Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Лебедев, Экстремальные многочлены и методы оптимизации вычислительных алгоритмов, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 10, 21–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm852>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 11:18:02

УДК 517.518.8+519.6

В. И. Лебедев

Экстремальные многочлены и методы оптимизации вычислительных алгоритмов

В статье изучены экстремальные на $[-1, 1]$ многочлены Чебышёва–Маркова–Бернштейна–Сегё $C_n(x)$ с весовыми функциями $w(x) = (1+x)^\alpha \times (1-x)^\beta / \sqrt{S_l(x)}$, где $\alpha, \beta = 0, \frac{1}{2}$, $S_l(x) = \prod_{k=1}^m (1 - c_k T_{l_k}(x)) > 0$. Дана единая формула их представления в тригонометрическом виде. Получены оптимальные распределения узлов взвешенной интерполяции, явные квадратурные формулы типа Гаусса, Маркова, Лобатто, Радо для интегралов с весом $p(x) = w^2(x)(1-x^2)^{-1/2}$. Определены параметры чебышёвских итерационных методов, оптимально уменьшающих ошибку по сравнению с начальной ошибкой, заданных в различных нормах. Для каждого уровня метода Федоренко–Бахвалова найдены итерационные параметры, учитывающие результаты предыдущих вычислений. Построены чебышёвские с весом фильтры. Исследованы итерационные методы решения уравнений с компактными операторами.

Библиография: 45 названий.

Введение

Построение многих оптимальных алгоритмов вычислительной математики основано на использовании свойств многочленов, которые в произведении с некоторой весовой функцией наименее отклоняются от нуля. Применение зависящих от параметров весовых функций позволяет более точно учесть априорную информацию о свойствах класса искомых решений. На подобных методах базируется исследование в статье таких задач, как задача о распределении n узлов интерполяции, дающем наилучшее взвешенное на отрезке приближение с константой Лебега $O(\ln n)$, получение явных формул для параметров квадратурных формул повышенной точности типа Гаусса, Лобатто, Радо, Маркова, точных для интегралов с чебышёвскими весами от дробно-рациональных функций, определение параметров чебышёвских итерационных методов, оптимально уменьшающих ошибку по сравнению с начальной ошибкой, если начальная и конечная ошибки заданы в различных полиномиальных нормах, использование в чебышёвских с весом фильтрах для обработки сигналов и улучшения характеристик явных и неявных разностных схем.

Сформулируем две типичные возникающие при этом экстремальные задачи. Пусть функция $w(x) = w(x, C)$ непрерывна по x на $[-1, 1]$, положительна в $(-1, 1)$ и является непрерывной функцией от параметров $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ в некоторой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 02-01-00651, 02-01-00742).

замкнутой области их изменения $\overline{C}$. Пусть Π_n – класс многочленов $P_n(x)$ n -й степени, нормированных каким-либо дополнительным условием, например с фиксированным коэффициентом $\tilde{A}_n$ при x^n или с заданным значением в некоторой точке $\delta > 1$, $\overline{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$ – корни многочлена $P_n(x)$. Требуется найти решения следующих экстремальных задач.

ЗАДАЧА I. При заданном значении C найти

$$e_n = \min_{Q_n(x) \in \Pi_n} \max_{x \in [-1, 1]} |Q_n(x)w(x, C)|, \quad (0.1)$$

$$P_n(x) = \arg \min_{Q_n(x) \in \Pi_n} \max_{x \in [-1, 1]} |Q_n(x)w(x, C)|. \quad (0.2)$$

Многочлены $P_n(x)$ назовем *многочленами, наименее отклоняющимися на $[-1, 1]$ от нуля с весом $w(x)$* , или *экстремальными* (с весом) *многочленами*.

ЗАДАЧА II. Найти

$$e_n = \min_{C \in \overline{C}} \inf_{Q_n(x) \in \Pi_n} \max_{x \in [-1, 1]} |Q_n(x)w(x, C)|, \quad (0.3)$$

$$P_n(x) = \arg \min_{C \in \overline{C}} \inf_{Q_n(x) \in \Pi_n} \max_{x \in [-1, 1]} |Q_n(x)w(x, C)|. \quad (0.4)$$

Известно, что использование свойств чебышёвских многочленов лежит в основе построения оптимальных алгоритмов в теории приближений, интерполирования, численного интегрирования, итерационных методов на достаточно широких классах решений [1]–[3]. Укажем четыре исследованных Чебышёвым замечательных случая экстремальных многочленов – решений задачи I. Если $x = \cos \theta$, $w(x) = w(x, C)$, а $p(x)$ – вес, с которым многочлены ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, то многочлены Чебышёва 1–4 родов получаются:

– 1 рода при $w(x) \equiv 1$; тогда

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad P_n(x) = T_n(x) = \frac{1}{2}((x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n) = \cos n\theta;$$

– 2 рода при $w(x) = \sqrt{1-x^2}$; тогда

$$p(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad P_n(x) = U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta};$$

– 3 рода при $w(x) = \sqrt{1+x}$; тогда

$$p(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad P_n(x) = V_n(x) = 2^{-1/2} \frac{\cos((n+1/2)\theta)}{\cos(\theta/2)};$$

– 4 рода при $w(x) = \sqrt{1-x}$; тогда

$$p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad P_n(x) = W_n(x) = 2^{-1/2} \frac{\sin((n+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}.$$

Эти многочлены имеют норму равную $\sqrt{\pi/2}$, и $e_n = 1$ при $n \geq 1$. Четыре группы формул можно записать единым образом. Пусть $\alpha, \beta = 0, \frac{1}{2}$, $N = n + \alpha + \beta$, тогда при

$$\begin{aligned} w(x) &= w(x, \alpha, \beta) = (1+x)^\alpha (1-x)^\beta; \\ p(x) &= p(x, \alpha, \beta) = w^2(x, \alpha, \beta) (1+x)^{-1/2} (1-x)^{-1/2}, \\ P_n(x) &= \frac{\cos(N\theta - \beta\pi)}{w(x, \alpha, \beta)}, \quad x_i = \cos \frac{(i + \beta - 1/2)\pi}{N}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (0.5)$$

С помощью добавления к аргументу под знаком косинуса фазовой функции $\psi(\theta)$ в статье будут даны обобщения формул (0.5) для $P_n(x)$ (см. (1.5)), названных многочленами Чебышёва–Маркова–Бернштейна–Сегё [4]–[9]. Для более широкого класса функций $w(x, C)$ (см. (1.1), (1.4)) будут изучены свойства этих многочленов. Будет показано, что, имея дополнительную информацию о решении, можно с помощью упомянутых многочленов улучшить параметры многих оптимальных методов. Конспективное содержание результатов статьи содержится в [10]–[12]; она является расширенным содержанием лекций [13]. Автор благодарен В. А. Клячину, В. И. Костенкову, К. В. Ушакову, Д. В. Чижикову за помощь в оформлении статьи.

§ 1. О единой формуле для фазовой функции экстремальных ЧМБС-многочленов 1–4 родов

В основе исследования задачи II лежит решение задачи I, аналитическое решение которой редко известно. Однако существует класс весовых функций, всюду плотный в конусе ограниченных непрерывных положительных в $(-1, 1)$ функций, экстремальные многочлены для которых определяются простыми аналитическими формулами. Это класс весовых функций вида

$$w(x) = w(x, \alpha, \beta, C) = \frac{(1+x)^\alpha (1-x)^\beta}{\sqrt{S_l(x)}}, \quad (1.1)$$

где $S_l(x)$ – положительный на $[-1, 1]$ многочлен степени l , коэффициенты, или корни, или степень которого могут играть роль параметров c_i , а $\alpha, \beta = 0, \frac{1}{2}$.

Пусть Z и H – плоскости комплексных переменных соответственно $z = x + iy$ и h . Рассмотрим преобразование

$$z = \frac{1}{2} \left(h^2 + \frac{1}{h^2} \right). \quad (1.2)$$

За области однолиственности отображения возьмем квадранты $D_1(h : \operatorname{Re} h > 0, \operatorname{Im} h > 0)$, $D_2(h : \operatorname{Re} h < 0, \operatorname{Im} h > 0)$, $D_3(h : \operatorname{Re} h < 0, \operatorname{Im} h < 0)$, $D_4(h : \operatorname{Re} h > 0, \operatorname{Im} h < 0)$. Каждая область D_k отображается на Z_k плоскости комплексного переменного с разрезами по оси x от 1 до ∞ и от -1 до $-\infty$. Построим риманову поверхность R для обратного преобразования $h(z)$, которое является четырехзначным. Для этого склеим с учетом непрерывности отображения листы Z_1

с Z_4 и Z_2 с Z_3 на разрезе от 1 до ∞ и листы Z_1 с Z_2 и Z_3 с Z_4 на разрезе от -1 до $-\infty$. Тогда для $z \in R$

$$h(z) = \sqrt{\frac{z+1}{2}} + \sqrt{\frac{z-1}{2}}. \quad (1.3)$$

Использование преобразования (1.2) вместо преобразования Жуковского позволит единым методом получать формулы через степени от $h(z)$ для классических чебышёвских многочленов и экстремальных многочленов любого рода.

Пусть далее $\alpha, \beta = 0, \frac{1}{2}$, $N = n + \alpha + \beta$, $\nu = N - \frac{l}{2}$, $x = \cos \theta$, $0 \leq \operatorname{Re} \theta \leq \pi$, $\theta_k^0 = (k + \beta - \frac{1}{2})\pi/N$. Для простоты изложения будем считать, что $\nu > 0$, хотя некоторые формулы будут справедливы и при $\nu = 0$.

Оказалось удобным использовать следующую форму для многочлена $S_l(x)$ [11]–[14]:

$$S_l(x) = \prod_{k=1}^m (1 - c_k T_{l_k}(x)), \quad (1.4)$$

где $l_1, l_2, \dots, l_m$ – положительные целые числа, $l = \sum_{k=1}^m l_k$, а $c_1, c_2, \dots, c_m$ – вообще говоря, комплексные числа такие, что $c_j^2 \notin [1, \infty) \cup \{0\}$ и если $\operatorname{Im} c_j \neq 0$, то в представлении (1.4) существует и число $c_k = \bar{c}_j$ с $l_k = l_j$ ($S_0(x) \equiv 1$). В работе Маркова [5] рассмотрен случай с $l_k = 1$, $\alpha = \beta = 0$ и с четным m .

Далее покажем, что решением задачи I (0.1) с условиями (1.1), (1.4) с точностью до нормировочного множителя будет экстремальный с весом $w(x, \alpha, \beta, C)$ на $[-1, 1]$ многочлен $C_n(x)$, определенный формулой

$$C_n(x) = C_n(x, \alpha, \beta, C) = \frac{\cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))}{w(x, \alpha, \beta, C)}, \quad (1.5)$$

где $\psi(\theta)$ – зависящая только от C искомая функция, назовем ее *фазовой функцией*. Эти многочлены при $N \geq \frac{l}{2}$ обобщают соответствующие многочлены Чебышёва 1–4 родов (см. (0.5) при $S_l(x) \equiv 1$). Поскольку в работах Чебышёва, Маркова, Бернштейна, Сегё [4]–[9] было положено начало исследованиям свойств таких экстремальных многочленов, назовем их *ЧМБС-многочленами* [14]–[17]. Авторы этих работ использовали различные представления для многочлена $S_l(x)$ и получили различные свои формулы для ЧМБС-многочленов отдельно для каждого рода (при $\alpha = \beta = 0$ – 1-го, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ – 2-го, $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0$ – 3-го, $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}$ – 4-го рода).

Определим функцию $\psi(\theta)$ как сумму:

$$\psi(\theta) = \sum_{k=1}^m \psi_k(\theta), \quad (1.6)$$

где каждую непрерывную функцию $\psi_k(\theta)$ зададим соотношениями

$$\exp\left(i\left(\frac{l_k\theta}{2} + \psi_k(\theta)\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - c_k \cos(l_k\theta)}} \left(\sqrt{1 - c_k} \cos \frac{l_k\theta}{2} + i\sqrt{1 + c_k} \sin \frac{l_k\theta}{2}\right). \quad (1.7)$$

Из (1.7) следует, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{l_k\theta}{2} + \psi_k(\theta)\right) = \sqrt{\frac{1+c_k}{1-c_k}} \operatorname{tg}\frac{l_k\theta}{2}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (1.8)$$

Из этих уравнений находим $\psi_k(\theta)$. Для действительных $c_k \in (-1, 1)$

$$\psi_k(\theta) = \operatorname{arctg} \frac{\sin(l_k\theta)}{A_k - \cos(l_k\theta)}, \quad \psi_k(0) = \psi_k(\pi) = 0, \quad (1.9)$$

где $A_k = c_k^{-1} + \sqrt{c_k^{-2} - 1}$, $|A_k| \geq 1$. Здесь выбрана та непрерывная ветвь arctg , для которой $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

Если c_k и c_j комплексно сопряжены, то

$$\psi_j(\theta) + \psi_k(\theta) = \operatorname{arctg} \frac{\sin(l_k\theta)(A_k + \overline{A_k} - 2\cos(l_k\theta))}{2\cos^2(l_k\theta) - (A_k + \overline{A_k})\cos(l_k\theta) + |A_k|^2 - 1}, \quad (1.10)$$

$$\psi_j(0) + \psi_k(0) = \psi_j(\pi) + \psi_k(\pi) = 0. \quad (1.11)$$

Тогда

$$\psi(0) = \psi(\pi) = 0. \quad (1.12)$$

Производная $\psi'(\theta)$ определена формулой

$$\psi'(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m l_k \left(\frac{\sqrt{1-c_k^2}}{1-c_k\cos(l_k\theta)} - 1 \right).$$

Для слагаемых $\psi'_k(\theta)$ в ней при действительных $c_k \in (-1, 1)$ справедливы двусторонние оценки

$$\frac{l_k}{2} \left(\sqrt{\frac{1-|c_k|}{1+|c_k|}} - 1 \right) \leq \psi'_k(\theta) \leq \frac{l_k}{2} \left(\sqrt{\frac{1+|c_k|}{1-|c_k|}} - 1 \right), \quad (1.13)$$

а в [16] получены оценки для $|\psi'_j(\theta) + \psi'_k(\theta)|$, если $c_k = \overline{c_j}$ и комплексны.

Пусть $\nu = N - \frac{l}{2}$ — целое или полуцелое число, определим ветвь функции $h(z)$ (1.3) и $h^{-1}(z)$ формулами

$$h^{\pm 1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{x-1}{2}} = \exp\left(\pm \frac{i\theta}{2}\right). \quad (1.14)$$

Используя (1.7), получаем

$$\begin{aligned} \cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta)) &= \cos\left(\nu\theta - \beta\pi + \frac{l\theta}{2} + \psi(\theta)\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\exp(i(\nu\theta - \beta\pi)) \prod_{k=1}^m \exp\left(i\left(\frac{l_k\theta}{2} + \psi_k(\theta)\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + \exp(-i(\nu\theta - \beta\pi)) \prod_{k=1}^m \exp\left(-i\left(\frac{l_k\theta}{2} + \psi_k(\theta)\right)\right) \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Но согласно (1.14) $\exp(\pm i\nu\theta) = (h(x))^{\pm 2\nu}$, и из (1.7) следует, что

$$\exp\left(\pm i\left(\frac{l_k\theta}{2} + \psi_k(\theta)\right)\right) = \frac{\sqrt{1-c_k} \operatorname{Co}_{l_k/2}(x) \pm \sqrt{1+c_k} \operatorname{Si}_{l_k/2}(x)}{\sqrt{1-c_k T_{l_k}(x)}},$$

где

$$\operatorname{Co}_\nu(x) = \frac{h^{2\nu}(x) + h^{-2\nu}(x)}{2}, \quad \operatorname{Si}_\nu(x) = \frac{h^{2\nu}(x) - h^{-2\nu}(x)}{2}. \quad (1.16)$$

Таким образом, получаем формулу (1.5):

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \frac{1}{2} \left[h^{2\nu}(x) e^{-i\beta\pi} \prod_{k=1}^m (\sqrt{1-c_k} \operatorname{Co}_{l_k/2}(x) + \sqrt{1+c_k} \operatorname{Si}_{l_k/2}(x)) \right. \\ &\quad \left. + h^{-2\nu}(x) e^{i\beta\pi} \prod_{k=1}^m (\sqrt{1-c_k} \operatorname{Co}_{l_k/2}(x) - \sqrt{1+c_k} \operatorname{Si}_{l_k/2}(x)) \right] \\ &\quad \times (1+x)^{-\alpha} (1-x)^{-\beta} \\ &= \frac{\cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))}{w(x, \alpha, \beta, C)} = \frac{\cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))}{(1+x)^\alpha (1-x)^\beta} \sqrt{S_l(x)}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

График $C_n(x)$ будет “ужом” [18] на отрезке $[-1, 1]$ в коридоре, ограниченном функциями $\pm 1/w(x)$. Заметим, что второе слагаемое в квадратных скобках (1.17) обращается в нуль в корнях $S_l(x)$.

Если учесть формулы (1.14) для $h(x)$ и $h^{-1}(x)$, (1.16) для $\operatorname{Co}_\nu(x)$ и $\operatorname{Si}_\nu(x)$, то мы убедимся, что $C_n(x)$ есть функция вида $\sum_{j+k=2n} A_{jk} (\sqrt{x+1})^j (\sqrt{x-1})^k$, в которой присутствуют только четные значения j и k , т.е. $C_n(x)$ есть многочлен степени n . Коэффициент $\tilde{A}_n$ при x^n у него вычисляется из предельного соотношения $\tilde{A}_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} C_n(x)/x^n$: при $\nu > 0$

$$\tilde{A}_n = 2^{N-1} 2^{-m} \prod_{k=1}^m (\sqrt{1-c_k} + \sqrt{1+c_k}), \quad \frac{\tilde{A}_{n+1}}{\tilde{A}_n} = 2, \quad (1.18)$$

т.е.

$$\tilde{A}_n^2 = 2^{2(N-1)} B_m(C), \quad B_m(C) = 2^{-m} \prod_{k=1}^m (1 + \sqrt{1-c_k^2}). \quad (1.19)$$

Пусть

$$\Phi(\theta) = N\theta - \beta\pi + \psi(\theta) \quad (1.20)$$

— полная фазовая функция. Тогда из способа вывода формулы (1.17) следует

ЛЕММА 1. Пусть $\Phi_k(\theta)$, $k = 1, 2$, — полные фазовые функции для весовых функций вида (1.1):

$$w_k(x) = w_k(x, \alpha_k, \beta_k, C_k) = \frac{(1+x)^{\alpha_k} (1-x)^{\beta_k}}{\sqrt{S_{l_k}(x)}},$$

где $S_{l_k}(x)$ — положительные на $[-1, 1]$ многочлены вида (1.4) степени l_k и $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \frac{1}{2}$, $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 0, \frac{1}{2}$. Тогда функция $w(x) = w_1(x)w_2(x)$ будет при $S_l(x) = S_{l_1}(x)S_{l_2}(x)$ весовой функцией вида (1.1), для которой полной фазовой функцией при $2N > l_1 + l_2$ будет функция $\Phi(\theta) = \Phi_1(\theta) + \Phi_2(\theta) - n\theta$.

ПРИМЕР 1. На рис. 1–3 приведены графики²: на рис. 1 – весовой функции

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - T_5(x)/1.0006}}, \quad (1.21)$$

имеющей три острых пика, на рис. 2 – фазовой функции $\psi(\arccos x)$, на рис. 3 – ЧМБС-многочлена $C_{40}(x, 0, 0, C)$.

Рис. 1. Весовая функция $w(x) = 1/\sqrt{1 - T_5(x)/1.0006}$ (1.21)

Рис. 2. Фазовая функция $\psi(\arccos x)$ для (1.21)

Дадим следующие видоизменения формул (1.7), (1.17):

$$\begin{aligned} & \exp(i\psi_k(\theta)) \\ &= \frac{(\sqrt{1 - c_k} \cos(l_k \theta/2) + i\sqrt{1 + c_k} \sin(l_k \theta/2))(\cos(l_k \theta/2) - i \sin(l_k \theta/2))}{\sqrt{1 - c_k \cos(l_k \theta)}} \\ &= \frac{r_k(\exp(-il_k \theta))}{\sqrt{1 - c_k \cos(l_k \theta)}}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

²Графики функций на рисунках в статье получены с помощью программы **KLM**, составленной В. Д. Коваленко, В. И. Лебедевым, А. А. Медовиковым.

Рис. 3. ЧМБС-многочлен $C_{40}(x, 0, 0, C)$ для (1.21)

где

$$r_k(z) = \frac{(\sqrt{1-c_k} + \sqrt{1+c_k}) - (\sqrt{1+c_k} - \sqrt{1-c_k})z}{2}, \quad (1.23)$$

причем

$$r_k(\exp(il_k\theta))r_k(\exp(-il_k\theta)) = 1 - c_k \cos(l_k\theta). \quad (1.24)$$

Тогда формула для $C_n(x, \alpha, \beta, C)$ примет вид:

$$C_n(x, \alpha, \beta, C) = \frac{1}{2} \left[\exp(iN\theta) \prod_{k=1}^m r_k(\exp(-il_k\theta)) + \exp(-iN\theta) \prod_{k=1}^m r_k(\exp(il_k\theta)) \right] (1+x)^{-\alpha} (1-x)^{-\beta}. \quad (1.25)$$

Покажем, что множество ЧМБС-многочленов каждого рода с точностью до множителя инвариантно относительно некоторых линейных интегральных преобразований над параметрами C . Разберем простейший случай. Пусть $-1 < a_1 \leq c_1 \leq b_1 < 1$, $j_1(c_1) > 0$ — непрерывная на $[a_1, b_1]$ функция, $d\sigma_1(c_1)$ — распределение на $[a_1, b_1]$ в интеграле Стильеса

$$J_1(f) = \int_{a_1}^{b_1} f(c_1) j_1(c_1) d\sigma_1(c_1).$$

Тогда $J_1(C_n(x, \alpha, \beta, C))$ с точностью до множителя будет ЧМБС-многочленом с весовой функцией (1.1), (1.4), в которой параметр c_1 заменен на новый $\tilde{c}_1$. Пусть $p = J_1(\sqrt{1-c_k} + \sqrt{1+c_k})$, $q = J_1(\sqrt{1-c_k} - \sqrt{1+c_k})$, тогда из (1.25) следует, что после интегрирования в (1.25) множители $r_1(\exp(\pm il_k\theta))$ заменятся на $J_1(r_1(\exp(\pm il_k\theta))) = (p - q \exp(\pm il_k\theta))/2$, т.е. $\tilde{c}_1 = 2pq/(p^2 + q^2)$. Аналогичные преобразования возможны и по другим параметрам C .

§ 2. Свойства ЧМБС-многочленов

Вычислим значения $C_n(\pm 1, \alpha, \beta, C)$:

$$\begin{aligned} C_n(1, 0, 0, C) &= \sqrt{S_l(1)}, & C_n(-1, 0, 0, C) &= (-1)^n \sqrt{S_l(-1)}, \\ C_n\left(1, \frac{1}{2}, 0, C\right) &= \sqrt{\frac{S_l(1)}{2}}, \\ C_n\left(-1, \frac{1}{2}, 0, C\right) &= (-1)^n \sqrt{2S_l(-1)} \left(n + \frac{1}{2} + \psi'(\pi)\right), \\ C_n\left(1, 0, \frac{1}{2}, C\right) &= \sqrt{2S_l(1)} \left(n + \frac{1}{2} + \psi'(0)\right), \\ C_n\left(-1, 0, \frac{1}{2}, C\right) &= (-1)^n \sqrt{\frac{S_l(-1)}{2}}, \\ C_n\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, C\right) &= \sqrt{S_l(1)} (n + 1 + \psi'(0)), \\ C_n\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, C\right) &= (-1)^n \sqrt{S_l(-1)} (n + 1 + \psi'(\pi)). \end{aligned}$$

Справедливы равенства

$$C_n^2(x, 0, 0, C) + (1 - x^2)C_{n-1}^2\left(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, C\right) = S_l(x), \quad (2.1)$$

$$(1 + x)C_n^2\left(x, \frac{1}{2}, 0, C\right) + (1 - x)C_n^2\left(x, 0, \frac{1}{2}, C\right) = S_l(x), \quad (2.2)$$

которые определяют конструктивный алгоритм построения формул в теореме Маркова–Лукача [18] для представления положительного на $[-1, 1]$ многочлена $S_l(x)$. Из этих формул и (1.5) следует, что точками локального максимума на $[-1, 1]$ являются $x = \pm 1$ для $|C_n(x, 0, 0, C)|$, $x = 1$ для $(1 + x)^{1/2}|C_n(x, \frac{1}{2}, 0, C)|$, $x = -1$ для $(1 - x)^{1/2}|C_n(x, 0, \frac{1}{2}, C)|$. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Многочлены $\tilde{A}_n^{-1}C_n(x, \alpha, \beta, C)$ с единичным коэффициентом при x^n обладают обобщенным альтернансом из $n + 1$ точки и являются экстремальными с весом (1.1), (1.4) многочленами (решением задачи I).*

Покажем, что произведение $C_n(x, \alpha, \beta, C)w(x, \alpha, \beta, C)$ имеет чебышёвский альтернанс по крайней мере из $n + 1$ точки [19]. Для этого рассмотрим непрерывную полную фазовую функцию $\Phi(\theta)$ (1.20). Вследствие условий (1.12) функция $\Phi(\theta)$ изменяется на отрезке $[0, \pi]$ от $-\beta\pi$ до $(n + \alpha)\pi$. Следовательно, для каждого $j = \overline{0, n}$ существует $\tilde{\theta}_j \in [0, \pi]$ такая, что $\Phi(\tilde{\theta}_j) = j\pi$, $j = \overline{0, n}$. Это и будут точки альтернанса, так как в них рассматриваемые функции принимают с переменной знака одинаковые по модулю максимальные значения. Если бы существовал другой многочлен n -й степени рассматриваемого класса $P_n(x)$ с меньшим взвешенным отклонением от нуля, то разность $\tilde{A}_n^{-1}C_n(x, \alpha, \beta, C) - P_n(x)$, будучи многочленом степени $n - 1$, поочередно в $n + 1$ точке $\tilde{\theta}_j$ меняла бы знак, что невозможно.

Справедливо

СЛЕДСТВИЕ 1. Для многочлена степени n вида

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n C_n(x, \alpha, \beta, C), \quad a_n \neq 0,$$

наименее отклоняющимся от него многочленом с весом (1.1), (1.4) степени $n-1$ будет многочлен $P_{n-1}(x)$.

Для приложений полезна (см. §5) следующая нормировка ЧМБС-многочленов в задаче I: пусть $\delta > 1$, найти

$$e_n = \min_{q_n(\delta)=1} \max_{x \in [-1,1]} |q_n(x)w(x)|, \quad (2.3)$$

$$p_n(x) = \arg \min_{q_n(\delta)=1} \max_{x \in [-1,1]} |q_n(x)w(x)|. \quad (2.4)$$

Покажем, что решением этой задачи I будет

$$p_n(x) = \tilde{C}_n(x, \alpha, \beta, C) = \frac{C_n(x)}{C_n(\delta)}, \quad e_n = \frac{1}{|C_n(\delta)|}. \quad (2.5)$$

ТЕОРЕМА 2. Многочлен $\tilde{C}_n(x, \alpha, \beta, C)$ с единичным значением при $x = \delta > 1$ является экстремальным с весом (1.1), (1.4) многочленом (решением задачи I).

Произведение $\tilde{C}_n(x, \alpha, \beta, C)w(x, \alpha, \beta, C)$ имеет чебышёвский альтернанс по крайней мере из $n+1$ точки $\theta_j \in [0, \pi]$. Если бы существовал другой многочлен n -й степени рассматриваемого класса $P_n(x)$ с меньшим взвешенным отклонением от нуля, то разность $\tilde{C}_n(x, \alpha, \beta, C) - P_n(x)$, будучи многочленом степени n , имела бы n нулей между точками θ_j и еще один нуль при $x = \delta > 1$, что невозможно. Формула для e_n в (2.5) следует из того, что для $w(x)$ вида (1.1), (1.4) $\max_{x \in [-1,1]} |C_n(x)w(x)| = 1$.

Из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Среди всех многочленов $Q_n(x)$ n -й степени, подчиненных условию $\max_{x \in [-1,1]} |Q_n(x)w(x)| \leq \eta > 0$, наибольшее по модулю значение в точке $\delta > 1$ принимают многочлены $\tilde{P}_n(x) = \pm \eta C_n(x)$.

Следствие легко устанавливается доказательством от противного.

Вычислим $C_n(\delta)$ в (2.5) при $\alpha = \beta = 0$. Пусть $\tau = (\delta + \sqrt{\delta^2 - 1})^{-1}$, тогда $h(\delta) = \tau^{-1/2}$, $\text{Co}_\mu(\delta) = (\tau^{-\mu} + \tau^\mu)/2$, $\text{Si}_\mu(\delta) = (\tau^{-\mu} - \tau^\mu)/2$ и

$$C_n(\delta) = \frac{\tau^{-n}}{2^{m+1}} \left[\prod_{k=1}^m (\sqrt{1-c_k} (1 + \tau^{l_k}) + \sqrt{1+c_k} (1 - \tau^{l_k})) + \tau^{2n-l} \prod_{k=1}^m (\sqrt{1-c_k} (1 + \tau^{l_k}) - \sqrt{1+c_k} (1 - \tau^{l_k})) \right],$$

а при $1 \leq l \leq 2n$, $c_k = \delta^{-1}$, $l_k = 1$,

$$S_l(x) = (1 - \delta^{-1}x)^l, \quad \psi(\theta) = l \arctg \frac{\sin \theta}{\tau^{-1} - \cos \theta} \quad (2.6)$$

имеем: $\sqrt{1 - \delta^{-1}} \operatorname{Co}_{1/2}(\delta) = \sqrt{1 + \delta^{-1}} \operatorname{Si}_{1/2}(\delta) = \sqrt{(\delta^2 - 1)/(2\delta)}$, т.е.

$$C_n(\delta) = \frac{\tau^{-n+l/2}}{2} \left(\frac{2(\delta^2 - 1)}{\delta} \right)^{l/2},$$

$$e_{l,n} = e_n = 2\tau^{n-l/2} \left(\frac{\delta}{2(\delta^2 - 1)} \right)^{l/2}.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $S_l(x)$ из (2.6), $l = 2$, $\delta = 1.01$. На рис. 4–6 приведены графики: на рис. 4 – весовой функции $w(x)$, на рис. 5 – фазовой функции $\psi(\arccos x)$, на рис. 6 – ЧМБС-многочлена $C_{40}(x, 0, 0, C)$.

Рис. 4. Весовая функция $w(x)$ для (2.6)

Рис. 5. Фазовая функция $\psi(\arccos x)$ (2.6)

Рис. 6. ЧМБС-многочлен $C_{40}(x, 0, 0, C)$ для (2.6)

Корни x_i многочлена $C_n(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$x_i = \cos \theta_i, \quad \theta_i = \theta_i^0 - \frac{\psi(\theta_i)}{N}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.7)$$

Существование решений уравнений (2.7) следует из того, что функция $\Phi(\theta)$ для каждого $i = \overline{1, n}$ обязательно примет значение $(i - \frac{1}{2})\pi$. При

$$\max_{\theta \in [0, \pi]} \frac{|\psi'|}{N} < 1$$

для каждого i решение будет единственным, и θ_i могут быть найдены итерационным методом сжимающих отображений

$$\theta_i^{j+1} = \theta_i^0 - \frac{\psi(\theta_i^j)}{N}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (2.8)$$

или методом Ньютона (при его сходимости)

$$\theta_i^{j+1} = \theta_i^j - \frac{N(\theta_i^j - \theta_i^0) + \psi(\theta_i^j)}{N + \psi'(\theta_i^j)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

начиная с начального приближения $\theta_i^0 = (i + \beta - \frac{1}{2})\pi/N$. При больших n корни x_i близки к корням соответствующих классических чебышёвских многочленов $\tilde{x}_i = \cos \theta_i^0$. Делая одну итерацию по методу Ньютона, получаем асимптотические приближения для θ_i : $\theta_i \approx \theta_i^1 = \theta_i^0 - b_i$, $b_i = \psi(\theta_i^0)/(N + \psi'(\theta_i^0))$, т.е.

$$x_i \approx \tilde{x}_i \cos b_i + (1 - \tilde{x}_i^2)^{1/2} \sin b_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.9)$$

Пусть

$$p(x, C) = p(x, \alpha, \beta, C) = \frac{(1+x)^{2\alpha-1/2}(1-x)^{2\beta-1/2}}{S_l(x)}, \quad (2.10)$$

тогда

$$\begin{aligned}(1-x)p(x, \alpha, 0, C) &= p\left(x, \alpha, \frac{1}{2}, C\right), & (1+x)p(x, 0, \beta, C) &= p\left(x, \frac{1}{2}, \beta, C\right), \\ (1-x^2)p(x, 0, 0, C) &= p\left(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, C\right).\end{aligned}\quad (2.11)$$

ЧМБС-многочлены при $N \geq \frac{l}{2}$ ортогональны в следующем смысле [6], [9]:

$$\int_{-1}^1 x^k C_n(x) \frac{(1+x)^{2\alpha-1/2} (1-x)^{2\beta-1/2}}{S_l(x)} dx = 0, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad (2.12)$$

или, используя многочлены (0.5) степени k , получаем эквивалентные равенства

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos((k+\alpha+\beta)\theta - \beta\pi) \cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))}{\sqrt{\prod_{k=1}^m (1 - c_k \cos(l_k \theta))}} d\theta = 0, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Докажем единым методом ортогональность для общего случая. Имеем

$$I = \frac{(-1)^{2\beta} I_1 + I_2}{2},$$

где

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\cos(n_1 \theta + \psi(\theta))}{\sqrt{\prod_{k=1}^m (1 - c_k \cos(l_k \theta))}} d\theta, \quad I_2 = \int_0^\pi \frac{\cos(n_2 \theta + \psi(\theta))}{\sqrt{\prod_{k=1}^m (1 - c_k \cos(l_k \theta))}} d\theta,$$

а $n_1 = n + k + 2(\alpha + \beta)$, $n_2 = n - k$. Покажем, что $I_1 = I_2 = 0$. В самом деле, для $j = 1, 2$, $k = \overline{0, n-1}$

$$I_j = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos(n_j \theta + \psi(\theta))}{\sqrt{\prod_{k=1}^m (1 - c_k \cos(l_k \theta))}} d\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^\pi \frac{\exp(i(n_j \theta + \psi(\theta)))}{\sqrt{\prod_{k=1}^m (1 - c_k \cos(l_k \theta))}} d\theta.$$

Используя соотношения (1.22)–(1.24) и делая затем замену переменной интегрирования $z = \exp(i\theta)$, получаем

$$I_j = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^\pi \exp(in_j \theta) \prod_{k=1}^m \frac{r_k(\exp(-il_k \theta))}{1 - c_k \cos(l_k \theta)} d\theta = \frac{1}{2i} \operatorname{Re} \int_{|z|=1} \frac{z^{n_j-1}}{R_l(z)} dz,$$

где $R_l(z) = \prod_{k=1}^m r_k(z^{l_k})$ – многочлен, имеющий корни вне окружности $|z| = 1$. Следовательно, $I_j = 0$, $j = 1, 2$, т.е. $I = 0$.

Умноженные на $\sqrt{2/\pi}$ ЧМБС-многочлены будут ортонормированными с весом $p(x, \alpha, \beta, C)$ при $N > \frac{l}{2}$:

$$\int_{-1}^1 C_n^2(x) w^2(x, \alpha, \beta, C) (1-x^2)^{-1/2} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (2.13)$$

В самом деле, согласно (1.5)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 C_n^2(x) w^2(x, \alpha, \beta, C) (1-x^2)^{-1/2} dx &= \int_0^\pi \cos^2(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi + \int_0^\pi \cos(2(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))) d\theta \right), \end{aligned}$$

но согласно лемме 1 и (2.12)

$$\int_0^\pi \cos(2(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))) d\theta = \int_{-1}^1 C_{2N}(x, 0, 0, \overline{C}) \frac{(1-x^2)^{-1/2}}{S_l^2(x)} dx = 0,$$

где $C_{2N}(x, 0, 0, \overline{C})$ – ЧМБС-многочлен для $w(x) = 1/S_l(x)$. Нам неизвестны аналитические формулы для ЧМБС-многочленов низших степеней. Однако стандартным процессом Сонина–Шмидта мы построим ортонормированную условиями (2.12), (2.13) систему многочленов. При этом интегралы в алгоритме ортогонализации можно вычислять точно по квадратурным формулам типа Гаусса (см. § 4). Эта система для $N \geq \frac{l}{2}$ совпадает с рассмотренными многочленами. Для нормированных многочленов справедлива формула Кристоффеля–Дарбу [9]:

$$\begin{aligned} D_n(x, y, \alpha, \beta) &= \sum_{i=0}^n C_i(x, \alpha, \beta, C) C_i(y, \alpha, \beta, C) \\ &= \frac{C_{n+1}(x, \alpha, \beta, C) C_n(y, \alpha, \beta, C) - C_{n+1}(y, \alpha, \beta, C) C_n(x, \alpha, \beta, C)}{2(x-y)}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$C_0^2(x, \alpha, \beta, C) = \frac{\pi}{2} \left(\int_{-1}^1 p(x, \alpha, \beta, C) dx \right)^{-1}. \quad (2.15)$$

Многочлены $D_n(x, y)$ образуют ортогональную с весом $(x-y)p(x, \alpha, \beta, C)$ систему многочленов. Нам понадобятся следующие равенства:

$$\int_{-1}^1 D_n(x, y, \alpha, \beta) p(x, \alpha, \beta, C) dx = \frac{\pi}{2} \quad (2.16)$$

и при $\beta = 0$

$$D_n(x, 1, \alpha, 0) = \frac{\sin(n + \alpha + 1/2 + \psi(\theta))}{2w(x, \alpha, 0, C)w(1, \alpha, 0, C)\sin(\theta/2)} = \frac{C_n(x, \alpha, 1/2, C)}{\sqrt{2}w(1, \alpha, 0, C)}, \quad (2.17)$$

$$D_n(1, 1, \alpha, 0) = \left(n + \alpha + \frac{1}{2} + \psi'(0) \right) S_l(1) 2^{-2\alpha}. \quad (2.18)$$

При $n \geq n_0$, где $n_0 = \min(k : k \geq \frac{l}{2} + 1)$, ЧМБС-многочлены удовлетворяют чебышёвским трехчленным рекуррентным соотношениям: из (1.5) получаем

$$C_{n+1}(x) = 2xC_n(x) - C_{n-1}(x). \quad (2.19)$$

При $n < n_0$ $C_n(x)$ и коэффициенты трехчленных рекуррентных соотношений последовательно при $n = n_0 - 1, \dots, 1$ определяются алгоритмом Евклида – делением $C_{n+2}(x)$ на $C_{n+1}(x)$ с остатком, считая каждый многочлен $C_n(x)$ некоторым способом нормированными, а, например, $C_0(x) \equiv 1$. При $l = 1, 2$ систему уравнений (2.19) достаточно дополнить одним уравнением при известных $C_0(x)$ и $C_1(x), C_2(x)$, вычисленных из (1.17):

$$C_2(x) = (a_2x + b_2)C_1(x) - d_2C_0(x). \quad (2.20)$$

Выражая $C_k(x)$ через $\tilde{C}_k(x)$, $k = n - 1, n, n + 1$, и подставляя эти значения в (1.17), получаем

$$\tilde{C}_{n+1}(x) = 2 \frac{C_n(\delta)}{C_{n+1}(\delta)} x \tilde{C}_n(x) - \frac{C_{n-1}(\delta)}{C_{n+1}(\delta)} \tilde{C}_{n-1}(x). \quad (2.21)$$

Многочлены, удовлетворяющие трехчленным рекуррентным соотношениям, коэффициенты в которых начиная с некоторого номера n_0 становятся периодичными с периодом s , были изучены в работах Геронимуса [20]–[22]; для этих многочленов также существует тригонометрическая форма их представления [23].

Сделаем четыре замечания.

1) Пусть $R_M(x)$ – многочлен M -й степени, все корни которого лежат на $[-1, 1]$, а в (1.1) $w(x) = w(x, \alpha, \beta, C)/|R_M(x)|$, тогда [7] экстремальным многочленом степени $n + M$ – решением задачи I – будет многочлен

$$\tilde{P}_{n+M}(x) = R_M(x)C_n(x), \quad (2.22)$$

где $C_n(x)$ – многочлен (1.17).

2) Пусть для $x \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} S(x) &= S(x, c, d) = (1 + c(1 - x) + d(1 - x)^2) > 0, \\ w(x, c, d, n) &= S(x, c, d)^{-n/2}, \quad w(1, c, d, n) = 1. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Оказывается, что для этого случая $C_n(x)$ и формулы для его корней имеют простой вид. Пусть

$$z(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{S(x)}}, \quad g(x) = \frac{x + 1 + \sqrt{S(-1)}(x - 1)}{2}, \quad (2.24)$$

– преобразование, отображающее взаимно однозначно отрезок $[-1, 1]$ на себя, $z(1) = 1$, $z(-1) = -1$, тогда

$$C_n(x) = \overline{C}_n(x, c, d) = T_n(z(x))\sqrt{S^n(x)}.$$

Используя формулу для $T_n(z)$, получаем

$$\overline{C}_n(x, c, d) = \frac{1}{2}((g(x) + \sqrt{g^2(x) - S(x)})^n + (g(x) - \sqrt{g^2(x) - S(x)})^n). \quad (2.25)$$

Корни $x_i \in [-1, 1]$ этого многочлена $C_n(x)$ определяются через корни $\beta_i = \cos \theta_i^0$ многочлена $T_n(x)$ из уравнений $z(x_i) = \beta_i$, $i = 1, \dots, n$, которые преобразуются в квадратные уравнения $g^2(x_i) = \beta_i^2 S(x_i)$. Искомый корнем для каждого i будет максимальный корень при $\beta_i \geq 0$ и минимальный корень при $\beta_i < 0$ квадратного уравнения.

Пусть $S(-1) = 1 + 2c + 4d > 1$, $c > 0$, тогда $\delta_1 = g(\delta) = \delta + (\sqrt{S(-1)} - 1) \times (\delta - 1)/2 > \delta$, $\tau_1 = (\delta_1 + \sqrt{\delta_1^2 - S(\delta)})^{-1} = (\delta_1 + \sqrt{(\delta^2 - 1)(1 + 3c/2 + 2d)})^{-1} < 1$. Величина e_n (2.3) в этом случае при $S(\delta) \neq 0$ равна

$$e_n = e_n(c, d) = \frac{1}{|T_n(z(\delta))\sqrt{S^n(\delta)}|}, \quad (2.26)$$

или из (2.25)

$$e_n(c, d) = \frac{2\tau_1^n}{1 + (S(\delta)\tau_1^2)^n}. \quad (2.27)$$

А при $S(\delta) = 0$:

$$e_n(c, d) = 2^{1-n}\tau_1^n.$$

Пусть

$$v(x) = \frac{R(x)}{R(1)}, \quad R(x) = \prod_{k=1}^m (x + a_k), \quad a_k > 1. \quad (2.28)$$

Рассмотрим задачу I (2.3), (2.4) при $w(x) = v(x)$: при $\delta > 1$ найти

$$p_n(x) = \arg \min_{q_n(\delta)=1} \sup_{x \in [-1, 1]} |q_n(x)v(x)|, \quad p_n(\delta) = 1. \quad (2.29)$$

Аналитическое ее решение и величина $\tilde{e}_n = e_n$ неизвестны, хотя известны достаточно точные асимптотические формулы для ее параметров [13]. С помощью функции $w(x, c, d, n)$ дадим двусторонние оценки для $\tilde{e}_n$ и многочлены, реализующие эти оценки. Имеем $w(1, c, d, n) = v(1)$ и для $x \in [-1, 1]$: $v(x) > 0$, $v'(x) > 0$, $v''(x) \geq 0$, $v'(x)/v(x) = \sum_{i=1}^m 1/(x + a_i) > 0$, $(v'(x)/v(x))' = -\sum_{i=1}^m 1/(x + a_i)^2 < 0$, $0 < v(-1) = \prod_{k=1}^m (1 - 2/(1 + a_k)) < 1$. Пусть $y(x) = (v(x))^{-2/n}$, тогда для $x \in [-1, 1]$: $y(x)$ — положительная убывающая функция, $y(1) = 1$; $y'(x) = -(2/n)y(x)v'(x)/v(x)$ — отрицательная возрастающая функция; $y''(x) = (4/n^2)y(x)(v'(x)/v(x))^2 - (2/n)y(x)(v'(x)/v(x))'$ — положительная убывающая функция.

Параметр c определим из условия $S'(1, c, d, n) = y'(1)$, тогда

$$c = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^m \frac{1}{1 + a_i}. \quad (2.30)$$

При $d = d_0$, где

$$d_0 = \frac{c^2}{2} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \frac{1}{(1 + a_i)^2}, \quad (2.31)$$

$S''(1, c, d_0, n) = y''(1)$ и $S(x, c, d_0, n) \leq y(x)$, $x \in [-1, 1]$. При $d = \tilde{d}(\tilde{x})$, где $-1 \leq \tilde{x} < 1$,

$$\tilde{d}(\tilde{x}) = \frac{(y(\tilde{x}) - 1)(1 - \tilde{x}) - c/2}{1 - \tilde{x}}, \quad (2.32)$$

имеем $S(x, c, \tilde{d}(\tilde{x}), n) = y(\tilde{x})$ и $S(x, c, \tilde{d}(\tilde{x}), n) \geq y(x)$ при $x \in [\tilde{x}, 1]$, $S(x, c, \tilde{d}(\tilde{x}), n) \leq y(x)$ при $x \in [-1, \tilde{x}]$.

Таким образом,

$$e_n(c, \tilde{d}(-1)) \leq \tilde{e}_n \leq e_n(c, \bar{d}). \quad (2.33)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} w(x, c, d_0, n) &= \exp \left((x-1) \sum_{i=1}^m \frac{1}{1+a_i} - \frac{1}{2}(1-x)^2 \sum_{i=1}^m \frac{1}{(1+a_i)^2} \right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} w(x, c, \tilde{d}(-1), n) &= (v(-1))^{(1-x)^2/4} \exp \left(-\frac{1}{2}(1-x^2) \sum_{i=1}^m \frac{1}{1+a_i} \right). \end{aligned}$$

Заслуживает внимания приближение с $\tilde{x} = 0$.

ПРИМЕР 3. На рис. 7 приведен график весовой функции $w(x, c, d, 40)$, на рис. 8 – график многочлена $\bar{C}_{40}(x, c, d)$ при $c = \frac{3}{20}$, $d = \frac{1}{8}$.

Рис. 7. Весовая функция $w(x, c, d, 40)$ (2.23)

Аналогично $M_n(x, C) = U_n(z(x))\sqrt{\bar{S}_l(x)}$ будет ЧМБС-многочленом 2-го рода для весовой функции $w(x, C) = \sqrt{(1-x^2)/((1-c_1x)(1-c_2x))^{n+1}}$.

3) Формулы (1.1)–(1.17) позволяют построить явные выражения обобщенных ЧМБС-многочленов для класса весовых функций типа (1.1), (1.4), наименее отклоняющихся от нуля на L специального вида кривых, лежащих в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ [15], [17], [24], [25]. Пусть $Q_L(z)$ – многочлен точно L -й степени с вещественными коэффициентами, $\rho > 0$, $\Omega_\rho = \{z : -\rho \leq Q_L(z) \leq \rho\}$.

Рис. 8. Многочлен $\overline{C}_{40}(x, c, d)$ (2.25)

Множество Ω_ρ состоит из L кривых. Если $Q_L(z)$ имеет L действительных однократных корней, тогда существует $R > 0$ такое, что для $0 \leq \rho \leq R$ множество Ω_ρ состоит из L изолированных отрезков действительной оси, концами которых служат точки, где $|Q_L(x)| = \rho$. Пусть $x = Q_L(z)/\rho$, тогда при $N = Ln$ ЧМБС-многочленом, наименее отклоняющимся от нуля на Ω_ρ с весом (1.1), (1.4) при $x = Q_L(z)/\rho$, будет многочлен $\overline{P}_N(z) = C_n(Q_L(z)/\rho)$, где $C_n(x)$ и его параметры заданы формулами (1.1)–(1.17). Из (2.19) следует, что при $N > \frac{l}{2}$ для $\overline{P}_N(z)$ справедливы уравнения

$$\overline{P}_{(n+1)L}(z) = \frac{2Q_L(z)}{\rho} \overline{P}_{nL}(z) - \overline{P}_{(n-1)L}(z). \quad (2.34)$$

Корни $\overline{P}_{nL}(z)$ определяются системой уравнений

$$Q_L(z) = \rho x_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.35)$$

4) Интересно изучить свойства последовательностей функций $u_n(x)$, являющихся решениями чебышёвских трехчленных рекуррентных соотношений

$$u_{n+1}(x) = 2xu_n(x) - u_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

Общее решение уравнений (2.36) для каждого x представим в двух формах: для любого целого $l > 0$

$$u_n(x) = C_1(x)T_{n-l+1}(x) + C_2(x)U_{n-l}(x), \quad (2.37)$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ – произвольные функции; а для $-1 \leq x = \cos \theta \leq 1$ – в тригонометрической форме

$$u_n(x) = \frac{1}{w(x)} \cos((n-l)\theta + \psi(\theta)), \quad (2.38)$$

где $w(x) \neq 0$ в $(-1, 1)$ и $\psi(\theta)$ – произвольная ограниченная фазовая функция.

Пусть $F_{l-1}(x)$, $F_l(x)$ являются известными функциями. Определим в (2.37) функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ так, чтобы

$$u_{l-1}(x) = F_{l-1}(x), \quad u_l(x) = F_l(x). \quad (2.39)$$

Полагая в (2.37) $n = l - 1, l$, учитывая, что $T_1(x) = x$, $T_0(x) = 1$, $U_0(x) = 1$, $U_{-1}(x) = 0$, получаем для определения $C_1(x)$, $C_2(x)$ систему уравнений

$$C_1(x) = F_{l-1}(x), \quad C_1(x)x + C_2(x) = F_l(x),$$

т.е.

$$C_1(x) = F_{l-1}(x), \quad C_2(x) = F_l(x) - xF_{l-1}(x). \quad (2.40)$$

Тогда при $n \geq l - 1$ функция

$$u_n(x) = F_{l-1}(x)T_{n-l+1}(x) + (F_l(x) - xF_{l-1}(x))U_{n-l}(x) \quad (2.41)$$

является искомым решением (2.36). Приведем это решение к тригонометрической форме (2.38). Если обозначить

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x F_{l-1}(x) - F_l(x)}{(1 - x^2)^{1/2}}, \\ w(x) &= \frac{1}{\sqrt{F_{l-1}^2(x) + g^2(x)}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

и задать фазовую функцию $\psi(\theta)$ равенствами [6], [7]:

$$\begin{aligned} \cos((l-1)\theta + \psi(\theta)) &= \frac{F_{l-1}(\cos \theta)}{w(\cos \theta)}, \\ \sin((l-1)\theta + \psi(\theta)) &= \frac{g(\cos \theta)}{w(\cos \theta)}, \end{aligned}$$

то формула (2.41) примет вид (2.38), где функция $w(x)$ определена формулой (2.42), а функция $\psi(\theta)$ равна

$$\psi(\theta) = \arctg \frac{\cos \theta F_{l-1}(\cos \theta) - F_l(\cos \theta)}{\sin \theta F_{l-1}(\cos \theta)} - (l-1)\theta. \quad (2.43)$$

При дополнительных требованиях на $F_{l-1}(x)$, $F_l(x)$ функции $u_n(x)$ имеют на $[-1, 1]$ полный альтернанс из $n + 1$ точки [6], [7], [26].

Рассмотрим примеры построения оптимальных алгоритмов.

§ 3. Интерполирование с весом

Рассмотрим задачу о приближении интерполяционными многочленами Лагранжа $L_{n-1}(x)$ с n узлами $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 1]$ [1], [27] множества функций $F_n \subset C^n[-1, 1]$, характеризуемого условием $f(x) \in F_n$, если

$$|f^{(n)}(x)| \leq R. \quad (3.1)$$

Здесь $R > 0$ – константа.

Известно, что ошибка метода интерполяции $R_{n-1}(x) = f(x) - L_{n-1}(x)$ равна $f^{(n)}(\xi_x) \omega_n(x)/n!$, где

$$\omega_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i), \quad \xi_x \in [-1, 1]. \quad (3.2)$$

В пространстве $C[-1, 1]$ для класса F_n наилучшими узлами интерполяции будут [5], [7]

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Часто возникает аналогичная задача в пространстве $C([-1, 1], w)$ с нормой $\|f\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)w(x)|$, решение которой дает наилучшее взвешенное на отрезке $[-1, 1]$ приближение. Тогда ошибка метода на классе F_n в метрике $C([-1, 1], w)$ равна

$$\sup_{f \in F_n} \sup_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \omega_n(x) w(x, \alpha, \beta, C) \right| = \frac{R}{n!} \max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_n(x) w(x, \alpha, \beta, C)|. \quad (3.3)$$

Поскольку $\inf_{x_1, x_2, \dots, x_n} \max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_n(x) w(x, \alpha, \beta, C)|$ в (3.3) равен $\tilde{A}_n^{-1}$ и он достигается для корней x_i многочлена $A_n^{-1} C_n(x, \alpha, \beta, C)$ — решению задачи I (0.1), (1.1), (1.4) среди многочленов вида (3.2), то оптимальным многочленом $L_{n-1}(x)$ будет

$$\begin{aligned} L_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1} (1 - x_i^2)^{1/2} w(x_i, \alpha, \beta, C)}{N + \psi'(\theta_i)} f(x_i) \frac{C_n(x, \alpha, \beta, C)}{x - x_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1} \sin \theta_i w(x_i, \alpha, \beta, C)}{N + \psi'(\theta_i)} f(x_i) \frac{\cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))}{w(x, \alpha, \beta, C)(\cos \theta - \cos \theta_i)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где θ_i определены в (2.7). Рассмотрим функцию $\lambda_n(x)$ и константу Лебега λ_n

$$\begin{aligned} \lambda_n(x) &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{(1 - x_i^2)^{1/2} w(x_i, \alpha, \beta, C)}{N + \psi'(\theta_i)} \frac{C_n(x)}{x - x_i} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{\sin \theta_i w(x_i, \alpha, \beta, C)}{N + \psi'(\theta_i)} \frac{\cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))}{w(x, \alpha, \beta, C)(\cos \theta - \cos \theta_i)} \right|, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$\lambda_n = \max_{x \in [-1, 1]} \lambda_n(x)$. Имеет место

ЛЕММА 2. Для каждого $i = 1, \dots, n$ справедливо неравенство

$$J_i = \left| \frac{\sin \theta_i w(x_i, \alpha, \beta, C) \cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))}{(N + \psi'(\theta_i))(\cos \theta - \cos \theta_i)} \right| \leq \pi D g,$$

где

$$g = \frac{\max_{\theta \in [0, \pi]} |1 + \psi'(\theta)/N|}{\min_{\theta \in [0, \pi]} |1 + \psi'(\theta)/N|}, \quad D = \max_{x \in [-1, 1]} w(x, \alpha, \beta, C).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $\theta \neq \theta_i$. Тогда

$$\begin{aligned} |\cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))| &= |\cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta)) - \cos(N\theta_i - \beta\pi + \psi(\theta_i))| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{N(\theta - \theta_i) + \psi(\theta) - \psi(\theta_i)}{2} \right| \leq |(N(\theta - \theta_i) + \psi(\theta) - \psi(\theta_i))|, \end{aligned}$$

а

$$|\cos \theta - \cos \theta_i| = 2 \left| \sin \frac{\theta - \theta_i}{2} \sin \frac{\theta + \theta_i}{2} \right| \geq \frac{2}{\pi} \left| (\theta - \theta_i) \sin \frac{\theta + \theta_i}{2} \right|.$$

Поэтому

$$J_i \leq \frac{\pi Dg}{2} \frac{\sin \theta_i}{\sin((\theta + \theta_i)/2)}.$$

Но

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin((\theta + \theta_i)/2)} \leq \frac{\sin \theta_i + \sin \theta}{\sin((\theta + \theta_i)/2)} = 2 \cos \frac{\theta - \theta_i}{2} \leq 2.$$

Лемма 2 доказана.

Справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Константа Лебега λ_n для интерполяционных многочленов Лагранжа, построенных по корням $\{x_j^n\}$ для $\alpha = \beta = 0$, оценивается сверху зависящей от C величиной порядка $O(\ln n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3, использующее лемму 2, в основном совпадает с соответствующим доказательством для многочленов Чебышёва $T_n(x)$ [27]. Если $\theta = \theta_i$, то $\lambda_n(x) = 1$. Пусть теперь $\theta_m < \theta < \theta_{m+1}$. Тогда $\lambda_n(x) = (\sigma_1 + \sigma_2)/w(x)$, где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{i=1}^{m-2} \left| \frac{\sin \theta_i w(x_i) \cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))}{(N + \psi'(\theta_i))(\cos \theta - \cos \theta_i)} \right| \\ &\quad + \left| \frac{\sin \theta_{m-1} w(x_{m-1}) \cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))}{(N + \psi'(\theta_{m-1}))(\cos \theta - \cos \theta_{m-1})} \right| \\ &\quad + \left| \frac{\sin \theta_m w(x_m) \cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))}{(N + \psi'(\theta_m))(\cos \theta - \cos \theta_m)} \right|, \\ \sigma_2 &= \sum_{i=m+1}^n \left| \frac{\sin \theta_i w(x_i) \cos(N\theta - \beta\pi + \psi(\theta))}{(N + \psi'(\theta_i))(\cos \theta - \cos \theta_i)} \right|, \end{aligned}$$

причем если $0 < \theta < \theta_1$, то $\sigma_1 = 0$, а если $\theta_n < \theta < \pi$, то $\sigma_2 = 0$. Обе суммы оцениваются одинаково. Оценим первую сумму, предполагая, что $\theta_1 < \theta$. При $m = 1$ в σ_1 присутствует только третье слагаемое, а при $m = 2$ – второе и третье. В любом случае согласно лемме 2 их сумма не превышает $2\pi Dg$. При $m > 2$ имеем

$$\sigma_1 \leq 2\pi Dg + D \sum_{i=1}^{m-2} \left| \frac{\sin \theta_i}{(N + \psi'(\theta_i))(\cos \theta - \cos \theta_i)} \right|.$$

Функция $\sin x / (\cos x - \cos \theta)$ возрастает при $0 < x < \theta$. Следовательно,

$$\sin \frac{\theta_i}{\cos \theta_i - \cos \theta} \leq \sin \frac{x}{\cos x - \cos \theta}, \quad \theta_i \leq x \leq \theta_{i+1}.$$

Отсюда

$$\frac{(\theta_{i+1} - \theta_i) \sin \theta_i}{\cos \theta_i - \cos \theta} \leq \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{\sin x \, dx}{\cos x - \cos \theta}.$$

Из уравнений (2.7) следует, что

$$\frac{\pi}{N} = (\theta_{i+1} - \theta_i) \left(1 + \frac{\psi(\theta_{i+1}) - \psi(\theta_i)}{(\theta_{i+1} - \theta_i)N} \right),$$

т.е. $\theta_{i+1} - \theta_i = \pi / (N + \psi'(\theta'_i))$, где $\theta_i \leq \theta'_i \leq \theta_{i+1}$. Пусть

$$d = \frac{\max_{\theta \in [0, \pi]} (1 + |\psi'(\theta)|/N)}{\pi \min_{\theta \in [0, \pi]} (1 + |\psi'(\theta)|/N)},$$

тогда

$$\left| \frac{\sin \theta_i}{(N + \psi'(\theta_i))(\cos \theta - \cos \theta_i)} \right| \leq d \frac{(\theta_{i+1} - \theta_i) \sin \theta_i}{\cos \theta_i - \cos \theta} \leq d \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \frac{\sin x \, dx}{\cos x - \cos \theta}.$$

Поэтому

$$\sigma_1 \leq 2\pi Dg + d \int_0^{\theta_{m-1}} \frac{\sin x \, dx}{\cos x - \cos \theta} = 2\pi Dg + d \ln \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_{m-1} - \cos \theta}.$$

Но $1 - \cos \theta \leq 2$,

$$\cos \theta_{m-1} - \cos \theta > \cos \theta_{m-1} - \cos \theta_m = 2 \sin \frac{\theta_{m-1} + \theta_m}{2} \sin \frac{\theta_{m-1} - \theta_m}{2},$$

а

$$\frac{\pi}{2N} \leq \theta_{m-1}, \quad \theta_m \leq \pi - \frac{\pi}{2N}, \quad \sin \frac{\theta_{m-1} + \theta_m}{2} \geq \sin \frac{\pi}{2N} \geq \frac{1}{2N},$$

отсюда

$$\sigma_1 \leq 2\pi Dg - d \ln \sin \frac{\theta_{m-1} + \theta_m}{2} - d \ln \sin \frac{\theta_{m-1} - \theta_m}{2} \leq 2\pi Dg + 2d \ln N.$$

Такие же оценки верны и для σ_2 ч.т.д.

§ 4. Квадратурные формулы повышенной точности для некоторых классов интегралов с зависящими от параметров весовыми функциями

Существуют связанные с именами Гаусса, Маркова, Лобатто, Радона квадратурные формулы повышенной алгебраической степени точности для приближенного вычисления интегралов с весом $p(x)$ [28], [29]. Использование в них зависящих от параметров весовых функций $p(x, C)$ позволяет более точно учесть априорную информацию о свойствах класса интегрируемых функций (примером служат задачи теории переноса частиц с узконаправленными индикатрисами рассеяния). Как правило, алгоритмы вычисления параметров таких квадратурных формул высоких порядков точности достаточно трудоемки [30], [31]. Однако существует такой

класс весовых функций $p(x, C)$ (2.10), для которых сравнительно просто вычисляются параметры упомянутых квадратур. Это квадратурные формулы, узлы которых совпадают с корнями ортогональных ЧМБС-многочленов [32], [33]. Они обобщают знаменитую формулу Мелера [1], [28], [29]:

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}\right).$$

Пусть $p(x) = p(x, \alpha, \beta, C)$ является функцией (2.10). Рассмотрим для вычисления интегралов вида

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x) p(x, \alpha, \beta, C) dx, \quad f(x) \in C[-1, 1], \quad (4.1)$$

алгоритмы определения параметров A_i^n, x_i^n квадратурных формул

$$I_n(f) = \sum_{i=1}^n A_i^n f(x_i^n) \quad (4.2)$$

для весовых функций $p(x)$ (2.10). Точки x_i^n называются *узлами*, а числа A_i^n — *весами квадратурной формулы* (4.2). Эти параметры определяем из условия $I_n(f) = I(f)$, если $f(x)$ — многочлен степени не выше M , $n \leq M \leq 2n-1$. Получим квадратурные формулы различного типа. В формулах для погрешности квадратур $R_M(f)$ участвуют производные $f^{(M+1)}(\eta)$, которые считаем непрерывными функциями на $[-1, 1]$, а $\eta \in [-1, 1]$. Нам понадобятся значения $C'_n(x_i, \alpha, \beta, C) \times C_{n+1}(x_i, \alpha, \beta, C)$ в корнях x_i многочлена $C_n(x, \alpha, \beta, C)$. Используя (1.5), получаем

$$C'_n(x_i, \alpha, \beta, C) C_{n+1}(x_i, \alpha, \beta, C) = \frac{(N + \psi'(\theta_i)) S_l(x_i)}{(1+x)^{2\alpha} (1-x)^{2\beta}}. \quad (4.3)$$

4.1. Приведем алгоритм определения параметров A_i^n, x_i^n квадратурных формул типа Гаусса при весовых функциях вида $p(x) = w^2(x, \alpha, \beta, C)(1-x^2)^{-1/2}$. Пусть $N > \frac{l}{2}$, тогда согласно (2.13), (2.19) многочлены (1.17), умноженные на $\sqrt{2/\pi}$, будут ортонормированными многочленами, у которых с ростом n удваиваются коэффициенты $\tilde{A}_n$ при степени x^n (1.18). Следовательно [28], [29], $x_i^n = x_i$ — корни (2.7), а

$$A_i^n = -\frac{\pi}{C'_n(x_i, \alpha, \beta, C) C_{n+1}(x_i, \alpha, \beta, C)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.4)$$

или с учетом (4.3)

$$A_i^n = \frac{\pi(1+x_i^n)^{2\alpha}(1-x_i^n)^{2\beta}}{S_l(x_i^n)(N+\psi'(\theta_i))}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.5)$$

Алгебраическая степень точности квадратуры (4.2), (4.5) $M = 2n-1$ и согласно [28], [29] с учетом (2.10), (3.2), (1.19) имеем

$$R_{2n-1}(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \omega_n^2(x) p(x, C) dx = \frac{f^{(2n)}(\eta) \pi}{(2n)! 2^{2N-1} B_m(C)}. \quad (4.6)$$

Рис. 9. Распределение коэффициентов A_i^{40} квадратурной формулы Гаусса для (2.6)

ПРИМЕР 4. Пусть $S_l(x)$ из (2.6), где $l = 2$, $\delta = 1.01$. На рис. 9 приведен график коэффициентов A_i^{40} (4.5) квадратурной формулы Гаусса (4.2).

Теперь получим для рассматриваемого класса весовых функций явный вид параметров квадратурных формул типа Маркова, Лобатто, Радо, обобщая для этого случая результаты И. П. Мысовских [29] и используя из [28], [29] общие формулы для A_i^n . В них $\{x_i^n\}$ будут обозначать внутренние узлы отрезка $[-1, 1]$, являющиеся корнями многочлена $C_n(x) = C_n(x, \alpha, \frac{1}{2}, C)$. Для вычисления весовых коэффициентов при $x = \pm 1$ использована формула Кристоффеля–Дарбу (2.14) и равенства (2.15)–(2.18).

4.2. Рассмотрим формулы Лобатто–Радо. Пусть $\beta = 0$, а квадратурная формула взята в виде

$$I_n(f) = \sum_{i=1}^n A_i^n f(x_i^n) + A_0^n f(1). \quad (4.7)$$

Тогда в (4.7) $\{x_i^n\}$ – корни $C_n(x, \alpha, \frac{1}{2}, C)$ из ортогональной с весом $p(x, \alpha, \frac{1}{2}, C)$ системы многочленов.

Согласно [28], [29] для внутренних узлов справедливы формулы

$$\begin{aligned} A_i^n &= \frac{2}{D_{n+1}(x_i, 1, \alpha, 1/2) D_n'(x_i, 1, \alpha, 1/2) (1 - x_i)} \\ &= \frac{\pi}{C_n'(x_i, \alpha, 1/2, C) C_{n+1}(x_i, \alpha, 1/2, C) (1 - x_i)}, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Тогда согласно (4.3)

$$A_i^n = \frac{\pi(1 + x_i^n)^{2\alpha}}{S_l(x_i^n)(n + \alpha + 1/2 + \psi'(\theta_i))}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.8)$$

Для коэффициента A_0^n в узле $x = 1$ имеем

$$A_0^n = \frac{1}{D(1, 1, \alpha, 0)} \int_{-1}^1 D_n(x, 1, \alpha, 0) p(x, \alpha, 0, C) dx,$$

причем согласно (2.16), (2.18), (4.5) он равен

$$A_0^n = \frac{\pi 2^{2\alpha-1}}{S_l(1)(n + \alpha + 1/2 + \psi'(0))}, \quad (4.9)$$

$M = 2n$. Согласно [28], [29], учитывая (2.16), (2.18), (4.5) и то, что

$$(1 - x)p(x, \alpha, 0, C) = p\left(x, \alpha, \frac{1}{2}, C\right),$$

имеем

$$\begin{aligned} R_{2n}(f) &= \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} \int_{-1}^1 \omega_n^2(x) p\left(x, \alpha, \frac{1}{2}, C\right) dx \\ &= \frac{f^{(2n+1)}(\eta) \pi}{(2n+1)! 2^{2(n+\alpha)} B_m(C)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.3. Пусть $\alpha = \beta = 0$, а квадратурная формула Маркова взята в виде

$$I_n(f) = \sum_{i=1}^n A_i^n f(x_i^n) + A_0^n f(1) + B_0^n f(-1). \quad (4.11)$$

Тогда в (4.2) $\{x_i^n\}$ — корни $C_n(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, C)$ из ортогональной с весом $p(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, C)$ системы многочленов. Согласно [28], [29] для внутренних узлов справедливы формулы

$$A_i^n = -\frac{\pi}{C_n'(x_i, 1/2, 1/2, C) C_{n+1}(x_i, 1/2, 1/2, C)(1 - x_i^2)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.12)$$

Вычисляя по (4.3) $C_{n+1}(x_i, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, C) C_n'(x_i, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, C)$, получаем

$$A_i^n = \frac{\pi}{S_l(x_i^n)(n+1 + \psi'(\theta_i))}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.13)$$

Для коэффициента A_0^n в узле $x = 1$ [28] по (2.16), (2.18) имеем

$$\begin{aligned} A_0^n &= \frac{1}{2D_n(1, 1, 1/2, 0)} \int_{-1}^1 D_n\left(x, 1, \frac{1}{2}, 0\right) (1+x)p(x, 0, 0, C) dx \\ &= \frac{1}{2D_n(1, 1, 1/2, 0)} \int_{-1}^1 D_n\left(x, 1, \frac{1}{2}, 0\right) p\left(x, \frac{1}{2}, 0, C\right) dx, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$A_0^n = \frac{\pi}{2S_l(1)(n+1 + \psi'(0))}. \quad (4.15)$$

Для коэффициента B_0^n в узле $x = -1$ аналогично получаем

$$B_0^n = \frac{\pi}{2S_l(-1)(n+1 + \psi'(\pi))}, \quad (4.16)$$

$M = 2n + 1$. Согласно [27], учитывая (2.16), (2.18), (4.5) и то, что

$$(1 - x^2)p(x, 0, 0, C) = p\left(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, C\right),$$

имеем

$$\begin{aligned} R_{2n+1}(f) &= \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 \omega_n^2(x) p\left(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, C\right) dx \\ &= \frac{f^{(2n+2)}(\eta) \pi}{(2n+2)! 2^{2n+1} B_m(C)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.4. Рассмотрим квадратурные формулы повышенной точности для вычисления в смысле главного значения сингулярных интегралов вида

$$I(f, a) = \int_{-1}^1 \frac{f(x) p(x, \alpha, \beta, C) dx}{x - a} = \int_{-1}^1 \frac{(f(x) - f(a)) p(x, \alpha, \beta, C) dx}{x - a} + f(a) q(a), \quad (4.18)$$

где $a \in (-1, 1)$, функция $f(x) \in C[-1, 1]$ удовлетворяет условию Гёльдера:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\gamma, \quad x, y \in [-1, 1], \quad L > 0, \quad 0 < \gamma \leq 1,$$

а функция Ляпунова–Стилтьеса $q(a)$:

$$q(a) = \int_{-1}^1 \frac{p(x, \alpha, \beta, C) dx}{x - a},$$

вычисляется явно в квадратурах для веса $p(x, \alpha, \beta, C)$ вида (2.10) [34].

Пусть a не является корнем многочлена $C_n(x, \alpha, \beta, C)$, тогда квадратурную формулу возьмем в виде

$$I_n(f, a) = \sum_{i=1}^n A_i^n \frac{f(x_i^n) - f(a)}{x_i^n - a} + f(a) q(a). \quad (4.19)$$

В ней используем параметры (4.5) формулы Гаусса. Если же a совпадает с одним из корней ($a = x_j^n$), то, предполагая существование в этой точке производной от $f(x)$, заменяем в j -м слагаемом формулы (4.19) $(f(x_j^n) - f(a))/(x_j^n - a)$ на $f'(x_j^n)$. Здесь $M = 2n$.

Во втором методе воспользуемся следующим явно вычисляемым интегралом:

$$\tilde{q}(a, \alpha, \beta) = \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2\alpha-1/2} (1-x)^{2\beta-1/2} dx}{x - a}, \quad (4.20)$$

$\tilde{q}(a, 0, 0) = 0$, $\tilde{q}(a, \frac{1}{2}, 0) = -\tilde{q}(a, 0, \frac{1}{2}) = \pi$, $\tilde{q}(a, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi a$. Умножая (4.19) на $f(a)/S_l(a)$, преобразуем интеграл в равенстве (4.18):

$$I(f, a) = \int_{-1}^1 \frac{(f(x) S_l(a) - f(a) S_l(x)) p(x, \alpha, \beta, C) dx}{(x - a) S_l(a)} + \frac{f(a) \tilde{q}(a, \alpha, \beta)}{S_l(a)}. \quad (4.21)$$

Пусть a не является корнем многочлена $C_n(x, \alpha, \beta, C)$, тогда квадратурная формула имеет вид

$$I_n(f, a) = \frac{1}{S_l(a)} \left(\sum_{i=1}^n A_i^n \frac{f(x_i^n) S_l(a) - f(a) S_l(x_i^n)}{x_i^n - a} + f(a) \tilde{q}(a, \alpha, \beta) \right). \quad (4.22)$$

В ней используем параметры (4.5) формулы Гаусса. Если a совпадает с одним из корней ($a = x_j^n$), то, предполагая существование в этой точке производной от $f(x)$, заменяем в j -м слагаемом формулы (4.22) $(f(x_j^n)S_l(a) - f(a)S_l(x_j^n))/(x_j^n - a)$ на $S_l(x_j^n)f'(x_j^n) - f(x_j^n)S'_l(x_j^n)$. Алгебраическая степень точности квадратур (4.19), (4.22) $M = 2n$.

Квадратурные формулы пп. 4.1–4.4 обобщают формулу Мелера, и при $N > \frac{l}{2}$ их можно трактовать как квадратурные формулы повышенной алгебраической точности, точно интегрирующие с весовой функцией $(1+x)^{2\alpha-1/2}(1-x)^{2\beta-1/2}$ дробно-рациональные от x функции вида $f(x)/S_l(x)$, где $f(x)$ – многочлен степени не выше M [32].

4.5. Квадратурные формулы наивысшей тригонометрической степени точности для интегрирования на отрезке $[0, \pi]$ четных периодических функций получаем из рассмотренных ранее после замены в интеграле (4.1) переменной интегрирования $x = \cos \theta$ и в квадратурных формулах $x_i^n = \cos \theta_i$. А именно, пусть

$$\tilde{f}(\theta) = f(\cos \theta), \quad \tilde{S}_l(\theta) = S_l(\cos \theta) = \prod_{k=1}^m (1 - c_k \cos(l_k \theta)),$$

тогда интеграл (4.1) преобразуется в интеграл от уже не имеющей особенностей подынтегральной функции:

$$\tilde{I}(\tilde{f}) = \int_0^\pi \tilde{f}(\theta) \frac{(1 + \cos \theta)^{2\alpha} (1 - \cos \theta)^{2\beta}}{\tilde{S}_l(\theta)} d\theta. \quad (4.23)$$

Квадратурным формулам пп. 4.1–4.3 будут соответствовать квадратурные формулы для $\tilde{I}(\tilde{f})$, построенные по слегка неравномерной сетке узлов $\{\theta_i\}$, $0, \pi$. Аналогичным образом по (4.2), (4.5) строятся квадратурные формулы для сингулярных интегралов вида

$$\tilde{I}(\tilde{f}, \varphi) = \int_0^\pi \tilde{f}(\theta) \frac{(1 + \cos \theta)^{2\alpha} (1 - \cos \theta)^{2\beta}}{\tilde{S}_l(\theta)(\cos \theta - \cos \varphi)} d\theta. \quad (4.24)$$

Они, в частности, могут использоваться для вычисления асимптотической при $n \rightarrow \infty$ фазовой функции Бернштейна–Сегё [7] при $p(x) = t(x)/\sqrt{1-x^2}$, $t(x) > 0$:

$$\bar{\psi}(\theta) = \frac{\sin \theta}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\ln(t(\cos \theta)/t(\cos \varphi))}{\cos \theta - \cos \varphi} d\varphi,$$

которая совпадает с $\psi(\theta)$ при $p(x) = p(x, 0, 0, C)$.

4.6. Пусть $F(x) = f(x)p(x, \alpha, \beta, C)$, тогда

$$I(f) = \int_{-1}^1 F(x) dx \quad (4.25)$$

и в квадратурной формуле Гаусса (4.2), (4.5) $A_i^n f(x_i^n) = C_i^n F(x_i^n)$, где

$$C_i^n = \frac{\pi(1 - (x_i^n)^2)^{1/2}}{N + \psi'(\theta_i)}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.26)$$

В [32] автором было замечено, что весовые коэффициенты при $F(x_i^n)$ в квадратурных формулах трапеций, построенных по узлам квадратурных формул типа Гаусса $\{x_i^n\}$ и ± 1 , близки к C_i^n . Покажем это. Коэффициент при $F(x_i^n)$, $i = \overline{2, n-1}$, в формуле трапеций есть $B_i^n = (x_{i+1}^n - x_{i-1}^n)/2$. Пользуясь формулами (2.9), получаем, что

$$B_i^n = \left(1 - \cos^2\left(\theta_i - \frac{\delta^2 \psi(\theta_i)}{2N}\right)\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\pi}{N + \psi'(\tilde{\theta}_i)}\right), \quad (4.27)$$

где $\delta^2 \psi(\theta_i) = \psi(\theta_{i+1}) - 2\psi(\theta_i) + \psi(\theta_{i-1})$, $\theta_{i-1} \leq \tilde{\theta}_i \leq \theta_{i+1}$. Таким образом, B_i^n близки к C_i^n при больших n . Изложенный подход использования $p(x, \alpha, \beta, C)$ и корней $C_n(x, \alpha, \beta, C)$ или асимптотически близких к ним величин (2.9) для построения узлов квадратурных формул трапеций может рассматриваться как дополнение к другим методам оптимизации параметров этих формул [35].

ПРИМЕР 5. На рис. 10 приведено распределение коэффициентов B_i^{40} , C_i^{40} для весовой функции (1.21), на рис. 11 – весовых коэффициентов A_i^{40} квадратурной формулы Гаусса.

Рис. 10. Распределение коэффициентов B_i^{40} формулы трапеций и коэффициентов C_i^{40} из квадратурной формулы Гаусса: * – B_i^{40} , о – C_i^{40} для (1.21)

4.7. Рассмотрим метод регуляризации интегралов с особенностью $(x - a)^{-2}$ в смысле конечной части по Адамару и квадратурных формул для них. Пусть в первых двух множителях $S_l(x)$ в (1.4) $l_k = 1$, $c_k = (a + (-1)^k i \delta)^{-1}$, $a \in (-1, 1)$, $k = 1, 2$, $\delta > 0$,

$$I(f, a, \delta) = \int_{-1}^1 (f(x) - f(a))p(x, \alpha, \beta, C) dx. \quad (4.28)$$

Регуляризованным гиперсингулярным интегралом назовем предел, если он существует: $I(f, a, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} I(f, a, \delta)$. Каждому достаточно малому значению $\delta > 0$ сопоставим квадратурную формулу Гаусса (4.2), (4.5):

$$I_n(f, a, \delta) = \sum_{i=1}^n A_i^n (f(x_i^n) - f(a)), \quad (4.29)$$

Рис. 11. Распределение коэффициентов A_i^{40} квадратурной формулы Гаусса для (1.21)

которую используем для приближенного вычисления (4.28). После предельного перехода при $\delta \rightarrow 0$ в (4.29) возникают многочлены $C_n(x, \alpha, \beta, C)$, равные 0 при $x = a$ с разрывной в этой точке функцией $\psi(\theta)$, ортогональные с $p(x, \alpha, \beta, C)$ и экстремальные с $w(x, \alpha, \beta, C)$ – функцией с особенностью. Тогда для $I_n(f, a, 0)$ в (4.29) при достаточно гладкой функции $f(x)$ следует занулить слагаемое при $x_j = a$. Для простейшего случая

$$p(x) = \frac{w^2(x)}{(1-x^2)^{1/2}}, \quad w(x) = \frac{(a^2 + \delta^2)^{1/2}}{((x-a)^2 + \delta^2)^{1/2}} \quad (4.30)$$

рассмотрим

ПРИМЕР 6. Пусть $a = 0.25$, $\delta = 0.003$. На рис. 12–15 приведены графики: на рис. 12 – весовой функции $w(x)$, на рис. 13 – фазовой функции $\psi(\arccos x)$, на рис. 14 – ЧМБС-многочлена $C_{40}(x, 0, 0, C)$, на рис. 15 – распределение коэффициентов A_i^{40} (4.5) квадратурной формулы Гаусса (4.2).

Изложенный метод распространяется на случай для многомерных интегралов [11]. Другие методы регуляризации содержатся в [36].

§ 5. Алгоритмы оптимизации чебышёвских итерационных методов на классах начальных ошибок

Изучим оптимальные чебышёвские итерационные методы с зависящим от параметров весом. Это позволяет более точно учесть априорную информацию о начальной ошибке. Определим класс операторов с параметрами, характерный для операторов перехода, связывающих ошибку ε^n на n -м шаге с начальной ошибкой ε^0 в итерационных методах. Исследуем задачу минимизации нормы $\|\varepsilon^n\|_1$ относительно нормы $\|\varepsilon^0\|_0$. Рассмотрим случай, когда задача минимизации отношения этих норм решается явно с применением ЧМБС-многочленов. С помощью аппарата ЧМБС-многочленов покажем, что формулы для параметров зависят от того, к какому классу “гладкости” принадлежит ε^0 . Этот факт был исследован в [14],

Рис. 12. Весовая функция $w(x)$ (4.30) Рис. 13. Фазовая функция $\psi(\arccos x)$ для (4.30)

где было показано, что для “гладких” начальных ошибок возможно уменьшить их в конечное число раз независимо от обусловленности оператора решаемой задачи. Дадим формулы для параметров и точные оценки сходимости для оптимальных чебышёвских методов в рассмотренных классах начальных ошибок.

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, $u, v \in H$, $A = A^* > 0$ – самосопряженный положительно определенный оператор, (λ_i, φ_i) – собственные пары оператора A . Причем $\text{Sp}(A)$ – спектр оператора A – принадлежит отрезку $[m, M]$, $0 < m < M$, где m, M – соответственно нижняя и верхняя границы спектра, $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, а $\{\varphi_i\}$ образуют ортонормированный базис в пространстве H . Определим функции от оператора A следующим образом: если $f(\lambda)$ – ограниченная функция на $[m, M]$ и u имеет разложение $u = \sum_i u_i \varphi_i$, то $f(A)u = \sum_i f(\lambda_i) u_i \varphi_i$.

Рис. 14. ЧМБС-многочлен $C_{40}(x, 0, 0, C)$ для (4.30) Рис. 15. Распределение коэффициентов A_i^{40} квадратурной формулы Гаусса для (4.30)

Пусть $F(\lambda)$, $G(\lambda)$, $R(\lambda)$ – ограниченные на $[m, M]$ функции и $F(\lambda), G(\lambda) > 0$ на $[m, M]$. Определим квадрат нормы:

$$\|u\|_{F(A)}^2 = (u, u)_{F(A)} = (F(A)u, u) = \sum_i F(\lambda_i) u_i^2.$$

Пусть $v = q_n(A)R(A)u$, где $q_n(\lambda)$ – многочлен n -й степени вида

$$q_n(\lambda) = \prod_{k=1}^n (1 - \gamma_k \lambda), \quad q_n(0) = 1.$$

Рассмотрим в H эллипсоид E :

$$(u, u)_{G(A)} = \sum_i G(\lambda_i) u_i^2 = D^2, \quad D > 0. \quad (5.1)$$

Тогда

$$(v, v)_{F(A)} = (q_n^2(A)R^2(A)F(A)u, u) = (q_n^2(A)W^2(A)u, u)_{G(A)},$$

где $W(\lambda) = |R(\lambda)|\sqrt{F(\lambda)/G(\lambda)}$, и на множестве E (5.1) имеем

$$\|v\|_{F(A)} \leq \sup_{\lambda \in [m, M]} |q_n(\lambda)W(\lambda)|D.$$

Пусть

$$E_n = \inf_{q_n(0)=1} \sup_{\lambda \in [m, M]} |q_n(\lambda)W(\lambda)|, \quad P_n(\lambda) = \arg \inf_{q_n(0)=1} \sup_{\lambda \in [m, M]} |q_n(\lambda)W(\lambda)|. \quad (5.2)$$

Тогда многочлен $P_n(\lambda)$ реализует

$$\min_{q_n(0)=1} \sup_{A: \text{Sp}(A) \in [m, M]} \|v\|_{F(A)}. \quad (5.3)$$

Обозначим $s = m/M$, $\delta = (1+s)/(1-s)$, $\tau = (1-s^{1/2})/(1+s^{1/2})$, $t = 2/(M+m)$ и сделаем замену переменных

$$\lambda = \lambda(x) = (1 - \delta^{-1}x)t^{-1}, \quad \text{или} \quad x = x(\lambda) = \delta(1 - t\lambda). \quad (5.4)$$

Тогда экстремальная задача (5.2), (5.3) перейдет в аналогичную задачу для $[-1, 1]$ (2.3), (2.4) с решением (2.5):

$$p_n(x) = \frac{C_n(x)}{C_n(\delta)}, \quad e_n = \frac{1}{|C_n(\delta)|}, \quad (5.5)$$

где $w_0 w(x) = W(\lambda(x))$, а w_0 – нормировочный множитель, $e_n = E_n/w_0$.

Далее будем предполагать, что $\alpha = \beta = 0$, $w(x) = 1/\sqrt{S_l(x)}$, т.е. $C_n(x) = C_n(x, 0, 0, C)$.

Оператор $G(A)$, определяющий эллипсоид (5.1), задан функцией

$$G(\lambda) = F(\lambda) \left(\frac{R(\lambda)}{W(\lambda)} \right)^2 = \frac{R^2(\lambda)F(\lambda)S_l(x(\lambda))}{w_0^2}. \quad (5.6)$$

Рассмотрим простой, часто встречающийся в исследованиях случай, когда нормы формируются с помощью степени оператора A : $R(\lambda) \equiv 1$, $W(\lambda) = (m/\lambda)^{l/2}$, $G_l(\lambda) = (\lambda/m)^l F(\lambda)$, где коэффициент m взят для нормировки. Тогда

$$\max_{[m, M]} W(\lambda) = 1$$

и упрощаются формулы для $C_n(\delta)$, так как

$$S_l(x) = (1 - \delta^{-1}x)^l, \quad \psi(\theta) = l \arctg \frac{\sin \theta}{\tau - 1 - \cos \theta}, \quad E_n = (mt)^{l/2} e_n. \quad (5.7)$$

График $C_n(x, 0, 0, C)$ будет “ужом” на отрезке $[-1, 1]$ в коридоре, ограниченном ветвями парабол $\pm(1 - \delta^{-1}x)^{l/2}$ (см. пример 2 и рис. 4).

При этом корни x_i будут возрастать с ростом l .

При $l = 0$ имеем

$$C_n(x) = T_n(x), \quad E_n = E_{0,n} = \frac{2\tau^n}{1 + \tau^{2n}}. \quad (5.8)$$

А при $1 \leq l < 2n$

$$\sqrt{1 - \delta^{-1}} \operatorname{Co}_{1/2}(\delta) = \sqrt{1 + \delta^{-1}} \operatorname{Si}_{1/2}(\delta) = \sqrt{\frac{2mM}{M^2 - m^2}},$$

т. е.

$$C_n(\delta) = \frac{\tau^{-n+l/2}}{2} \left(\frac{8mM}{M^2 - m^2} \right)^{l/2}, \quad (5.9)$$

$$E_n = E_{l,n} = 2\tau^{n-l/2} \left(\frac{1-s}{4} \right)^{l/2}. \quad (5.10)$$

При $l = 2$ этот случай был рассмотрен в [37], для него

$$C_n(x) = \frac{1}{2\delta} \left((x + \sqrt{x^2 - 1})^{n-1} (\delta x - 1 + \sqrt{(\delta^2 - 1)(x^2 - 1)}) + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n-1} (\delta x - 1 - \sqrt{(\delta^2 - 1)(x^2 - 1)}) \right).$$

Заметим, что при $s = m/M < 1$, $n, l \rightarrow \infty$

$$\frac{E_{l,n}}{E_{0,n}} = (1 + \tau^{2n}) \left(\frac{1 + s^{1/2}}{2} \right)^l \rightarrow 0. \quad (5.11)$$

Пусть в пространстве H задано уравнение

$$Au = f, \quad (5.12)$$

где $f \in H$. Если

$$f = \sum_i f_i \varphi_i, \quad f_i = (f, \varphi_i),$$

то

$$u = \sum_i \frac{f_i \varphi_i}{\lambda_i}.$$

Для нахождения решения (5.12) рассмотрим два типа итерационных методов: двучленный

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{k+1} (Au^k - f) \quad (5.13)$$

и трехчленный

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{k+1} (Au^k - f) - \beta_{k+1} (u^k - u^{k-1}), \quad (5.14)$$

$k = 0, 1, \dots, \beta_1 = 0$, в которых по заданному u^0 образуем последовательность $u^k \rightarrow u$. В (5.13), (5.14) α_k, β_k – набор параметров. Тогда [7]

$$u^n = P_n(A)u^0 + (I - P_n(A))A^{-1}f, \quad (5.15)$$

где

$$P_n(\lambda) = \prod_{i=1}^n (1 - \gamma_i \lambda), \quad P_n(0) = 1, \quad (5.16)$$

или

$$A(I - P_n(A))^{-1}u^n = f + A(I - P_n(A))^{-1}P_n(A)u^0,$$

или

$$Au^n = (I - P_n(A))f + AP_n(A)u^0. \quad (5.17)$$

Если

$$\varepsilon^k = u - u^k = \sum_i \varepsilon_i^k \varphi_i,$$

то начальная ошибка ε^0 и ε^n на n -м шаге связаны соотношением

$$\varepsilon^n = P_n(A)\varepsilon^0 = \sum_i P_n(\lambda_i)\varepsilon_i^0 \varphi_i. \quad (5.18)$$

Коэффициенты многочлена $P_n(\lambda)$ вычисляются по параметрам каждого из методов (5.13), (5.14). Для метода (5.13)

$$\gamma_{j_k} = \alpha_k = \frac{2}{M + m - (M - m)x_{j_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.19)$$

где x_i определены в (2.7), а $j_n = (j_1, \dots, j_n)$ – перестановка, задающая порядок употребления параметров [7]. Для метода (5.14) многочлен $P_n(\lambda)$ определяется последовательно:

$$P_0(\lambda) = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad P_1(\lambda) = 1 - \alpha_1 \lambda, \quad (5.20)$$

$$P_{k+1}(\lambda) = (1 - \beta_{k+1} - \alpha_{k+1} \lambda)P_k(\lambda) + \beta_{k+1}P_{k-1}(\lambda), \quad k = 1, \dots, n-1, \quad (5.21)$$

где параметры определяются из формул для $\tilde{C}_1(x)$ и рекуррентных соотношений типа (2.19), (2.20) после замены в них x на λ по формуле (5.4).

По формуле (5.13) реализуются двучленные чебышёвские методы различных типов [7], а по (5.14) – трехчленные чебышёвские методы, методы сопряженных градиентов, комбинированные итерационные методы [14], [17], [26].

Определим параметры оптимального метода при $k > \frac{l}{2}$. Для этого потребуем, чтобы многочлены $P_k(\lambda)$ удовлетворяли условию (5.16) и, будучи определенными соотношениями (5.21), были одновременно многочленами, наименее отклоняющимися от нуля на отрезке $[m, M]$. Тогда согласно (2.21) имеем

$$P_k(\lambda) = \frac{C_k(x)}{C_k(\delta)}, \quad (5.22)$$

где x получен по формулам (5.4). Определяя из (5.22) $C_k(x)$ и подставляя эти значения и величину x из формулы (5.4) в соотношения (5.20), (2.21), получаем

$$\begin{aligned} C_1(\delta)P_1(\lambda) &= C_1\left(\frac{M+m-2\lambda}{M-m}\right), \\ C_{k+1}(\delta)P_{k+1}(\lambda) &= 2\left(\frac{M+m-2\lambda}{M-m}\right)C_k(\delta)P_k(\lambda) - C_{k-1}(\delta)P_{k-1}(\lambda). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Из сравнения формул (5.20), (5.21) с формулами (5.23) следует, что

$$\alpha_{k+1} = \frac{4}{M-m} \frac{C_k(\delta)}{C_{k+1}(\delta)}, \quad \beta_{k+1} = -\frac{C_{k-1}(\delta)}{C_{k+1}(\delta)}, \quad k > \frac{l}{2}. \quad (5.24)$$

При этих значениях параметров метод (5.14) становится оптимальным.

Разберем интересные частные случаи. Приведем характеристики оптимальных чебышёвских методов. Для заданного l и $S_l(x)$, $\psi(\theta)$ из (5.7) определяем $E_{l,n}$ из (5.8), (5.10), x_i из (2.7), γ_{j_k} из (5.19), a_2, b_2, d_2 из (2.20) по $C_1(x)$, $C_2(x)$, α_1 в (5.14), (5.20) через корень $C_1(x)$, а остальные α_k, β_k в (5.14), (5.21) определяем из (5.24) и уравнений типа (2.20).

1) Пусть $l = 0$, $G(\lambda) = F(\lambda)$, тогда $w(x) \equiv 1$, $C_n(x) = T_n(x)$, $a_2 = 2$, $b_2 = 0$, $d_2 = 1$, $C_1(x) = x$, $\alpha_1 = t$ и

$$\|\varepsilon^n\|_{F(A)} \leq E_{0,n} \|\varepsilon^0\|_{F(A)} = \frac{2\tau^n}{1 + \tau^{2n}} \|\varepsilon^0\|_{F(A)}.$$

2) При $1 \leq l \leq 2n$ пусть $l_k = 1$, $G(\lambda) = G_l(\lambda) = F(\lambda)(\lambda/m)^l$ и из принадлежности ε^0 классу (5.1) согласно (5.10) получаем

$$\|\varepsilon^n\|_{F(A)} \leq 2\tau^{n-l/2} \left(\frac{1-s}{4}\right)^{l/2} \|\varepsilon^0\|_{G_l(A)}.$$

Пусть коэффициенты ε_i^0 в разложении начальной ошибки ε^0 достаточно быстро убывают с ростом i , точнее: существует такая минимальная постоянная $0 < c(l) < 1$, что $2^{1-l} \|\varepsilon^0\|_{G_l(A)} \leq c(l) \|\varepsilon^0\|_{F(A)}$ при $n \geq \frac{l}{2}$. Тогда $\|\varepsilon^n\|_{F(A)}$ уменьшится по крайней мере в $1/c(l)$ раз по сравнению с аналогичной нормой начальной ошибки независимо от обусловленности оператора A . Рассмотрим частные случаи.

3) Пусть $l = 1$, $G_1(\lambda) = F(\lambda)\lambda/m$ (такая норма для начальной ошибки характерна для методов сопряженных градиентов [14]):

$$\|\varepsilon^n\|_{F(A)} \leq E_{1,n} \|\varepsilon^0\|_{G_1(A)} = \tau^{n-1/2} (1-s)^{1/2} \|\varepsilon^0\|_{G_1(A)},$$

если $c = (1+s^{1/2})(2(1+s))^{-1/2}$, то $a_2 = 2$, $b_2 = \tau$, $d_2 = c(1-\tau^2)$, $C_1(x) = c(x-\tau)$, $C_2(x) = c(2x^2 - \tau x - 1)$ и $\alpha_1 = 1/\sqrt{Mm}$.

4) Пусть $l = 2$, $G_2(\lambda) = F(\lambda)(\lambda/m)^2$. В этом случае в чебышёвских методах минимизируется норма ошибки на n -м шаге по сравнению с нормой вычисляемой начальной невязки $r^0 = f - Au^0 = A\varepsilon^0$:

$$\|\varepsilon^n\|_{F(A)} \leq E_{2,n} \|\varepsilon^0\|_{G_2(A)} = \tau^{n-1} \frac{1-s}{2m} \|r^0\|_{F(A)}.$$

Если $\tilde{c} = 2s^{1/2}/(1+s)$, то $a_2 = 1 + \tilde{c}$, $b_2 = \tilde{c}\delta^{-1}$, $d_2 = 2s\tilde{c}$, $C_1(x) = x - \delta^{-1}$, $C_2(x) = (\tau^{-1}x^2 - x - \sqrt{\delta^2 - 1})\delta^{-1}$, $\alpha_1 = (m^{-1} + M^{-1})/2$. Этот метод был предложен в [38].

5) Рассмотрим следующую задачу II оптимизации (0.3). Пусть в итерационных методах (5.13), (5.14) взято $u^0 = 0$, тогда согласно (5.17) u^n является решением уравнений

$$A(I - P_n(A))^{-1}u^n = f, \quad \text{или} \quad Au^n = (I - P_n(A))f, \quad (5.25)$$

а

$$\varepsilon^n = P_n(A)u = P_n(A)A^{-1}f. \quad (5.26)$$

Пусть $G(\lambda) = G_l(\lambda)$, тогда метод, оптимальный еще и по параметру l , определим условием

$$\|\varepsilon^n\|_{F(A)} \leq \min_{l \geq 0} (E_{l,n} \|u\|_{G_l(A)}) = \min_{l \geq 0} \left(\frac{E_{l,n}}{m} \|f\|_{G_{l-2}(A)} \right). \quad (5.27)$$

6) Пусть оператор A имеет еще одну (искомую) собственную пару (λ_0, φ_0) , где $0 < \lambda_0 < m$. Рассмотренные в 1)–5) итерационные методы могут быть известным способом преобразованы [3], [17] в итерационные методы для нахождения минимального изолированного собственного значения λ_0 и соответствующего собственного элемента φ_0 . При этом для $l > 0$ будет несколько усилен по сравнению с методом при $l = 0$ эффект отделимости искомого собственного значения от соседних на классе начальных ошибок (5.1) при $G(\lambda) = G_l(\lambda)$. Например, для заданных l, n и начального приближения

$$u^0 = u_0 \varphi_0 + \sum_i u_i \varphi_i, \quad u_0 \neq 0,$$

двучленный чебышёвский метод с точностью до нормировки приближений для φ_0 имеет вид (5.13) при $f = 0$:

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_{k+1} A u^k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.28)$$

Рассмотрим оптимальный смешанный метод, состоящий из чебышёвских и обратных итераций. Пусть в (5.7) $l = 2q + p$, где величина p характеризует класс начального приближения, а $Q(x) = C_n(x, 0, 0, C)/(1 - \delta^{-1}x)^q$. Тогда согласно (1.5) дробно-рациональная функция $Q(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{Q(x)}{(1 - \delta^{-1}x)^{p/2}} = \cos(n\theta + \psi(\theta)).$$

Новое приближение с точностью до множителя к φ_0 получим по формуле

$$u^{n+q} = Q(x(A))u^0. \quad (5.29)$$

Для этого продолжим цикл q итерациями метода обратных итераций

$$A u^{k+1} = u^k, \quad k = n, \dots, n+q-1.$$

Общий порядок в объединенном цикле (5.28), (5.29) может быть произвольным. После $n + q$ итераций (5.28), (5.29) имеем формулу

$$u^{n+q} = Q(x(\lambda_0))u_0\varphi_0 + \sum_i Q(x(\lambda_i))u_i\varphi_i,$$

в которой существенно по сравнению с другими увеличился по модулю коэффициент при φ_0 .

7) Комбинированные итерационные методы. Сначала решаем задачу (5.12) методом сопряженных градиентов (5.14) [17], сделав l итераций и получив при этом информацию о распределении начальной ошибки в виде многочленов $F_{l-1}(x) = P_{l-1}(x)$, $F_l(x) = P_l(x)$, а затем, используя эту информацию для построения функции $w(x)$ вида (2.42), переходим на трехчленный чебышёвский с весом $w(x)$ метод (5.14) [17], [26].

§ 6. Алгоритмы оптимизации итерационных параметров в методе Федоренко–Бахвалова

Изложенные алгоритмы могут быть эффективно использованы также при реализации циклов итераций на разных уровнях в методе Федоренко–Бахвалова (многосеточном методе) [1], [39], [40] или в аналогичном на операторном уровне КР-методе [17] с учетом на каждом уровне характера возникающих начальных ошибок и невязок. Для ускорения итераций в [40] были использованы параметры чебышёвских многочленов, а в [17] – многочленов Якоби специального вида – $P_n^{(\alpha, n)}(x)$. Для прояснения сути этих методов рассмотрим идеальный для этого случая модельный пример методов подобного типа с коммутативными операторами, когда собственные пары вспомогательных задач являются таковыми и для исходной задачи. При этом удобно использовать простейшие ЧМБС-многочлены явного вида (2.25).

Пусть $0 < g < 1$, $m_j = g^j M$, $j = 0, 1, \dots, J$, $m_J > m = m_{J+1}$, $H_0 = H$, $A_0 = A$, а H_j – конечномерное подпространство, состоящее из элементов вида $\sum_{\lambda_i \leq m_j} a_i \varphi_i$, Q_j – ортопроектор на H_j , $Q_j^1 = I - Q_j$, $j = 1, \dots, J$, $Q_0 = Q_{J+1}^1 = F(A) = I$, $Q_j^2 = Q_{j+1}^1 Q_j$, $\tilde{\delta}_j = (1 + m_{j+1}/m_j)/(1 - m_{j+1}/m_j)$, $\lambda_j(x)$, $x_j(\lambda)$ – функции $\lambda(x)$, $x(\lambda)$ (5.4) при $\delta = \tilde{\delta}_j$, $j = 0, 1, \dots, J$, отображающие друг на друга отрезки $[m_{j+1}, m_j]$, $[-1, 1]$, $R_{-1} = 1$. Излагаемый итерационный метод будет двухуровневым. Внешние итерации состоят из $J + 1$ блока. В каждом j -м блоке, $j = 0, 1, \dots, J$, применяется итерационный метод (5.13) с $A = A_j$ длины n_j , $n_j \geq n_{j+1}$, с параметрами

$$\alpha_{j_k}^j = \alpha_k^j = \frac{2}{m_j + m_{j+1} - (m_j - m_{j+1})x_{j_k}^j}, \quad k = 1, 2, \dots, n_j, \quad (6.1)$$

где $x_{j_k}^j$ – корни многочлена $\overline{C}_{n_j}(x, c_j, \bar{d}_j)$ (2.25), определяемого следующим образом. Пусть $P_{n_j}(\lambda) = \overline{C}_{n_j}(x_j(\lambda), c_j, \bar{d}_j)/\overline{C}_{n_j}(\delta_j, c_j, \bar{d}_j)$, $\lambda \in [0, m_j]$, – многочлен оператора перехода в j -м блоке итераций ($P_{n_j}(0) = 1$), тогда

$$0 < P_{n_j}(\lambda) \leq \frac{T_{n_j}(x_j(\lambda))}{T_{n_j}(\delta_j)} \leq \left(1 - \frac{\lambda}{m_j}\right)^{n_j} \leq 1, \quad \lambda \in [0, m_{j+1}]. \quad (6.2)$$

Пусть $R_j(\lambda) = P_{n_j}(\lambda)R_{j-1}(\lambda)$. Параметры $c_j, \bar{d}_j$ определяются по формулам (2.30), (2.31) по функции $v(x)$ (2.28), в которой $R(x) = R_{j-1}(\lambda_j(x))$. Длину цикла n_j определяем из условия

$$\eta_j = e_n(c_j, \bar{d}_j)R_{j-1}(m_{j+1}) \leq \eta, \quad (6.3)$$

где $e_n(c, d)$ определено в (2.27), а η – точность решения. Расчет величин n_j может быть сделан до начала итераций. Двусторонние оценки (2.33) для $\tilde{e}_n$ позволяют для заданного g оценить снизу величины n_j на классе решаемых задач (5.12) со спектром на $[m, M]$. В самом деле, если в проведенных рассуждениях положить $P_{n_j}(\lambda) = \bar{C}_{n_j}(x_j(\lambda), c_j, \bar{d}_j) / \bar{C}_{n_j}(\delta_j, c_j, \bar{d}_j)$, $\lambda \in [0, m_j]$, то корни $x_{j_k}^j$ возрастут при $j \geq 1$, $R_j(\lambda)$ уменьшатся и оценка, подобная (6.3), будет выполнена при $\tilde{n}_j \leq n_j$. Однако это не гарантирует решения с заданной точностью задач (2.29) при $j = 1, \dots, J$.

Обозначим через u_j итерационное решение, полученное после реализации j -го итерационного блока.

Используя многочлен $\bar{C}_{n_0}(x, 0, 0) = T_{n_0}(x)$ для нахождения приближенного решения уравнения (5.12) итерационным методом (5.13) длины n_0 , получаем по формулам (5.13), (6.1) u_0 и ошибку $\varepsilon_0 = u - u_0$

$$\varepsilon_0 = P_{n_0}(A)\varepsilon^0 = \sum_i P_{n_0}(\lambda_i)\varepsilon_i^0\varphi_i, \quad (6.4)$$

которая удовлетворяет уравнению

$$A\varepsilon_0 = f - Au_0. \quad (6.5)$$

Опишем алгоритм дальнейших вычислений при $j = 1$, который затем повторим при $j = 2, \dots, J$. Заменим уравнение (6.5) более простым приближенным заданным в H_1 конечномерным уравнением

$$A_1w_1 = Q_1(f - Au_0), \quad \text{или} \quad A_1w_1 = Q_1A\varepsilon_0, \quad (6.6)$$

тогда $\varepsilon_0 - w_1 = Q_1^1(\varepsilon_0)$.

Используя для нахождения приближенного решения уравнения (6.6) итерационный метод (5.13) с $A = A_1$, $f = Q_1(f - Au_0)$ длины $n_1 \leq n_0$, начиная с нулевого начального приближения, получаем w_1 по формулам (5.13), (5.25), (6.1)

$$w_1 = (I - P_{n_1}(A_1))Q_1\varepsilon_0,$$

новое приближение $u_1 = u_0 + w_1$ и ошибку ε_1

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u - u_0 - w_1 = Q_1P_{n_1}(A)P_{n_0}(A)\varepsilon^0 + Q_0^2P_{n_0}(A)\varepsilon^0 \\ &= Q_0^2P_{n_0}(A)\varepsilon^0 + Q_1^2P_{n_1}(A)P_{n_0}(A)\varepsilon^0 + Q_2P_{n_1}(A)P_{n_0}(A)\varepsilon^0, \end{aligned}$$

которая удовлетворяет уравнению

$$A_1\varepsilon_1 = Q_1(f - Au_1). \quad (6.7)$$

Используем многочлен $\overline{C}_{n_1}(x, c_1, \overline{d}_1)$ для нахождения приближенного решения уравнения (6.7) итерационным методом (5.13) длины n_1 .

Продолжим для $j = 2, \dots, J$ изложенный итерационный метод. Используя для нахождения приближенного решения уравнения (6.6) итерационный метод (5.13) с $A = A_j$, $f = Q_j(f - Au_{j-1})$ длины $n_j \leq n_{j-1}$, начиная с нулевого начального приближения, по формулам (5.13), (5.25), (6.1) получаем, что поправка w_j удовлетворяет уравнению

$$A_j w_j = Q_j(f - Au_{j-1}), \quad \text{или} \quad A_j w_j = Q_j A \varepsilon_{j-1}, \quad (6.8)$$

и $u_j = u_{j-1} + w_j$. Тем самым получаем генерирующий экстремальный с весом на отрезке $[m_{j+1}, m_j]$ ЧМБС-многочлен $P_{n_j}(\lambda)$ с параметрами $\alpha_{jk}^j = \alpha_k^j$, $k = 1, 2, \dots, n_j$ (6.1).

При $j = J$ общая ошибка будет иметь вид

$$\varepsilon_J = \left(\sum_{j=0}^J B_j \right) \varepsilon^0, \quad \|\varepsilon_J\| \leq \max_j \|B_j\| \|\varepsilon^0\|, \quad (6.9)$$

где

$$B_j = Q_J^2 \prod_{k=0}^j P_{n_k}(A), \quad \|B_j\| \leq \eta.$$

Для нашего модельного (идеального) алгоритма на этом итерации заканчиваются. В общем случае, когда операторы A_j не коммутируют (тогда собственные пары вспомогательных задач не совпадают с собственными парами исходной) и в реализации метода присутствуют алгоритмы интерполяции и восполнения, описанную итерационную процедуру повторяют. Полученные оценки для длин циклов можно рассматривать как оценки снизу для аналогичных алгоритмов в общем случае.

Рассмотрим характеристики предложенного метода применительно к сеточным эллиптическим задачам, в которых операторы A_n построены на сетках с последовательным удвоением шага. Тогда $g = \frac{1}{4}$, т.е. $\delta = \frac{5}{3}$, $\tau_{10} = 3$. Возьмем $\eta = 10^{-4}$. Расчеты по формулам (2.23)–(2.32), (6.1), (6.3) показали, что $n_0 = 10$, $n_j = 6$, $j = 1, 2, \dots$, при этом с ростом j величины c_j , $\tilde{d}_j(0)$ быстро стремятся к предельным значениям: $c = 0.66$, $d = 0.52$, а $x_i^j \rightarrow x_i$: 0.98178980, 0.83768660, 0.55206593, 0.11888926, -0.44026913 , -0.92228107 . Затем был повторен расчет с этими предельными параметрами при $j > 0$ и параметрами, равными корням $T_{10}(x)$ при $j = 0$. Он дал то же распределение числа итераций с такими значениями: $3.410^{-5} \leq \eta_i \leq 6.910^{-5}$, $\tau_{10} = 3$, $\tau_{1j} = 4.5364$, $j = 1, 2, \dots$. На рис. 16 показаны графики $w(x, c, d, 6)$ (2.23) и $v(x)$ (2.28) при $j = 6$, на рис. 17 – график многочлена $\overline{C}_6(x, c, d)$ (2.25). Эти параметры можно рекомендовать для применения в методе Федоренко–Бахвалова.

§ 7. Плохо обусловленные задачи с компактными операторами

В разнообразных случаях предполагалось, что оператор A в уравнении (5.12) таков, что в решении его, разложенном в ряд Фурье, основную роль играют члены, соответствующие минимальным собственным значениям. Однако существуют и другие случаи [41].

Рис. 16. Весовые функции: $w(x, c, d, 4)$ (2.23) ; $v(x)$ (2.28) — Рис. 17. Многочлен $\overline{C}_4(x, c, d)$ (2.25)

Пусть B — компактный самосопряженный положительный оператор, (γ_i, φ_i) — собственные пары оператора B , $\text{Sp}(B) \in (0, M]$ (нуль, являющийся предельной точкой спектра, ему не принадлежит). Тогда оператор B^{-1} существует и, являясь неограниченным, определен на всюду плотном в H множестве $D(B^{-1})$. Занумеруем точки $\gamma_i \in \text{Sp}(B)$ в убывающем порядке. Пусть η, m — достаточно малые параметры регуляризации, $0 \leq \eta M \leq m < M$,

$$A = (1 - \eta)B + \eta MI. \quad (7.1)$$

Тогда $\text{Sp}(A) \in (\eta M, M]$, $\lambda_i = (1 - \eta)\gamma_i + \eta M$ и $D(A^{-1}) = H$. Подлежащее решению уравнение

$$Bu = f \quad (7.2)$$

заменим уравнением (5.12). После такой замены для $f \in H$ будут сглажены коэффициенты в ряде Фурье, соответствующие малым значениям γ_i , значения которых,

как правило, искажены ошибками в определении f . Пусть второй параметр регуляризации определяет отрезок $[m, M]$ для построения на нем ЧМБС-многочленов для того, чтобы с помощью начального приближения и параметров итерационного метода интенсивно определить те составляющие в решении, которые соответствуют собственным значениям из $[m, M]$. В этом случае в ряде Фурье для u основную роль будут играть, как правило, слагаемые, соответствующие собственным функциям с наибольшими собственными значениями. Сделав для заданного m и $u^0 = M^{-1}f$ n итераций по формулам (5.13), (5.19), мы видим, что приближение u^n удовлетворяет уравнению (5.17). Оператор $A(I - P_n(A)(I - A/M))^{-1}$ можно рассматривать при разумном выборе параметров итераций как регуляризатор и приближение к оператору A , нижняя граница спектра его равна $t = 1/(1/M - P'_n(0))$, а собственные значения $-\lambda_i/(1 - P_n(\lambda_i)(1 - \lambda_i/M))$. Второе уравнение в (5.25) – исходное уравнение с измененной сглаженной правой частью $(I - P_n(A)(I - A/M))f$, в которой прогрессивно с ростом i уменьшены по абсолютной величине на множитель $(I - P_n(\lambda_i)(1 - \lambda_i/M))f_i$ коэффициенты Фурье $f_i = (f, \varphi_i)$ для f , соответствующие малым собственным значениям $\lambda_i \in [0, m]$.

Тогда согласно (5.17) u^n является решением уравнений

$$\begin{aligned} A(I - P_n(A)(I - A/M))^{-1}u^n &= f, \quad \text{или} \quad Au^n = (I - P_n(A)(I - A/M))f, \\ \varepsilon^n &= P_n(A)(I - A/M)A^{-1}f. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Эта формула показывает, что для определения параметров итерационного метода подходящими являются многочлены $C_n(x, \frac{1}{2}, \beta, C)$ при $\beta = 0, \frac{1}{2}$ с весовой функцией $w(x) = (1+x)^{1/2}(1-x)^\beta/(1-\delta^{-1}x)$. Для лучшей регуляризации задачи (7.2) целесообразно предварительно “отфильтровать” элемент f .

§8. Взвешенные чебышёвские неявные операторные фильтры

Цифровые фильтры широко применяются для обработки сигналов [42], [43] и для улучшения условий устойчивости явных методов решения задач математической физики [44], [45]. Пусть $\eta, \delta > 0$ – достаточно малые числа, L, D вместе с D^{-1} – линейные ограниченные в H операторы, (ν_i, ψ_i) – собственные пары оператора L :

$$L\psi_i = \nu_i\psi_i, \quad 0 \leq \nu_i \leq 1, \quad \nu_i \leq \nu_{i+1}, \quad (8.1)$$

ψ_i образуют базис в H . Пусть $\tilde{L}^n$ – расширение оператора L^n , $n \geq 1$, без учета граничных условий. Подлежащий фильтрации элемент $w \in H$ представим в виде $w = u + v$, где $Dv \in \ker \tilde{L}^n$. Считая Dv “гладким” элементом, фильтрации подвергнем лишь элемент $Du \in H$, для которого справедливо представление

$$Du = \sum_i \bar{u}_i \psi_i, \quad (8.2)$$

где коэффициенты $\bar{u}_i$ зависят от выбора v . Поэтому, если это возможно, определим элемент v так, чтобы частичные суммы в (8.2) достаточно быстро стремились к своему пределу. Это позволит ослабить после фильтрации эффект Гиббса.

Если $P_n(t)$, $n \geq 1$, — многочлен вида (5.16), то элементу u поставим в соответствие отфильтрованный элемент $Du^F \in H$ как решение уравнения

$$(P_n(L) + \delta L^n)Du^F = P_n(L)Du. \quad (8.3)$$

Тогда для коэффициентов Du^F в представлении

$$Du^F = \sum_i u_i^F \psi_i = \sum_i F_n(\nu_i) \bar{u}_i \psi_i \quad (8.4)$$

функция $F(t)$, называемая *переходной функцией*, равна

$$F_n(t) = \frac{1}{1 + \delta t^n / P_n(t)} = \frac{1}{1 + \delta / Q_n(1/t)}, \quad (8.5)$$

где

$$Q_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - \gamma_i); \quad (8.6)$$

при этом $F_n(0) = 1$, $F_n^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, \dots, n-1$. Определим параметры γ_i многочлена $P_n(t)$ так, чтобы функция $F_n(t)$ была мала в окрестности $t = 1$. Точнее, пусть $F_n(1) = (-1)^n \eta$, тогда

$$Q_n(1) = \frac{\eta \delta}{(-1)^n - \eta}. \quad (8.7)$$

Из (8.6) следует, что коэффициент при z^n в $Q_n(z)$ равен единице. Определим из условий (8.6), (8.7) $Q_n(z)$, требуя, чтобы после замены переменной z на $x = (z - 1 - a)/a$ многочлен $Q_n(z)$ являлся приведенным к отрезку $[1, 1 + 2a]$ ЧМБС-многочленом 1-го рода $C_n(x, 0, 0, C)$ с весовой функцией $w(x)$. Из этих условий, учитывая (1.18) и значение $C_n(-1, 0, 0, C)$, определяем

$$a = \left(\frac{\tilde{A}_n \eta \delta}{(1 - (-1)^n \eta) \sqrt{S(-1)}} \right)^{1/n}. \quad (8.8)$$

Тогда параметры γ_i многочлена $P_n(t)$ равны

$$\gamma_i = 1 + a(1 - x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.9)$$

где x_i — корни (2.7) многочлена $C_n(x, 0, 0, C)$. На рис. 18 приведен график $F_3(t)$ при $\eta = 0.001$, $\delta = 0.064$, $C_3(x, 0, 0, C) = T_3(x)$. Заметим, что вид функции $F_n(t)$ не зависит от типа оператора L и его собственных элементов ψ_i , но от них зависит разложение (8.2), а следовательно, и Du^F . Может возникнуть проблема с постановкой ненулевых граничных условий в уравнениях (8.3), (8.4). Поэтому запишем уравнение для поправки $\Phi = Du - Du^F$:

$$(P_n(L) + \delta L^n)D\Phi = \delta L^n Du \quad (8.10)$$

с однородными краевыми условиями, требуя, чтобы $\Phi \equiv 0$ при $Du \in \ker \tilde{L}^n$. Например, можно положить в некоторых дополнительных для Φ граничных узлах

Рис. 18. Фильтр $F_3(t)$ (8.6)

сетки $\Phi = 0$, $L^k \Phi = 0$, $k = 1, \dots, n-1$. Удачным выбором элемента v можно значительно уменьшить краевой эффект Гиббса.

Простейшими примерами операторов L , заданных на внутренних узлах сетки, являются

$$L_{\pm} \Phi_k = 0.5 \Phi_k \pm \frac{0.5(p_k \Phi_{k+1} + q_k \Phi_{k-1})}{p_k + q_k}, \quad k = 1, \dots, m, \quad \Phi_0 = \Phi_{m+1} = 0$$

для одномерных сеток, аналогично

$$L_{\pm} \Phi_{k,j} = 0.5 \Phi_{k,j} \pm \frac{0.125(p \Phi_{k,j+1} + q \Phi_{k,j-1} + r \Phi_{k+1,j} + s \Phi_{k-1,j})}{p + q + r + s}$$

для двумерных сеток, $p_k, q_k, p, q, r, s > 0$, и т.д. ($L_+ = I - L_-$). Операторы типа L_- ориентированы на дифференциальные задачи математической физики, а L_+ — на сглаживания решений плохо обусловленных уравнений. Имея дополнительную информацию о классе подлежащих фильтрации функций, можно путем подбора коэффициентов в $L_{\pm}$ выбрать подходящую для этого класса систему собственных функций и тем самым улучшить [45] алгоритм фильтрации. Например, для одномерных задач, связанных с диффузией и конвекцией, характерным для некоторого b является оператор

$$L_b = \frac{d^2}{dx^2} + b \frac{d}{dx} = \exp(-bx) \frac{d}{dx} \exp(bx) \frac{d}{dx};$$

ему соответствует [44] разностный на сетке $x_k = kh$ оператор

$$L_- \Phi_k = 0.5 \Phi_k - 0.25 \left(\exp\left(\frac{bh}{2}\right) \Phi_{k+1} + \exp\left(-\frac{bh}{2}\right) \Phi_{k-1} \right) \times \left(\exp\left(\frac{bh}{2}\right) + \exp\left(-\frac{bh}{2}\right) \right)^{-1}.$$

Собственные функции операторов L_b , $L_{\pm}$ имеют вид $\exp(-0.5bx \pm i\omega x)$. Аналогичные формулы справедливы для двумерных операторов. Отметим, что для одномерного случая в [44] изучены явные чебышёвские фильтры, а в [43] — неявные фильтры (8.4), (8.11) при

$$L\Phi_k = L_-\Phi_k = 0.5\Phi_k - 0.25(\Phi_{k-1} + \Phi_{k+1}), \quad k = 1, \dots, m,$$

$P_n(L) = (I - L)^n$, $D = I$. В этом случае $\ker \tilde{L}^n$ состоит из всех многочленов от k $g_{2n-1}(k)$ до степени $2n - 1$ включительно. Тогда в представлении элемента $w = (w_1, \dots, w_m)$ в виде $w_k = u_k + v_k$ положим $Dv_k = g_{2n-1}(k)$, $k = 1, \dots, m$. Например, при $n = 3$ полагаем

$$g_5(k) = \frac{1}{2}(Dw_1 + Dw_m + (Dw_1 - Dw_m)y(x_k)), \quad k = 1, \dots, m,$$

где

$$y(x) = \frac{15}{8}\left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right), \quad x_k = \frac{m+1-2k}{m-1}$$

($y(\pm 1) = \pm 1$, $y'(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$). Тогда $u_1 = u_m = 0$.

Оператор D в (8.3) для сеточных задач может быть реализован как деление на характерную так называемую *форм-функцию*.

Список литературы

1. Базвалов Н. С., Кобельков Г. М., Жидков Н. П. Численные методы. М.—СПб.: Физматлит, 2000.
2. Паиковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука, 1983.
3. Лебедев В. И. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Физматлит, 2000.
4. Чебышёв П. Л. О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменных // Полное собрание сочинений. Т. 3. М.—Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 108–120.
5. Марков А. А. Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля // Избранные труды. М.: ОГИЗ, 1948. С. 244–291.
6. Бернштейн С. Н. Об одном классе ортогональных многочленов // Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 452–465.
7. Бернштейн С. Н. О многочленах, ортогональных на конечном отрезке // Собрание сочинений. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 7–106.
8. Szegő G. Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems // Math. Z. 1921. V. 12. P. 64–94.
9. Сегё Г. Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962.
10. Лебедев В. И. О единой формуле для фазовой функции экстремальных ЧМБС-многочленов 1–4 рода // Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 1. С. 23–26.
11. Лебедев В. И. ЧМБС-многочлены и квадратурные формулы повышенной точности для некоторых классов интегралов с зависящими от параметров весовыми функциями // Докл. РАН. 2003. Т. 390. № 5. С. 1–5.
12. Лебедев В. И. ЧМБС-многочлены и алгоритмы оптимизации чебышёвских итерационных методов на классах начальных ошибок // Докл. РАН. 2003. Т. 393. № 3. С. 1–5.
13. Лебедев В. И. Экстремальные ЧМБС-многочлены 1–4 рода и методы оптимизации вычислительных алгоритмов // Труды матем. ин-та им. Н. И. Лобачевского. Т. 20. Казань: Казанское матем. общ-во, 2003. С. 37–86.
14. Лебедев В. И. Итерационные методы решения линейных операторных уравнений и многочлены, наименее отклоняющиеся от нуля // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 89–108.

15. *Lebedev V. I.* Extremal polynomials with restrictions and optimal algorithms // Advanced mathematics: computations and applications. Novosibirsk: NCC Publisher, 1995. P. 491–502.
16. *Lebedev V. I.* A new method for determining the roots of polynomials of least deviation on a segment with weight and subject to additional conditions. Part I, Part II // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8. № 3. P. 195–222; 1993. V. 8. № 5. P. 397–426.
17. *Марчук Г. И., Лебедев В. И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.
18. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
19. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
20. *Геронимус Я. Л.* О некоторых уравнениях в конечных разностях и соответствующих системах ортогональных полиномов // Докл. АН СССР. 1940. Т. 29. С. 536–538.
21. *Геронимус Я. Л.* О положительных тригонометрических полиномах и гармонических функциях // Докл. АН СССР. 1946. Т. 51. С. 569–572.
22. *Геронимус Я. Л.* О некоторых уравнениях в конечных разностях и соответствующих системах ортогональных многочленов // Записки матем. отд. физ.-матем. ф-та ХТУ и Харьковского матем. общества. 1957. Т. XXV. № 4. С. 87–100.
23. *Лебедев В. И.* О решении обратных задач и тригонометрических формах для многочленов Геронимуса // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2000. Т. 15. № 1. С. 73–93.
24. *Лебедев В. И.* Об итерационных методах решения операторных уравнений, спектр которых лежит на нескольких отрезках // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9. № 6. С. 1247–1253.
25. *Lebedev V. I.* Chebyshev and optimals-in-mean iterative methods for problems with spectrum contained in two segments or incide lemniscates // East-West. J. Numer. Math. 1994. V. 2. № 2. P. 107–127.
26. *Lebedev V. I., Zabelin V. V.* On one class of three-term iterative methods with Chebyshev parameters // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1990. V. 5. № 4/5. P. 275–298.
27. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
28. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: ГИФМЛ, 1959.
29. *Мысовский И. П.* Лекции по методам вычислений. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998.
30. *Бабурин О. В., Лебедев В. И.* О вычислении интегралов в смысле главного значения весов и узлов квадратурных формул Гаусса // ЖВМ и МФ. 1965. Т. 5. № 3. С. 451–462.
31. *Бабурин О. В., Лебедев В. И.* О вычислении таблиц корней и весов полиномов Эрмита и Лагерра для $n = 1(1)101$ // ЖВМ и МФ. 1967. Т. 7. № 4. С. 1021–1030.
32. *Лебедев В. И.* Алгоритмы определения параметров одного класса квадратурных формул // Вопросы вычислительной и прикладной математики. № 51. Ташкент: Изд-во АН Узб. ССР, 1978. С. 44–51.
33. *Лебедев В. И.* Квадратурные формулы по поверхности вытянутого эллипсоида вращения // Кубатурные формулы и их приложения. Улан-Удэ: Изд-во Вост.-Сиб. гос. тех. ун-та, 1997. С. 48–56.
34. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
35. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1988.
36. *Довгий С. А., Лифанов И. К.* Методы решения интегральных уравнений. Киев: Наукова думка, 2002.
37. *Бернштейн С. Н.* Об асимптотическом значении наилучшего приближения аналитических функций // Собрание сочинений. Т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 127–135.
38. *Гавурич М. К.* Применение полиномов наилучшего приближения к улучшению сходимости итеративных процессов // УМН. 1950. Т. 5. № 3 (37). С. 156–160.
39. *Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994.
40. *Шайдулов В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989.
41. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
42. *Хемминг Р. В.* Цифровые фильтры. М.: Наука, 1987.

- 43. *William H. R.* High-order low-pass implicit tangent filters for use in finite area calculations // *Monthly Weather Review*. 1988. V. 116. P. 2132–2141.
- 44. *Лебедев В. И.* Явные разностные схемы для решения жестких задач с комплексным или разделимым спектром // *ЖВМ и МФ*. 2000. Т. 40. № 12. С. 1801–1812.
- 45. *Lebedev V. I.* Extremal polynomials, pseudo-difference operators, and stable explicit schemes for the solution of stiff nonstationary problems of mathematical physics // *Proc. of the International Conference on Computational Mathematics. Part I. Novosibirsk, 2002.* P. 60–63.

РНИЦ “Курчатовский институт”,
Институт вычислительной математики РАН, г. Москва
E-mail: `nucrect@inm.ras.ru`
`lebedev@vver.kiae.ru`

Поступила в редакцию
26.02.2004