_j$. Можно считать, что каждая из областей $G_1, \dots, G_N$ содержит бесконечно много точек компакта K (если это не так, расширим K).

Неограниченная компонента D_∞ дополнения к $\overline{\bigcup_{j=1}^N G_j}$ есть m -связная область, где $m \leq N$. Имеем $\partial D_\infty \subset \bigcup_{j=1}^N \partial G_j \subset E$.

Наша цель – доказать существование таких наимпростейших дробей r_n с полюсами на ∂D_∞ , что $\|r_n\|_{AC(K)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

2. Рассмотрим m -листное голоморфное отображение $\psi : D_\infty \rightarrow \{w : |w| > 1\}$, имеющее в ∞ полюс порядка m (см. [4; гл. 6, § 5]).

Для всякого $\zeta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_\infty$ и всякого w с $|w| > 1$ положим

$$\varphi(w, \zeta) = \sum_{z \in \psi^{-1}(w)} \frac{1}{\zeta - z}, \quad (1)$$

где каждое z участвует в сумме столько раз, какова его кратность как корня уравнения $\psi(z) = w$. При фиксированном $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_\infty$ функция $\varphi(w, \zeta)$ является однозначной ограниченной голоморфной функцией во внешности единичного круга, $\varphi(\infty, \zeta) = 0$. (Если в окрестности точки w функция ψ^{-1} распадается на m однозначных ветвей, то в этой окрестности голоморфно каждое слагаемое в (1), а если w есть (изолированный) образ точки из множества $\{z : \psi'(z) = 0\}$, т.е. уравнение $\psi(z) = w$ имеет кратные корни, то w является устранимой изолированной особенностью для φ .)

3. Покажем, что коэффициенты ряда Лорана

$$\varphi(w, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(\zeta)}{w^k}$$

удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{\infty} k|c_k(\zeta)|^2 < \infty$ для всякого $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}_\infty$.

В некотором кольце $B = \{w : 1 < |w| < \alpha\}$ m -значная функция $\psi^{-1}(w)$ распадается на m однолистных ветвей $g_1(w), \dots, g_m(w)$, каждая из которых отображает это кольцо на внешнюю окрестность соответствующей компоненты связности границы ∂D_∞ . В качестве α можно взять $\min\{|\psi(z)| : z \in D_\infty, \rho(z, \partial D_\infty) \geq \rho/3\}$, где $\rho(z, A)$ – расстояние от точки z до множества A , а ρ – минимальное расстояние между двумя точками из разных компонент связности границы ∂D_∞ : в этом случае ψ^{-1} в каждой точке кольца B имеет m аналитических элементов со значениями в различных попарно не пересекающихся областях из $\psi^{-1}(B)$, и эти элементы не могут быть получены друг из друга продолжением вдоль пути внутри B .

Для коэффициентов рядов Лорана соответствующих дробей

$$\varphi_\nu(w, \zeta) := \frac{1}{\zeta - g_\nu(w)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(\nu)}(\zeta) w^k, \quad 1 < |w| < \alpha,$$

выражение

$$\pi \left| \sum_{k=1}^{\infty} |c_{-k}^{(\nu)}(\zeta)|^2 k t^{-2k} - \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{(\nu)}(\zeta)|^2 k t^{2k} \right| \quad (2)$$

при каждом $t \in (1, \alpha)$ равно площади области $\Omega_t^{(\nu)}(\zeta)$, ограниченной кривой $\varphi_\nu(\{w : |w| = t\}, \zeta)$ (см., например, доказательство теоремы площадей Гро-нуолла в [4; гл. 2, § 4]). Области $\Omega_t^{(\nu)}(\zeta)$ при $t \rightarrow 1+$ сходятся, сжимаясь или расширяясь, к некоторой ограниченной области, лежащей в круге радиуса $1/\rho(\zeta, \partial D_\infty)$, т.е. у выражения (2) есть конечный предел при $t \rightarrow 1+$. Поскольку

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{(\nu)}(\zeta)|^2 k t^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{(\nu)}(\zeta)|^2 k < \infty$$

(по формуле Коши–Адамара $\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k^{(\nu)}(\zeta)|^{1/k} \leq 1/\alpha$), получаем

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{-k}^{(\nu)}(\zeta)|^2 k t^{-2k} = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{-k}^{(\nu)}(\zeta)|^2 k < \infty.$$

В силу равенств

$$c_k(\zeta) = c_{-k}^{(1)}(\zeta) + \dots + c_{-k}^{(m)}(\zeta), \quad k = 1, 2, \dots,$$

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\zeta)|^2 k$ также сходится.

Как видно из этих рассуждений, для достаточно малого $\delta > 0$, при котором замкнутая δ -окрестность $\overline{U_\delta(K)}$ компакта K лежит в $\hat{E} \setminus E$, найдется такое $M > 0$, что для любого $\zeta \in U_\delta(K)$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\zeta)|^2 k < M. \quad (3)$$

4. По теореме Фату (см. [5; гл. 1, § 5]) каждая из введенных в п. 3 функций g_k имеет угловой предел $g_k(e^{i\theta}) \in \partial D_\infty$ для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$. Следовательно, существует такое множество $\Omega \subset [0, 2\pi]$ полной меры, что для всякого $\zeta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_\infty$ и всякого $\theta \in \Omega$ существует угловой предел $\varphi(e^{i\theta}, \zeta)$ функции $\varphi(w, \zeta)$ при $w \rightarrow e^{i\theta}$. При каждом фиксированном $\theta \in \Omega$ функция $\varphi(e^{i\theta}, \zeta)$ есть наипростейшая дробь с полюсами в точках $g_k(e^{i\theta}) \in \partial D_\infty$, а при каждом фиксированном $\zeta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_\infty$ ограниченная функция $\varphi(e^{i\theta}, \zeta)$, определенная на Ω , т.е. почти всюду на $[0, 2\pi]$, имеет ряд Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(\zeta) e^{-ik\theta}$.

Функция

$$r_n(\theta, \zeta) = \sum_{k=1}^n \varphi(e^{i(\theta+2\pi k/n)}, \zeta),$$

определенная при всех $\zeta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_\infty$ и всех $\theta \in \Omega_n \subset \Omega$, где Ω_n – множество полной меры на $[0, 2\pi]$, при фиксированном θ также является наипростейшей дробью со всеми полюсами на ∂D_∞ , а при фиксированном ζ ограничена и имеет ряд Фурье $n \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu n}(\zeta) e^{-i\nu n\theta}$. При этом $r_n(\theta, \zeta)$ равномерно ограничена при $\zeta \in U_\delta(K)$, и в силу равенства Парсеваля

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{U_\delta(K)} |r_n(\theta, \zeta)|^2 d\sigma(\zeta) &= \int_{U_\delta(K)} \int_0^{2\pi} |r_n(\theta, \zeta)|^2 d\theta d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{U_\delta(K)} 2\pi n^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_{\nu n}(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta) = 2\pi n^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu n}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$a_k := \int_{U_\delta(K)} |c_k(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta),$$

$d\sigma(\zeta)$ – элемент площади.

5. Нам понадобится

ЛЕММА (см. [3]). Если $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, и $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k < \infty$, то

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu n} = 0.$$

Для полноты изложения приведем ее доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть $\mathbb{P}$ – множество простых чисел. Имеем

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p|n} p \right) a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} n a_n < \infty,$$

и в то же время $\sum_{p \in \mathbb{P}} 1/p = \infty$. Следовательно, для бесконечной последовательности $\{p_j\}$ простых чисел должно быть

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(p_j \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu p_j} \right) : \frac{1}{p_j} = 0,$$

откуда

$$\liminf_{p \in \mathbb{P}, p \rightarrow \infty} p^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu p} = 0.$$

Лемма доказана.

Для наших чисел a_k в силу (3) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k = \int_{U_{\delta}(K)} \sum_{k=1}^{\infty} k |c_k(\zeta)|^2 d\sigma(\zeta) \leq M \text{mes}_2(U_{\delta}(K)) < \infty,$$

откуда по лемме $\liminf_{n \rightarrow \infty} n^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu n} = 0$. В силу равенств (4) это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n , что для функции

$$f_n(\theta) = \int_{U_{\delta}(K)} |r_n(\theta, \zeta)|^2 d\sigma(\zeta)$$

выполнено неравенство

$$\int_0^{2\pi} f_n(\theta) d\theta < \varepsilon.$$

Следовательно, найдется такое $\theta \in \Omega_n$, что $f_n(\theta) < \varepsilon/(2\pi)$.

6. Для выбранных θ и n наипростейшая дробь $r_n(\theta, \zeta)$ имеет все полюсы на ∂D_{∞} , и для всякого $z \in K$

$$\begin{aligned} |r_n(\theta, z)| &= \left| \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{|\zeta - z| < \delta} r_n(\theta, \zeta) d\sigma(\zeta) \right| \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{U_{\delta}(K)} |r_n(\theta, \zeta)| d\sigma(\zeta) \\ &\leq \frac{1}{\pi \delta^2} (f_n(\theta))^{1/2} (\text{mes}_2(U_{\delta}(K)))^{1/2} < C(K, \delta) \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом, достигнута цель, сформулированная в п. 1: найдены наипростейшие дроби с полюсами на ∂D_{∞} , нормы которых в пространстве $AC(K)$ сколь угодно малы. Более точно, найдены такие последовательности Λ натуральных чисел n и чисел $\theta_n \in [0, 2\pi]$, $n \in \Lambda$, что наипростейшие дроби $r_n(\theta_n, z)$ имеют полюсы в точках

$$a_{jk}^{(n)} = g_j(e^{i(\theta_n + 2\pi k/n)}) \in \partial D_{\infty}, \quad k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

и $\|r_n(\theta_n, z)\|_{AC(K)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$.

7. Покажем, что точки $a_{jk}^{(n)}$ образуют всюду плотное множество на ∂D_∞ . Пусть в некоторой окрестности $V(a)$ точки $a \in \partial D_\infty$ нет ни одной точки $a_{jk}^{(n)}$. Имеем $a \in \partial G_q$ для некоторого $q \in \{1, \dots, N\}$, и компакт K имеет хотя бы одну предельную точку внутри G_q (см. предположение, сделанное в п. 1). Функции $r_n(\theta_n, z)/(nm)$ равномерно ограничены внутри области $D_q = D_\infty \cup V(a) \cup G_q$ и равномерно стремятся к нулю на $K \cap G_q$. Следовательно, они равномерно стремятся к нулю внутри D_q , что противоречит тому, что для достаточно больших положительных $x \in D_\infty$ выполнено неравенство

$$\left| \frac{r_n(\theta_n, x)}{nm} \right| = \left| \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - a_{jk}^{(n)}} \right| > \frac{1}{2x}.$$

8. Из всюду плотности полюсов дробей r_n на ∂D_∞ следует, что для заданной точки $a \in \partial D_\infty$ найдутся такие (подправленные) наипростейшие дроби $\tilde{r}_n$ с полюсами на ∂D_∞ , что каждая из них имеет полюс в a и $\|\tilde{r}_n\|_{AC(K)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$. Это означает, что функция $-1/(z - a)$ с любой точностью равномерно на K приближается наипростейшими дробями с полюсами на ∂D_∞ .

Таким образом, для доказательства плотности наипростейших дробей с полюсами на ∂D_∞ в пространстве $AC(K)$ достаточно доказать, что в этом пространстве плотны суммы дробей $\pm 1/(z - a)$, $a \in \partial D_\infty$. А это следует из теоремы 5 работы [1].

Теорема 1 доказана.

§ 3. Приближение “конденсатором”

В контексте теории приближения наипростейшими дробями и их обобщениями вполне разумной представляется задача о приближении разностями $r_1 - r_2$ наипростейших дробей при условии, что полюсы дроби r_1 лежат в заданном множестве E^+ , а полюсы r_2 — во множестве E^- , причем $E^+ \cap E^- = \emptyset$.

Такая постановка имеет естественную физическую интерпретацию. Если вспомнить, что наипростейшая дробь с полюсами $\{a_k\}$ комплексно сопряжена функции напряженности плоского электростатического поля, создаваемого одинаковыми одноименными зарядами (“электронами”), расположенными в точках a_k (см. [6; гл. 3, § 2]), то указанные разности $r_1 - r_2$ соответствуют полям, создаваемым “электронами” и “позитронами”, естественно помещаемыми в разные места комплексной плоскости.

Приведем результат о равномерном приближении на компакте посредством дробей $r_1 - r_2$ указанного типа. Примечательно, что для плотности таких дробей в пространстве $AC(K)$ множествам E^+ и E^- не надо “окружать” компакт K .

ТЕОРЕМА 2. Пусть двусвязная область $D \subset \mathbb{C}$ имеет связные компоненты границы $E^+, E^- \subset \mathbb{C}$ и компакт K со связным дополнением лежит в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$.

Тогда дроби вида

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{z - b_j}, \quad a_k \in E^+, \quad b_j \in E^-, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad m + n > 0, \quad (5)$$

плотны в пространстве $AC(K)$.

Так же, как при доказательстве теоремы 1, в пп. 3, 4 нижеследующего доказательства теоремы 2 существенно используются идеи Кореваара (см. [3]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. 1. Можно считать, что в каждой компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, которая пересекается с компактом K (таких компонент конечное число), компакт K имеет предельную точку (если это не так, расширим компакт K).

Наша первичная цель – доказать существование таких дробей r_n вида (5), что $\|r_n\|_{AC(K)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

2. Рассмотрим однолистное голоморфное отображение φ кольца $B = \{w : \alpha < |w| < 1\}$ на область D (см. [4; гл. 5, § 2]). Если какой-то из компактов E^+ или E^- состоит из одной точки a , то $\alpha = 0$ и φ есть конформное отображение единичного круга на $D \cup \{a\}$; оба компакта E^+ и E^- не могут быть одноточечными, так как иначе $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D} = K = \emptyset$.

Для всякого $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ функция

$$\frac{1}{z - \varphi(w)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z) w^k$$

голоморфна, однолистка и ограничена в кольце B , причем для всякого достаточно малого $\delta > 0$, при котором замкнутая окрестность $\overline{U_\delta(K)}$ компакта K лежит в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, найдется такое $M > 0$, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |c_k(z)|^2 < M, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k |c_{-k}(z)|^2 \alpha^{-2k} < M \quad (6)$$

для всех $z \in U_\delta(K)$. Это доказывается так же, как в п. 3 доказательства теоремы 1, с использованием выражения (2).

3. По теореме Фату (см. [5; гл. 1, § 5]) для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$ существуют угловые пределы $\varphi(e^{i\theta}) \in E^+$ и $\varphi(\alpha e^{i\theta}) \in E^-$ (без ограничения общности считаем, что при отображении φ единичная окружность “соответствует” E^+). Следовательно, функция

$$r_n(\theta, z) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{z - \varphi(e^{i(\theta+2\pi k/n)})} - \frac{1}{z - \varphi(\alpha e^{i(\theta+2\pi k/n)})} \right)$$

определена при всех $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ и всех $\theta \in \Omega_n \subset [0, 2\pi]$, где Ω_n – множество полной меры на $[0, 2\pi]$. При фиксированном θ функция $r_n(\theta, z)$ является дробью вида (5), а при фиксированном z ограничена и имеет ряд Фурье

$$n \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu n}(z) (1 - \alpha^{\nu n}) e^{i\nu n \theta}.$$

При этом $r_n(\theta, z)$ равномерно ограничена при $z \in U_\delta(K)$, и в силу равенства Парсеваля

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{U_\delta(K)} |r_n(\theta, z)|^2 d\sigma(z) &= \int_{U_\delta(K)} \int_0^{2\pi} |r_n(\theta, z)|^2 d\theta d\sigma(z) \\ &= \int_{U_\delta(K)} 2\pi n^2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |c_{\nu n}(z)|^2 (1 - \alpha^{\nu n})^2 d\sigma(z) = 2\pi n^2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu n}, \end{aligned}$$

где

$$a_k := \int_{U_\delta(K)} |c_k(z)|^2 (1 - \alpha^k)^2 d\sigma(z),$$

$d\sigma(z)$ – элемент площади.

4. Для чисел a_k , используя (6), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| a_k &= \int_{U_\delta(K)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| |c_k(z)|^2 (1 - \alpha^k)^2 d\sigma(z) \\ &\leq \int_{U_\delta(K)} \sum_{k=1}^{\infty} k (|c_k(z)|^2 + |c_{-k}(z)|^2 \alpha^{-2k}) d\sigma(z) < 2M \cdot \text{mes}_2(U_\delta(K)) < \infty, \end{aligned}$$

откуда по лемме (см. доказательство теоремы 1)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu n} = 0$$

(здесь важно, что $a_0 = 0$).

Отсюда, так же, как в пп. 5, 6 доказательства теоремы 1, находятся такие последовательности Λ натуральных чисел и чисел $\theta_n \in [0, 2\pi]$, $n \in \Lambda$, что дроби $r_n(\theta_n, z)$ с полюсами в точках

$$a_k^{(n)} = \varphi(e^{i(\theta_n + 2\pi k/n)}) \in E^+, \quad b_k^{(n)} = \varphi(\alpha e^{i(\theta_n + 2\pi k/n)}) \in E^-$$

имеют вид (5) и $\|r_n(\theta_n, z)\|_{AC(K)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$.

5. Пусть Ω – какая-либо компонента связности $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, пересекающаяся с K . Покажем, что всякая точка $a \in E^+ \cap \partial\Omega$ является предельной для множества $\{a_k^{(n)} : n \in \Lambda, k = 1, \dots, n\}$.

Пусть, от противного, в некоторой окрестности $V(a)$ точки a нет ни одной точки $a_k^{(n)}$. Функции $r_n(\theta_n, z)/n$ равномерно ограничены внутри области $D \cup V(a) \cup \Omega$ и равномерно сходятся к нулю на множестве $K \cap \Omega$, имеющем предельную точку в Ω (см. предположение, сделанное в п. 1). Следовательно, они равномерно сходятся к нулю внутри D , что противоречит равенству

$$\int_{\varphi(\{w: |w|=(1+\alpha)/2\})} \frac{r_n(\theta_n, z)}{n} dz = \pm 2\pi i,$$

где выбор знака плюс или минус определяется тем, какой из компактов E^+ или E^- лежит внутри (жорданова) контура интегрирования.

Аналогично доказывается, что всякая точка $b \in E^- \cap \partial\Omega$ является предельной для множества $\{b_k^{(n)} : n \in \Lambda, k = 1, \dots, n\}$.

6. Пусть $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ – все компоненты связности $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$, пересекающиеся с K . Нетрудно видеть, что каждая область Ω_j односвязна. Из утверждения п. 5 следует, что для любых точек $a \in E^+ \cap \partial\Omega_j$ и $b \in E^- \cap \partial\Omega_j$ ($j = 1, \dots, m$) функции $-1/(z - a)$ и $1/(z - b)$ с любой точностью равномерно на K приближаются дробями вида (5). Поскольку для каждого j выполнено $\partial\Omega_j \subset \partial D = E^+ \cup E^-$, получается, что замыкание множества дробей вида (5) в пространстве $AC(K)$ содержит суммы дробей вида

$$\pm \frac{1}{z - a}, \quad a \in \bigcup_{j=1}^m \partial\Omega_j =: E.$$

Бесконечно удаленная точка лежит или в D , или в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$. В первом случае все области Ω_j ограничены, $K \subset \widehat{E}$, и тогда по теореме 5 из [1] (или по теореме 1 выше) суммы дробей $\pm 1/(z - a)$, $a \in E$, плотны в пространстве $AC(K)$, а значит, в нем плотны и дроби (5). То же самое верно и во втором случае, если дополнительно точка ∞ не лежит ни в одной из областей Ω_j .

7. Пусть теперь одна из областей Ω_j содержит точку ∞ . В этом случае прямо теореме 5 из [1] применить нельзя, и мы используем некоторые рассуждения из доказательства этой теоремы.

В каждой из областей Ω_j возьмем такой простой спрямляемый жорданов контур S_j , что его внутренность $\text{Int } S_j$ лежит в Ω_k и $K \subset \bigcup_{j=1}^m \text{Int } S_j =: \text{Int } S$, где $S := \bigcup_{j=1}^m S_j$ (в случае неограниченной области Ω_j используется условие связности дополнения к K). Контур S_j , $j = 1, \dots, m$, взаимно внешние.

Рассмотрим гильбертово пространство H – пополнение пространства $AC(\widehat{S})$ по норме

$$\|f\|_H = \left(\sum_{j=1}^m \int_{S_j} |f(z)|^2 |dz| \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Пространство H является подпространством пространства $L_2(S, |dz|)$. Пусть G – замыкание в H множества сумм дробей вида $\pm 1/(z - a)$, $a \in E$ (каждая из этих дробей лежит в H). Нетрудно видеть, что G – замкнутая аддитивная подгруппа в H .

Подгруппа G содержит липшицевы образы связных плоских компактов $\partial\Omega_j$, $j = 1, \dots, m$ (отображение $\varphi: \partial\Omega_j \rightarrow H$, $\varphi(a) = 1/(z - a)$, удовлетворяет условию Липшица), поэтому по теореме 4 из [1] подгруппа G содержит все замкнутое линейное подпространство L над полем $\mathbb{R}$, порожденное функциями

$$R_{ab}(z) = \frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - b},$$

где a, b – произвольная пара точек из одного $\partial\Omega_j$, $j = 1, \dots, m$.

Покажем, что L совпадает с H . Если бы это было не так, то нашелся бы такой ненулевой элемент $h \in H$, что

$$\text{Re}(R_{ab}, h) = 0 \quad \forall a, b \in \partial\Omega_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Для соответствующей функции $h \in L_2(S, |dz|)$ это означает, что гармоническая в $\mathbb{C} \setminus S$ функция

$$u(w) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^m \int_{S_j} \frac{\overline{h(z)}}{z - w} |dz|$$

постоянна на каждом компакте $\partial\Omega_j$, $j = 1, \dots, m$. Функция u является действительной частью преобразования Коши $\hat{\mu}_h$ меры $d\mu_h = \overline{h(z)} |dz|$, сосредоточенной на S . Получается, что функция $\hat{\mu}_h$, будучи голоморфной и ограниченной в области $D' = \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{\Omega}_j$, содержащей D , отображает (в случае, если она не постоянна) эту область на ограниченную область, граница которой лежит на одной или нескольких вертикальных прямых. Это невозможно, поэтому $\hat{\mu}_h$ постоянна в D' , а значит, постоянна всюду в области $\mathbb{C} \setminus \hat{S}$. Поскольку $\hat{\mu}_h(\infty) = 0$, получаем $\hat{\mu}_h \equiv 0$ всюду в области $\mathbb{C} \setminus \hat{S}$. Следовательно, мера μ_h ортогональна к алгебре $AC(\hat{S})$ (см., например, [7; гл. 2, § 8]). Функции из $AC(\hat{S})$ плотны в H , поэтому мера μ_h ортогональна и элементу h :

$$\sum_{j=1}^m \int_{S_j} h(z) \overline{h(z)} |dz| = 0.$$

Таким образом, $h = 0$, а это противоречит нашему предположению.

Итак, L совпадает с H , т.е. любая функция $f \in AC(\hat{S})$ с любой точностью в норме (7) приближается суммами дробей $\pm 1/(z - a)$, $a \in E$. В силу интегральной формулы Коши функция f приближается такими суммами равномерно на K . Остается вспомнить, что функции из $AC(\hat{S})$ плотны в $AC(K)$ (теорема С. Н. Мергеляна).

Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть E – компакт, точка b принадлежит $\hat{E} \setminus E$ и не пересекается с E компакт K со связным дополнением лежит либо в $\hat{E}$, либо в $\mathbb{C} \setminus \hat{E}$. Тогда функции вида

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} - \frac{m}{z - b}, \quad a_k \in E, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad m + n > 0 \quad (8)$$

($n = 0$ означает, что суммы нет), плотны в пространстве $AC(K)$.

Ослабленный вариант этого утверждения (E – замкнутая жорданова спрямляемая кривая) был доказан в [8].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Если $K \subset \hat{E}$, то по теореме 1 в $AC(K)$ плотны наипростейшие дроби с полюсами на E , а значит, и дроби (8).

Пусть $K \subset \mathbb{C} \setminus \hat{E}$. Возьмем связную компоненту D_1 разности $\hat{E} \setminus E$, содержащую точку b . Если D_2 – неограниченная компонента дополнения к $\overline{D}_1$, то $D_3 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}_2$ есть односвязная область, содержащая D_1 и точку b . По теореме 2, примененной к области $D = D_3 \setminus \{b\}$, $E^+ = \partial D_3$, $E^- = \{b\}$, дроби вида (8) с $a_k \in \partial D_3$ плотны в $AC(K)$. Поскольку $\partial D_3 \subset E$, дроби (8) также плотны в этом пространстве.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть E^+ и E^- – взаимно внешние замкнутые жордановы кривые, компакт K со связным дополнением лежит в объединении внутренних частей $\text{Int } E^+ \cup \text{Int } E^-$ этих кривых. Тогда функции вида

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k} - \sum_{j=1}^m \frac{1}{z - b_j}, \quad a_k \in E^+, \quad b_j \in E^-, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad m + n > 0,$$

плотны в пространстве $AC(K)$.

Нетрудно привести пример, показывающий, что условие на компакт K в этом следствии существенно. Пусть E^+ и E^- – две взаимно внешние окружности с центрами -1 и 1 соответственно, $K = \{0\}$. Тогда все дроби из следствия 2 имеют положительные действительные части в точке 0 , а значит, не плотны в пространстве $AC(K) = \mathbb{C}$.

§ 4. Заключение

Доказанная выше теорема 2, по всей видимости, допускает обобщение на случай несвязных компактов E^+ и E^- . Это обобщение должно “подпирается” какой-то теоремой о невозможности приближения так же, как теорема 1 “подпирается” теоремой А.

Возможно, теорему 1 удастся обобщить на случай неограниченных множеств E .

Задачи о приближении наипростейшими дробями с ограничениями на расположение полюсов можно ставить и для других метрик (см., например, [9]). В частности, С.Р. Насыров задал такой вопрос: наипростейшие дроби с полюсами на окружности $E = \{a : |a| = 1\}$ плотны ли в (комплексном) пространстве $L_2[-1, 1]$? Плотности в пространстве $C[-1, 1]$ здесь нет: для всякого $a \in E \setminus \{-1, 1\}$ действительная часть функции $1/(x - a)$ в точке 1 положительна.

Список литературы

- [1] П. А. Бородин, “Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы”, *Матем. сб.*, **203**:11 (2012), 23–40; англ. пер.: P. A. Borodin, “Approximation by simple partial fractions with constraints on the poles”, *Sb. Math.*, **203**:11 (2012), 1553–1570.
- [2] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О приближении наипростейшими дробями”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 553–559; англ. пер.: V. I. Danchenko, D. Ya. Danchenko, “Approximation by simplest fractions”, *Math. Notes*, **70**:4 (2001), 502–507.
- [3] J. Korevaar, “Asymptotically neutral distributions of electrons and polynomial approximation”, *Ann. of Math.* (2), **80**:3 (1964), 403–410.
- [4] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-е изд., Наука, М., 1966, 628 с.; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Transl. Math. Monogr., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969, vi+676 pp.
- [5] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, 2-е изд., ГИТТЛ, М.–Л., 1950, 336 с.; нем. пер.: I. I. Priwalow, *Randeigenschaften analytischer Funktionen*, 2. Aufl., **25**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956, viii+247 pp.

- [6] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, 4-е изд., Наука, М., 1973, 736 с.; нем. пер. 3-го изд.: М. А. Lawrentjew, B. W. Schabat, *Methoden der komplexen Funktionentheorie*, Math. Naturwiss. Tech., **13**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967, x+846 pp.
- [7] Т. Гамелин, *Равномерные алгебры*, Мир, М., 1973, 336 с.; пер. с англ.: T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969, xiii+257 pp.
- [8] П. А. Бородин, “Плотность полугруппы в банаховом пространстве”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:6 (2014), 21–48; англ. пер.: P. A. Borodin, “Density of a semigroup in a Banach space”, *Izv. Math.*, **78**:6 (2014), 1079–1104.
- [9] Ch. K. Chui, “On approximation in the Bers spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **40**:2 (1973), 438–442.

Петр Анатольевич Бородин
(Petr A. Borodin)

Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: pborodin@inbox.ru

Поступила в редакцию
02.03.2015