Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Жижиашвили, Г. Е. Ткебучава, О свойствах некоторых классических операторов, возникающих в анализе Фурье, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 10, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm851>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:54:27

УДК 517.51

Л. В. Жижиашвили, Г. Е. Ткебучава

О свойствах некоторых классических операторов, возникающих в анализе Фурье

Устанавливаются свойства сопряженных функций, преобразований Гильберта и некоторых максимальных операторов из анализа Фурье в весовых пространствах Лебега. Для функций многих переменных из пространств Орлица исследуется расходимость по мере чезаровских и абелевых средних сопряженных тригонометрических рядов, а также вопрос существования сопряженных функций.

Библиография: 25 названий.

§ 1. Введение

Для 2π -периодических функций $f \in L^1(T)$, $T = [-\pi, \pi]$, как обычно, символами $\sigma[f]$ и $\bar{\sigma}[f]$ будут обозначены соответственно тригонометрический ряд Фурье и сопряженный ряд для функции f , т.е.

$$\sigma[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1.1)$$

$$\bar{\sigma}[f] = \sum_{k=1}^{\infty} -b_k \cos kx + a_k \sin kx, \quad (1.2)$$

где

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_T f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3)$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_T f(t) \sin kt \, dt, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (1.4)$$

Пусть $s_n(x, f)$ и $\bar{s}_n(x, f)$ — частичные суммы соответственно рядов $\sigma[f]$ и $\bar{\sigma}[f]$. Обозначим для $\alpha > -1$ через $\tau_n^\alpha(x, f)$ и $t_n^\alpha(x, f)$ средние Чезаро для рядов $\sigma[f]$ и $\bar{\sigma}[f]$, т.е.

$$\tau_n^\alpha(x, f) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} s_k(x, f), \quad (1.5)$$

$$t_n^\alpha(x, f) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} \bar{s}_k(x, f), \quad (1.6)$$

где

$$A_0^\alpha = 1, \quad A_k^\alpha = \frac{(\alpha+1) \cdots (\alpha+k)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (1.7)$$

Аналогично символами $f(x, r)$ и $\bar{f}(x, r)$ обозначаются соответственно средние Абеля–Пуассона рядов $\sigma[f]$ и $\bar{\sigma}[f]$, т.е. для $0 \leq r < 1$

$$f(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_T f(t) P(r, t - x) dx, \quad \bar{f}(x, r) = -\frac{1}{\pi} \int_T f(t) Q(r, t - x) dx, \quad (1.8)$$

где

$$P(r, x) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x}, \quad Q(r, x) = \frac{r \sin x}{1 + r^2 - 2r \cos x}.$$

Как показал И.И. Привалов [1], если $f \in L^1(T)$, то почти всюду существует сопряженная функция $\bar{f}$, определенная следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

Ниже используются обозначения:

$$F_1(x) \equiv F_1(x, f) = \sup_{0 < \varepsilon < \pi} \left| \int_\varepsilon^\pi (f(x+t) - f(x-t)) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt \right|, \quad (1.9)$$

$$F_2(x) \equiv F_2(x, f, a) = \sup_n |\tau_n^\alpha(x, f)|, \quad \alpha > 0, \quad (1.10)$$

$$F_3(x) \equiv F_3(x, f, a) = \sup_n |t_n^\alpha(x, f)|, \quad \alpha > 0, \quad (1.11)$$

$$F_4(x) \equiv F_4(x, f) = \sup_r |f(x, r)|, \quad (1.12)$$

$$F_5(x) \equiv F_5(x, f) = \sup_r |\bar{f}(x, r)|, \quad (1.13)$$

$$F_6(x) \equiv F_6(x, f) \equiv M(x, f) = \sup_{0 < |h| \leq \pi} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t)| dt. \quad (1.14)$$

Ниже предполагается, что символы A , $A(p)$, $A(\alpha)$, $A_1(\alpha)$, $A(n)$, $A(p, \alpha)$, $A(p_1, p_2)$, $A(p_1, p_2, \alpha)$, $A(f, a)$, $A(\omega, a)$, A_i обозначают, вообще говоря, разные положительные конечные величины, абсолютные или зависящие лишь от указанных параметров. Через 1_U обозначается характеристическая функция множества U .

В [2] А.Н. Колмогоров доказал, что для любой функции $f \in L^1(T)$ и произвольного $p \in (0, 1)$ имеет место следующее неравенство

$$\int_T |\bar{f}(x)|^p dx \leq A(p) \left(\int_T |f(x)| dx \right)^p. \quad (1.15)$$

Используя фундаментальные результаты А.Н. Колмогорова [2], Г.А. Харди, Дж.Е. Литтлвуда [3] (см. также [4; гл. 1, п. 13, гл. 5, п. 7, гл. 7, п. 7], [5]), получаем неравенства для операторов F_i , $i = 1, \dots, 6$,

$$\int_T |F_i(x)|^p dx \leq A(p) \left(\int_T |f(x)| dx \right)^p, \quad i = 1, 4, 5, 6, \quad (1.16)$$

$$\int_T |F_i(x)|^p dx \leq A(p, \alpha) \left(\int_T |f(x)| dx \right)^p, \quad i = 2, 3, \quad (1.17)$$

где $p \in (0, 1)$.

В [6] Е. Титчмарш установил, что если функция $f \in L^1(\mathbb{R})$, то почти всюду существует преобразование Гильберта $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt$$

и для любого числа $p \in (0, 1)$ справедливо следующее соотношение:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{f}(x)|^p}{1+x^2} dx < \infty.$$

Для функций f , определенных на $[0, +\infty)$, через $F_7(x)$ обозначим оператор Харди–Литтлвуда (см. [7], [8]), т.е.

$$F_7(x) = F_7(x, f) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad x \in (0, +\infty). \quad (1.18)$$

В работе [9; гл. 1] были доказаны теоремы, которые являются усилениями соответствующих результатов А. Н. Колмогорова [2], Е. Титчмарша [6]. В §2 настоящей работы установлены утверждения, которые усиливают и уточняют эти теоремы. Кроме того, исследуются определенные интегральные свойства операторов F_i , $i = 1, \dots, 7$, уточняются соответствующие результаты Г. Кобера [10], [11], С. Коидзуми [12].

В §3 рассматриваются функции многих переменных.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$ – точки евклидова n -мерного, $n \geq 2$, пространства $\mathbb{R}^n$, $ds = ds_1 \dots ds_n$ и $T^n = [-\pi, \pi]^n$.

Для 2π -периодической по каждой переменной функции $f \in L^1(T^n)$ определим:

1) усеченную сопряженную функцию

$$\bar{f}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(x) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{[-\pi, -\varepsilon_1] \cup [\varepsilon_1, \pi]} \dots \int_{[-\pi, -\varepsilon_n] \cup [\varepsilon_n, \pi]} f(x+s) \prod_{i=1}^n \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds,$$

где $0 < \varepsilon_i < \pi$ при $i = 1, \dots, n$;

2) средние Чезаро ряда, сопряженного по переменным $x_1, \dots, x_n$ n -кратному тригонометрическому ряду Фурье функции f ,

$$t_{m_1, \dots, m_n}(f, x) = \left(-\frac{1}{\pi}\right)^n \int_{T^n} f(x+s) \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} \left(1 - \frac{\sin(m_i+1)s_i}{(m_i+1)\sin s_i}\right) ds,$$

где $m_i \in \mathbb{N}$ при $i = 1, \dots, n$;

3) средние Абеля–Пуассона ряда, сопряженного по переменным $x_1, \dots, x_n$ n -кратному тригонометрическому ряду Фурье функции f ,

$$\bar{f}(x, r_1, \dots, r_n) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{T^n} f(x+s) \prod_{i=1}^n \frac{2r_i \sin s_i}{(1-r_i^2) + 2r_i(1-\cos s_i)} ds,$$

где $0 < r_i < 1$ при $i = 1, \dots, n$.

В [13] А. Зигмунд доказал, что в случае $n = 2$

$$\bar{f}(x) = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0, i=1,2} \bar{f}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(x) \quad (1.19)$$

— сопряженная функция по двум переменным — существует почти всюду при условии, что

$$\int_{T^2} |f| \ln(|f| + 1) dx < \infty. \quad (1.20)$$

Для функций n переменных существование почти всюду сопряженной функции по n переменным

$$\bar{f}(x) = \lim_{\varepsilon_i \rightarrow 0, i=1, \dots, n} \bar{f}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(x) \quad (1.21)$$

так же, как и пределов чезаровских и абелевых средних сопряженных тригонометрических рядов

$$\lim_{m_i \rightarrow \infty, i=1, \dots, n} t_{m_1, \dots, m_n}(f, x), \quad (1.22)$$

$$\lim_{r_i \rightarrow 1^-, i=1, \dots, n} \bar{f}(x, r_1, \dots, r_n), \quad (1.23)$$

обеспечивает условие

$$\int_{T^n} |f| \ln^{n-1}(|f| + 1) dx < \infty$$

(см. [9]). А. Зигмунд [14] поставил вопрос о достаточности условия одной лишь интегрируемости на T^2 функции f для существования почти всюду предела (1.19) при выполнении для некоторого $\lambda > 1$ соотношения $1/\lambda \leq \varepsilon_1/\varepsilon_2 \leq \lambda$. Отрицательный ответ был получен в работе [15]. Кроме того был получен и аналог этого результата для функций n переменных [16], а именно даже в случаях $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n$, $m_1 = \dots = m_n$ и $r_1 = \dots = r_n$ для существования почти всюду соответственных пределов (1.20)–(1.22) не является достаточным и условие $\int_{T^n} \varphi(|f|) dx < \infty$, где возрастающая неотрицательная функция φ такова, что $\varphi(t) = o(t \ln^{n-1} t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Во втором параграфе работы вопросы существования указанных пределов рассматриваются в терминах категорий Бэра и сходимости по мере. Приведенные здесь результаты идейно связаны с соответствующими результатами из работ [17]–[20]. В частности, доказано, что множество функций из пространств Орлича, не входящих в пространство $L \ln^{n-1} L(T^n)$, для которых сопряженная функция (1.21) существует хотя бы при $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n$, является множеством первой категории Бэра.

§ 2. О функциях одной переменной

ТЕОРЕМА 2.1. а) *Предположим, что функции f и ω суммируемы на T . Если $p_1, p_2, p_1 + p_2 \in (0, 1)$, то имеют место следующие соотношения:*

$$\int_T |F_i(x)|^{p_1} |\omega(x)|^{p_2} dx \leq A(p_1, p_2) \left(\int_T |f(x)| dx \right)^{p_1} \left(\int_T |\omega(x)| dx \right)^{p_2}, \quad (2.1)$$

когда $i = 1, 4, 5, 6$, и

$$\int_T |F_i(x)|^{p_1} |\omega(x)|^{p_2} dx \leq A(p_1, p_2, \alpha) \left(\int_T |f(x)| dx \right)^{p_1} \left(\int_T |\omega(x)| dx \right)^{p_2}, \quad (2.2)$$

когда $i = 2, 3$.

б) Если же $p_1, p_2 \in (0, 1)$, $p_1 + p_2 = 1$, то в классе $L^1(T)$ существуют функции f и ω , $\omega > 0$ почти всюду на T , для которых

$$\begin{aligned} \int_T |\bar{f}(x)|^{p_1} (\omega(x))^{p_2} dx &= \infty, \\ \int_T |F_i(x)|^{p_1} (\omega(x))^{p_2} dx &= \infty, \quad i = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт а) докажем, используя соотношения (1.16), (1.17). Так как $p_1 + p_2 < 1$, то существует число p' , для которого $p_1 + p_2 < p' < 1$. Положим

$$\beta = p' - p_1 - p_2, \quad p_3 = \frac{p_1 + \beta}{1 - p_2}. \quad (2.3)$$

Тогда $p_1 < p_3 < 1$. Пусть теперь

$$q = \frac{p_3}{p_1}, \quad q' = \frac{p_1 + \beta}{1 - p_2}. \quad (2.4)$$

Применяя неравенство Гёльдера, находим

$$\int_T |F_i(x)|^{p_1} |\omega(x)|^{p_2} dx \leq \left(\int_T |F_i(x)|^{p_3} dx \right)^{1/q} \left(\int_T |\omega(x)|^{p_2 q'} dx \right)^{1/q'}, \quad (2.5)$$

где F_i , $i = 1, \dots, 6$, определены согласно (1.9)–(1.14). Используя (2.3) и (2.4), имеем $p_2 q' = (p_2 p_1 + p_2 \beta) / (p_2 p_1 + \beta) < 1$.

Теперь из неравенства Гёльдера следует

$$\left(\int_T |\omega(x)|^{p_2 q'} dx \right)^{1/q'} \leq A(p_1, p_2) \left(\int_T |\omega(x)| dx \right)^{p_2}. \quad (2.6)$$

Таким образом, соотношения (1.16), (1.17), (2.3)–(2.6) дают неравенства (2.1) и (2.2).

Докажем справедливость утверждения п. б) теоремы 2.1. Если

$$K_n^\alpha(t) = \frac{1}{2A_n^\alpha \sin(t/2)} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t, \quad t \neq 0,$$

– ядро Чезаро порядка $\alpha > 0$, то (см., например, [4; гл. 3, п. 5])

$$K_n^\alpha(t) \geq 0, \quad \alpha \geq 1, \quad (2.7)$$

$$K_n^\alpha(t) \geq A(\alpha)n, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (n+1)t \leq 1, \quad (2.8)$$

$$\int_T |K_n^\alpha(t)| dt \leq A_1(\alpha). \quad (2.9)$$

Известны также следующие соотношения (см., например, [4; гл. 3, п. 5]):

$$P(r, x) > 0 \quad \forall x, \quad (2.10)$$

$$Q(r, x) > 0, \quad x \in (0, \pi), \quad (2.11)$$

$$\frac{1-r}{2(1+r)} \leq P(r, x) \leq \frac{1+r}{2(1-r)}. \quad (2.12)$$

Ниже будем предполагать, что $\delta = \delta(\alpha) \in (0, 1)$ и выбрано так, что выполнено

$$A(\alpha) - \frac{A_1(\alpha)}{\ln(1/\delta)} > \frac{A(\alpha)}{2}, \quad (2.13)$$

где $A(\alpha)$ и $A_1(\alpha)$ заданы условиями (2.8) и (2.9).

Для $0 < \eta < 1 - p_2$ определим 2π -периодические функции f и ω :

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{-1-\eta}, & x \in (0, \delta]; \\ 0, & x \in [-\pi, \pi] \setminus (0, \delta], \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall x, \quad (2.14)$$

$$\omega(x) = \begin{cases} x^{-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{-1-\eta}, & x \in (0, \delta]; \\ 1, & x \in [-\pi, \pi] \setminus (0, \delta], \end{cases} \quad \omega(x+2\pi) = \omega(x) \quad \forall x. \quad (2.15)$$

Нетрудно видеть, что так определенные функции f и ω суммируемы на T . Если $x \in (0, \delta)$, то

$$|\bar{f}(-x)| = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta t^{-1} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{-1-\eta} \operatorname{ctg} \frac{t+x}{2} dt > A(\eta) x^{-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{-\eta}. \quad (2.16)$$

В силу (1.9), (1.11) и (1.13) можно заключить, что

$$F_i(-x) \geq |\bar{f}(-x)|, \quad i = 1, 3, 5. \quad (2.17)$$

Для $x \in (0, \delta)$ выбираем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\frac{1}{n+2} < x \leq \frac{1}{n+1}.$$

Тогда согласно (2.7)–(2.9) и (2.13) будем иметь

$$F_2(-x) \geq \frac{A(\alpha)}{x} \int_0^x f(t) dt. \quad (2.18)$$

Аналогично, принимая во внимание (2.10), (2.12), можно выбрать $r \in [0, 1)$ так, что

$$F_4(-x) \geq \frac{A}{x} \int_0^x f(t) dt. \quad (2.19)$$

Нетрудно заключить и справедливость следующего соотношения:

$$F_6(-x) \geq \frac{A}{x} \int_0^x f(t) dt. \quad (2.20)$$

Таким образом, принимая во внимание (2.14)–(2.20), при $p_1 + p_2 = 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_T |\bar{f}(x)|^{p_1} (\omega(x))^{p_2} dx &= \infty, \\ \int_T |F_i(x)|^{p_1} (\omega(x))^{p_2} dx &= \infty, \quad i = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Теорема 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Пункт а) является частным случаем более общего утверждения, которое можно получить, используя теорему 100 из [5]. Кроме того, схема доказательства теоремы 2.1 приводит к следующему заключению: утверждение п. а) остается в силе для многих других классических операторов, встречающихся в современной теории тригонометрических ортогональных рядов Фурье, если только для этих операторов справедливы оценки типа неравенства А. Н. Колмогорова (1.15).

Теперь рассмотрим преобразования Гильберта. Ниже всюду предполагается, что $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая функция и $\omega > 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Кроме того, в соответствующих утверждениях будем требовать выполнения следующих условий:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x)}{1 + |x|} dx < \infty \quad (2.21)$$

или же

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x)}{1 + x^2} dx < \infty. \quad (2.22)$$

Для функции ω , удовлетворяющей (2.22), положим

$$\omega(a, z) = \frac{y}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\omega(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt, \quad (2.23)$$

$$\omega_1(a, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(t-x)\omega(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt, \quad (2.24)$$

где $a > 0$, $y > 0$ и $z = x + iy$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.2. а) *Предположим, что функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ и функция ω удовлетворяют условию (2.21). Если $p_1, p_2, p_1 + p_2 \in (0, 1)$, то*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{f}(x)|^{p_1} (\omega(x))^{p_2}}{1 + x^2} dx \leq A(p_1, p_2) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1 + |x|} dx \right)^{p_1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x)}{1 + |x|} dx \right)^{p_2}. \quad (2.25)$$

б) *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$ и функция ω удовлетворяют условию (2.22). Если функции f и ω четные, а $p_1, p_2, p_1 + p_2 \in (0, 1)$, то*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{f}(x)|^{p_1} (\omega(x))^{p_2}}{1 + x^2} dx \leq A(p_1, p_2) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1 + x^2} dx \right)^{p_1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x)}{1 + x^2} dx \right)^{p_2}. \quad (2.26)$$

в) *Допустим, что $p_1, p_2 \in (0, 1)$, $p_1 + p_2 = 1$. Тогда существуют функции f и ω , суммируемые на $\mathbb{R}$, для которых*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{f}(x)|^{p_1} (\omega(x))^{p_2}}{1 + x^2} dx = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать метод, изложенный в работе [9; гл. 1, п. 1.2]. Не ограничивая общности, можно считать, что функция f не эквивалентна нулю и $f \geq 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что при $y \in (0, \infty)$ и $0 < a_0 \leq a < \infty$ выполняется $f(a, z) > 0$ на $\mathbb{R}$. Положим

$$F(a, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t - z} dt = f(a, z) + i f_1(a, z), \quad (2.27)$$

$$\Phi(a, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\omega(t)}{t - z} dt = \omega(a, z) + i \omega_1(a, z). \quad (2.28)$$

Далее, если

$$\theta = \arg F, \quad \psi = \arg \Phi, \quad (2.29)$$

то

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}.$$

Нетрудно заметить, что при фиксированном $a \in [a_0, \infty)$ и $0 < |z_0| \leq |z| < \infty$ верны следующие соотношения:

$$|F(a, z)| \leq A(f, a) \frac{1}{|z|}, \quad |\Phi(a, z)| \leq A(\omega, a) \frac{1}{|z|}. \quad (2.30)$$

Обозначим

$$\eta(z) = x^2 - y^2 + 1 - 2ixy, \quad \varphi = \arg \eta. \quad (2.31)$$

Так как выражение $2xy/(x^2 - y^2 + 1)$ при $y \in (0, \frac{1}{2})$ по абсолютной величине не превосходит $2y$ и стремится к нулю при $y \rightarrow 0$ и $|z| \rightarrow \infty$, то можно заключить, что справедливо соотношение

$$\cos(p_1\theta + p_2\psi + \varphi) \geq \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2}(p_1 + p_2), \quad 0 < y \leq y_0 < \frac{1}{2}, \quad (2.32)$$

где θ , φ и ψ определены согласно (2.29), (2.31).

Пусть теперь $y \in (0, \frac{1}{2})$ и $K \in [\frac{1}{2}, \infty)$ – фиксированные числа, а γ – контур, состоящий из прямолинейного отрезка, соединяющего точки $-K + iy$ и $K + iy$, а также полуокружности над отмеченным отрезком. Тогда теорема о вычетах (см. [6]) обеспечивает справедливость равенства:

$$\int_{\gamma} \frac{(F(a, z))^{p_1} (\Phi(a, z))^{p_2}}{1 + z^2} dz = \pi (F(a, i))^{p_1} (\Phi(a, i))^{p_2}.$$

Отсюда, учитывая (2.29)–(2.31) и переходя к пределу при $K \rightarrow \infty$, находим

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(a, z)|^{p_1} |\Phi(a, z)|^{p_2} |\eta(z)| e^{i(p_1\theta + p_2\psi + \varphi)}}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} dx = \pi (F(a, i))^{p_1} (\Phi(a, i))^{p_2}.$$

Следовательно, справедливо следующее равенство:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(a, z)|^{p_1} |\Phi(a, z)|^{p_2} |\eta(z)| \cos(p_1\theta + p_2\psi + \varphi)}{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} dx = \operatorname{Re}(\pi (F(a, i))^{p_1} (\Phi(a, i))^{p_2}). \quad (2.33)$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{|\eta(z)|} > \frac{1}{4(1+x^2)}, \quad y \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Тогда, учитывая (2.32), (2.33), получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(a, z)|^{p_1} |\Phi(a, z)|^{p_2}}{1+x^2} dx \leq \frac{6\pi}{\cos \frac{\pi}{2} (p_1 + p_2)} |F(a, z)|^{p_1} |\Phi(a, z)|^{p_2}. \quad (2.34)$$

Далее, в силу (2.27), (2.28) находим

$$|F(a, i)| \leq \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{1+|t|} dt, \quad (2.35)$$

$$|\Phi(a, i)| \leq \frac{2}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\omega(t)}{1+|t|} dt. \quad (2.36)$$

Если же f и ω – четные функции, то

$$|F(a, i)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{1+t^2} dt, \quad (2.37)$$

$$|\Phi(a, i)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\omega(t)}{1+t^2} dt. \quad (2.38)$$

Хорошо известно (см., например, [6]), что почти всюду на $\mathbb{R}$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \lim_{a \rightarrow \infty} f_1(a, z) = \tilde{f}(x), \quad (2.39)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \lim_{a \rightarrow \infty} \omega_1(a, z) = \omega(x). \quad (2.40)$$

Таким образом, опираясь на (2.34)–(2.40) и применяя терему Фату, можно заключить, что справедливы п. а) и б) теоремы 2.2.

Докажем теперь п. в). Для $0 < \varepsilon < 1 - p_2$ определим суммируемые на $\mathbb{R}$ функции f и ω следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{-1-\varepsilon}, & x \in \left(0, \frac{1}{3}\right]; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \left(0, \frac{1}{3}\right], \end{cases}$$

$$\omega(x) = \begin{cases} |x|^{-1} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-1-\varepsilon}, & |x| \in \left(0, \frac{1}{3}\right]; \\ x^{-2}, & |x| > \frac{1}{3}; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Если $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, то

$$|\tilde{f}(-x)| > A(\varepsilon) x^{-1} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^{-\varepsilon}.$$

Отсюда

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{f}(x)|^{p_1} (\omega(x))^{p_2}}{1+x^2} dx = \infty.$$

Теорема 2.2 доказана.

Следует добавить, что из схемы доказательства теоремы 2.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. а) *Предположим, что четная функция $f \in L^1(\mathbb{R})$, а ω удовлетворяет условию (2.21). Если $p_1, p_2, p_1 + p_2 \in (0, 1)$, то*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{f}(x)|^{p_1} (\omega(x))^{p_2}}{1 + x^2} dx \leq A(p_1, p_2) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1 + x^2} dx \right)^{p_1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x)}{1 + |x|} dx \right)^{p_2}.$$

б) *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$, а четная функция ω удовлетворяет условию (2.22). Предположим, что $p_1, p_2, p_1 + p_2 \in (0, 1)$. Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{f}(x)|^{p_1} (\omega(x))^{p_2}}{1 + x^2} dx \leq A(p_1, p_2) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1 + |x|} dx \right)^{p_1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x)}{1 + x^2} dx \right)^{p_2}.$$

Из установленных утверждений можно получить и другие следствия. Приведем наиболее характерное.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. а) *Пусть функция $f \in L^1(\mathbb{R})$. Тогда для любого $p \in (0, 1)$ имеем следующее неравенство:*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{f}(x)|^p}{1 + x^2} dx \leq A(p) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1 + |x|} dx \right)^p.$$

б) *Если четная функция $f \in L^1(\mathbb{R})$, то для произвольного $p \in (0, 1)$ справедливо следующее соотношение:*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{f}(x)|^p}{1 + x^2} dx \leq A(p) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1 + x^2} dx \right)^p.$$

Для его получения достаточно в пп. а) и б) теоремы 2 предположить, что $\omega(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, $p_1 = p$, $p_2 = (1 - p)/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Схема доказательства п. а) теоремы 1 не применима при установлении пп. а) и б) теоремы 2.2. Поэтому использовался метод комплексного анализа, который часто применял Е. Титчмарш [6].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Схема доказательства теоремы 2 показывает, что вместо условий (2.21) и (2.22) для функции ω можно было бы потребовать следующие ограничения:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\omega(x)|}{1 + |x|} dx < \infty \quad (2.41)$$

или

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\omega(x)|}{1 + x^2} dx < \infty. \quad (2.42)$$

Теперь рассмотрим оператор Харди–Литтлвуда. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.3. а) *Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, а функция ω удовлетворяет условию*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\omega(x)|}{1 + x^2} dx < \infty. \quad (2.43)$$

Если $p_1, p_2, p_1 + p_2 \in (0, 1)$, то

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|F_7(x)|^{p_1} |\omega(x)|^{p_2}}{1 + x^2} dx \leq A(p_1, p_2) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(x)|}{1 + x^2} dx \right)^{p_1} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\omega(x)|}{1 + x^2} dx \right)^{p_2}. \quad (2.44)$$

б) Предположим, что $p_1, p_2 \in (0, 1)$, $p_1 + p_2 = 1$. Тогда существуют функции f и ω , суммируемые на $\mathbb{R}_+$, для которых

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|F_7(x)|^{p_1} |\omega(x)|^{p_2}}{1+x^2} dx = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|F_7(x)|^{p_1} |\omega(x)|^{p_2}}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \frac{|F_7(x)|^{p_1} |\omega(x)|^{p_2}}{1+x^2} dx + \int_1^\infty \frac{|F_7(x)|^{p_1} |\omega(x)|^{p_2}}{1+x^2} dx \\ &\equiv U_1(x, f, \omega, p_1, p_2) + U_2(x, f, \omega, p_1, p_2). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Согласно (1.18) находим

$$\begin{aligned} U_1(x, f, \omega, p_1, p_2) &\leq \int_0^1 \left(\frac{1+x^2}{x} \int_0^\infty \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt \right)^{p_1} |\omega(x)|^{p_2} dx \\ &< 2 \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(x)|}{1+x^2} dx \right)^{p_1} \int_0^1 \frac{|\omega(x)|^{p_2}}{x^{p_1}} dx. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Однако $p_1 < 1 - p_2$ и, следовательно,

$$\beta \equiv \frac{p_1}{1-p_2} < 1. \quad (2.47)$$

Тогда, используя неравенство Гёльдера, имеем

$$\int_0^1 \frac{|\omega(x)|^{p_2}}{x^{p_1}} dx \leq \left(\int_0^1 |\omega(x)| dx \right)^{p_2} \left(\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta} \right)^{1-p_2}.$$

В силу (2.47) получаем

$$\int_0^1 \frac{|\omega(x)|^{p_2}}{x^{p_1}} dx \leq A(p_1, p_2) \left(\int_0^1 |\omega(x)| dx \right)^{p_2}. \quad (2.48)$$

Следовательно, опираясь на (2.46) и (2.48), находим

$$U_1(x, f, \omega, p_1, p_2) \leq A(p_1, p_2) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(x)|}{1+x^2} dx \right)^{p_1} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\omega(x)|}{1+x^2} dx \right)^{p_2}. \quad (2.49)$$

Далее, в силу (2.45) можно получить следующее неравенство:

$$\begin{aligned} U_2(x, f, \omega, p_1, p_2) &\leq \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(x)|}{1+x^2} dx \right)^{p_1} \int_1^\infty \left(\frac{1+x^2}{x} \right)^{p_1} \frac{|\omega(x)|^{p_2}}{1+x^2} dx \\ &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(x)|}{1+x^2} dx \right)^{p_1} \int_1^\infty x^{p_1} \frac{|\omega(x)|^{p_2} (1+x^2)^{p_2}}{(1+x^2)(1+x^2)^{p_2}} dx. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Так как $x \in [1, \infty)$, то

$$\frac{x^{p_1} (1+x^2)^{p_2}}{1+x^2} < 2 \frac{(1+x)^{p_1} (1+x)^{2p_2}}{(1+x)^2} = 2 \frac{1}{(1+x)^{2-p_1-2p_2}}, \quad 2-p_1-2p_2 > 0.$$

Кроме того,

$$\frac{2 - p_1 - 2p_2}{1 - p_1} = 1 + \frac{1 - p_1 - p_2}{1 - p_1} > 0. \quad (2.51)$$

Таким образом, принимая во внимание (2.50) и (2.51), имеем

$$\int_1^\infty x^{p_1} \frac{|\omega(x)|^{p_2} (1+x^2)^{p_2}}{(1+x^2)^{p_2} (1+x^2)} dx < \int_1^\infty \frac{|\omega(x)|^{p_2}}{(1+x^2)^{p_2}} \frac{2}{(1+x)^{2-p_1-2p_2}} dx.$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера, находим

$$\int_1^\infty x^{p_1} \frac{|\omega(x)|^{p_2} (1+x^2)^{p_2}}{(1+x^2)^{p_2} (1+x^2)} dx \leq A(p_1, p_2) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\omega(x)|}{1+x^2} dx \right)^{p_2}.$$

Тогда в силу (2.50)

$$U_2(x, f, \omega, p_1, p_2) \leq A(p_1, p_2) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(x)|}{1+x^2} dx \right)^{p_1} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\omega(x)|}{1+x^2} dx \right)^{p_2}. \quad (2.52)$$

Таким образом, соотношения (2.45), (2.49) и (2.52) дают (2.44). Справедливость п. а) теоремы 2.3 установлена.

Пункт б) легко проверить для сужений на $\mathbb{R}_+$ функций f и ω , примененных при доказательстве п. б) теоремы 2.2.

Теорема 2.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Подобным образом более громоздкие выкладки позволяют получить и оценки вида

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|F_7(x)|^{p_1} |\omega(x)|^{p_2}}{(1+x)^\alpha} dx \leq A(p_1, p_2) \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(x)|}{(1+x)^\beta} dx \right)^{p_1} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\omega(x)|}{(1+x)^\gamma} dx \right)^{p_2}$$

для соответствующих α , β и γ .

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть функция $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, тогда для любого $p \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{f}(x)|^p}{1+x^2} dx \leq A(p) \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|f(x)|^p}{1+x^2} dx.$$

Как установил М. Рисс [21], для $1 < p < \infty$

а) если $f \in L^p(T)$, то $\bar{f} \in L^p(T)$ и

$$\|\bar{f}\|_{L^p(T)} \leq A(p) \|f\|_{L^p(T)}; \quad (2.53)$$

б) если же $f \in L^p(\mathbb{R})$, то $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$ и

$$\|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq A(p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad (2.54)$$

Используя неравенство Гёльдера, согласно (2.54) можно заключить следующее. Если функция $f \in L^p(T)$ при некотором $p \in (1, \infty)$ и $r \in (0, p)$, то для любого $\beta > 1 - r/p$ будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{f}(x)|^r}{(1 + |x|^\beta)} dx < \infty. \quad (2.55)$$

Следует добавить, что при

$$\beta = 1 - \frac{r}{p} \quad (2.56)$$

соотношение (2.55), вообще говоря, не имеет места. В самом деле, пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/p} (\ln(1 + |x|))^{-(1+\varepsilon)/p}, & x \in (0, \infty); \\ 0, & x \in (-\infty, 0], \end{cases}$$

где

$$0 < \varepsilon < \frac{p-r}{r}. \quad (2.57)$$

Ясно, что $f \in L^p(\mathbb{R})$. Далее, если $x \in (0, \infty)$, то

$$|\tilde{f}(-x)| > \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f(t)}{t+x} dt > \frac{p}{\pi(p-1)} x^{-1/p} (\ln(1 + |x|))^{-(1+\varepsilon)/p}.$$

Тогда условия (2.56) и (2.57) дают

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{f}(x)|^r}{1 + |x|^\beta} dx \geq A(p) \int_0^\infty x^{-1} (\ln(1 + |x|))^{-(r(1+\varepsilon))/p} dx = \infty.$$

Аналогичные заключения верны и для сопряженной функции $\bar{f}$. Точнее, если функция $f \in L^p(\mathbb{R})$ при некотором $p \in (1, \infty)$, то для любого $r \in (0, p)$ и $0 < \beta < 1 - r/p$ имеем

$$\int_T |x|^{-\beta} |\bar{f}(x)|^r dx < \infty.$$

Следует добавить, что здесь используется соотношение (2.53).

Если 2π -периодическая функция f при $x \in T$ определена формулой

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1/p} \left(\ln \frac{2\pi}{x} \right)^{-(1+\varepsilon)/p}, & x \in (0, \pi); \\ 0, & x \in (-\pi, 0], \end{cases}$$

где ε удовлетворяет условию (2.57), то $f \in L^p(\mathbb{R})$, однако

$$\int_T |x|^{-\beta} |\bar{f}(x)|^r dx = \infty, \quad \beta \geq 1 - \frac{r}{p}.$$

Отметим, что, как установил Г. Кобер [10] (см. также [11]), если функции f и $\tilde{f}$ суммируемы на $\mathbb{R}$, то $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$ и $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) dx = 0$.

§3. О функциях многих переменных

Ниже $n > 1$ и $L_\Phi(T^n)$ – пространство Орлича, порожденное N -функцией Φ и снабженное нормой $\|\cdot\|_{L_\Phi(T^n)}$. Известно (см. [22; гл. 1, п. 8]), что для N -функций Φ , для которых выполнено условие Δ_2 , т.е. $\exists C > 0, \exists u_0 \geq 0 \forall u \geq u_0 \Phi(2u) \leq C\Phi(u)$, имеем

$$\|f\|_{L_\Phi(T^n)} < \infty \iff \int_{T^n} \Phi(f) dx < \infty.$$

В частности, это верно для N -функции Φ , совпадающей для $u \geq u_0 > 1$ с функцией $u \ln^{n-1} u$. Обозначая через $L \ln^{n-1} L(T^n)$ пространство Орлича, порожденное этой функцией, результаты из [9; гл. 2, п. 2.2] относительно пределов (1.21)–(1.23), упомянутые во введении, можно перефразировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любой функции $f \in L \ln^{n-1} L(T^n)$ ее сопряженная функция (1.21), а также пределы чезаровских и абелевых средних сопряженных тригонометрических рядов функции f (1.22), (1.23) существуют почти всюду на T^n .*

Следующее утверждение указывает роль пространства $L \ln^{n-1} L(T^n)$ в теореме 3.1.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть пространство Орлича $L_\Phi(T^n)$ таково, что*

$$L_\Phi(T^n) \setminus L \ln^{n-1} L(T^n) \neq \emptyset. \quad (3.1)$$

Тогда в пространстве $L_\Phi(T^n)$ имеет первую категорию каждое из следующих множеств:

- а) множество функций $f \in L_\Phi(T^n)$, для которых $\bar{f}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(x)$ сходится по мере на T^n при $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n \rightarrow 0$;
- б) множество функций $f \in L_\Phi(T^n)$, для которых $t_{m_1, \dots, m_n}(f, x)$ сходится по мере на T^n при $m_1 = \dots = m_n \rightarrow \infty$;
- в) множество функций $f \in L_\Phi(T^n)$, для которых $\bar{f}(x, r_1, \dots, r_n)$ сходится по мере на T^n при $r_1 = \dots = r_n \rightarrow 1^-$.

Для доказательства теоремы 3.2 нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения и обозначения. Для $k \in \mathbb{N}$ и $f \in L^1(T^n)$ обозначим

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}(x) \text{ при } \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n = 2^{-k} & \text{ через } H_k^{(1)}(f, x), \\ t_{m_1, \dots, m_n}(f, x) \text{ при } m_1 = \dots = m_n = 2^k & \text{ через } H_k^{(2)}(f, x), \\ \bar{f}(x, r_1, \dots, r_n) \text{ при } r_1 = \dots = r_n = 1 - 2^{-k} & \text{ через } H_k^{(3)}(f, x). \end{aligned}$$

Ниже $L^0(T^n)$ обозначает пространство измеримых на T^n функций, сходимость в этом пространстве есть сходимость по n -мерной мере Лебега и $\delta_k = 2^{nk} \mathbf{1}_{[0, 2^{-k}]^n}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 3.1. *Для $i = 1, 2, 3$ существуют постоянные $A_i > 0$ такие, что для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются оценки*

$$\text{mes}\{x \in T^n : |H_k^{(i)}(\delta_k, x)| > 2^k\} \geq A_i k^{n-1} 2^{-k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{mes} \left\{ x \in T^n : x_j \in \left(2^{-k+1}, \frac{\pi}{2} \right), j = 1, \dots, n, A'_i \left(\prod_{j=1}^n x_j \right)^{-1} \geq 2^k \right\} \\ \geq A_i k^{n-1} 2^{-k}, \end{aligned}$$

то достаточно доказать оценки $|H_k^{(i)}(\delta_k, x)| \geq A'_i (\prod_{j=1}^n x_j)^{-1}$ для $i = 1, 2, 3$ и $x \in T^n$ таких, что $x_j \in (2^{-k+1}, \pi/2)$, $j = 1, \dots, n$ и $k \in \mathbb{N}$.

Это следует из неравенств, справедливых при $x_j \in (2^{-k+1}, \pi/2)$, $y_j \in [0, 2^{-k}]$, $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi x_j} \leq \text{ctg} \frac{x_j}{2} \leq \text{ctg} \frac{x_j - y_j}{2}, \\ \frac{2(1 - 2^{-k}) \sin(x_j - y_j)}{2^{-2k} + 2(1 - 2^{-k})(1 - \cos(x_j - y_j))} \geq \frac{A''_j}{x_j}, \end{aligned}$$

кроме того, при $i = 2$ используется неравенство

$$\frac{\sin(m+1)z}{(m+1)\sin z} \geq \frac{1}{2},$$

справедливое для $\pi/(m+1) \leq z \leq \pi/2$, $m \in \mathbb{N}$.

Выделим рассуждения из работы [23; п. 1] в частном случае в следующее предложение.

ЛЕММА 3.2. Пусть линейный непрерывный оператор $H : L^1(T^n) \rightarrow L^0(T^n)$ коммутирует с семейством сдвигов $\mathcal{E}$, т.е. $\forall E \in \mathcal{E}, \forall f \in L^1(T^n)$

$$TEf = ETf.$$

Пусть $\|f\|_{L^1(T^n)} = 1$ и $\lambda > 1$.

Тогда для любого $r \in \mathbb{N}$ такого, что выполняется условие $\text{mes}\{x \in T^n : |Hf| > \lambda\} \geq 1/r$, найдутся $E_1, \dots, E_r \in \mathcal{E}$ и $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, r$, такие, что

$$\text{mes} \left\{ x \in T^n : \left| H \left(\sum_{i=1}^r \varepsilon_i f(E_i x) \right) \right| > \lambda \right\} \geq \frac{1}{8}.$$

ЛЕММА 3.3. Пусть для пространства Орлича $L_\Phi(T^n)$ выполнено условие (3.1). Тогда найдутся возрастающие к бесконечности последовательности чисел $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ и последовательность функций $\{\xi_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ из единичного шара $S(O, 1)$ пространства $L_\Phi(T^n)$ такие, что

$$\text{mes} \{ x \in T^n : |H_{m_k}^{(i)}(\xi_k, x)| > \nu_k \} \geq \frac{1}{8} \quad \forall k. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (3.1) следует

$$\liminf_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u \ln^{n-1} u} = 0$$

(см. [22; гл. 2, п. 8]), поэтому найдется возрастающая к бесконечности последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^\infty$, для которой выполнено

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(2^{nm_k}) 2^{-nm_k} m_k^{n-1} = 0, \quad \Phi(2^{nm_k}) \geq 2^{nm_k} \quad \forall k.$$

Тогда в силу лемм 3.1 и 3.2, полагая $H = H_{m_k}^{(i)}$, $r = (2^{m_k} m_k^{1-n} / A_i)$, $\lambda = 2^{m_k}$, $f = \delta_{m_k}$,

$$F_k = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \varepsilon_i f \circ E_i, \quad \xi_k = \frac{2^{nm_k-1} F_k}{\Phi(2^{nm_k})}, \quad \nu_k = \frac{2^{m_k} 2^{nm_k-1}}{r \Phi(2^{nm_k})},$$

получаем требуемую оценку меры (3.2). Кроме того, $\xi_k \in S(O, 1)$ в силу выпуклости функции Φ . Действительно, оценки $\|F_k\|_{L^\infty(T^n)} \leq 2^{nm_k}$ и $\|F_k\|_{L^1(T^n)} \leq 1$ влекут

$$\|\xi_k\|_{L_\Phi(T^n)} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \int_{T^n} \Phi \left(\frac{2^{nm_k} F_k}{\Phi(2^{nm_k})} \right) dx \right) \leq 1.$$

Теорема 3.2 вытекает из этой и следующей лемм.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\{H_m\}_{m=1}^\infty$ – последовательность непрерывных линейных операторов, действующих из пространства Орлича $L_\Phi(T^n)$ в пространство $L^0(T^n)$.

Пусть найдутся последовательность функций $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ из единичного шара $S(O, 1)$ пространства $L_\Phi(T^n)$ и возрастающие к бесконечности последовательности чисел $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$, для которых

$$\varepsilon_0 = \inf_k \text{mes} \{x \in T^n : |H_{m_k} \xi_k| > \nu_k\} > 0.$$

Тогда B – множество тех функций f из пространства $L_\Phi(T^n)$, для которых последовательность $\{H_m f\}$ сходится по мере к почти всюду конечной функции, – является множеством первой категории в смысле Бэра в пространстве $L_\Phi(T^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f \in B$. Тогда последовательность $\{H_m f\}$ сходится на T^n по мере к почти всюду конечной функции, которую обозначим Hf .

Так как Hf измерима, то для ε_0 найдется натуральное $\lambda = \lambda(\varepsilon_0)$ такое, что

$$\text{mes} \{x \in T^n : |H(f, x)| > \nu_\lambda\} < \frac{\varepsilon_0}{8}. \quad (3.3)$$

С другой стороны, из сходимости по мере последовательности $\{H_m f\}$ следует, что найдется n такое, что для $m \geq m_n$ имеем

$$\text{mes} \{x \in T^n : |H_m(f, x) - H(f, x)| > \nu_\lambda\} < \frac{\varepsilon_0}{8}. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) заключаем, что при $m \geq m_n$

$$\begin{aligned} \text{mes}\{x \in T^n : |H_m(f, x)| > 2\nu_\lambda\} &\leq \text{mes}\{x \in T^n : |H_m(f, x) - H(f, x)| > \nu_\lambda\} \\ &+ \text{mes}\{x \in T^n : |H(f, x)| > \nu_\lambda\} \leq \frac{\varepsilon_0}{8} + \frac{\varepsilon_0}{8} = \frac{\varepsilon_0}{4}. \end{aligned}$$

Поэтому при $m \geq m_n$

$$f \in \left\{ g \in L_\Phi(T^n) : \text{mes}\{x \in T^n : |H_m(g, x)| > 2\nu_\lambda\} \leq \frac{\varepsilon_0}{4} \right\}.$$

Таким образом, $B \subset \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{\lambda=1}^\infty D_{n\lambda}$, где $D_{n\lambda} = \bigcap_{k=n}^\infty C_{k\lambda}$ и

$$C_{k\lambda} = \left\{ g : \text{mes}\{x \in T^n : |H_{m_k}(g, x)| > 2\nu_\lambda\} \leq \frac{\varepsilon_0}{4} \right\}.$$

Докажем, что множество $C_{k\lambda}$ замкнуто в пространстве $L_\Phi(T^n)$. Действительно, пусть для

$$g_i \in C_{k\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

найдется функция $g \in L_\Phi(T^n)$ такая, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|g - g_i\|_{L_\Phi(T^n)} = 0. \quad (3.6)$$

Из (3.6) в силу непрерывности по мере оператора H_{m_k} следует сходимость по мере последовательности $\{H_{m_k}g_i\}$ к функции $H_{m_k}g$. Отсюда вытекает и существование подпоследовательности $\{H_{m_k}g_{i_q}\}$, которая сходится к $H_{m_k}g$ почти всюду на T^n . Тогда в силу того, что

$$\{x \in T^n : |H_{m_k}(g, x)| > 2\nu_\lambda\} \subseteq \bigcup_{p=1}^\infty \bigcap_{q=p}^\infty \{x \in T^n : |H_{m_k}(g_{i_q}, x)| > 2\nu_\lambda\},$$

с учетом (3.5) имеем $g \in C_{k\lambda}$.

Следовательно, и множество $D_{n\lambda}$ замкнуто.

Зафиксируем произвольные $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{N}$, $f \in F_{n\lambda}$ и $\alpha > 0$. Положим $k_0 = \max\{n, \inf_k \{4\nu_\lambda/\alpha < \nu_k\}\}$ и $h = f + \alpha\xi_{k_0}$.

Отсюда и из условия леммы 3.4 получим

$$\begin{aligned} \text{mes}\{x \in T^n : |H_{m_{k_0}}(h, x)| > 2\nu_\lambda\} &\geq \text{mes}\left\{x \in T^n : |H_{m_{k_0}}(\xi_{k_0}, x)| > \frac{4\nu_\lambda}{\alpha}\right\} \\ &- \text{mes}\{x \in T^n : |H_{m_k}(f, x)| > 2\nu_\lambda\} \\ &\geq \text{mes}\{x \in T^n : |H_{m_{k_0}}(\xi_{k_0}, x)| > \nu_{k_0}\} - \frac{\varepsilon_0}{4} \geq \frac{3\varepsilon_0}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, $h \in S(f, \alpha) \setminus D_{n\lambda}$, т.е. f не является внутренней точкой для множества $D_{n\lambda}$, чем и завершается доказательство леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. а) Доказательство теоремы 3.2 без существенных изменений верно и в случае пространства $L^1(T^n)$.

б) Подобные рассуждения применимы и к некоторым другим классическим операторам при условии выполнения оценки из леммы 3.1, например к оператору Гильберта, сферическим средним Бохнера–Рисса с показателем ниже критического (см. [24], [25]).

в) В случае действия операторов по некоторой части переменных $k < n$ (например, оператора сопряжения по k переменным из n) в теоремах 3.1 и 3.2 пространство $L \ln^{n-1} L(T^n)$ заменяется на $L \ln^{k-1} L(T^n)$. Такого типа утверждения см. в [9; гл. 2, п. 2.2].

Список литературы

1. Привалов И. И. Интеграл Cauchy. Саратов: Совгرافия 13 отделение, 1919.
2. Kolmogoroff A. Sur les fonctions harmoniques et les series de Fourier // Fund. Math. 1925. V. 7. P. 23–28.
3. Hardy G. H., Littlewood H. E. A maximal theorem with functional-theoretic applications // Acta Math. 1930. V. 54. № 1–2. P. 81–116.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
5. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
6. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
7. Голубов Б. И. Аналог одной теоремы Титчмарша для преобразования Фурье–Уолша // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 5. С. 69–86.
8. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. И. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
9. Zhizhiashvili L. Trigonometric Fourier series and their conjugates. Dordrecht: Kluwer. Acad. Publ., 1996.
10. Kober H. A note on Hilbert operator // Bull. Amer. Math. Soc. 1942. V. 48. № 6. P. 421–426.
11. Kober H. A note on Hilbert transforms // J. London Math. Soc. 1943. V. 18. № 2. P. 66–71.
12. Koizumi S. On the singular integrals III // Proc. Japan Acad. 1958. V. 34. P. 594–598.
13. Zygmund A. On the boundary values of functions of several complex variables // Fund. Math. 1949. V. 36. P. 207–235.
14. Zygmund A. On singular integrals // Rend. Mat. Appl. (5). 1958. V. 16. P. 468–505.
15. Жижиашвили Л. В. Некоторые вопросы теории тригонометрических рядов Фурье и их сопряженных. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1965.
16. Жижиашвили Л. В. О сопряженных функциях многих переменных и кратных сопряженных тригонометрических рядах // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 1. С. 34–35.
17. Stein E. M. On limits of sequences of operators // Ann. of Math. (2). 1961. V. 74. № 1. P. 140–170.
18. Гецадзе Р. Д. О расходимости по мере кратных рядов // Некоторые проблемы теории функций и функционального анализа. № 4. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1988. С. 194–206.
19. Конягин С. В. О расходимости по мере кратных тригонометрических рядов Фурье // Матем. заметки. 1988. Т. 44. № 2. С. 196–201.
20. Saks S. Remarks on the differentiability of the Lebesgue indefinite integrals // Fund. Math. 1934. V. 22. P. 257–261.
21. Riesz M. Sur les fonctions conjuguees // Math. Z. 1927. V. 27. P. 218–244.
22. Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
23. Garsia A. M. Topics in almost everywhere convergence. Chicago: Markham, 1970. (Lectures in Adv. Math. V. 4.)
24. Ткебучава Г. Е. О безусловной сходимости по произведениям базисов // Матем. сб. 1992. Т. 184. № 10. С. 109–122.
25. Ткебучава Г. Е. О некоторых свойствах преобразований Гильберта, сопряженных функций и сферических средних Бохнера–Рисса // Изв. вузов. Сер. матем. 1993. Т. 369. № 3. С. 88–89.