Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Фокичева, Топологическая классификация билиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 10, 127–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:08:38

УДК 517.938.5

В. В. Фокичева

Топологическая классификация билиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик

В работе обнаружен новый класс интегрируемых билиардных систем – обобщенные билиарды, а именно, билиарды в областях, образованных склейками классических билиардных областей вдоль сегментов границ. Классическая билиардная область – это часть плоскости, ограниченная дугами софокусных квадрик. В статье получена полная топологическая классификация обобщенных билиардов с точностью до лиувиллевой эквивалентности на основе теории Фоменко–Цишанга об инвариантах интегрируемых систем.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: интегрируемая система, билиард, лиувиллева эквивалентность, инвариант Фоменко–Цишанга.

DOI: 10.4213/sm8506

§ 1. Введение

1.1. История вопроса. Опишем стандартную постановку билиардной задачи в некоторой области. Дана замкнутая выпуклая кусочно-гладкая кривая на плоскости (при этом все углы в точках излома равны $\pi/2$), при этом кривая не предполагается связной. Материальная точка движется внутри компактной области Ω , ограниченной этой кривой, и отражается на границе по естественному закону (угол падения равен углу отражения), а в точках излома границы движение продолжается по непрерывности. Эта система описывается на кокасательном расслоении к области Ω (точка этого расслоения задается как координаты этой материальной точки в области и касательный вектор в точке к области) и обладает естественным интегралом – модулем вектора скорости. В некоторых случаях данная система имеет второй интеграл. Одним из таких случаев является случай билиардной задачи в области, ограниченной дугами софокусных эллипсов и гипербол. Интегрируемость билиардной задачи в области, ограниченной эллипсом, была замечена Дж. Д. Биркгофом (см., например, [1]) и доказана путем предельного перехода из интегрируемой задачи геодезического потока на эллипсоиде.

Интегрируемость билиардной задачи сохраняется, если перейти к областям, ограниченным дугами эллипсов и гипербол одного софокусного семейства; предполагаем, что на границе областей нет точек излома с углами $3\pi/2$. В этом

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00081-а).

случае все углы в точках излома равны $\pi/2$, поскольку известно, что софокусные квадрики пересекаются всегда под прямыми углами. В книге В. В. Козлова, Д. В. Трещёва [2] отмечено, что эти динамические системы являются вполне интегрируемыми по Лиувиллю (т.е. имеется дополнительный независимый интеграл Λ), а именно, что интегрируемость данных систем эквивалентна малой теореме Понселе. Для таких систем были построены координаты действие-угол (см. работу М. П. Харламова [2; п. 4.1]).

Такие системы с точностью до Лиувиллевой эквивалентности были классифицированы в работах В. Драговича и М. Радновича [3], [4] и В. В. Фокичевой [5], [6]. В работе В. В. Фокичевой [7] показано, что если перейти от софокусного семейства эллипсов и гипербол к софокусному семейству парабол, то инварианты лиувиллевой эквивалентности – меченые молекулы – сохраняются при условии, что область остается компактной.

Расширим постановку билиардной задачи. Пусть даны две области Ω_1 и Ω_2 с кусочно-гладкой границей. Пусть граница этих областей содержит одну и ту же кривую l в качестве части границы. Тогда можно определить сложное билиардное движение в объединении областей Ω_1 и Ω_2 следующим образом: материальная точка отражается от границ $\Omega_i \setminus l$ и переходит из одной области в другую, когда достигает кривой l .

В настоящей работе мы классифицируем все области Δ , получающиеся склейкой из областей Ω , ограниченных дугами софокусных квадрик. Для классификации областей Ω мы предлагаем простое доказательство. В каждой такой области билиардное движение остается интегрируемым с той же парой интегралов. Мы описываем это движение на изоэнергетических поверхностях с точностью до лиувиллевой эквивалентности, вычислив для каждой билиардной задачи меченую молекулу Фоменко–Цишанга.

1.2. Классическая постановка локально-плоской билиардной задачи. Пусть область Ω на плоскости $\mathbb{R}^2$ такова, что граница области является кусочно-гладкой кривой, причем в точках излома этой ломаной углы равны $\pi/2$. Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение (материальной) точки внутри области Ω с естественным отражением на границе $P = \partial\Omega$. Эту систему назовем “билиардом в области”. Будем считать, что в точках, где граница P не гладкая (тогда, как было сказано выше, угол излома обязательно равен $\pi/2$), траектории системы можно доопределить по непрерывности: а именно, попав в вершину угла на границе, материальная точка, не теряя скорости, отразится назад по той же траектории. Таким образом, фазовым пространством системы является многообразие

$$M^4 := \{(x, v) \mid x \in \Omega, v \in T_x \mathbb{R}^2, |v| > 0\} / \sim,$$

где отношение эквивалентности задается так:

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \iff x_1 = x_2 \in P, \quad |v_1| = |v_2|, \quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1} P.$$

Здесь через $T_x P$ обозначена касательная плоскость к области Ω в точке x , а через $|v|$ – евклидова длина вектора v .

1.3. Лиувиллева эквивалентность. Меченая молекула Фоменко–Цишанга – инвариант лиувиллевой эквивалентности. Напомним ряд классических определений (см. [8]–[13]). Рассмотрим симплектическое многообразие (M^4, ω) , где ω – симплектическая форма, т.е. невырожденная, замкнутая кососимметрическая форма на касательных векторах к M^4 : $\omega(a, b) := \omega_{ij}a^ib^j$. Если дана функция H на данном многообразии, то можно определить векторное поле $\text{sgrad } H$, ей соответствующее, по следующему правилу $(\text{sgrad } H)^i = w^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^j}$. Если динамическая система допускает подобное описание, то она называется гамильтоновой, а функция H в этом случае называется гамильтонианом.

Предположим, что на M^4 существует функционально независимая с H функция f такая, что скобка Пуассона

$$\{f, H\} := \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} = 0.$$

В этом случае говорят, что функции f и H находятся в инволюции. Легко понять, что функция f также является интегралом системы, а динамическую систему называют интегрируемой по Лиувиллю.

Так как f и H функционально независимы, то за исключением некоторого количества особых значений интеграла f градиенты f и H линейно независимы. Если при этом гамильтоновы потоки являются полными, то к совместной поверхности уровня функций f и H можно применить теорему Лиувилля, согласно которой эта совместная поверхность уровня в том случае, когда она компактна и связна, гомеоморфна тору, вблизи которого можно найти координаты, называемые действие-угол, такие, что в этих координатах гамильтоново векторное поле выпрямляется.

Полученное расслоение Q^3 (а значит, и M^4) называется слоением Лиувилля. Почти все торы при этом являются замыканием решений системы. Остальные поверхности уровня функций f и H (т.е. те, где $\text{grad } f$ и $\text{grad } H$ линейно зависимы) называются особыми. Для них также существует эффективный метод описания. Ограничим нашу систему с многообразия M^4 на изоэнергетическую поверхность Q_H^3 . Далее покажем, как можно описать расслоение Q_H^3 на торы и особые слои.

Функция f задает отображение $f: Q_H^3 \rightarrow R$. Пусть $f = c$ – особое значение интеграла f . Тогда прообраз окрестности $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ в Q_H^3 – это трехмерное многообразие с краем, называемое 3-атомом. Примерами атомов являются атомы A (минимаксный атом), B , A^* (см. подробнее [8], [14], [15]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$ и $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$ – две интегрируемые по Лиувиллю системы на симплектических многообразиях M_1^4 и M_2^4 , обладающие интегралами f_1, g_1 и f_2, g_2 соответственно. Рассмотрим изоэнергетические поверхности $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$. Интегрируемые гамильтоновы системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послыйный диффеоморфизм $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$, который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий Q_1^3 и Q_2^3 и ориентацию всех критических окружностей.

Напомним, что в силу теоремы Лиувилля многообразие Q^3 расслоено на торы и особые слои (фактически оно представляет собой склейку регулярных окрестностей особых слоев друг с другом по граничным торам). Рассмотрим базу возникающего слоения Лиувилля на Q^3 . Эта база является одномерным графом W , называемым графом Кронрода–Риба функции $f_2|_{Q^3}$. Структура слоения в малой окрестности особого слоя, отвечающего любой вершине этого графа, описывается комбинаторным объектом, называемым атомом. Граф, для каждой вершины которого указан соответствующий атом, называется инвариантом (грубой молекулой) Фоменко. В вершинах W расположены “атомы”, описывающие соответствующие бифуркации торов Лиувилля. Однако этот граф W не описывает полностью топологию слоения Лиувилля, так как он не содержит всей информации о склейках регулярных окрестностей особых слоев. Оказывается, для описания топологии слоения необходимо выбрать пары так называемых допустимых базисов на граничных торах (по некоторым правилам см. подробнее [8]–[10]) и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Из полученных матриц перехода – матриц склейки – вычисляются числовые метки r , ε и n , которые, будучи расставленными на грубой молекуле W , полностью определяют слоение Лиувилля с точностью до послышной эквивалентности и уже не зависят от выбора допустимых базисов на граничных торах. Получающийся граф с метками называется меченой молекулой W^* , т.е. инвариантом Фоменко–Цишанга.

ТЕОРЕМА 1.1 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг). *Две интегрируемые гамильтоновы системы на изоэнергетических поверхностях $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$ и $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

Система билиарда в общем случае не является гладкой, так как склейка в точках границы, как правило, не позволяет ввести гладкую структуру в декартовых координатах. Необходимо видоизменить определения выше с учетом граничных точек. Описываемый ниже подход и определения предложены А. Т. Фоменко.

Фазовое многообразие M^4 является кусочно-гладким и распадется на гладкие куски (объединение которых мы обозначим $\widetilde{M}^4$), склеенные по точкам, проектирующимся (в случае билиардной системы) в одни и те же точки границы области, где определен билиард. На многообразии введем симплектическую структуру только в $\widetilde{M}^4$. Будем предполагать, что гладкие симплектические структуры в соседних гладких областях непрерывно согласованы на границе раздела, т.е. их пределы “справа и слева” совпадают. Будем говорить, что кусочно-гладкая система на M^4 интегрируема (в кусочно-гладком смысле, но в дальнейшем для краткости будем говорить просто об интегрируемости), если существуют непрерывные на M^4 и гладкие на $\widetilde{M}^4$ функционально независимые функции f и H , которые находятся в инволюции на M^4 . Подобное определение имеет смысл не только для билиардных систем, но в данной работе мы будем рассматривать только плоские билиарды.

Рассмотрим кусочно-гладкое изоэнергетическое многообразие Q^3 и связную компоненту совместного уровня функций f и H . Пусть гамильтоновы потоки

$\text{sgrad } f$ и $\text{sgrad } H$ полны. Если можно показать, что связная компактная компонента совместного уровня функций f и H гомеоморфна либо кусочно-гладкому тору, либо кусочно-гладкому трехмерному атому (для конечного числа значений f), то будем говорить, что выполнена кусочно-гладкая теорема Лиувилля. В этом случае мы можем построить грубую молекулу W и определить метки. В случае бильярда в компактной области полнота гамильтоновых потоков очевидна.

Фактически кусочно-гладкое слоение Лиувилля в случае бильярдной системы отличается от слоения Лиувилля классической интегрируемой гамильтоновой системы тем, что каждая совместная поверхность уровня, как правило, представляет собой либо кусочно-гладкий атом, либо кусочно-гладкий тор. Однако в дальнейшем мы будем пользоваться теми же обозначениями для атомов и молекул, что и в классическом случае.

В работе В. Лазуткина [16] показано, что если граница бильярда является выпуклой, то в прообразе ее окрестности при проекции $M^4 \rightarrow \Omega$ можно ввести гладкую и симплектическую структуры на многообразии M^4 , относительно которых функции f_1 и f_2 являются гладкими, а проекция $\widetilde{M}^4 \rightarrow M^4$ является гладким симплектическим отображением. Однако в прообразах точек излома границы (в углах) и в прообразе точек ее невыпуклости гладкость пока не удалось показать.

1.4. Бильярд в плоской области, ограниченной софокусными квадриками. Интегрируемость.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Фиксируем систему координат (x, y) . Софокусные квадрики – квадрики семейства

$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} = 1, \quad \lambda \in (-\infty, b) \cup (b, a)$$

и полученные из них “пределным переходом”, точнее квадрики семейства

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda), \quad \lambda \leq a. \quad (1.1)$$

Здесь $\infty \geq a \geq b > 0$ – фиксированная пара чисел (определяющая семейство софокусных квадрик), λ – параметр семейства (определяющий квадрику семейства).

В классическом случае ($\infty > a > b$) при $\lambda \neq a$ или $\lambda \neq b$ – это эллипсы или гиперболы. При $\lambda = b$ – это объединение вырожденной гиперболы (образованной двумя горизонтальными лучами из фокусов) и вырожденного эллипса (отрезка между фокусами). Вертикальную прямую, соответствующую параметру $\lambda = a$, мы будем называть гиперболой (а не вырожденной гиперболой).

При $\infty = a > b$ софокусные квадрики являются софокусными параболами. При $a = b$ квадрики вырождаются в концентрические окружности и ортогональные им радиальные прямые.

Нетрудно показать, что софокусные квадрики ортогональны друг другу.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В дальнейших рассуждениях квадрики предполагаются софокусными квадриками семейства (1.1), причем $\infty > a > b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть дана компактная область в плоскости, ограниченная дугами софокусных квадрик, все углы которой в точках излома границы не превосходят π . В этом случае граница области является либо простой замкнутой кривой, либо несвязным объединением двух эллипсов. Рассмотрим минимальный набор дуг квадрик, которыми образована граница области. Эти дуги назовем сегментами квадрик, ограничивающих данную область (или сегментами границы данной области).

Мы будем различать сегменты четырех типов: эллипс, дуга невырожденной гиперболы, заключенная между двумя эллипсами, дуга невырожденного эллипса, заключенная между двумя гиперболами, отрезок фокальной прямой.

Пусть плоская область Ω ограничена сегментами софокусных квадрик.

ТЕОРЕМА 1.2 (Якоби, Шаль). *Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n -мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще $n - 2$ конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Софокусные квадрики в многомерном случае иногда называются конфокальными.

В плоском двумерном случае из теоремы Якоби–Шалля следует, что касательные в любой точке билиардной траектории внутри области Ω касаются эллипса или гиперболы, софокусных с семейством квадрик, образующих границу P области Ω .

Относительно стандартной симплектической структуры на плоскости функции $|v|$ – модуль вектора скорости и Λ – параметр софокусной квадрики коммутируют. Так как они сохраняются вдоль траекторий билиарда, значит, в пределе они коммутируют и на границе области. Таким образом, данная “билиардная” система обладает двумя независимыми (см. [1], [2]) интегралами:

- 1) $|v|$ – модуль вектора скорости;
- 2) Λ – параметр софокусной квадрики.

§ 2. Обобщенные билиарды. Постановка задачи

2.1. Элементарные области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Простейшей элементарной областью Ω* назовем двумерное связное, компактное, плоское гладкое риманово многообразие с кусочно-гладким краем, которое имеет изометричное вложение в плоскость, причем граница его образа при этом вложении состоит из сегментов софокусных квадрик семейства (1.1), углы между которыми не превышают π .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. *Составной элементарной областью (Ω, U_i)* назовем двумерное связное, компактное, плоское гладкое риманово многообразие с кусочно-гладким краем, не имеющее изометричного вложения в плоскость, которое может быть разбито в объединение простейших элементарных областей U_i , ограниченных дугами квадрик из одного и того же софокусного семейства (1.1) с выполнением следующих условий, перечисленных ниже. Пересечение двух

элементарных областей U_i и U_j либо пусто, либо существуют изометричные вложения этих областей U_i, U_j в плоскость, согласованные на их пересечении $U_i \cap U_j$, причем пересечение $U_i \cap U_j$ является как сегментом границы области U_i , так и сегментом границы области U_j .

При этом образ этого пересечения $U_i \cap U_j$ при любой из этих изометрий является дугой гиперболы семейства (1.1), а образы областей U_i и U_j лежат по разные стороны от этой дуги, в случае если эта дуга не лежит на осях семейства (1.1).

Простейшие элементарные области и составные элементарные области будем называть просто элементарными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Элементарная область (Ω, U_i) , ограниченная дугами квадрик из софокусного семейства (1.1), называется *эквивалентной* другой элементарной области Ω', U'_i , ограниченной дугами квадрик из того же семейства (1.1), если Ω', U'_i можно получить из Ω, U_i путем композиции следующих преобразований:

- последовательным изменением сегментов границы в образах некоторых простейших элементарных областей U_i при их изометричных вложениях в плоскость путем непрерывной деформации в классе квадрик (1.1) так, чтобы значение параметра λ изменяемого сегмента границы не принимало значения b ; при этом потребуем, чтобы одновременно менялись и оставались равными друг другу значения параметра λ для квадрик (гипербол), содержащих образы общей граничной дуги любых двух пересекающихся простейших элементарных областей при их изометричных вложениях в плоскость, согласованных на этой дуге до деформации (а потому также во время и после деформации), а также одновременно менялись и оставались равными друг другу значения параметра λ для квадрик (эллипсов), содержащих образы эллиптических граничных сегментов (разных элементарных областей), имеющих общую вершину;
- симметрией относительно оси семейства (1.1) во всех простейших элементарных областях U_i одновременно;
- объединением нескольких простейших элементарных областей в одну или же разбиением одной элементарной области на более мелкие.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Определение запрещает сегменту изменяемой границы становиться отрезком фокальной прямой. Далее мы увидим, что бильярдная система, определенная в элементарной области, имеет столько критических окружностей на седловом уровне дополнительного интеграла, сколько данная элементарная область содержит внутри себя отрезков фокальной прямой с концами на границе области.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Любая элементарная область (Ω, U_i) эквивалентна области, принадлежащей одной из следующих трех серий (все они представлены на рис. 1 и 2).

Рис. 1. Элементарные области, образующие конечную серию A

Рис. 2. Примеры элементарных областей, принадлежащих бесконечным сериям B и C . На рисунке изображены области B_4 (a) и C_4 (b)

1) Односвязные элементарные области, изометрично вложимые в плоскость, содержащие отрезок фокальной прямой между фокусами (внутри области или на границе). Существует ровно шесть типов областей, задаваемых формулой $a + |2f - f'| = 4$, где a – число углов границы, f – количество фокусов, принадлежащих области, f' – число фокусов, принадлежащих границе области. Такие области будем обозначать A_f , если их граница не содержит отрезок фокальной прямой, и A'_f в противном случае. Все области, принадлежащие этой серии, изображены на рис. 1.

2) Односвязные элементарные области, изометрично погружаемые в плоскость так, что образ области при этом погружении не содержит отрезок фокальной прямой между фокусами. Каждую такую область ограничивает четырехугольник, образ которого при указанном погружении состоит из дуг двух эллипсов и двух гипербол (быть может, совпадающих). Такие области будем обозначать либо B_n , либо B'_n , либо B''_n в зависимости от того, образы нуля, одного или двух отрезков границы лежат на фокальной прямой, где n – это количество связных компонент прообраза фокальной прямой при изометричном погружении области вместе с ее границей в плоскость. Будем называть их областями типа B . Пример области изображен на рис. 2, а.

3) Неодносвязные элементарные области. Двухлистные накрытия таких областей изометрично погружаемы в плоскость, их образы при таких погружениях ограничены двумя эллипсами. Будем обозначать эти области че-

рез C_k , где k – это половина количества связных компонент прообраза фотальной прямой при изометричном погружении двулистного накрытия области в плоскость. Будем называть их областями типа C . Пример области изображен на рис. 2, b.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала рассмотрим простейшие элементарные области. Обозначим такую область Ω .

Рассмотрим сетку эллиптических координат на плоскости. Сделаем разрез плоскости вдоль двух лучей вырожденной гиперболы и определим отображение f из разрезанной плоскости с эллиптической координатной сеткой в полосу с прямоугольной координатной сеткой, т.е. все гиперболы перейдут в вертикальные прямые, а все эллипсы перейдут в пары горизонтальных отрезков. Граница полосы при этом состоит из двух прямых, из которых состоит образ вырожденной гиперболы. Таким образом, на границе полосы определена склейка, переводящая эту полосу в плоскость. В дальнейшем мы будем пользоваться моделью полосы с определенной склейкой на границе.

Область Ω , на плоскости ограниченная дугами квадрик семейства (1.1), в полосе будет ограничена отрезками вертикальных и горизонтальных прямых.

ЛЕММА 2.1. Область $f(\Omega)$ является несвязным объединением не более трех прямоугольников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Область Ω связна, а значит, при разрезе вдоль вырожденных гипербол она может распасться не более чем на три связных куска. Обозначим их w_i , $i < 4$. Отображение f является биекцией между областью с двумя разрезами вдоль вырожденных гипербол и полосой, а значит, $f(w_i) \cap f(w_j) = \emptyset$ при $i \neq j$. Рассмотрим $f(w_i)$. Заметим, что w_i ограничена дугами софокусных эллипсов и гипербол и ее граница (а значит, и граница $f(w_i)$) не содержит углов $3\pi/2$. Заметим, что область w_i гомеоморфна диску. Граница $f(w_i)$ лежит на горизонтальных и вертикальных прямых. Значит, $f(w_i)$ – прямоугольник. Лемма доказана.

Рассмотрим каждый случай отдельно.

Случай 1. Пусть $f(\Omega)$ – это один прямоугольник. Возникает три случая.

- Если прямоугольник $f(\Omega)$ расположен строго выше (или ниже) оси Ox , то Ω эквивалентна либо B_0 (прямоугольник строго внутри полосы), либо B'_1 (одна вертикальная сторона расположена на границе полосы), либо B''_1 (обе вертикальные стороны расположены на границах полосы).
- Если прямоугольник $f(\Omega)$ расположен строго и в положительной, и отрицательной частях полосы, то Ω эквивалентна A_i , где i – число вертикальных сторон прямоугольника на границе полосы.
- Если верхняя или нижняя стороны прямоугольника $f(\Omega)$ лежат на оси Ox , то Ω эквивалентна A'_i , где i – число вертикальных сторон прямоугольника на границе полосы.

Случай 2. Пусть $f(\Omega)$ – это объединение двух прямоугольников. Тогда в силу связности у этих прямоугольников существует по крайней мере одна пара равных вертикальных сторон, расположенных на одной границе полосы симметрично относительно оси Ox . Если существует одна пара таких сторон,

то область Ω – это четырехугольник, ограниченный парой дуг эллипсов и парой дуг гипербол, т.е. область B_1 или B'_2 . Если склеилось две пары сторон, то в прообразе $f(\Omega)$ – кольцо, обозначаемое нами C_2 .

Случай 3. Пусть $f(\Omega)$ – это объединение трех прямоугольников. Аналогично предыдущему случаю получаем, что прообраз – это четырехугольник, ограниченный парой дуг эллипсов и парой дуг гипербол, т.е. область B_2 .

Таким образом, мы описали все простейшие элементарные области.

Пусть элементарная область Ω , U_i не имеет изометричного вложения в плоскость. Фиксируем какую-нибудь простейшую область U_i , входящую в составную область Ω , U_i , и пересекающуюся с ней область U_j . Обозначим дугу гиперболы в пересечении этих областей (точнее, их образов при соответствующих изометричных вложениях в плоскость) через l . Докажем, что сегмент l не имеет общих точек с осью Ox . Пусть это не так, тогда пара областей U_i , U_j эквивалентна паре областей A'_0 , A'_0 , или A'_0 , A'_1 , или A_0 , A_0 , или A_0 , A_1 . Эти пары областей можно заменить на одну простейшую элементарную область, принадлежащую соответственно классам A'_0 , A'_1 , A_0 или A_1 . Продолжая этот процесс, мы тем не менее будем получать лишь простейшие элементарные области, так как дуги гипербол, по которым может идти склейка, будут иметь пересечение с Ox . Значит, сегмент l не имеет пересечения с осью абсцисс. В этом случае области U_i и U_j эквивалентны областям B_0 , B_1 , B'_1 , B'_2 или B_2 . Более того, можно утверждать, что все элементарные области U_i эквивалентны B_0 , B_1 , B'_1 , B'_2 или B_2 .

Из областей B_0 , B_1 , B'_1 , B'_2 или B_2 путем возможных склеек вдоль гиперболических сегментов границ можно получить либо односвязные области-ленты (серия B), либо неодносвязные области-кольца (серия C). Предложение 2.1 доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Заметим, что понятие граничного сегмента (см. определение 1.3) определено пока лишь для простейших элементарных областей, т.е. элементарных областей, изометрично вложимых в плоскость. Распространим его на любое двумерное связное компактное плоское гладкое риманово многообразие с кусочно-гладким краем (возможно, с точками излома, т.е. углами). *Граничным сегментом* такого риманова многообразия назовем либо связную компоненту его края, не содержащую точек излома, либо дугу, лежащую в крае, соединяющую две точки излома края и не содержащую других точек излома края. Согласно классификации элементарных областей (предложение 2.1) все они (или их двулистные накрытия) допускают изометричное погружение в плоскость. Граничный сегмент элементарной области назовем *гиперболическим* (соответственно *вертикальным гиперболическим*, *эллиптическим*), если его образ при этом погружении не содержится в фокальной прямой и содержится в гиперболе (соответственно вертикальной прямой, эллипсе) рассматриваемого софокусного семейства. Граничный сегмент назовем *вырожденным или горизонтальным*, если его образ при этом погружении содержится в фокальной прямой. Граничный сегмент элементарной области Ω назовем *выпуклым* (соответственно *нестрого выпуклым*), если любая его точка обладает окрестностью в Ω , изометричной строго выпуклому (соответственно нестрого выпуклому) подмножеству плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Заметим, что любой гиперболический сегмент границы можно перевести в вертикальный сегмент. Таким образом, можно считать, что область A'_1 эквивалентна четверти эллипса, область A_1 эквивалентна половине эллипса (правой или левой), у областей A'_0 , A_0 левый гиперболический сегмент границы – вертикальная прямая, у областей серии B вертикальны все невырожденные гиперболические сегменты.

2.2. Обобщенные области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть l_1 и l_2 – выпуклые эллиптические или горизонтальные граничные сегменты двух элементарных областей Ω_1 и Ω_2 , причем образы этих сегментов при изометричных погружениях областей Ω_1 и Ω_2 (или их двулистных накрытий) в плоскость совпадают и содержатся в квадрике семейства (1.1) с параметром $\lambda_{l_1} = \lambda_{l_2}$. Определим *склейку* областей Ω_1 и Ω_2 вдоль эллиптических сегментов l_1 и l_2 (образы которых после склейки будем называть *ребром склейки*), как склейку вдоль l_1 и l_2 по гомеоморфизму между l_1 и l_2 , согласованному с изометричными погружениями областей Ω_1 и Ω_2 (или их двулистных накрытий) в плоскость. Границы ребер склейки будем называть *вершинами склейки*.

Таким образом, мы можем определить склейку элементарных областей вдоль эллиптических или горизонтальных сегментов, при этом мы можем аналогично определить склейку одного экземпляра элементарной области вдоль двух своих эллиптических граничных сегментов в том случае, если эти сегменты различны и симметричны друг другу относительно фокальной прямой, а склеивающий гомеоморфизм является ограничением симметрии относительно фокальной прямой на рассматриваемые сегменты. Напомним, что гамильтоново склеивание, построенное в книге [12], в данном случае позволяет ввести гладкую структуру в окрестности прообраза открытого ребра склейки при проекции

$$M^4 \rightarrow (\Omega_1 \sqcup \Omega_2) / \sim.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Пусть m_1 и m_2 – выпуклые гиперболические или горизонтальные граничные сегменты двух элементарных областей Ω_1 и Ω_2 , причем образы этих сегментов при изометричных погружениях областей Ω_1 и Ω_2 (или их двулистных накрытий) в плоскость совпадают и содержатся в квадрике семейства (1.1) с параметром $\lambda_{m_1} = \lambda_{m_2}$. Определим *склейку* областей Ω_1 и Ω_2 вдоль гиперболических или горизонтальных сегментов m_1 и m_2 (образы которых после склейки будем называть *ребром склейки*) как склейку вдоль m_1 и m_2 по гомеоморфизму между m_1 и m_2 , согласованному с изометричными погружениями областей Ω_1 и Ω_2 (или их двулистных накрытий) в плоскость. Границы ребер склейки будем называть *вершинами склейки*.

Напомним, что так как элементарные области – это многообразия с плоской гладкой римановой метрикой, то при их склейке полученное многообразие будет также локально плоским, но, вообще говоря, с кусочно-гладкой римановой метрикой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. *Обобщенной областью Δ без конических точек* назовем двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой римановой метрикой, которое получается в результате определенных выше склеек элементарных областей вдоль некоторых эллиптических сегментов (определение 2.5). Заметим, что в этом случае в каждой вершине склейки сходится одно ребро склейки и два свободных ребра (такие вершины склейки назовем *граничными вершинами склейки*).

Обобщенной областью Δ с коническими точками назовем двумерное ориентируемое многообразие с кусочно-гладкой римановой метрикой, которое получается в результате определенных выше склеек элементарных областей вдоль некоторых сегментов (определения 2.5, 2.6) при выполнении следующих условий. Во-первых, потребуем, чтобы в каждой вершине склейки сходилось либо одно ребро склейки и два свободных ребра (такие вершины склейки назовем *граничными вершинами склейки*), либо два ребра склейки и ни одного свободного ребра (такие вершины склейки назовем *коническими точками*), либо четыре ребра склейки и ни одного свободного ребра (такие вершины склейки назовем *внутренними вершинами склейки*). Во внутренних вершинах склейки сходятся два гиперболических или горизонтальных ребра склейки m_{i_1}, m_{i_2} и два эллиптических или горизонтальных l_{j_1}, l_{j_2} . Обозначим связную компоненту объединения всех гиперболических (или горизонтальных) ребер склейки через $m_i, \{i \in 1, \dots, n\}$, где m_i последовательно соединены друг с другом. Во-вторых, потребуем, чтобы минимум одно из ребер склейки m_1 или m_n образовывало коническую точку. В-третьих, потребуем, чтобы в обобщенной области Δ с коническими точками число конических точек было больше нуля.

Поясним, что для каждой такой области Δ фиксирован набор элементарных областей Ω_i с набором ребер склейки f_{ij} между ними, которые, будучи склеенными вдоль этих ребер, образуют область Δ . Граничные сегменты областей Ω_i , которые не являются ребрами склейки, мы называем *свободными ребрами*, а их объединение для фиксированной области Δ – *свободной границей*. Области, склеенные без образования конических точек, будем обозначать через Δ_α , а области с коническими точками через Δ_β .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Элементарные и обобщенные области могут не иметь изометричного погружения в плоскость. В качестве примера можно рассмотреть элементарную область C_1 и обобщенную область, полученную склейкой двух областей, ограниченных эллипсами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Обобщенная область Δ , склеенная из элементарных областей Ω_i вдоль ребер склейки f_{ij} , называется *эквивалентной* другой обобщенной области Δ' , склеенной из Ω'_i вдоль ребер склейки f'_{ij} , если Δ' можно получить из Δ путем замены элементарных областей Ω_i на им эквивалентные.

2.3. Классификация обобщенных областей. Напомним, что мы обозначили обобщенные области без конических точек через Δ_α . В скобках будем указывать элементарные области, образующие область Δ , причем если эквивалентные области склеиваются друг с другом последовательно в некотором количестве экземпляров, то будем указывать это количество, например

$\Delta_\alpha(kA_0)$, а если нет, то будем указывать это отдельным суммированием, например $\Delta_\alpha(\Omega + kA_0 + \Omega)$ – две эквивалентные области Ω склеены не друг с другом, а с областями A_0 . Введем специальное обозначение $\Delta_\alpha(kA_0)^2$ для области, склеенной из k экземпляров A_0 склейкой вдоль всех эллиптических границ в область, гомеоморфную плоскому кольцу.

Обобщенные области с коническими точками обозначим через Δ_β . Введем типы конических точек. Как легко видеть из определения, конические точки делятся на три типа. Конические точки типа x – это конические точки, образованные склейкой вдоль выпуклого эллиптического сегмента l и горизонтального сегмента m (в обозначениях определений 2.5–2.8). Конические точки типа y образованы склейкой выпуклого или вертикального гиперболического сегмента m и выпуклого эллиптического сегмента l (в обозначениях определений 2.5, 2.6 и 2.4). Конические точки типа c , иначе говоря, центральные конические точки, образованы склейкой вдоль выпуклого или вертикального гиперболического сегмента m и горизонтального сегмента l , отвечающего квадрике с параметром b (в обозначениях определений 2.4–2.6). Напомним, что мы не рассматриваем склейки вдоль невыпуклых сегментов гипербол.

Введем обозначения склеек, показывающих, какие именно конические точки образовались: $\Delta_\beta(\Omega)_c^2$ обозначает что произошла склейка двух экземпляров элементарной области Ω с образованием центральной конической точки типа c , $\Delta_\beta(\Omega)_y^2$ обозначает что произошла склейка двух экземпляров элементарной области Ω с образованием конической точки типа y , $\Delta_\beta(\Omega)_x^2$ обозначает, что произошла склейка двух экземпляров элементарной области Ω с образованием конической точки типа x . Удвоенные индексы показывают, что склейка произошла с образованием двух конических точек, например $\Delta_\beta(\Omega)_{2y}^2$ – область, склеенная из двух экземпляров области Ω с образованием двух конических точек типа y .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Любая обобщенная область Δ , не являющаяся элементарной областью, склеенная из элементарных областей одного класса эквивалентности и не содержащая конических точек, эквивалентна области, принадлежащей одной из следующих серий:

- конечная серия, состоящая из четырех “простейших удвоенных” областей вида $\Delta_\alpha(2\Omega)$, которые получаются в результате склейки вдоль одного выпуклого эллиптического сегмента двух экземпляров элементарной области Ω , эквивалентной A'_0, A'_1, A_2, A'_2 ;
- бесконечная серия, состоящая из “гиперболических лент” $\Delta_\alpha(kA_0)$, $k > 1$, полученных путем последовательной склейки k экземпляров A_0 с образованием двух свободных эллиптических ребер и $2k$ свободных гиперболических ребер; эти области гомеоморфны диску;
- бесконечная серия, состоящая из “гиперболических колец” $\Delta_\alpha(kA_0)^2$, $k > 0$; свободная граница – это объединение $2k$ свободных гиперболических ребер;
- бесконечная серия, состоящая из “эллиптических лент” $\Delta_\alpha(2B_k)$; для этих областей свободная граница – это объединение двух свободных эллиптических ребер и четырех свободных гиперболических ребер; эти области гомеоморфны диску;

– бесконечная серия, состоящая из “эллиптических колец” $\Delta_\alpha(2C_k)$; для этих областей свободная граница – это объединение двух свободных эллиптических ребер.

Примеры областей изображены на рис. 3.

Рис. 3. Обобщенные области без конических точек. Жирным выделены ребра склейки

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элементарную область Ω из списка элементарных областей и обобщенную область Δ , которая получается из нее с помощью склеек, указанных выше.

Пусть Ω принадлежит первой серии элементарных областей (серия A) и при этом не эквивалентна A_0 . В такой области Ω есть лишь один эллиптический сегмент. В результате все обобщенные области Δ , которые получаются из этой обобщенной области, целиком принадлежат первой серии (“удвоенные области”).

Пусть Ω эквивалентна A_0 . У области A_0 есть два строго выпуклых сегмента. Последовательные склейки вдоль этих сегментов приводят к склейке либо в длинную полосу kA_0 , гомеоморфную диску (“гиперболическая лента”), либо в кольцо, если можно склеить две свободные эллиптические границы области $\Delta_\alpha(kA_0)$ (“гиперболическое кольцо”). Отметим, что в последнем случае склейка возможна, только если свободные эллиптические сегменты либо совпадают, либо получаются отражением относительно фокальной оси (при этом предполагается, что фиксированы такие изометричные вложения в плоскость всех элементарных областей, из которых склеена “лента” $\Delta_\alpha(kA_0)$, что склеиваемые эллиптические сегменты соседних элементарных областей совпадают).

Все эллиптические граничные сегменты этой области отвечают софокусным эллипсам с параметрами λ_1 и λ_2 (предположим при этом, что $\lambda_1 < \lambda_2$). Сегменты границы, вдоль которых может происходить склейка области Ω , принадлежащей серии элементарных областей B , отвечают эллипсу со значением параметра λ_1 . Так как склейка происходит вдоль всего сегмента границы, то получаемая область строится так же, как и “удвоенная”, в результате получаем область “эллиптическая лента” (если Ω эквивалентна области серии B) или “эллиптическое кольцо” (если Ω эквивалентна области серии C).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Любая обобщенная область Δ , не являющаяся элементарной областью, склеенная из элементарных областей различных классов эквивалентности и не содержащая конических точек, эквивалентна области, принадлежащей одной из следующих серий:

- конечная серия областей, состоящая из четырех областей вида $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$, где Ω_1 содержит фокусы семейства (1.1) и эквивалентна A'_1, A'_2, A_1, A_2 , а область Ω_2 не содержит фокусы семейства (1.1) и эквивалентна B'_1, B'_2, B_1, C_2 соответственно;

- бесконечная серия областей, состоящая из двух подсерий областей вида $\Delta_\alpha(kA_0 + B_0)$ и $\Delta_\alpha(kA_0 + A'_0)$, где $k > 0$, которые получаются в результате склейки “гиперболической ленты” и одной из областей A'_0 или B_0 вдоль эллиптических сегментов; эти области гомеоморфны диску;

- бесконечная серия областей, состоящая из трех подсерий областей вида

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha(A'_0 + kA_0 + B_0), \quad k \geq 0, \\ \Delta_\alpha(B_0 + kA_0 + B_0), \quad \Delta_\alpha(A'_0 + kA_0 + A'_0), \quad k > 0, \end{aligned}$$

которые получаются в результате склейки “гиперболической ленты”, возможно пустой, и двух областей A'_0 или B_0 ; эти области гомеоморфны диску.

Примеры областей изображены на рис. 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть обобщенная область Δ состоит из областей более чем одного класса эквивалентности. Сразу заметим, что тогда в состав области Δ не входят области бесконечных серий B_n и C_n при $n > 2$. Перечислим все ребра склейки, которые лежат на границе двух областей, принадлежащих различным классам эквивалентности (см. таблицу 1).

Заметим, что если в области Δ происходит одна из склеек между парами областей B'_1 и A'_1, B'_2 и A'_2, B_1 и A_1, C_2 и A_2 , то Δ исчерпывается этими областями с указанной склейкой. Таким образом, остается рассмотреть области Δ , в которых присутствует склейка вдоль малой дуги эллипса, лежащей целиком в верхней или нижней полуплоскости, т.е. области Δ , склеенные из A_0, A'_0 и B_0 .

Пусть область Δ состоит из областей, эквивалентных B_0, A_0 и A'_0 . Область A_0 эквивалентна двум областям A'_0 , склеенным вдоль горизонтального прямолинейного сегмента. Заменим все области A_0 в составе области Δ на пару областей A'_0 . Таким образом, все склейки в Δ являются последовательными склейками между областями, эквивалентными B_0 и A'_0 . Области B_0 и A'_0 обладают только одним выпуклым горизонтальным сегментом, следовательно, если они присутствуют в составе области Δ , то Δ гомеоморфна диску. Если

Таблица 1

Описание сегмента	В границе каких областей содержится
дуга эллипса, не пересекающая ось абсцисс	B_0, A_0, A'_0
дуга эллипса с концами на осях координат	B'_1, A'_1
дуга эллипса с концами на горизонтальном диаметре	B''_2, A'_2
дуга эллипса, содержащая одну точку горизонтального диаметра эллипса	B_1, A_1
эллипс	C_2, A_2

областей B_0 и A'_0 нет, то область Δ состоит лишь из A_0 и мы ее не будем рассматривать. Таким образом, любая область Δ , состоящая из элементарных областей A_0, A'_0 и B_0 , может быть построена по следующей схеме: к области “гиперболическая лента”, состоящей из k экземпляров A_0 , вдоль двух свободных эллиптических границ приклеиваются области B_0 и A'_0 . Получаем пять случаев, описанных во второй и третьей сериях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Любая обобщенная область Δ , склеенная из элементарных областей одного класса эквивалентности и содержащая конические точки, эквивалентна области, принадлежащей одной из следующих серий:*

- конечная серия, состоящая из обобщенных областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных A'_1 , а именно три области с непустой свободной границей, склеенные из двух экземпляров, $\Delta_\beta(A'_1)_y^2$, $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$, $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$, и две области без свободной границы – $\Delta_\beta(A'_1)_{cxy}^2$ и $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + (A'_1)_c^2)$;
- конечная серия, состоящая из обобщенных областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных A'_0 , а именно три области, склеенные из двух экземпляров, $\Delta_\beta(A'_0)_c^2$, $\Delta_\beta(A'_0)_y^2$, $\Delta_\beta(A'_0)_{cy}^2$, и две области $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + (A'_0)_c^2)$, $\Delta_\beta((A'_0)_c^2 + 2A'_0)$, склеенные из четырех экземпляров области A'_0 ;
- обобщенная область без свободной границы $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$, склеенная из двух экземпляров A'_2 путем склейки вдоль всех границ;
- обобщенная область без свободной границы $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$, склеенная из двух экземпляров A_1 путем склейки вдоль всех границ;
- бесконечная серия, состоящая из обобщенных областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных A_0 , а именно область, склеенная из двух экземпляров, $\Delta_\beta(A_0)_{2y}^2$, и две бесконечные подсерии областей $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2kA_0)$ и $\Delta_\beta((A_0)_y^2 + 2kA_0 + (A_0)_y^2)$;
- бесконечная серия, состоящая из обобщенных областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных B_k , а именно две серии областей $\Delta_\beta(B_k)_y^2$ и $\Delta_\beta(B_k)_{2y}^2$;
- бесконечная серия, состоящая из обобщенных областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных B'_k , а именно три бесконечные подсерии областей $\Delta_\beta(B'_k)_{yx}^2$, $\Delta_\beta(B'_k)_y^2$ и $\Delta_\beta(B'_k)_x^2$;

– бесконечная серия, состоящая из обобщенных областей, склеенных из элементарных областей, эквивалентных B''_k , а именно две подсерии областей $\Delta_\beta(B''_k)_x^2$ и $\Delta_\beta(B''_k)_{2x}^2$.

Примеры обобщенных областей с коническими точками, склеенных из областей серии B , изображены на рис. 4.

Рис. 4. Примеры обобщенных областей с коническими точками, склеенных из областей-лент серии B . Жирным выделены ребра склейки и окрестности конических точек

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим обобщенную область Δ , в которой коническая точка образована путем склейки двух экземпляров элементарной области Ω вдоль пары сегментов, имеющих общую точку, т.е. образующих угол в области Ω . Сразу заметим, что в этом случае элементарная область Ω не может быть эквивалентна областям без углов, а именно области A_2 (ограничена эллипсом) и областям серии C (бесконечная серия неодносвязных элементарных областей).

Разобьем все остальные элементарные области на классы по количеству углов. Для областей A_1 и A'_2 существует единственный вариант склейки в область с коническими точками, так как эти области содержат всего два сегмента границы, и при склейке одного угла мы автоматически должны продолжить склейку на второй.

Пусть обобщенная область Δ , содержащая конические точки, склеена из элементарных областей, эквивалентных A'_1 (можно считать, что A'_1 эквивалентна четверти эллипса). Элементарная область A'_1 имеет три угла. Один из них обязан образовывать коническую точку. Зафиксируем угол, лежащий на оси Oy . Склеим пару областей A'_1 вдоль дуги эллипса и вертикального сегмента. Если склеить полученную область вдоль горизонтального сегмента, то получим область, принадлежащую первой серии. Иначе, получим область $\Delta_\beta(A'_1)_y^2$. Аналогично, если фиксировать угол, лежащий на оси Ox , то получим

область $\Delta_\beta(A'_1)^2_x$. Осталось рассмотреть случай, когда конической точкой будет точка в начале координат. Тогда у полученной области $\Delta_\beta(A'_1)^2_c$ существует два строго выпуклых сегмента. При склейке вдоль них двух экземпляров $\Delta_\beta(A'_1)^2_c$ получаем область $\Delta_\beta((A'_1)^2_c + (A'_1)^2_c)$ без границы.

Рассмотрим обобщенные области с коническими точками, склеенные из областей A'_0 . На роль конической точки претендуют два угла этой области – центральный и лежащий на оси Oy . Если присутствуют оба – то область эквивалентна $\Delta_\beta(A'_0)^2_{cy}$. Рассмотрим область $\Delta_\beta(A'_0)^2_y$, склеенную из пары областей A'_0 с конической точкой типа y . К этой области нельзя приклеить ни одного экземпляра A'_0 , так как остались лишь прямолинейные и невыпуклые сегменты. В области $\Delta_\beta(A'_0)^2_c$ есть два эллиптических сегмента, которые могут быть заклеены либо парой областей $\Delta_\alpha(2A'_0)$ (тогда в полученной области будет по-прежнему одна коническая точка), либо вторым экземпляром $\Delta_\beta(A'_0)^2_c$ (полученная область будет содержать уже две конические точки).

Обобщенные области, состоящие из элементарных областей серии B , в качестве одной из склеек обязательно содержат склейку вдоль выпуклого эллиптического сегмента. В этом случае обобщенные области с коническими точками естественно делятся на два типа – по количеству конических точек. Заметим, что эти конические точки имеют тип y , если область B эквивалентна B_k , типы c и y , если область B эквивалентна области B'_k , и типы c , если область B эквивалентна B''_k .

Пусть обобщенная область Δ , содержащая конические точки, состоит из элементарных областей, эквивалентных A_0 . Обобщенная область $\Delta_\beta(A_0)^2_y$, склеенная с образованием одной конической точки, имеет в качестве возможного сегмента дальнейшей склейки пару выпуклых эллиптических сегментов. Если их склеить друг с другом, то полученная область будет содержать две конические точки. Если оставить эти сегменты не склеенными, то к области $\Delta_\beta(A_0)^2_y$ можно приклеить обобщенную область $\Delta_\alpha(2A_0)$. Полученная в результате описанной склейки область опять будет иметь два эллиптических сегмента в составе свободной границы, вследствие чего эту процедуру можно повторить многократно. Вторым вариантом склейки является приклейка вдоль двух эллиптических сегментов еще одного экземпляра области $\Delta_\beta(A_0)^2_y$. Таким образом, получаем две последние серии, различающиеся количеством конических точек. Предложение 2.4 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Любая обобщенная область Δ , склеенная из элементарных областей различных классов эквивалентности и содержащая конические точки, эквивалентна области, принадлежащей одной из следующих серий:*

- обобщенная область $\Delta_\beta((A'_1)^2_c + C_1)$;
- бесконечная серия областей $\Delta_\beta((A'_0)^2_c + 2kA_0)$;
- бесконечная серия областей, а именно четыре подсерии вида $\Delta_\beta((A'_0)^2_c + 2kA_0 + 2B_0)$, $\Delta_\beta((A_0)^2_y + 2kA_0 + 2B_0)$, $\Delta_\beta((A'_0)^2_c + 2kA_0 + 2A'_0)$ и $\Delta_\beta((A_0)^2_y + 2kA_0 + 2A'_0)$, получающиеся приклейкой к двойной гиперболической ленте из $2k$ экземпляров A_0 обобщенной области ($\Delta_\beta(A_0)^2_y$ или $\Delta_\beta(A'_0)^2_c$) с конической точкой с одного конца и пары элементарных областей с другого конца (области $\Delta_\alpha(2B_0)$ или области $\Delta_\alpha(2A'_0)$);

– бесконечная серия областей с двумя коническими точками, а именно две подсерии вида $\Delta_\beta((A'_0)_c)^2 + 2kA_0 + (A'_0)_c^2$ и $\Delta_\beta((A_0)_y)^2 + 2kA_0 + (A'_0)_c^2$, получающиеся приклеивкой к двойной гиперболической ленте из $2k$ экземпляров A_0 обобщенной области с конической точкой с обоих концов $(\Delta_\beta(A_0)_y^2$ или $\Delta_\beta(A'_0)_c^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала заметим следующий факт – любая элементарная область однозначно определена, если известна пара дуг границы, сходящихся в некоторой вершине излома границы области. Таким образом, если обобщенная область Δ содержит конические точки, то в качестве подобласти она содержит одну из областей, описанных в предложении 2.4, – обобщенных областей, состоящих из элементарных областей одного класса эквивалентности. Поэтому для того, чтобы описать произвольную обобщенную область Δ , склеенную из элементарных областей различных классов эквивалентности, необходимо описать возможные склейки подобласти $\tilde{\Delta}$, склеенной из областей одного класса эквивалентности Ω , с различными элементарными областями. Далее заметим, что приклеивка новых областей возможна лишь вдоль эллиптических сегментов (см. подробнее определения 2.5–2.7).

Область $\tilde{\Delta}$ должна иметь свободную границу, причем в ее составе обязательно должны находиться выпуклые эллиптические сегменты (так как иначе ничего к этой области по определению приклеить нельзя).

Пусть Ω эквивалентна A'_1 . В этом случае возможной областью для склейки (см. таблицу 1 сегментов из доказательства предложения 2.3) является область B'_1 , в качестве области $\tilde{\Delta}$ подходит только область $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$, в результате получится область $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1)$.

Пусть Ω эквивалентна A_0 или A'_0 . Соответствующие им обобщенные области $\tilde{\Delta}$ эквивалентны $\Delta_\beta(A_0)_y^2$ или $\Delta_\beta(A'_0)_c^2$. К этим обобщенным областям можно приклеить либо пару областей A_0 , либо пару областей B_0 (пара областей склеена вдоль выпуклого гиперболического или вертикального сегмента). При добавлении пары областей, эквивалентных A_0 , к области $\tilde{\Delta}$ у новой области остается свободной такая же пара эллиптических сегментов границы, таким образом, склейку можно повторить. В результате область Δ можно представить как склеенную из трех кусков – области $\Delta_\beta(A_0)_y^2$ или $\Delta_\beta(A'_0)_c^2$, k пар областей A_0 (возможно, $k = 0$) и области Δ' , которая склеена из пары элементарных областей так, что в часть свободной границы входят выпуклые дуги двух эллипсов. По классификации выше получаем, что область Δ' , не содержащая конических точек, эквивалентна либо паре областей B_0 , либо паре областей A'_0 , склеенных вдоль выпуклого гиперболического или вертикального сегмента. В этом случае в полученной области Δ существует только одна коническая точка. Область Δ' , содержащая конические точки, эквивалентна либо области $\Delta_\beta(A'_0)_c^2$, либо области $\Delta_\beta(A_0)_y^2$. В этом случае область Δ будет иметь две конические точки.

На этом список $\tilde{\Delta}$, как легко видеть, исчерпан. Следовательно, предложение 2.5 полностью доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Любая обобщенная область содержит не более трех конических точек, причем все случаи реализуются.

2.4. Постановка билиардной задачи для обобщенной области.

Пусть Δ – обобщенная билиардная область. Определим билиардное движение внутри нее. Область Δ состоит из ряда элементарных областей Ω_i , склеенных по ряду правил, перечисленных выше. В частности, любые элементарные области Ω_i и Ω_j склеиваются только по “общим” сегментам границы (т.е. по таким их граничным сегментам, образы которых при изометричных погружениях областей Ω_i и Ω_j или их двулистных накрытий в плоскость совпадают), причем мы запрещаем все склейки, приводящие либо к углам больше чем π на границе полученной обобщенной области, либо к углам больше чем 2π во внутренних точках этой области.

Опишем фазовое пространство M^4 обобщенной билиардной системы. Обозначим через P_i объединение открытых граничных сегментов области Ω_i , не являющихся ребрами склейки. Определим

$$M_{\Omega_i}^4 := \{(x, v) \mid x \in \Omega_i, v \in T_x \Omega_i, |v| > 0\} / \sim,$$

где отношение эквивалентности задается так

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \iff x_1 = x_2 \in P_i, \quad |v_1| = |v_2|, \quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1} P_i.$$

Здесь через $T_x P$ обозначена касательная плоскость к области Ω в точке x , а через $|v|$ – евклидова длина вектора v .

Далее, склеим многообразие M^4 из $M_{\Omega_i}^4$. Обозначим через Q_{ij} одно из ребер склейки (их может быть несколько) области, вдоль которого склеиваются элементарные области Ω_i и Ω_j . Тогда если Ω_i и Ω_j изометрично вложены в плоскость так, что образы склеиваемых сегментов при этих вложениях совпадают и склеиваются по тождественному отображению, а сами области лежат по одну и ту же сторону от этих сегментов, многообразия $M_{\Omega_i}^4$ и $M_{\Omega_j}^4$ склеиваются по следующему правилу:

$$\begin{aligned} (x_1, v_1) \in M_{\Omega_i}^4 \sim (x_2, v_2) \in M_{\Omega_j}^4 \\ \iff \\ x_1 = x_2 \in Q_{ij}, \quad |v_1| = |v_2|, \quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1} Q_{ij}. \end{aligned}$$

Аналогично определяется правило склеивания $M_{\Omega_i}^4$ и $M_{\Omega_j}^4$ в общем случае.

Мы получаем, что траектория определенной таким образом билиардной системы “перескакивает” с одной элементарной области на другую в точках пересечения с ребрами склейки и отражается по стандартному закону отражения при ударе о границу области Δ .

Оговорим отдельно случай конической точки. В этом случае, как легко понять из соображений непрерывности, закон отражения будет выглядеть так – материальная точка, проходя по элементарной области Ω , попав в коническую точку, отразится по той же прямой и будет продолжать находиться на той же элементарной области Ω . То есть “перескакивание” материальной точки в конце ребра склейки возможно, только если локально в этой вершине излома определена склейка четырех элементарных областей.

Очевидно, что при таком определении фазового многообразия M^4 сохраняется интегрируемость системы, а именно сохраняется дополнительный интеграл Λ – параметр софокусной квадрики, которой касается билиардная траектория. Это связано с тем, что граница любой элементарной области Ω_i , входящая в состав обобщенной области Δ , и, в частности, все ребра склейки переходят в дуги одного и того же семейства софокусных квадрик при изометричном погружении области Ω_i или ее двулистного накрытия в плоскость.

2.5. Особые траектории билиярда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Фиксируем обобщенную область Δ , состоящую из элементарных областей Ω_i . Обозначим через $\Lambda_{\min}$ значение параметра наименьшего эллипса такого, что все области Ω_i (точнее, их образы или образы их двулистных накрытий при изометричных погружениях в плоскость) лежат внутри него. Таковой найдется, так как мы предполагаем, что все элементарные области Ω_i компактны. Обозначим через $\Lambda_{\max}$ минимальное значение функции Λ такое, что область между ветвями гиперболы семейства (1.1), отвечающей значению параметра $\lambda = \Lambda_{\max}$, не пересекается с внутренностью ни одной из областей Ω_i (при этом полагаем, что внутренность между ветвями гиперболы с параметром a пуста). Тогда назовем *особыми* следующие значения интеграла Λ :

- минимальное значение интеграла $\Lambda_{\min}$,
- седловое значение интеграла $\Lambda = b$,
- максимальное значение интеграла $\Lambda_{\max}$.

Все остальные значения интеграла Λ для области Δ назовем *неособыми*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. *Особыми траекториями* назовем траектории, лежащие на особых поверхностях уровня интеграла Λ .

Опишем эти траектории. При минимальном значении интеграла $\Lambda_{\min}$ все траектории представляют собой не кусочно-прямолинейные движения, а движения вдоль дуг эллипса с параметром $\Lambda_{\min}$. При седловом значении интеграла $\Lambda = b$ траектории обладают следующим свойством: касательные к траектории поочередно проходят через фокусы семейства (1.1) (фокус меняется либо при отражении, либо при переходе с одной элементарной области на другую). При максимальном значении интеграла $\Lambda_{\max}$ все траектории касаются гиперболы с параметром $\Lambda_{\max}$, т.е. при $\Lambda_{\max} < a$ представляют собой движения вдоль дуг гиперболы с параметром $\Lambda_{\max}$, при $\Lambda_{\max} = a$ представляют собой вертикальные движения вдоль оси ординат. Таким образом, поверхности уровня интеграла Λ при максимальном и минимальном значениях в многообразии Q^3 являются объединением нескольких окружностей.

§ 3. Топология изоэнергетических поверхностей обобщенных билиардов. Вычисление грубых инвариантов – молекул Фоменко

3.1. Описание атомов – бифуркаций. Приведем примеры атомов, описывающих перестройки торов для решений билиардной задачи. Более подробно построение двумерных и трехмерных атомов изложено в работах [8], [14], [15]. Для начала опишем двумерные атомы.

Двумерный атом A гомеоморфен диску – он расслоен на концентрические окружности, стягивающиеся на особый слой – центральную точку. Двумерный атом B представляет собой перестройку одной окружности в две, особым слоем этого атома является “восьмерка”. Двумерный атом C_2 представляет собой перестройку двух окружностей в две.

Примеры двумерных атомов серий B_n , D_n представлены на рис. 5.

Рис. 5. Примеры двумерных атомов серий B и D , а именно атомы B_4 и D_5

Поясним, что атом B является частным случаем серии B_n (при $n = 1$), а атом C_2 частным случаем серии максимально симметричных атомов D_n (при $n = 2$). Число n в трехмерных атомах B_n , D_n – это число критических окружностей этих атомов. Примем обозначение, при котором B_0 и D_0 гомеоморфны атому A , а D_1 гомеоморфен атому B .

Для получения трехмерных атомов без звездочек из соответствующих двумерных необходимо рассмотреть прямое произведение двумерного атома на окружность. При этом все неособые слои перейдут в торы (прямое умножение окружности на окружность есть тор), а особые – в особые слои (в случае атома A это будет окружность).

Для описания бифуркаций решений билиардной задачи в некоторых обобщенных областях нам также потребуются неориентируемые 3-атомы A^* , A^{**} , B_n^* , B_n^{**} .

Рис. 6. Трехмерные атомы A , B , A^*

Атом A^* (см. рис. 6) получается из двумерного атома B нетривиальным умножением на окружность: необходимо “прокрутить” атом B на π . В результате атому A^* будет соответствовать перестройка одного тора в один (в отличие от трехмерного атома B , который перестраивает два тора в один). Атом A^{**} можно получить аналогичным построением с двумерным атомом C_2 . При этом атом A^{**} также будет описывать перестройку одного тора в один, но число критических окружностей при этом будет равно двум.

Покажем конструкцию получения трехмерного атома B_n^* , $n > 0$, со звездочками. Рассмотрим особый слой двумерного атома B_n . Он представляет собой набор $n + 1$ окружностей, последовательно склеенных по n точкам. Возьмем окружность, на которой расположена только одна точка склейки. Отметим на ней точку-звездочку, отличную от точки склейки. Рассмотрим теперь двумерный атом B_{2n+1} , который назовем “дублем” атома B_n^* . Рассмотрим на особом слое этого атома центральную особую точку. Разрежем атом вдоль отрезка, трансверсального к особому слою и проходящему через эту точку. При склейке каждой половины вдоль образованных граничных отрезков мы получим атомы B_n . Определим сохраняющее ориентацию отображение τ атома B_{2n+1} в себя, при котором точки одной половины атома переходят в другую, при этом τ^2 – тождественный диффеоморфизм, и центральная точка, которую назовем точкой-звездочкой, остается на месте так, что это отображение действует на полученные путем разреза и склейки атомы B_n переводом их друг в друга. Рассмотрим прямое произведение атома-дубля B_{2n+1} на отрезок $[0, 1]$ и склеим друг с другом основания $B_{2n+1} \times \{0\}$ и $B_{2n+1} \times \{1\}$ полученного цилиндра $B_{2n+1} \times [0, 1]$ по инволюции τ . В результате получим трехмерный атом B_n^* со звездочкой.

Для получения трехмерного атома B_n^{**} , $n > 0$, в качестве дубля необходимо рассмотреть атом D_{2n+2} . Звездочки на особом слое двумерного атома B_n необходимо расположить симметрично, добавляя к двумерному атому B_n^* , описанному выше, симметричную звездочку уже на другой окружности.

3.2. Аналог теоремы Лиувилля (см. [8], [17]) – неособые поверхности уровня двух интегралов гомеоморфны несвязному объединению нескольких торов. Опишем неособые поверхности уровня интеграла Λ в изоэнергетическом многообразии Q^3 и покажем, что они гомеоморфны несвязному объединению нескольких торов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для всех значений $\Lambda_{\min} < \lambda < b$ поверхность уровня интеграла $\Lambda = \lambda$ в изоэнергетической поверхности Q^3 динамической системы бильярда в обобщенной области гомеоморфна объединению торов.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Торы, соответствующие уровням интеграла $\Lambda_{\min} < \lambda < b$ назовем *эллиптическими*, так как касательные к траекториям бильярда на этом уровне касаются эллипса семейства (1.1) с параметром λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Сделаем несколько оговорок. Так как произвольная обобщенная область Δ склеена из элементарных областей, то согласно классификации элементарных областей (см. предложение 2.1) каждая элементарная область или ее двулистное накрытие допускает изометричное

погружение в плоскость. Допуская некоторую вольность речи, мы всюду далее будем говорить об элементарных областях как о подмножествах плоскости (подразумевая под этим образы простейших элементарных областей, из которых состоит рассматриваемая элементарная область, при их изометричных вложениях в плоскость, согласованных на общих граничных сегментах).

Разобьем доказательство на три шага. В начале опишем поверхности уровня интегралов для элементарных областей. Затем покажем, что склейка элементарных областей вдоль ребер склейки продолжается до склейки поверхностей уровня интегралов.

Нам известно, что $\lambda < b$. Касательные к траекториям бильярда на этом уровне будут касаться некоторого эллипса с параметром λ . Назовем этот эллипс интегральным. Вырежем из каждой элементарной области Ω_i , входящей в состав Δ , внутренность интегрального эллипса. Обозначим полученное многообразие (не обязательно связное) через $\tilde{\Delta}$. Полученное многообразие является проекцией уровня интеграла на область Δ .

Шаг 1: элементарные области.

Вырежем из элементарной области Ω область, лежащую внутри интегрального эллипса (область, в которую не проектируются точки, лежащие на этом уровне интеграла), и обозначим полученную область как $\tilde{\Omega}$. В каждой внутренней точке x элементарной области Ω определены 4 вектора скорости v_i , $i \in \{1, \dots, 4\}$, так, что (x, v_i) лежит на соответствующем уровне интегралов. Векторы скорости v_i будем различать по направлению обхода вокруг интегрального эллипса (по или против часовой стрелки) и по направлению (к интегральному эллипсу или от него). Тогда обозначим экземпляры области, оснащенные векторами скорости, следующим образом: $(\tilde{\Omega}, v_1)$ – векторы скорости направлены по часовой стрелке к интегральному эллипсу, $(\tilde{\Omega}, v_2)$ – векторы скорости направлены по часовой стрелке от интегрального эллипса, $(\tilde{\Omega}, v_3)$ – векторы скорости направлены против часовой стрелки к интегральному эллипсу, $(\tilde{\Omega}, v_4)$ – векторы скорости направлены против часовой стрелки от интегрального эллипса. Заметим, что согласно закону отражения на дугах эллипсов границы склеиваются $(\tilde{\Omega}, v_1)$ с $(\tilde{\Omega}, v_2)$ и $(\tilde{\Omega}, v_3)$ с $(\tilde{\Omega}, v_4)$, а на дугах гипербол и прямолинейных сегментах – границы $(\tilde{\Omega}, v_1)$ с $(\tilde{\Omega}, v_3)$ и $(\tilde{\Omega}, v_2)$ с $(\tilde{\Omega}, v_4)$. На интегральном эллипсе векторы v_1 и v_2 , а также v_3 и v_4 тождественно совпадают. Поэтому в тех случаях, когда $\tilde{\Omega}$ представляет собой четырехугольник (все области, кроме A_2 , A_0 и областей типа C), уровень интеграла гомеоморфен четырем четырехугольникам, склеенным по соотношениям выше, и, как легко видеть, представляет собой тор. В случае области A_0 уровень естественно разбивается на две компоненты связности (так как сама область $\tilde{\Omega}$ разбита на две компоненты) и гомеоморфен, аналогично предыдущему, двум торам. В случае областей A_2 и областей типа C проекция интегрального уровня $\tilde{\Omega}$ не имеет на границе дуг гипербол и прямолинейных отрезков и разбивается на две компоненты – с векторами v_1 и v_2 , направленными по часовой стрелке, и векторами v_3 и v_4 , направленными против часовой стрелки. В прообразе торов также будет два.

Шаг 2: поверхности уровня интеграла для обобщенных областей, не содержащих конических точек.

Пусть обобщенная область Δ не содержит конических точек и склеена из элементарных областей Ω_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Для того чтобы описать искомый уровень интеграла, разрежем Δ по ее ребрам склейки и рассмотрим отдельно прообразы $\tilde{\Omega}_i$. По предыдущему шагу это торы. Так как область Δ не содержит конических точек, то любые два ребра склейки не пересекаются. Рассмотрим торы – прообразы $\tilde{\Omega}_i$. В каждом торе прообраз любого ребра склейки – дуги эллипса – это цикл некоторого фиксированного типа, например типа $(1, 0)$. Этот факт напрямую следует из построения торов по предыдущему шагу. Разрежем каждый тор по этим циклам. Склеивка областей $\tilde{\Omega}_i$ и $\tilde{\Omega}_j$ в терминах векторов скорости v_i описывается следующим образом: $(\tilde{\Omega}_i, v_1)$ с $(\tilde{\Omega}_j, v_2)$, $(\tilde{\Omega}_i, v_2)$ с $(\tilde{\Omega}_j, v_1)$, $(\tilde{\Omega}_i, v_3)$ с $(\tilde{\Omega}_j, v_4)$ и $(\tilde{\Omega}_i, v_4)$ с $(\tilde{\Omega}_j, v_3)$. В результате склейка двух элементарных областей Ω_i и Ω_j вдоль ребра склейки a_{ij} продолжается до склейки пары разрезанных торов вдоль двух циклов одного типа. В итоге получается тор.

Шаг 3: поверхности уровня интеграла для обобщенных областей, содержащих конические точки.

Пусть обобщенная область Δ содержит конические точки. Удалим из области $\tilde{\Delta}$ компоненты связности без конических точек (в их прообразе лежат торы, как уже доказано), в результате получим $\tilde{\Delta}'$. Заметим, что если в составе области Δ все конические точки были центральными (это верно, например, для области $\Delta_\beta(2A'_1)_c$), то в области $\tilde{\Delta}$ конических точек уже нет и область $\tilde{\Delta}'$ пуста. Пусть теперь в области Δ все конические точки либо типа y , либо типа x . В каждой такой конической точке сходится дуга эллипса и либо прямолинейный сегмент – отрезок оси Ox , либо дуга гиперболы (быть может, вырожденной). Без ограничения общности можно считать, что многообразие $\tilde{\Delta}'$ связно. Легко понять из списка обобщенных областей, что, разрезав по эллиптическому ребру склейки многообразие $\tilde{\Delta}'$, мы получим область $\tilde{\Delta}''$, склеенную из двух элементарных областей-полос серии B вдоль одной или двух гиперболических дуг. В прообразе $\tilde{\Delta}''$ лежит либо один тор (если область $\tilde{\Delta}''$ односвязна), либо два.

Рассмотрим первый случай. Разрежем тор, лежащий в прообразе $\tilde{\Delta}''$, по точкам, проекции которых лежат на эллиптическом ребре склейки. Эти точки на данном торе образуют окружность – нетривиальный цикл (по построению). Обозначим векторы скорости, которыми оснащены точки на верхнем экземпляре области B через v_i , а на другом экземпляре области B – через w_i , сохраняя прежнюю нумерацию (см. шаг 1). Тогда на разрезанном торе граница – это две окружности, каждая из которых разделена на 4 равные части. Одна окружность S_1 оснащена следующими векторами S_1 : (v_1, v_3, w_1, w_3) – каждая из четвертей окружности S_1 оснащена своим типом векторов, которые склеиваются друг с другом либо по закону отражения (например, v_1 и v_3), либо по правилу склейки (например, v_1 и w_3). Все векторы, которыми оснащена окружность S_1 , направлены “внутрь” области $\tilde{\Delta}''$. Окружность S_2 будет оснащена векторами, направленными “наружу” S_2 : (v_2, v_4, w_2, w_4) . В неразрезанном торе эти окружности склеивались по правилу $(v_1, v_3, w_1, w_3) \sim (v_2, v_4, w_2, w_4)$ соответственно. После склейки области $\tilde{\Delta}''$ вдоль ребра излома в область с конической точкой, эти окружности будут склеены по следующим правилам

$(v_1, v_3, w_1, w_3) \sim (w_2, w_4, v_2, v_4)$ соответственно, т.е. фактически с поворотом окружности на π . При этом тор перейдет в тор.

Пусть в прообразе $\tilde{\Delta}''$ лежат два тора. Тогда в прообразе эллиптического ребра склейки лежат две окружности на каждом торе. Склеив два разрезанных тора по двум окружностям, получаем опять тор. Предложение 3.1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Для всех значений $b < \lambda < \Lambda_{\max}$ поверхность уровня интеграла $\Lambda = \lambda$ в изоэнергетической поверхности Q^3 динамической системы бильярда в обобщенной области, не содержащей конических точек, гомеоморфна объединению нескольких торов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Торы, соответствующие уровням интеграла $b < \lambda < \Lambda_{\max}$ назовем *гиперболическими*, так как касательные к траекториям бильярда на этом уровне касаются ветвей гиперболы семейства (1.1) с параметром λ .

Доказательство предложения 3.2 почти дословно повторяет доказательство предложения 3.1.

3.3. Описание бифуркаций торов бильярдной задачи в обобщенных областях с помощью трехмерных атомов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Трехмерный прообраз $\Lambda^{-1}(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ в изоэнергетической поверхности Q^3 для динамической системы бильярда в обобщенной области Δ , склеенной из элементарных областей одинаковых типов и не имеющей конических точек, гомеоморфен следующим трехмерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трехмерные):

- произведение тора на отрезок для трех “простейших удвоенных” областей вида $\Delta_\alpha(2\Omega)$, где элементарная область Ω эквивалентна A'_0, A'_1, A'_2, B_0 ;
- атом B для областей $\Delta_\alpha(2A_1), \Delta_\alpha(2C_1)$ и $\Delta_\alpha(A_0)^2$;
- атом C_2 для области $\Delta_\alpha(2A_2)$;
- атом B_n для областей, склеенных из эллиптических лент $\Delta_\alpha(2B_n)$, $n > 0$, и гиперболических лент $\Delta_\alpha(nA_0)$, $n > 1$;
- атом D_n для областей, склеенных из эллиптических колец $\Delta_\alpha(2C_n)$, $n > 1$, и гиперболических колец $\Delta_\alpha(nA_0)^2$, $n > 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Трехмерный прообраз $\Lambda^{-1}(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ в изоэнергетической поверхности Q^3 для динамической системы бильярда в обобщенной области Δ , склеенной из элементарных областей разных типов и не имеющей конических точек, гомеоморфен следующим трехмерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трехмерные):

- атом B для областей

$$\Delta_\alpha(A_2 + C_1), \quad \Delta_\alpha(A_0 + B_0);$$

- атом A^* для области

$$\Delta_\alpha(A_1 + B_1);$$

– атом B_n для областей

$$\Delta_\alpha(A'_0 + nA_0 + B_0), \quad \Delta_\alpha(nA_0 + B_0), \quad \Delta_\alpha(B_0 + nA_0 + B_0), \\ \Delta_\alpha(A'_0 + nA_0 + A'_0);$$

– произведение тора на отрезок для областей

$$\Delta_\alpha(A'_2 + B''_2), \quad \Delta_\alpha(A'_1 + B'_1), \quad \Delta_\alpha(A'_0 + B_0).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Трехмерный прообраз $\Lambda^{-1}(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ в изоэнергетической поверхности Q^3 для динамической системы бильярда в обобщенной области Δ , содержащей конические точки, гомеоморфен следующим трехмерным многообразиям (перечисленные ниже атомы трехмерные):*

– атом B для областей

$$\Delta_\beta(A'_1)^2_x, \quad \Delta_\beta(A'_1)^2_y, \quad \Delta_\beta((A'_1)^2_c + (A'_1)^2_c), \quad \Delta_\beta((A'_1)^2_c + C_1), \\ \Delta_\beta(A'_2)^2_{2x}, \quad \Delta_\beta(A_0)^2_{2y};$$

– атом A^* для областей

$$\Delta_\beta(A'_1)^2_{cxy}, \quad \Delta_\beta(A'_0)^2_c, \quad \Delta_\beta(A'_0)^2_{cy}, \quad \Delta_\beta((A'_0)^2_c + 2A'_0);$$

– атом A^{**} для областей

$$\Delta_\beta((A'_0)^2_c + (A'_0)^2_c), \quad \Delta_\beta(A_1)^2_{2y};$$

– атом B_n для областей

$$\Delta_\beta((A_0)^2_y + 2k(A_0)^2_y), \quad \Delta_\beta((A_0)^2_y + 2k(A_0)^2_y + (A_0)^2_y), \quad \Delta_\beta(B_k)^2_y, \\ \Delta_\beta(B_k)^2_{2y}, \quad \Delta_\beta((A_0)^2_y + 2kA_0 + 2B_0), \quad \Delta_\beta((A_0)^2_y + 2kA_0 + 2A'_0);$$

– атом B_n^* для областей

$$\Delta_\beta(B'_k)^2_{yx}, \quad \Delta_\beta(B'_k)^2_x, \quad \Delta_\beta((A'_0)^2_c + 2kA_0), \quad \Delta_\beta((A'_0)^2_c + 2kA_0 + 2B_0), \\ \Delta_\beta((A'_0)^2_c + 2kA_0 + 2A'_0), \quad \Delta_\beta((A_0)^2_y + 2kA_0 + (A'_0)^2_c);$$

– атом B_n^{**} для областей

$$\Delta_\beta(B''_k)^2_{2x}, \quad \Delta_\beta((A'_0)^2_c + 2kA_0 + (A'_0)^2_c);$$

– произведение тора на отрезок для областей

$$\Delta_\beta(A'_1)^2_y, \quad \Delta_\beta(A'_0)^2_y.$$

Для доказательства этих утверждений сформулируем и докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3.1. *Пробраз $\Lambda^{-1}(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ в изоэнергетической поверхности Q^3 для динамической системы бильярда в элементарной области Ω гомеоморфен следующим трехмерным многообразиям:*

- атом B для областей A_2, A_0 ;
- атом A^* для области A_1 ;
- атом D_n для области C_n ;
- атом B_n для $B_n, n > 0$;
- произведение тора на отрезок для областей A'_2, A'_1, A'_0, B_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элементарная область Ω эквивалентна элементарной области A_0 или A'_0 . Рассмотрим гиперболы h_λ семейства (1.1), каждая из которых задается параметром $\lambda \in (b, a]$. Дуги h_λ этих гипербол, попавшие в область Ω , не пересекаются, а их объединение замечает всю область Ω . Фиксируем значение параметра λ и фиксируем одну из двух дуг гиперболы h_λ (без ограничения общности можно полагать, что это правая дуга). Обозначим эту дугу $\check{h}_\lambda$ и фиксируем точку $x = (x_1, x_2) \in \check{h}_\lambda$, принадлежащую этой дуге. Оснастим точку x единичными векторами скорости v таким образом, чтобы полученные точки $(x, v) \in Q^3$ лежали на уровне интеграла $\Lambda = b$. При этом векторы скорости будут лежать на прямых, проходящих через точку x и фокусы семейства (1.1). Если точка x не лежит на фокальной прямой (т.е. $x_2 \neq 0$), то таких векторов v всего четыре $v_i, i \in \{1, \dots, 4\}$, где единичные векторы v_1 и v_4 направлены от фокусов (от левого и правого соответственно), а векторы v_2 и v_3 – к фокусам (к правому и левому соответственно). На границе области Ω по закону отражения имеем $(x, v_1) \sim (x, v_2)$ (соответственно $(x, v_3) \sim (x, v_4)$). Если точка $x = (x_1, x_2) = (x_1, 0)$, т.е. лежит на фокальной прямой, то $v_1 = v_2$ и $v_3 = v_4$, так как все векторы скорости лежат на фокальной прямой. Таким образом, прообразом каждой дуги $\check{h}_\lambda$ являются две восьмерки (или окружности в случае области A'_0), которые мы будем обозначать по направлению векторов как правые (оснащены векторами v_1 и v_2) и левые (оснащены векторами v_3 и v_4).

Рассмотрим отрезок s фокальной прямой, содержащийся в области или на границе. Рассмотрим внутреннюю точку $x \in s$ и оснастим ее единичным вектором скорости w так, чтобы (x, w) лежала бы на уровне интеграла $\Lambda = b$. Таких векторов, как было указано выше, всего два – направленных горизонтально к правому и левому фокусам. Если x – граничная точка отрезка s , то она по закону отражения оснащена двумя эквивалентными векторами. Оснащенные точки (x, w) образуют окружность. При этом каждой точке (x, w) однозначно можно сопоставить оснащенную дугу гиперболы семейства (1.1), проходящую через точку x . Легко понять, что прообраз $\Lambda^{-1}(b)$ представляет собой прямое произведение окружности (прообраз отрезка s) на восьмерку (случай области A_0) или окружность (случай области A'_0). Таким образом, для случая этих областей лемма доказана.

Пусть теперь область Ω эквивалентна области C_n . Каждая такая область представляет собой n -листное накрытие над областью C_1 , ограниченной дугами двух эллипсов и содержащей один отрезок фокальной прямой. Обозначим параметры этих эллипсов как λ_1 (внешний) и λ_2 (внутренний). Рассмотрим эллипс e_λ с параметром λ , принадлежащий семейству (1.1), причем $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$. Этот эллипс целиком лежит в области C_1 , а объединение всех эллипсов e_λ целиком заполняет область C_1 . Для каждого эллипса e_λ рассмотрим его n -листное

накрытие e_λ^n . Все такие накрытия, в свою очередь, полностью заматают область C_n . Фиксируем $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ и оснастим точки $x \in e_\lambda^n$ единичными векторами скорости v так, чтобы получившиеся точки (x, v) лежали на уровне интеграла $\Lambda = b$. Как уже описывалось выше, если точка x не лежит на фокальной прямой, то она может быть оснащена четырьмя векторами скорости v_i . Кривая e_λ^n имеет с фокальной прямой n пересечений. Каждая точка на пересечении может быть оснащена только двумя векторами скорости $v_1 = v_4, v_2 = v_3$ (мы используем обозначения, указанные выше). В результате прообраз e_λ^n в Q^3 при $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ распадается на две компоненты связности, каждая из которых гомеоморфна особому слою плоского атома D_n . Если $\lambda = \lambda_i$, то компонента связности всего одна, так как каждая точка оснащается вдвое меньшим количеством векторов за счет закона отражения. Как легко понять, весь прообраз $\Lambda^{-1}(b)$ представляет собой прямое произведение окружности и плоского атома D_n . В результате получим симметричный трехмерный атом D_n .

Пусть теперь область Ω эквивалентна области B_n . В этом случае в качестве заполняющих область кривых можно рассмотреть дуги накрытий e_λ^n , рассмотренных выше. В результате аналогичной конструкции получаем атомы B_n или, если $n = 0$ или Ω эквивалентна B'_1 или B''_2 , прямое произведение тора на отрезок.

Пусть элементарная область Ω эквивалентна элементарной области вида A'_1 или A'_2 . Рассмотрим гиперболы h_λ семейства (1.1), каждая из которых задается параметром $\lambda \in (b, a]$. Дуги гипербол, попавшие в область Ω , не пересекаются, а их объединение – это область Ω без одного (в случае области A'_1) или двух (в случае области A'_2) горизонтальных отрезков, один конец которых находится в фокусе, а другой – на границе области. Фиксируем значение параметра λ и фиксируем одну из двух дуг гиперболы h_λ (без ограничения общности можно полагать, что это правая дуга). Обозначим эту дугу h_λ и рассмотрим точку $x = (x_1, x_2) \in h_\lambda$, принадлежащую этой дуге. Рассмотрим точки многообразия Q^3 , которые лежат на уровне интеграла $\Lambda = b$ и проектируются в точку x . Если точка x не принадлежит границе области Ω и не лежит на фокальной прямой (т.е. $x_2 \neq 0$), то прообраз состоит из четырех точек (x, v_i) , $i \in \{1, \dots, 4\}$, где единичные векторы v_1 и v_4 направлены от фокусов (левого и правого соответственно), а векторы v_2 и v_3 – к фокусам (правому и левому соответственно). Устремим точку x вдоль дуги h_λ к границе области Ω . Тогда в пределе (x, v_1) совпадет с (x, v_2) (соответственно (x, v_3) с (x, v_4)) по закону отражения. На отрезке фокальной прямой при этом (x, v_1) совпадет с (x, v_2) так как $v_1 = v_2$ (направления к правому фокусу и от левого одинаковы на фокальной прямой). То же самое произойдет и с векторами v_3 и v_4 . Значит, прообразом каждой дуги h_λ являются две окружности, которые мы будем обозначать по направлению векторов как правые (те, что оснащены векторами v_1 и v_2) и левые. Теперь рассмотрим прообраз отрезков, которые не заполняются гиперболами. Без ограничения общности рассмотрим горизонтальный отрезок границы области Ω , один конец которого лежит в правом фокусе. Мы утверждаем, что прообраз этого отрезка также окружность. В самом деле, в прообразе фокуса лежат точки вида (x_f, w_1, w_2) , где (w_1, w_2) – единичный вектор скорости, без ограничения общности направленный вверх, т.е. $w_1^2 + w_2^2 = 1$ и $w_2 \geq 0$.

Значит, прообраз можно параметризовать значением $w_1 \in [-1, 1]$. Прообраз полуинтервала $(x_f, a]$ – это интервал. Каждая точка полуинтервала, кроме точки a , оснащена парой векторов $(\pm 1, 0)$, а точка a по закону отражения на данном уровне интеграла может быть оснащена лишь одним вектором. Склеивая отрезок и интервал по граничным точкам, получаем окружность. Будем называть ее правой фокусной окружностью.

Устремим оснащенную единичными векторами скорости дугу $\check{h}_\lambda$ к правому фокусному отрезку, т.е. устремим λ к b . При λ , достаточно близких к b , при движении точки x дуги $\check{h}_\lambda$ вектор скорости v_1 , которым оснащена точка x , совершает почти полный оборот на π – на отрезке между фокусами он направлен вправо, а на границе направлен почти горизонтально влево, поворачиваясь по часовой стрелке при стремлении к границе области. Если же оснастить точку x дуги $\check{h}_\lambda$ вектором скорости v_2 , то при стремлении x к границе области вектор скорости v_2 повернется на небольшой угол против часовой стрелки. В пределе при стремлении дуги $\check{h}_\lambda$, оснащенной векторами v_1 , к горизонтальному отрезку часть дуги перейдет в фокус, оснащенный векторами скорости, а часть дуги – в часть отрезка $[x_f, a]$, оснащенного векторами скорости, направленными влево. Дуга $\check{h}_\lambda$, оснащенная векторами скорости v_2 , в пределе целиком перейдет в часть отрезка $[x_f, a]$, оснащенного векторами скорости, направленными вправо.

Теперь рассмотрим прообраз особого слоя целиком. Все правые (и все левые аналогично) окружности образуют открытый цилиндр. Если Ω эквивалентна A'_2 , то эти два цилиндра склеиваются в тор вдоль фокусных окружностей. Если Ω эквивалентна A'_1 , то с одного конца цилиндры склеиваются вдоль фокусной окружности, а с другой – вследствие закона отражения. Таким образом, прообраз особого слоя – это тор, на котором можно выделить цикл типа $(1, 2)$ (область A'_2) или $(1, 1)$ (область A'_1), который соответствует движению вдоль горизонтальной границы области. Рассмотрим чуть более подробно случай области A'_1 . На рис. 7 ниже показано, как локально на этом торе выглядят прообразы дуг $\check{h}_\lambda$ и прообраз фокуса, оснащенный векторами скорости.

Пусть элементарная область Ω эквивалентна элементарной области вида A_1 или A_2 . Проведем построение, аналогичное построению выше для областей A'_1 или A'_2 . При этом будем говорить, что дуги $\check{h}_\lambda$ состоят из двух дуг – верхней $\check{h}_\lambda^u$ (расположенной в верхней полуплоскости $y > 0$) и нижней $\check{h}_\lambda^d$ (расположенной в нижней полуплоскости $y < 0$). Прообразом дуг $\check{h}_\lambda^u$ и $\check{h}_\lambda^d$, оснащенных парами векторов скорости v_1, v_2 и v_3, v_4 , как показано выше, являются окружности. Целиком прообразом дуги $\check{h}_\lambda$, оснащенной парой векторов скорости, является восьмерка – так как дуги $\check{h}_\lambda^u$ и $\check{h}_\lambda^d$ имеют общую точку, лежащую на фокальной прямой. Прообразом отрезка $[x_f, a]$ является пара окружности (прообраз фокуса) и отрезка $[x_f, a]$, оснащенный векторами скорости, направленными горизонтально вправо и горизонтально влево, где граничные точки отрезка (точки x_f , оснащенные векторами $(1, 0)$ и $(-1, 0)$) отождествлены с двумя точками окружности. Устремим теперь λ к b и покажем, как восьмерка переходит в прообраз отрезка $[x_f, a]$. Как показано выше, дуга $\check{h}_\lambda^u$, оснащенная векторами v_1 , при стремлении λ к b переходит в фокус, оснащенный векторами,

направленными вниз, и отрезок $[x_f, a]$, оснащенный векторами, направленными вправо. Далее, дуга $\check{h}_\lambda^d$, оснащенная векторами v_3 , при стремлении λ к b переходит в фокус, оснащенный векторами, направленными вниз, и отрезок $[x_f, a]$, оснащенный векторами, направленными вправо. Таким образом, предел у этих дуг один и тот же. Разбирая оставшиеся пары дуг, приходим к выводу, что при склейке дуг $\check{h}_\lambda$, оснащенных векторами v_1 и v_2 , и дуг $\check{h}_\lambda$, оснащенных векторами v_3 и v_4 , происходит “перекрутка”, при которой оснащенные верхние дуги $\check{h}_\lambda^u$ склеиваются с оснащенными нижними дугами $\check{h}_\lambda^d$. На рис. 7 показано, как локально на особом слое 3-атома B выглядят прообразы дуг $\check{h}_\lambda$ и прообраз фокуса, оснащенный векторами скорости.

Рис. 7. Строение бифуркации вблизи фокуса. Жирным выделен прообраз правого фокусного отрезка. Прилегающие к нему восьмерки – это прообразы гипербол, замещающих область A_1 или A_2

Если область Ω эквивалентна элементарной области A_2 , то “перекруток” будет две и особый слой совпадет с особым слоем атома B . Если же Ω эквивалентна элементарной области A_1 , то, когда дуга $\check{h}_\lambda$ совпадет с границей области, верхние дуги склеятся с верхними, а нижние с нижними, вследствие чего “перекрутки” не произойдет. В результате получим нечетное число “перекруток” и особый слой будет эквивалентен особому слою атома A^* .

Лемма 3.1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.3. Пусть область Δ эквивалентна области $\Delta_\alpha(2A_1)$. Рассмотрим заполнение этой области дугами софокусных эллипсов. Тогда, почти полностью повторяя рассуждение выше для области A_2 , заменой дуг гипербол на дуги эллипсов получаем, что особый слой будет гомеоморфен особому слою атома B .

Пусть область Δ эквивалентна области $\Delta_\alpha(A'_0)^2$. Рассмотрим торы T^u и T^d , которые представляют собой особые слои динамической системы билиарда в области A_0 (см. лемму 3.1). На каждом из этих торов есть выделенный цикл, образованный точками фокальной прямой, оснащенными векторами скорости, направленными горизонтально. Разрежем каждый тор по окружности, образованной точками граничного эллипса, оснащенными векторами v_1 и v_4 . Два

разрезанных тора склеиваются вдоль граничных окружностей вследствие закона о переходе с верхней области на нижнюю: $(x, v_1)_u \sim (x, v_2)_d$ и так далее. В полученном таким образом необходимо отождествить два выделенных цикла. В результате получим особый слой атома B .

Пусть область Δ эквивалентна области $\Delta_\alpha(2A_0)$ или $\Delta_\alpha(2A_2)$. Для описания особого слоя билиардного движения в этой области рассмотрим особые слои билиардного движения в области A_0 . Каждый такой слой представляет собой прямое произведение восьмерки и окружности (см. лемму 3.1). Склейка двух областей A_0 в область $\Delta_\alpha(2A_0)$ переводит каждую пару восьмерок в особый слой плоского атома C_2 – для этого в каждой восьмерке необходимо сделать два разреза в каждой окружности (т.е. разделить $(x, v_1)_u$ и $(x, v_2)_u$ и так далее), а затем отождествить у двух получившихся крестов концы $((x, v_1)_u \sim (x, v_2)_d$ и так далее).

Пусть область Δ эквивалентна области $\Delta_\alpha(2C_2)$. Рассмотрим атом C_2 , описывающий окрестность особого слоя $\Lambda = b$ для билиардного движения в области C_2 . По построению (см. лемму 3.1) внешний эллипс, оснащенный возможными векторами скорости, представляет собой плоский атом C_2 . Разрезав трехмерный атом C_2 вдоль плоского атома C_2 , мы получаем прообраз точек, лежащих в одной области C_2 . Склеив два экземпляра разрезанного атома C_2 вдоль границы разреза, мы получаем, фактически, что атом не меняется. Аналогичную конструкцию можно провести и в случае областей $\Delta_\alpha(2C_n)$ и $\Delta_\alpha(2B_n)$.

Пусть область Δ склеена из A_0 . Рассмотрим атом B , описывающий окрестность особого слоя $\Lambda = b$ для билиардного движения в области A_0 . Рассмотрим отдельно, как склейка двух областей $(A_0)_u$ и $(A_0)_d$ продолжается на склейку атомов. Согласно лемме особый слой 3-атома B может быть образован в результате прямого произведения восьмерки, которая является прообразом дуги произвольной гиперболы, лежащей в области (A_0) и оснащенной векторами v_1 и v_2 , на окружность, являющуюся прообразом отрезка фокальной прямой, лежащего внутри области (A_0) . При склейке областей оснащение дуг гиперболы меняется – в точке склейки областей остаются два вектора $(v_1)_u$ и $(v_2)_u$, которые склеиваются с векторами $(v_2)_d$ и $(v_1)_d$ соответственно. Продолжая последовательную склейку областей A_0 , получаем либо длинный атом B_n , либо атом A_n .

Наконец, пусть Δ эквивалентна одной из областей $\Delta_\alpha(2A'_0)$, $\Delta_\alpha(2A'_1)$ и $\Delta_\alpha(2A'_2)$. Рассмотрим торы T^u и T^d , которые представляют собой особые слои динамической системы билиарда в соответствующей элементарной области (см. лемму 3.1). На каждом из этих торов выделим цикл, образованный точками граничного эллипса, оснащенного векторами скорости v_1 и v_3 . Разрежем эти торы по этим циклам (изменяем правило склейки) и склеим их вдоль границ разреза. В результате получим тор.

Предложение 3.3 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.4. Пусть область Δ эквивалентна области вида $\Delta_\alpha(\Omega_1 + \Omega_2)$, где Ω_1 эквивалентна A_2 , A_1 , A_0 , A'_2 , A'_1 , A'_0 , а область Ω_2 – это область C_1 , B_1 , B_0 , B'_2 , B'_1 , B_0 соответственно, т.е. представляет собой

долю эллипса, содержащего отрезок между фокусами и приклеенную полосу B или кольцо C_1 . Рассмотрим заполнение области серии A гиперболами и фокусными отрезками (см. лемму 3.1). Продолжим заполнение области A дугами софокусных гипербол на всю область Δ следующим образом – рассмотрим дуги гипербол, заполняющие вторую область. Каждой дуге гиперболы области A можно поставить в соответствие дугу этой же гиперболы, но уже в области B или C_1 . При этом оснащение дуг гипербол, лежащих в области A , однозначно продолжается до оснащения дуги гиперболы в области B или C_1 . Топологически при этом оснащенные дуги не изменятся, т.е. атомы, описывающие топологию бильярда вблизи особого слоя серии A , и атомы, описывающие топологию бильярда вблизи особого слоя областей вида $\Delta_\alpha(A + \Omega_2)$, где Ω_2 принадлежит серии B или C , топологически эквивалентны.

Пусть область Δ содержит A_0 .

Рассмотрим заполнение областей, составляющих область Δ дугами гипербол. Оснастим каждую дугу гиперболы соответствующими векторами v_i . В областях A'_0 и B_0 оснащенные дуги гомеоморфны двум отрезкам с концами, проекции которых лежат на границе склейки этой элементарной области с другими. Поэтому приклеивание единичной области A'_0 или B_0 не меняет атома. Осталось рассмотреть случай склейки полосы nA_0 с парой областей A'_0 , склеенных вдоль горизонтального отрезка фокальной прямой. Последняя склейка означает, что прообраз дуг для пары областей A'_0 будет гомеоморфен восьмерке без двух точек. Поэтому при склейке полосы nA_0 с парой областей A'_0 атом остается принадлежать той же серии, однако его сложность увеличивается на единицу.

Предложение 3.3 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.5. Разобьем доказательство предложения на несколько шагов.

Шаг 1: бифуркации бильярдной системы в обобщенных областях с коническими точками, включающих в себя пару элементарных областей A'_1 .

Рассмотрим элементарную область A_1 . Напомним, что окрестность особого слоя бильярдной системы в области A_1 описывается атомом A^* . Этот факт был доказан рассмотрением заполнения области A_1 софокусными гиперболами и горизонтальным отрезком с концом в фокусе. В прообразе каждой гиперболы лежат две восьмерки, условно называемые правыми и левыми (в зависимости от того, в какую сторону направлены векторы скорости), состоящие из двух окружностей, условно называемых верхними (в прообразе – точки, лежащие не ниже оси Ox) и нижними (в прообразе – точки, лежащие не выше оси Ox). При склейке восьмерок вдоль фокусного отрезка верхние окружности с направлением вправо склеивались с нижними окружностями с направлением влево, в результате чего образовывалась так называемая “перекрутка”. Вдоль граничной гиперболы верхние окружности склеивались с верхними, а нижние – с нижними, что приводило к отсутствию “перекрутки”.

Определим отображение g_h из элементарной области A_1 в обобщенную область $\Delta_\beta(A'_1)_c$, которое отождествляет две дуги граничной гиперболы области A_1 , расположенные по разные стороны от оси Ox . Отметим что, строго

говоря, это отображение g_h не является склейкой в смысле наших определений. Отображение g_h действует на особом слое билиардной системы для области $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ следующим образом – восьмерки, проектирующиеся в дугу гиперболы, которая является ребром излома области $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$, склеиваются по другому закону, а именно “верхние” окружности, направленные вправо, склеиваются с “нижними” окружностями, направленными влево. В результате появляется лишняя “перекрутка”, что приводит к тому, что атом A^* становится атомом B .

Заметим, что атом A^* можно описать иначе, рассматривая сечение области дугами софокусных эллипсов и другим горизонтальным отрезком с концом в фокусе. При этом построение повторяется. Определим отображение g_e из элементарной области A_1 в обобщенную область $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$, которое отождествляет две дуги граничного эллипса области A_1 , расположенные по разные стороны от оси Ox . Повторяя вышеприведенное рассуждение, получаем, что топология особого слоя для билиардного движения в области $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$ также описывается атомом B .

Для описания топологии слоения в области $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1)$ воспользуемся слоением для области $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$. Рассмотрим восьмерки, на которые мы разбивали особый слой атома B , описывающий топологию особого слоя билиардной системы в области $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$. Удлиним каждую восьмерку следующим образом: склеим проекцию восьмерки – дугу гиперболы – с дугой этой же гиперболы, лежащей в области C_1 , и продолжим оснащение на удлинённый отрезок. Соединим отрезок фокальной прямой, лежащий на границе области A'_1 , с отрезком фокальной прямой, лежащим в области C_1 . Легко понять, что при этом структура слоения особого слоя атома B не поменяется.

Для описания топологии особого слоя билиардного движения в области $\Delta_\beta(A'_1)_{xyc}^2$ применим к области A_1 композицию отображений $g_e \circ g_h$. В результате на особом слое A^* это будет выглядеть как появление двух дополнительных “перекруток”, что не поменяет топологию особого слоя атома A^* .

Рассмотрим сечение области $\Delta_\beta(A'_1)_y^2$. Рассмотрим проекцию этой области на область A'_1 и сечение области A'_1 на отрезки – дуги софокусных гипербол и софокусный отрезок. В прообразе неграничной дуги софокусной гиперболы с параметром $\lambda < b$ лежат две дуги с общей точкой на ребре склейки – каждая дуга в своем экземпляре области A'_1 . В результате это сечение области A'_1 поднимается до сечения области $\Delta_\beta(A'_1)_y^2$ парами дуг и двумя отрезками – фокусным отрезком и граничным отрезком соответствующей области A'_1 . Прообразом каждой пары дуг в особом слое билиардной системы в области $\Delta_\beta(A'_1)_y^2$ являются две окружности – с векторами скорости, направленными вправо и влево. Прообразами оставшихся отрезков также оказываются окружности. В результате получаем, что особый слой для билиардной системы в области $\Delta_\beta(A'_1)_y^2$ является тором.

Шаг 2: бифуркации билиардной системы в обобщенных областях с двумя численными точками без свободной границы.

Рассмотрим область $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$. Разрежем эту область в пару областей $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$, склеенных вдоль окружности s , состоящей из пары дуг некоторой гиперболы. Топология особого слоя для билиардного движения в области $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$ описывается атомом B , в котором прообраз окружности s является

сечением атома – восьмеркой (заметим, что это не те восьмерки, которые были рассмотрены на предыдущем шаге). Рассматривая сечение области $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$ на окружности, состоящей из пары дуг софокусных гипербол, и отрезок фокальной прямой с концом в фокусе, получаем, что при склейке вдоль этого отрезка “перекрутки” не происходит, так как иначе бифуркация описывалась бы атомом A^* (хотя это можно показать и явно). При склейке же пары областей $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$ вдоль окружности s в область $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$ восьмерки, лежащие в прообразе окружности s , склеиваются тождественно, следовательно, топология особого слоя для билиардного движения в области $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$ описывается атомом B .

Это же построение с заменой области $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$ на область $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$ можно провести для области $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + (A'_1)_c^2)$.

Рассмотрим обобщенную область $\Delta_\alpha(2A_2)$, склеенную из двух экземпляров элементарной области A_2 вдоль эллиптического сегмента. Как описано выше, особая поверхность уровня описывается атомом C_2 . Рассмотрим сечение области A_2 софокусными гиперболами, которое продолжается до сечения области $\Delta_\alpha(2A_2)$ на окружности, и два отрезка с концами в фокусах. Прообразом каждой окружности являются два особых слоя плоского атома C_2 : они различаются направлением векторов скорости вправо или влево. Примем следующие обозначения. Фиксируем один из экземпляров A_2 , который для удобства будем называть верхним. Векторы v_i – это векторы скорости, которыми оснащены отрезки особого слоя атома C_2 , причем в точках верхнего экземпляра векторы v_1 направлены к правому фокусу (соответственно в точках нижнего экземпляра эти векторы направлены от левого фокуса вследствие правил склейки), векторы v_2 направлены от левого фокуса, векторы v_3 направлены от правого фокуса, а векторы v_4 – к левому фокусу. Упорядочим правые и левое восьмерки таким образом, чтобы при склейке вдоль отрезков с концами в фокусах левые и правые экземпляры особого слоя атома C_2 склеивались тождественно. На особом слое плоского атома C_2 , соответствующем точкам, оснащенным векторами вправо (векторами v_1 и v_2), к внутренней окружности примыкают точки, лежащие на дугах гипербол, расположенных выше оси Ox , а к внешней – точки, лежащие ниже оси Ox . На особом слое плоского атома C_2 , соответствующем точкам, оснащенным векторами влево (векторами v_3 и v_4), к внутренней окружности примыкают точки, лежащие на дугах гипербол, расположенных ниже оси Ox , а к внешней – точки, лежащие выше оси Ox . Для того чтобы перевести область $\Delta_\alpha(2A_1)$ в область $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$, необходимо склеить граничную окружность области $\Delta_\alpha(2A_1)$, представляющую собой пару дуг некоторой гиперболы, в отрезок, который является одной дугой этой же гиперболы. При этом происходит склейка особого слоя атома C_2 , соответствующего векторам, направленным вправо, с особым слоем атома C_2 , соответствующего векторам, направленным влево, при которой “внутренние” окружности одного экземпляра особого слоя атома C_2 склеиваются с “внешними” окружностями другого. Такая перестройка приводит к образованию атома A^{**} .

Шаг 3: бифуркации билиардной системы в обобщенных областях, склеенных лишь из областей серии B .

Область Δ состоит из двух областей серии B . Рассмотрим проекцию Δ на плоскость Oxy . В проекции выберем отрезки фокальной прямой. Рассмотрим связные прообразы этих отрезков в области Δ . Эти прообразы бывают двух типов – либо объединение двух отрезков, каждый из которых лежит в своем экземпляре области B , либо отрезки, являющиеся ребрами склейки. Обозначим отрезки первого типа в области Δ через b_i , а отрезки второго типа через d_i . Как было доказано выше, поверхность уровня интеграла $\Lambda < b$ является тором. Рассмотрим прообраз отрезков b_i и d_i на достаточно близком к особому слою торе.

В прообразе каждого отрезка b_i лежат две окружности, которые на торе являются двумя гомологичными нетривиальными циклами: одна из этих окружностей s_i^u оснащена векторами, направленными вверх, а другая s_i^d – направленными вниз. В прообразе любого отрезка d_i лежит одна окружность S_i .

При стремлении Λ к b векторы, которыми оснащены отрезки b_i и d_i , стремятся к векторам, направленным горизонтально. На торе это означает следующую склейку: пары окружностей s_i^u и s_i^d склеиваются друг с другом, а окружность S_i двулистно накрывает себя.

Следовательно, если в области Δ не было отрезков d_i , то полученный атом – это длинный ориентируемый атом D_k , иначе в атоме образуются звездочки – по количеству отрезков d_i в области Δ .

Шаг 4: бифуркации билиардной системы в обобщенных областях склеенных из областей серий A_0 , A'_0 и B_0 .

Рассмотрим проекцию Δ на плоскость Oxy . В проекции выберем отрезки фокальной прямой. Рассмотрим связные прообразы этих отрезков в области Δ . Эти прообразы бывают двух типов – либо объединение двух отрезков, каждый из которых лежит в своем экземпляре области A_0 , либо отрезки, являющиеся ребрами излома. Обозначим отрезки первого типа в области Δ через b_i , а отрезки второго типа – через d_i . Как было доказано выше, поверхность уровня интеграла $\Lambda > b$ является тором. Рассмотрим прообраз отрезков b_i и d_i на достаточно близком к особому слою торе.

Далее рассуждаем так же, как на шаге 3. Таким образом, предложение 3.5 полностью доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Заметим, что грубые молекулы, описывающие топологию изоэнергетического многообразия Q^3 для билиарда в обобщенных областях, гомеоморфных кольцу (это области $\Delta_\alpha(2C_n)$ и $\Delta_\alpha(nA_0)^2$), получают друг из друга заменой интеграла Λ на $-\Lambda$. Этот же факт верен для обобщенных областей, склеенных из эллиптических лент и областей, склеенных из гиперболических лент. Роль конических точек типа x для гиперболических лент играют точки типа c . В дальнейшем будем называть нижними ребрами молекулы ребра, соответствующие эллиптическим торам для бесфокусных областей, не содержащих отрезка между фокусами (т.е. либо эквивалентных $\Delta_\alpha(2C_n)$, либо склеенных из эллиптических лент), и соответствующие гиперболическим торам для остальных бесфокусных областей.

Пусть обобщенная область Δ_1 принадлежит одной из конечных серий. Обозначим через Ω_i элементарные области, из которых склеена область Δ_1 . Заменим в областях Ω_i все эллипсы на гиперболы и наоборот (оставив неподвижным отрезки фокальной прямой, если они входили в границу области). Если в результате мы получили компактную область Δ_2 , то молекулы, описывающие топологию изоэнергетического многообразия Q^3 для билиарда в областях Δ_1 и Δ_2 , также получаются друг из друга заменой интеграла Λ на $-\Lambda$.

§ 4. Основной результат. Лиувиллева классификация локально-плоских билиардов с помощью инвариантов Фоменко–Цишанга

В этом параграфе мы докажем две основные теоремы. Теорема 4.1 дает Лиувиллеву классификацию билиардов в обобщенных областях, каждая элементарная область в составе которых не содержит фокусов семейства (1.1). Теорема 4.2 завершает классификацию и описывает билиарды с фокусами.

4.1. Лиувиллева классификация билиардов в обобщенных областях, каждая элементарная область в составе которых не содержит фокусов семейства границы. Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 4.1 (А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко; см. [8]). *Рассмотрим произвольное ребро какой-либо молекулы W , и пусть (λ_+, μ_+) и (λ_-, μ_-) – допустимые системы координат, отвечающие двум атомам, соединенным этим ребром. Будем считать, что все эти циклы лежат на одном и том же торе Лиувилля, в середине ребра. Рассмотрим следующие три важных случая:*

- 1) *если циклы λ_+ и λ_- не пересекаются, т.е. гомологичны на торе, то $r = \infty$;*
- 2) *если циклы λ_+ и λ_- пересекаются ровно в одной точке, то $r = 0$;*
- 3) *если циклы λ_+ и λ_- имеют индекс пересечения 2, то $r = 1/2$.*

Во всех этих трех случаях метка r не зависит от выбора ориентации на многообразии Q^3 , на ребрах молекулы и критических окружностях.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть обобщенная область Δ состоит из элементарных областей Ω , причем любая элементарная область Ω не содержит фокусов. Тогда молекула (см. подробнее рис. 8), описывающая билиардное движение в обобщенной области Δ , может быть описана следующим образом:*

- *молекула содержит одно или два нижних ребра (два ребра, только если область имеет вид $\Delta_\alpha(2C_n)$), эти ребра бесконечные, $r = \infty$, $\varepsilon = \pm 1$;*
- *если область гомеоморфна кольцу, то бифуркация на уровне интеграла $\Lambda = b$ описывается атомом D_n , где n – это количество отрезков фокальной прямой, лежащих внутри всех областей Ω ;*
- *если область односвязна, то бифуркация на уровне интеграла $\Lambda = b$ описывается атомом B_n , где n – это количество отрезков фокальной прямой, лежащих внутри всех областей Ω , причем атом имеет столько звездочек, сколько конических точек типа c имеет область Δ ;*

- на верхних ребрах молекулы стоят метки $r = 0$, $\varepsilon = 1$ или $r = 1/2$, $\varepsilon = 1$, причем количество дробных меток в молекуле совпадает с количеством конических точек, имеющих тип x или y .

Рис. 8. Меченые молекулы, описывающие топологию слоения Q^3 билиардного движения в обобщенных областях, не содержащих фокусов. В верхнем ряду расположены молекулы для движения в областях без конических точек, во втором – с одной конической точкой, в третьем – с двумя коническими точками

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построение грубой молекулы напрямую следует из §3. Вычислим метки.

Шаг 1: выбор циклов λ , соответствующих нижним атомам A .

Пусть Δ склеена из областей, содержащих отрезки фокальной прямой, которые не лежат между фокусами, т.е. склеена из областей вида B или C . Тогда нижним ребрам молекулы соответствуют торы, траектории которых (или их продолжения), касаются эллипсов. Рассмотрим тор T_λ , траектории которого (или их продолжения) касаются некоторого эллипса. Проекцию этого тора на область Δ обозначим через Δ_{e_λ} . Проекция Δ_{e_λ} эквивалентна обобщенной области, склеенной либо из областей-лент серии B , либо из областей-колец серии C .

Рассмотрим проекцию $p: \Delta_{e_\lambda} \rightarrow Oxy$. Выберем в образе $p(\Delta_{e_\lambda})$ дугу гиперболы h_λ и рассмотрим связную часть ее прообраза $\tilde{h}_\lambda$. Выберем дугу h_λ таким образом, чтобы $\tilde{h}_\lambda$ в области Δ_{e_λ} не являлось ребром излома и не принадлежало свободной границе области Δ_{e_λ} . Оснастим дугу $\tilde{h}_\lambda$. Заметим, что при $\lambda \rightarrow 0$ область Δ_{e_λ} стягивается либо на отрезок, либо на окружность, при этом $\tilde{h}_\lambda$ стягивается в точку. Оснастим $\tilde{h}_\lambda$ векторами скорости v так, чтобы точки

(x, v) , $x \in \tilde{h}_\lambda$, лежали на торе T_λ . Тогда точки (x, v) , $x \in \tilde{h}_\lambda$, образуют на торе T_λ нетривиальный цикл (см. предложение 3.3). И так как при $\lambda \rightarrow 0$ отрезок $\tilde{h}_\lambda$ стягивается в точку, то цикл (x, v) , $x \in \tilde{h}_\lambda$, – это исчезающий цикл λ , соответствующий атому A .

Заметим, что построенный нами цикл λ является слоем расслоения Зейферта на торе T_λ (это следует из § 3). Тогда так как циклы λ совпали, то по лемме 4.1 метки на этом ребре следующие: $r = \infty$, $\varepsilon = \pm 1$. Знак метки ε зависит от ориентации соответствующего многообразия Q^3 .

Рассмотрим билиардное движение в обобщенной области Δ , которая склеена из областей Ω , причем каждая область Ω не содержит отрезков фокальной прямой, расположенных левее левого фокуса или правее правого фокуса, т.е. эквивалентна одной из областей A_0 , A'_0 , B_0 . Рассмотрим тор T_λ , траектории которого (или их продолжения) касаются некоторой гиперболы. Проекцию этого тора на область Δ обозначим через Δ_{h_λ} . Проекция Δ_{h_λ} эквивалентна обобщенной области, склеенной из бесфокусных областей A_0 , A'_0 и B_0 .

Рассмотрим проекцию $p: \Delta_{h_\lambda} \rightarrow Oxy$. Выберем в образе $p(\Delta_{h_\lambda})$ дугу эллипса e_λ и рассмотрим связную часть ее прообраза $\tilde{e}_\lambda$. Выберем дугу e_λ таким образом, чтобы дуга $\tilde{e}_\lambda$ в области Δ_{h_λ} не являлась ребром излома и не принадлежала свободной границе области Δ_{h_λ} . Оснастим дугу $\tilde{e}_\lambda$. Заметим, что при $\lambda \rightarrow b$ область Δ_{h_λ} стягивается либо на отрезок, либо на окружность, при этом $\tilde{e}_\lambda$ стягивается в точку. Оснастим $\tilde{e}_\lambda$ векторами скорости v так, чтобы точки (x, v) , $x \in \tilde{e}_\lambda$, лежали на торе T_λ . Тогда точки (x, v) , $x \in \tilde{e}_\lambda$, образуют на торе T_λ нетривиальный цикл (см. предложение 3.1). И так как при $\lambda \rightarrow b$ отрезок $\tilde{e}_\lambda$ стягивается в точку, то цикл (x, v) , $x \in \tilde{e}_\lambda$, – это исчезающий цикл λ . Аналогично, этот цикл λ является слоем расслоения Зейферта и метки на этом ребре $r = \infty$, $\varepsilon = \pm 1$.

Шаг 2: выбор циклов на верхних ребрах молекулы.

Пусть Δ склеена из областей вида B или C . Тогда верхним ребрам молекулы соответствуют торы, траектории которых (или их продолжения), касаются гипербол. Рассмотрим тор T_λ , траектории которого (или их продолжения) касаются некоторой гиперболы. Проекцию этого тора на область Δ обозначим через Δ_{e_λ} . Проекция Δ_{e_λ} эквивалентна либо области $\Delta_\alpha(2B_0)$, либо $\Delta_\beta(B_0)_y^2$. При этом количество проекций второго вида совпадает с количеством конических точек типа y в области Δ .

Пусть проекция Δ_{e_λ} эквивалентна области $\Delta_\alpha(2B_0)$. Тогда в качестве цикла λ , соответствующего атому A , можно взять дугу эллипса, входящую в одну из областей B_0 , оснащенную векторами скорости, направленными вверх. В качестве цикла λ , соответствующего атому D , возьмем объединение правых дуг гипербол, которые ограничивают области B_0 . Эти дуги можно оснастить касательными векторами скорости. Построенные циклы λ пересекаются в одной точке, следовательно, во-первых, они образуют базис на торе, а во-вторых, метка $r = 0$. При $\lambda \rightarrow a$ выбранный нами слой расслоения Зейферта – цикл λ , соответствующий атому D , – переходит в критическую окружность атома A . Следовательно, метка ε по определению равна 1.

Пусть проекция Δ_{e_λ} эквивалентна области $\Delta_\beta(B_0)_y^2$. В этом случае необходимо поменять циклы, соответствующие атому A . В качестве проекции исче-

зающего цикла возьмем часть свободной границы области $\Delta_\beta(B_0)_y^2$, лежащую на эллипсе с большим значением (этот эллипс будет меньший). Оснастив эту кривую векторами скорости, направленными вверх, получаем нетривиальный цикл λ на торе, стягивающийся в точку внутри полнотория A . Фиксируем экземпляр области B_0 . На этой области B_0 рассмотрим отрезок, один конец которого – это коническая точка области $\Delta_\beta(B_0)_y^2$, а другой конец – угол свободной границы области $\Delta_\beta(B_0)_y^2$. Оснастив этот отрезок противоположными векторами скорости, получаем цикл μ , дополняющий построенный стягивающийся в точку внутри полнотория A цикл λ . Заметим, что этот же цикл дополняет до базиса слой расслоения Зейферта, т.е. он может быть выбран в качестве цикла μ , соответствующего седловому атому. Выбрав ориентацию исчезающего λ в соответствии с ориентацией многообразия Q^3 , получаем, что матрица склейки имеет вид $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, метки на этом ребре по определению следующие: $r = 1/2$, $\varepsilon = 1$.

Если область Δ склеена из областей A_0, A'_0, B_0 , то доказательство аналогично. Теорема 4.1 полностью доказана.

4.2. Лиувиллева классификация билиардов в обобщенных областях таких, что в их составе существует элементарная область, содержащая фокусы семейства границы.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть обобщенная область Δ состоит из элементарных областей Ω , причем хотя бы одна элементарная область Ω содержит (внутри области или же на границе) фокус семейства (1.1). Тогда молекулы, описывающие билиардное движение в различных обобщенных областях Δ , разбиваются на девять неэквивалентных между собой типов. Все они приведены в таблице 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим области, склеенные из двух элементарных областей. В дальнейшем доказательстве фиксируем их и будем называть “верхней” областью и “нижней” областью, при этом будем полагать, что верхняя область содержит хотя бы один фокус семейства (1.1).

Шаг 1: выбор циклов – слоев расслоения Зейферта – для билиардного движения в области A_2 .

Построим циклы λ , соответствующие седловому атому B , описывающему бифуркации решений билиарда в области A_2 .

Фиксируем значение интеграла $\Lambda = \lambda < b$. На границе области A_2 возьмем точки, лежащие на фокальной прямой, и проведем через них касательные к эллипсу семейства (1.1) с параметром λ . Пусть координаты точек касания имеют вид $(\pm a_1, \pm a_2)$. Тогда обозначим эти точки следующим образом: точка A с координатами (a_1, a_2) , точка B с координатами $(-a_1, a_2)$, точка C с координатами $(-a_1, -a_2)$, точка D с координатами $(a_1, -a_2)$. Соединим точки A с B и точки C с D дугами эллипса с параметром λ . Объединив построенные дуги и отрезки касательных, получаем замкнутую кривую, гомеоморфную окружности. Обозначим эту замкнутую кривую через s_d (см. рис. 9).

Рассмотрим значение интеграла $\Lambda = \lambda > b$. Фиксируем некоторую асимптоту интегральной гиперболы. Обозначим точки пересечения этой асимптоты

Таблица 2. Меченые молекулы, описывающие бильярдное движение в обобщенных областях, содержащих фокусы

Область	Молекула	n	Q^3
$\Delta_\alpha(2A_1)$ и $\Delta_\alpha(A_2 + C_1)$		1	S^3
$\Delta_\alpha(2A_2)$		2	RP^3
$\Delta_\alpha(A_1 + B_1)$		0	S^3
Обобщенная область Δ не содержит конических точек и отрезков фокальной прямой строго внутри области			S^3
$\Delta_\beta(A'_1)^2_y$			RP^3
$\Delta_\beta(A'_1)^2_c,$ $\Delta_\beta((A'_1)^2_c + C_1)$ и $\Delta_\beta(A'_1)^2_x$		2	RP^3
$\Delta_\beta(A'_2)^2_{2x}$ и $\Delta_\beta((A'_1)^2_c + (A'_1)^2_c)$		0	
$\Delta_\beta(A_1)^2_{2y}$		0	
$\Delta_\beta(A'_1)^2_{xyc}$		0	

с граничным эллипсом через E и F . Обозначим точку пересечения интегральной гиперболы и граничного эллипса, расположенную ближе к точке E , через G , а расположенную ближе к точке F – через H . Получим кусочно-гладкую ломаную $GEFH$. Сдвинем точки E и F немного внутрь области A_2 вдоль асимптоты интегральной гиперболы и заменим кривые GE и FH на гладкие кривые, которые в концах будут касаться либо асимптоты, либо интегральной гиперболы. В результате полученную кусочно-гладкую кривую, которую обозначим через s_u (см. рис. 9).

Рис. 9. Кривые s_d слева и s_u справа

Покажем, как мы будем выбирать векторы скорости, оснащая кривые s_d и s_u . В точках гладкости кривой s_d , а также в точках, лежащих на асимптоте интегральной гиперболы кривой s_u , векторы скорости выбираются касательными к данной кривой. В остальных точках мы доопределим векторы по непрерывности. Таким образом, для билиардного движения в области A_2 на торах в прообразе кривой s_d лежат две окружности (оснащенные векторами, вращающимися по и против часовой стрелки), а в прообразе кривой s_u — одна окружность.

Шаг 2: описание топологии слоения Лиувилля билиардной задачи для обобщенных областей без конических точек.

Построим слои расслоения Зейферта на атомах B , C_2 и A^* , описывающих бифуркации решений билиардных системы в обобщенных областях без конических точек, содержащих фокусы внутри области.

В области $\Delta_\alpha(2A_2)$ рассмотрим замкнутую кривую s_d , в которой точки A и B расположены в верхнем экземпляре области A_2 , а точки C и D в нижнем. Оснащая эту кривую векторами скорости, касательными к интегральному эллипсу, получаем два цикла на двух нижних торах. Для того чтобы описать слой расслоения Зейферта на верхних торах, необходимо рассмотреть объединение двух кривых s_u , расположенных на разных экземплярах области A_2 . При этом в прообразе двух кривых будут уже две окружности — для одной из них кривая s_u на верхнем экземпляре A_2 будет оснащена векторами скорости, направленными вверх, а на нижнем экземпляре области A_2 — направленными вниз; для другой окружности направление векторов будет противоположным.

Склеим из двух экземпляров A_1 обобщенную область $\Delta_\alpha(2A_1)$. Рассмотрим часть кривой s_d , принадлежащую области A_1 . Тогда обозначим через S прообраз этой части кривой в области $\Delta_\alpha(2A_1)$ при естественной проекции $\Delta_\alpha(2A_1)$ на плоскость Oxy , при которой $\Delta_\alpha(2A_1)$ переходит в A_1 . Кривая S будет гомеоморфна окружности. Если оснастить S касательными векторами, то получим циклы — слои расслоения Зейферта — на эллиптических торах.

Модифицируем кривую s_u следующим образом: разрежем кривую в точке пересечения с границей области A_1 и отразим ее симметрично касательной прямой в этой точке. В результате концы новой кривой, обозначенной через $\tilde{s}_u$, по-прежнему будут лежать в точках пересечения интегральной гиперболы и границы области A_1 . Далее, склеивая $\tilde{s}_u$ на верхнем и нижнем экземпляре

области A_1 и оснащая получившуюся окружность касательными векторами скорости, получаем цикл на верхнем торе Лиувилля, являющийся расслоением Зейферта.

Для областей $\Delta_\alpha(A_2 + C_1)$ и $\Delta_\alpha(A_1 + B_1)$ необходимо дополнить s_d отрезками фокальной прямой, а s_u – отрезками интегральных гипербол, лежащими в областях C_1 и B_1 . В результате, продолжая по непрерывности оснащение циклов, мы также получаем циклы – слои расслоения Зейферта.

Исчезающие циклы λ , соответствующие минимаксным атомам A , выбираем так же, как и в доказательстве теоремы 4.1. Легко видеть, что исчезающие циклы пересекаются с построенными выше циклами λ – слоями расслоения Зейферта ровно в одной точке, что приводит к тому, что метки $r = 0$. Так как ориентация построенных циклов – слоев расслоений Зейферта совпадает с ориентацией критических минимаксных окружностей, то метки $\varepsilon = 1$. Метка n может быть вычислена по формуле Топалова, так как многообразие Q^3 для билиардного движения в области $\Delta_\alpha(2A_2)$ гомеоморфно RP^3 , а для билиардного движения в области $\Delta_\alpha(2A_1)$ – гомеоморфно S^3 .

Шаг 3: описание топологии слоения Лиувилля билиардной задачи для обобщенных областей с коническими точками, молекулы которых описываются атомами без звездочек.

Топология слоения Лиувилля для билиардной задачи в области $\Delta_\beta(A'_1)_y^2$, как было показано выше, описывается молекулой $A-A$. Так как изоэнергетическое многообразие Q^3 в этом случае гомеоморфно RP^3 , то метка $r = 1/2$.

Рассмотрим билиардное движение в области $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$. Рассмотрим точку на фокальной прямой между фокусами и дугу гиперболы, проходящую через эту точку. Оснатив эту гиперболу векторами скорости, направленными вправо, т.е. $v_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$, при достаточно малом $\epsilon > 0$, получим двумерный атом B . Граница этого двумерного атома B – это дуга этой гиперболы, оснащенная векторами вправо, касательными к некоторому эллипсу или некоторой гиперболе. Эти оснащенные дуги можно взять за циклы μ на соответствующих торах Лиувилля, так как они связаны условием существования глобального сечения.

На рис. 10 показано, как выбрать остальные циклы на торах Лиувилля. В результате матрица склейки на нижнем ребре молекулы будет иметь вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а на верхних $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Из матриц склейки метки восстанавливаются однозначно.

Рассмотрим билиардное движение в области $\Delta_\beta(A'_2)_{2x}^2$. Эту область можно рассмотреть как удвоенную область $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$, поэтому выбор циклов можно провести аналогично. Изменим циклы, выбранные нами на торах, описывающих топологию билиарда в области $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$, следующим образом: увеличим в два раза циклы λ , соответствующие атому B (критическая окружность стала в два раза длиннее), и цикл μ , соответствующий нижнему атому A , а все остальные циклы оставим без изменений. В результате матрицы склейки примут следующий вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ на нижнем ребре, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ на верхних ребрах.

Шаг 4: описание топологии слоения Лиувилля билиардной задачи для обобщенных областей $\Delta_\beta(A'_1)_{cxy}^2$ и $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$.

Циклы μ , соответствующие неориентируемым атомам, выбираются следующим образом. Выберем циклы $\hat{\mu}$ так же, как и в ориентируемом случае, – циклы, отсекаемые сечением ориентируемого атома – дубля соответствующего

Рис. 10. Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей билиардное движение в области $\Delta_\beta(A'_1)_x^2$

неориентируемого. Напомним, что дубль атома A^* – это атом B , а дубль атома A^{**} – атом C_2 . Один из этих циклов нужно оставить, а к одному из циклов, соответствующему другому тору, необходимо добавить цикл, кратный циклу λ – слою расслоения Зейферта, так, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum \mu_i = \frac{\sum \hat{\mu}_i + k\lambda}{2},$$

где k – число звездочек неориентируемого атома. Для выбора циклов $\hat{\mu}_i$ мы будем так же, как и в предыдущем случае, использовать дуги гипербол.

В случае атома A^* , описывающего топологию слоения Лиувилля билиардной задачи в области $\Delta_\beta(A'_1)_{2y}^2$, мы имеем три цикла $\hat{\mu}_i$: один цикл $\hat{\mu}_1$, соответствующий эллиптическому тору, и два цикла $\hat{\mu}_2$ и $\hat{\mu}_3$, соответствующих гиперболическому тору. Выберем цикл μ_1 , соответствующий седловому атому и лежащий на эллиптическом торе, следующим образом: $\mu_1 = (\hat{\mu}_1 + \lambda)/2$, а цикл μ_2 , лежащий на гиперболическом торе, выберем равным $\hat{\mu}_2$, выкинув цикл $\hat{\mu}_3$.

В случае атома A^{**} , описывающего топологию слоения Лиувилля билиардной задачи в области $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$, мы имеем четыре цикла $\hat{\mu}_i$: два цикла $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$ на эллиптическом торе и два цикла $\hat{\mu}_3$ и $\hat{\mu}_4$ на гиперболическом торе. Выберем цикл μ_1 , соответствующий седловому атому и лежащий на эллиптическом торе, следующим образом: $\mu_1 = \hat{\mu}_1 + \lambda$, а цикл μ_2 , лежащий на гиперболическом торе, выберем равным $\hat{\mu}_3$, выкинув циклы $\hat{\mu}_2$ и $\hat{\mu}_4$.

На рис. 11 показано, как выбрать циклы λ – слою расслоения Зейферта, а также λ и μ , соответствующие минимаксным атомам A в случае области $\Delta_\beta(A'_1)_{cxy}^2$.

Рис. 11. Выбор циклов на торах Лиувилля для молекулы, описывающей билиардное движение в области $\Delta_\beta(A_1)_x^2$

Для области $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$ в качестве циклов λ для атома A^{**} можно взять циклы вдоль кривых s_d и s_u . Их же можно взять в качестве циклов μ на минимаксных атомах A . Исчезающие циклы λ на минимаксных атомах A выберем аналогично.

В результате на ребрах молекулы $A - A^* - A$, описывающей топологию слоения Лиувилля для билиарда в области $\Delta_\beta(A_1)_{cxy}^2$, получаем следующие матрицы склейки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ на эллиптическом торе, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ на гиперболическом торе.

На ребрах молекулы $A - A^{**} - A$, описывающей топологию слоения Лиувилля для билиарда в области $\Delta_\beta(A_1)_{2y}^2$, матрицы склейки имеют следующий вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ на эллиптическом торе, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ на гиперболическом торе.

В обобщенных областях, билиардно-симметричных рассмотренным, рассуждения можно провести аналогично, заменив везде дуги эллипсов на дуги гипербол и наоборот. Таким образом, теорема 4.2 полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. При замене одной обобщенной области на её эквивалентную, молекула, описывающая топологию слоения Лиувилля изоэнергетического многообразия Q^3 , сохраняется.

Доказательство напрямую следует из доказательств вышеприведенных утверждений о построении грубых молекул и теорем 4.1, 4.2 о вычислении меток.

4.3. Важные следствия. Лиувиллева эквивалентность билиардных систем другим случаям интегрируемых гамильтоновых систем.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Динамические системы, описывающие билиардное движение в обобщенных областях $\Delta_\alpha(2A_1)$ и $\Delta_\alpha(A_2 + C_1)$ лиувиллево эквивалентны интегрируемой динамической системе случая Ковалевской–Яхьи (обобщение классического волчка Ковалевской на случай задачи о движении тяжелого гиростата) при подходящих (см. рис. 12) значениях интеграла энергии (в статье Н. С. Славиной [18] случай h_{18}). Соответствующая меченая молекула приведена на рис. 9.

Рис. 13. Интегрируемая система случая Эйлера при значениях параметров, соответствующих изображенной на рисунке области под номером 1, моделируется билиардом в обобщенных областях $\Delta_\alpha(2A'_0)$ и $\Delta_\alpha(2B''_0)$, области под номером 2 – билиардом в обобщенных областях $\Delta_\alpha(2A_0)^2$ и $\Delta_\alpha(2C_2)$, области под номером 3 – билиардом в обобщенной области $\Delta_\alpha(2A_2)$

руемой динамической системе случая Горячева–Чаплыгина–Сретенского (движение тяжелого твердого тела с закрепленной точкой и специальными условиями симметрии) при подходящих значениях интеграла энергии (указанные системы подробно изучены в работе [8]). Эти конкретные зоны энергии изображены на рис. 14. Интегрируемая система случая Горячева–Чаплыгина–Сретенского при значениях параметров, соответствующих изображенной на

Рис. 14. Интегрируемая система случая Горячева–Чаплыгина–Сретенского при значениях параметров, соответствующих изображенной на рисунке закрашенной области под номером 2, моделируется билиардом в обобщенной области $\Delta_\alpha(A_1 + B_1)$

рис. 14 области под номером 2 моделируется билиардом в обобщенной области $\Delta_\alpha(A_1 + B_1)$. Соответствующая меченая молекула приведена в таблице 2.

Рис. 15. Интегрируемая система случая Жуковского при значениях параметров интегралов, соответствующих изображенным на рис. а и б закрашенным областям под номерами 4 и 12, моделируется билиардами в обобщенных областях $\Delta_\alpha(A_0 + B_0)$ и $\Delta_\alpha(A'_1)_c^2$ соответственно

СЛЕДСТВИЕ 4.5. *Динамические системы, описывающие билиардное движение в областях*

$$\Delta_\alpha(A_0 + B_0), \quad \Delta_\alpha(B_0 + A_0 + B_0), \quad \Delta_\alpha(A_0 + A'_0), \quad \Delta_\alpha(A'_0 + A_0 + A'_0), \\ \Delta_\alpha(A'_0 + A_0 + B_0), \quad \Delta_\alpha(2B_1), \quad \Delta_\beta(A'_1)_c^2, \quad \Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1), \quad \Delta_\beta((A'_1)_x^2),$$

лиувиллево эквивалентны интегрируемым динамическим системам случая Жуковского (движение гиригостата в поле силы тяжести) при подходящих значениях интеграла энергии (указанные системы подробно изучены в работе [8]). Эти конкретные зоны энергии изображены на рис. 15. Интегрируемая система случая Жуковского при значениях параметров, соответствующих изображенной на рис. 15, а области под номером 4, моделируется билиардами в областях

$$\Delta_\alpha(A_0 + B_0), \quad \Delta_\alpha(B_0 + A_0 + B_0), \quad \Delta_\alpha(A_0 + A'_0), \\ \Delta_\alpha(A'_0 + A_0 + A'_0), \quad \Delta_\alpha(A'_0 + A_0 + B_0), \quad \Delta_\alpha(2B_1)$$

(эти области без конических точек). Интегрируемая система случая Жуковского при значениях параметров интегралов, соответствующих изображенной на рис. 15, б области под номером 12, моделируется билиардами в областях $\Delta_\beta(A'_1)_c^2$, $\Delta_\beta((A'_1)_c^2 + C_1)$, $\Delta_\beta((A'_1)_x^2)$ (эти области содержат по одной конической точке). Соответствующие меченые молекулы приведены в таблице 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствия выводятся путем сравнения меченых молекул, найденных ранее в перечисленных выше случаях (см. работы [8], [17]), и молекул, вычисленных в теоремах 4.1 и 4.2.

Автор приносит глубокую благодарность научному руководителю – А. Т. Фоменко за постановку задачи, существенную помощь и постоянное внимание к работе, Е. А. Кудрявцевой за ряд существенных замечаний, способствовавших улучшению изложения, а также А. А. Ошемкову и С. В. Матвееву за ряд ценных и полезных предложений по существу работы.

Список литературы

- [1] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999, 408 с.; пер. с англ.: G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **9**, Amer. Math. Soc., New York, 1927, viii+295 pp.
- [2] В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, *Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами*, Изд-во МГУ, М., 1991, 168 с.; англ. пер.: V. V. Kozlov, D. V. Treshchev, *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Transl. Math. Monogr., **89**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+171 pp.
- [3] V. Dragović, M. Radnović, “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **14**:4–5 (2009), 479–494.
- [4] В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые бильярды, квадратики и многомерные поризмы Понселе*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2010, 338 с.
- [5] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы “бильярд в эллипсе”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 2012, № 5, 31–34; англ. пер.: V. V. Fokicheva, “Description of singularities for system “billiard in an ellipse”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **67**:5–6 (2012), 217–220.
- [6] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 2014, № 4, 18–27; англ. пер.: V. V. Fokicheva, “Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **69**:4 (2014), 148–158.
- [7] В. В. Фокичева, “Классификация бильярдных движений в областях, ограниченных софокусными параболами”, *Матем. сб.*, **205**:8 (2014), 139–160; англ. пер.: V. V. Fokicheva, “Classification of billiard motions in domains bounded by confocal parabolas”, *Sb. Math.*, **205**:8 (2014), 1201–1221.
- [8] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевск, 1999, 444 pp., 447 с.; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, xvi+730 pp.
- [9] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52**:2 (1988), 378–407; англ. пер.: A. T. Fomenko, H. Zieschang, “On typical topological properties of integrable Hamiltonian systems”, *Math. USSR-Izv.*, **32**:2 (1989), 385–412.
- [10] А. Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *УМН*, **44**:1(265) (1989), 145–173; англ. пер.: A. T. Fomenko, “The symplectic topology of completely integrable Hamiltonian systems”, *Russian Math. Surveys*, **44**:1 (1989), 181–219.

- [11] А. Т. Фоменко, Х. Ципанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575; англ. пер.: А. Т. Fomenko, Н. Zieschang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 567–596.
- [12] А. Т. Fomenko, А. Ю. Konyaev, “New approach to symmetries and singularities in integrable Hamiltonian systems”, *Topology Appl.*, **159**:7 (2012), 1964–1975.
- [13] А. Т. Fomenko, А. Ю. Konyaev, “Algebra and geometry through Hamiltonian systems”, *Continuous and distributed systems. Theory and applications*, Solid Mech. Appl., **211**, Springer, Cham, 2014, 3–21.
- [14] Е. А. Кудрявцева, И. М. Никонов, А. Т. Фоменко, “Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия”, *Матем. сб.*, **199**:9 (2008), 3–96; англ. пер.: Е. А. Kudryavtseva, I. M. Nikonov, A. T. Fomenko, “Maximally symmetric cell decompositions of surfaces and their coverings”, *Sb. Math.*, **199**:9 (2008), 1263–1353.
- [15] Е. А. Кудрявцева, А. Т. Фоменко, “Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях”, *Докл. РАН*, **446**:6 (2012), 615–617; англ. пер.: Е. А. Kudryavtseva, A. T. Fomenko, “Symmetries groups of nice Morse functions on surfaces”, *Dokl. Math.*, **86**:2 (2012), 691–693.
- [16] V. F. Lazutkin, *KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **24**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, x+387 pp.
- [17] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, 3-е изд., Наука, М., 1989, 472 с.; англ. пер. 2-го изд.: V. I. Arnol’d, *Mathematical methods of classical mechanics*, 2nd ed., *Grad. Texts in Math.*, **60**, Springer-Verlag, New York, 1989, xvi+508 pp.
- [18] Н. С. Славина, “Классификация семейства систем Ковалевской–Яхьи с точностью до Лиувиллевой эквивалентности”, *Докл. РАН*, **452**, 2013, 252–255; англ. пер.: N. S. Slavina, “Classification of the family of Kovalevskaya–Yehia systems up to Liouville equivalence”, *Dokl. Math.*, **88**:2 (2013), 537–540.

Виктория Викторовна Фокичева
(Victoria V. Fokicheva)

Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: arinir@yandex.ru

Поступила в редакцию
12.03.2015 и 03.07.2015