Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Гайфуллин, Аналитическое продолжение объема и гипотеза кузнечных мехов в пространствах Лобачевского, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 11, 61–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8522>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:36:31

УДК 514.132+517.554

А. А. Гайфуллин

Аналитическое продолжение объема и гипотеза кузнечных мехов в пространствах Лобачевского

Изгибаемый многогранник в n -мерном пространстве постоянной кривизны $\mathbb{X}^n$ – это многогранник с жесткими (неизгибаемыми) $(n-1)$ -мерными гранями и шарнирами в $(n-2)$ -мерных гранях. Гипотеза кузнечных мехов утверждает, что при $n \geq 3$ объем всякого изгибаемого многогранника постоянен в процессе изгибания. Гипотеза кузнечных мехов в евклидовых пространствах $\mathbb{E}^n$ была доказана И. Х. Сабитовым для $n = 3$ (1996 г.) и автором для $n \geq 4$ (2012 г.). Контрпримеры к гипотезе кузнечных мехов в открытых полусферах $\mathbb{S}_+^n$ были построены В. А. Александровым для $n = 3$ (1997 г.) и автором для $n \geq 4$ (2015 г.). В этой статье мы доказываем гипотезу кузнечных мехов для ограниченных изгибаемых многогранников в нечетномерных пространствах Лобачевского. Доказательство основано на изучении аналитического продолжения объема симплекса в пространстве Лобачевского как функции гиперболических косинусов длин ребер.

Библиография: 37 названий.

Ключевые слова: изгибаемый многогранник, гипотеза кузнечных мехов, пространство Лобачевского, формула Шлефли, аналитическое продолжение.

DOI: 10.4213/sm8522

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{X}^n$ – одно из трех n -мерных пространств постоянной кривизны, т.е. евклидово пространство $\mathbb{E}^n$, пространство Лобачевского Λ^n или сфера $\mathbb{S}^n$. Мы будем всегда нормировать метрики сферы $\mathbb{S}^n$ и пространства Лобачевского Λ^n так, чтобы их (секционные) кривизны были равны 1 и -1 соответственно. Рассмотрим ориентированную связную замкнутую $(n-1)$ -мерную полиэдральную поверхность P в $\mathbb{X}^n$ с жесткими (неизгибаемыми) $(n-1)$ -мерными гранями и шарнирами в $(n-2)$ -мерных гранях. Мы будем рассматривать непрерывные деформации P_t полиэдральной поверхности P такие, что поверхность P_t имеет неизменный комбинаторный тип, все $(n-1)$ -мерные грани поверхности P_t остаются конгруэнтными себе в процессе деформации и двугранные углы при $(n-2)$ -мерных гранях поверхности P_t изменяются непрерывно. Такие деформации P_t называются *изгибаниями* полиэдральной поверхности P . Изгибание P_t называется *нетривиальным*, если оно не индуцировано вращением всего пространства $\mathbb{X}^n$. Полиэдральная поверхность P называется *изгибаемым многогранником*, если она допускает нетривиальное изгибание. Отметим, что мы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

не требуем, чтобы поверхность P была вложенной, хотя вложенные изгибаемые многогранники представляют особый интерес. Двумерный случай тривиален, так как все многоугольники общего положения в $\mathbb{E}^2$, Λ^2 и $\mathbb{S}^2$ по крайней мере с четырьмя сторонами изгибаемы, а все треугольники неизгибаемы. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что $n \geq 3$.

Изучение изгибаемых многогранников началось с классификации изгибаемых октаэдров в $\mathbb{E}^3$, полученной Р. Брикаром (см. [1]). Согласно этой классификации имеется три семейства изгибаемых октаэдров в $\mathbb{E}^3$, ни одно из которых не содержит вложенного октаэдра. Первый пример вложенного изгибаемого многогранника в $\mathbb{E}^3$ был построен Р. Коннелли (см. [2], а также [3]). Наиболее простой из известных к настоящему времени вложенных изгибаемых многогранников был построен К. Штефеном в 1978 г. Он имеет девять вершин. Этот многогранник и его развертка изображены на рис. 1; более подробное его описание можно найти в [4]. Н. Х. Кёйпер (см. [3; п. 2.7]) заметил, что аналоги изгибаемых октаэдров Брикара и изгибаемого многогранника Коннелли существуют в Λ^3 и в $\mathbb{S}^3$; см. также [5]. В течение долгого времени оставалась нерешенной задача о существовании изгибаемых многогранников в пространствах размерностей 4 и выше. Примеры четырехмерных самопересекающихся изгибаемых многогранников были построены А. Вальц (не опубликовано) и Х. Штахелем (см. [6]). В размерностях 5 и выше первые примеры изгибаемых многогранников во всех трех пространствах $\mathbb{E}^n$, Λ^n и $\mathbb{S}^n$ были построены автором (см. [7]). Кроме того, в работе [8] автором было показано, что в сферах $\mathbb{S}^n$ всех размерностей существуют вложенные изгибаемые многогранники, имеющие комбинаторный тип кросс-политопы и содержащиеся в открытой полусфере $\mathbb{S}_+^n$. (Напомним, что кросс-политопом называется правильный многогранник, двойственный кубу.) Однако задача о существовании вложенных изгибаемых многогранников в евклидовых пространствах и пространствах Лобачевского размерностей 4 и выше до сих пор остается открытой.

Рис. 1. Изгибаемый многогранник Штефена и его развертка

В 1978 г. Р. Коннелли (см. [9]) высказал гипотезу, что объем любого изгибаемого многогранника в $\mathbb{E}^3$ постоянен в процессе изгибания. Это гипотеза теперь называется *гипотезой кузнечных мехов*. Отметим, что эта гипотеза имеет

смысл для всех многогранников, не обязательно вложенных, так как для самопересекающихся многогранников имеется естественное понятие *обобщенного ориентированного объема*; см. подробнее § 7. Доказательство гипотезы кузнечных мехов И. Х. Сабитовым (см. [10]–[12]) – один из наиболее ярких результатов теории изгибаемых многогранников. Другое доказательство было получено в [13]. Отметим, что площади изгибаемых многоугольников изменяются в процессе изгибания, поэтому аналог гипотезы кузнечных мехов для размерности 2 неверен.

Естественно рассмотреть аналог гипотезы кузнечных мехов для изгибаемых многогранников во всех пространствах постоянной кривизны размерностей 3 и выше. Если $\mathbb{X}^n = \mathbb{E}^n$ или $\mathbb{X}^n = \Lambda^n$, то *гипотеза кузнечных мехов в $\mathbb{X}^n$* утверждает, что объем любого изгибаемого многогранника в $\mathbb{X}^n$ постоянен в процессе изгибания. Гипотеза кузнечных мехов во всех евклидовых пространствах $\mathbb{E}^n$, $n \geq 4$, была доказана автором (см. [14], [15]).

Целью настоящей работы является доказательство гипотезы кузнечных мехов для всех ограниченных изгибаемых многогранников в нечетномерных пространствах Лобачевского Λ^n , $n \geq 3$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Обобщенный ориентированный объем любого ограниченного изгибаемого многогранника в Λ^n , где n нечетно и $n \geq 3$, постоянен в процессе изгибания.*

Чтобы сделать эту формулировку строгой, нам нужно дать строгие определения изгибаемого многогранника и обобщенного ориентированного объема. Это будет сделано в § 7. Теорема 7.3 – это более точная формулировка теоремы 1.1.

В пространствах Лобачевского наряду с ограниченными изгибаемыми многогранниками можно рассматривать изгибаемые многогранники конечного объема, некоторые вершины которых лежат на абсолюте. Вопрос о том, верна ли гипотеза кузнечных мехов для таких многогранников, остается открытым. Также остается открытым вопрос о том, верна ли гипотеза кузнечных мехов в четномерных пространствах Лобачевского (см. замечание 1.4).

В сферическом случае имеются следующие тривиальные примеры изгибаемых многогранников с непостоянными объемами. Рассмотрим произвольный изгибаемый многоугольник с непостоянной площадью в экваториальной сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ и возьмем надстройку (бипирамиду) над ним с вершинами в полюсах сферы $\mathbb{S}^3$. Легко видеть, что объем полученного изгибаемого многогранника непостоянен. Итерируя эту конструкцию, можно получать примеры изгибаемых многогранников с непостоянными объемами в сферах всех размерностей. Такие тривиальные примеры возникают из-за того, что рассматриваемые многогранники слишком большие и содержат пары диаметрально противоположных точек сферы. Поэтому гипотеза кузнечных мехов в $\mathbb{S}^n$, $n \geq 3$, обычно формулировалась следующим образом: *объем любого изгибаемого многогранника, содержащегося в открытой полусфере $\mathbb{S}_+^n \subset \mathbb{S}^n$, постоянен в процессе изгибания*. Однако это утверждение также неверно. Первый пример изгибаемого многогранника в $\mathbb{S}_+^3$ с непостоянным объемом был построен

В. А. Александровым (см. [16]). Недавно автор (см. [8]) построил вложенные изгибаемые кросс-политопы с непостоянными объемами в полусферах $\mathbb{S}_+^n$ всех размерностей $n \geq 3$. Таким образом, гипотеза кузнечных мехов в сферах неверна. В работе [8] автор сформулировал *модифицированную гипотезу кузнечных мехов*, которая утверждает, что для любого изгибаемого многогранника P_t в сфере $\mathbb{S}^n$, $n \geq 3$, можно заменить некоторые из вершин многогранника P_t на противоположные им точки сферы так, что обобщенный ориентированный объем полученного изгибаемого многогранника будет постоянен в процессе изгибания. На настоящий момент контрпримеры к модифицированной гипотезе кузнечных мехов не известны.

Обзор некоторых результатов и задач об изгибаемых многогранниках и их объемах можно найти в [17].

Основной составляющей нашего доказательства теоремы 1.1 является изучение аналитического продолжения функции, выражающей объем ограниченного симплекса в Λ^n через гиперболические косинусы длин его ребер. Гораздо более изученной является задача выражения объемов выпуклых многогранников в Λ^n или в $\mathbb{S}^n$ через их двугранные углы. Фундаментальные результаты в этом направлении были получены Н. И. Лобачевским, Л. Шлефли, Г. Коксетером и Дж. Милнором; хороший обзор этих результатов можно найти в [18; гл. 7]. В частности, известно, что функции, выражающие объемы симплексов в $\mathbb{S}^n$ и в Λ^n через их двугранные углы, могут быть получены друг из друга при помощи аналитического продолжения; см. [19], [20]. Кроме того, в случае пространства Лобачевского объем симплекса может быть выражен через его двугранные углы не только для ограниченных симплексов, но и для симплексов с (некоторыми) вершинами на абсолюте. Функции, выражающие объемы симплексов в $\mathbb{S}^n$ и в Λ^n через длины их ребер, имеют меньше хороших свойств. Тем не менее они гораздо удобнее при изучении изгибаемых многогранников, так как длины ребер постоянны в процессе изгибания, а двугранные углы — нет.

Пусть $\Delta^n \subset \Lambda^n$ — ограниченный n -мерный симплекс с вершинами $v_0, \dots, v_n$. Обозначим через ℓ_{jk} длину ребра $[v_j v_k]$, положим $c_{jk} = \operatorname{ch} \ell_{jk}$, $c_{jj} = 1$ и рассмотрим матрицу $C(\Delta^n) = (c_{jk})$ размера $(n+1) \times (n+1)$. Если мы отождествим пространство Лобачевского Λ^n с его стандартной векторной моделью, т.е. с половиной гиперboloида $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1$, $x_0 > 0$, в псевдоевклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^{1,n}$ со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \dots - x_n y_n,$$

то матрица $C(\Delta^n)$ станет матрицей Грама вершин симплекса Δ^n .

Обозначим через $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C})$ (соответственно через $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R})$) аффинное пространство всех комплексных (соответственно вещественных) симметрических матриц C размера $(n+1) \times (n+1)$ с единицами на диагонали. Обозначим через $\mathcal{C}_{\Lambda^n} \subset \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R})$ подмножество, состоящее из всех матриц $C(\Delta^n)$, соответствующих невырожденным ограниченным симплексам $\Delta^n \subset \Lambda^n$. Очевидно, что $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$ является областью в $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R})$.

Симплекс Δ^n может быть восстановлен по матрице $C \in \mathcal{C}_{\Lambda^n}$ однозначно с точностью до изометрии, и его объем является вещественной аналитической функцией матрицы C ; эту функцию мы обозначим через $V_{\Lambda^n}(C)$. К. Аомото (см. [20]) исследовал аналитическое продолжение функции $V_{\Lambda^n}(C)$, используя формулу Шлефли для дифференциала объема; см. подробнее § 4. Он доказал, что функция $V_{\Lambda^n}(C)$ аналитически продолжается до многозначной функции на $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C})$, которая ветвится вдоль гиперповерхности $X \subset \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C})$, состоящей из всех матриц C , у которых хотя бы один из главных миноров равен нулю, и не имеет других особенностей. Иначе говоря, функция $V_{\Lambda^n}(C)$ допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути в $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C}) \setminus X$. Мы будем обозначать многозначную аналитическую функцию на $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C}) \setminus X$, полученную при аналитическом продолжении функции $V_{\Lambda^n}(C)$, через $\tilde{V}_{\Lambda^n}(C)$.

Наш основной результат об аналитическом продолжении объема симплекса в нечетномерном пространстве Лобачевского таков.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть n нечетно. Пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C}) \setminus X$ – произвольный замкнутый путь такой, что $\gamma(0) = \gamma(1) \in \mathcal{C}_{\Lambda^n}$, и $V_1(C)$, $V_2(C)$ – две ветви многозначной функции $\tilde{V}_{\Lambda^n}(C)$ в окрестности точки $\gamma(0)$ такие, что $V_2(C)$ получается из $V_1(C)$ при аналитическом продолжении вдоль γ . Тогда

$$V_2(\gamma(0)) - (-1)^{\text{lk}(\gamma, \mathcal{H})} V_1(\gamma(0)) \in i\mathbb{R},$$

где $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C})$ – гиперповерхность, состоящая из всех вырожденных матриц C , и $\text{lk}(\gamma, \mathcal{H})$ – коэффициент зацепления кривой γ и гиперповерхности $\mathcal{H}$.

Этот результат, во-первых, является основным техническим шагом в доказательстве теоремы 1.1, а во-вторых, по нашему мнению, он представляет интерес и сам по себе. Имеется аналог этой теоремы для симплексов в четномерных пространствах Лобачевского и в сферах. Он формулируется даже проще, но, к сожалению, не дает никакого аналога теоремы 1.1. Если $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$, то мы полагаем $c_{jk} = \cos \ell_{jk}$ вместо $c_{jk} = \text{ch} \ell_{jk}$, так что $C(\Delta^n)$ – матрица Грама вершин симплекса Δ^n , где сфера $\mathbb{S}^n$ реализована как единичная сфера в евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Так же, как в случае пространства Лобачевского, мы обозначим через $\mathcal{C}_{\mathbb{S}^n}$ область в $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R})$, состоящую из всех матриц $C(\Delta^n)$, соответствующих невырожденным симплексам $\Delta^n \subset \mathbb{S}^n$, и обозначим через $\tilde{V}_{\mathbb{S}^n}(C)$ многозначную аналитическую функцию, полученную при аналитическом продолжении функции $V_{\mathbb{S}^n}(C)$, выражающей объем сферического симплекса через косинусы длин его ребер. Согласно результату К. Аомото [20] множество, вдоль которого ветвится функция $\tilde{V}_{\mathbb{S}^n}(C)$, – та же самая гиперповерхность $X \subset \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C})$.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть либо $\mathbb{X}^n = \Lambda^n$ и n четное, либо $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$ и n произвольное. Тогда все ветви многозначной функции $\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}(C)$ вещественны во всех точках множества $\mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}$.

Основной инструмент, которым мы пользуемся при доказательстве теорем 1.2, 1.3 и 1.1, – формула Шлефли для дифференциала объема выпуклого многогранника P в $\mathbb{X}^n$, который деформируется с сохранением комбинаторного

типа. Напомним, что эта формула имеет следующий вид:

$$K dV_n(P) = \frac{1}{n-1} \sum_{F \subset P, \dim F = n-2} V_{n-2}(F) d\alpha_F, \quad (1.1)$$

где сумма берется по всем граням $F \subset P$ коразмерности 2, V_k обозначает k -мерный объем, α_F – двугранный угол многогранника P при грани F и K – (секционная) кривизна пространства $\mathbb{X}^n$. Эта формула была доказана Л. Шлефли (см. [21]) для многогранников в $\mathbb{S}^n$ и Дж. Сфорцей (см. [22]) для многогранников в Λ^n ; см. также [18; гл. 7, п. 2.2]. На самом деле выпуклость многогранника P не важна и формула (1.1) верна для всех многогранников; см. лемму 9.1. Формула Шлефли является очень полезным инструментом при изучении аналитических свойств объемов симплексов в Λ^n и в $\mathbb{S}^n$. Как уже было отмечено выше, она лежит в основе принадлежащей К. Аомото конструкции аналитических продолжений функций $V_{\mathbb{X}^n}(C)$. Отметим также, что формула Шлефли использовалась И. Ривиним (см. [23]) для того, чтобы дать более простое доказательство гипотезы Милнора о непрерывности продолжения функции, выражающей объем симплекса через его двугранные углы. Первое доказательство этой гипотезы было дано Ф. Луо (см. [24]).

Мы используем формулу Шлефли дважды. Во-первых, будем пользоваться ею при доказательстве теорем 1.2 и 1.3 по индукции по n . Во-вторых, воспользуемся ею, чтобы вывести теорему 1.1 из теоремы 1.2. Схема нашего доказательства будет в общих чертах иметь следующий вид. Мы покажем, что конфигурационное пространство Σ любого изгибаемого многогранника P_t в Λ^{2m+1} является компонентой связности вещественного аффинного многообразия, и рассмотрим аналитическое продолжение обобщенного ориентированного объема многогранника P_t на комплексификацию $\Sigma_{\mathbb{C}}$ этого многообразия. С одной стороны, из формулы Шлефли для многогранника P_t будет следовать, что разность между любыми двумя ветвями полученной многозначной функции $\tilde{\mathcal{V}}$ вещественна. С другой стороны, из теоремы 1.2 будет следовать, что эта разность чисто мнима на Σ . Поэтому мы сможем заключить, что функция $\tilde{\mathcal{V}}$ однозначна. Наконец, мы покажем, что мнимая часть функции $\tilde{\mathcal{V}}$ имеет логарифмический рост, и, используя теорему Лиувилля о целых функциях, получим, что функция $\tilde{\mathcal{V}}$ является константой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. В четномерном случае как формула Шлефли, так и теорема 1.3 будут давать одно и то же, а именно, что разность между любыми двумя ветвями многозначной функции $\tilde{\mathcal{V}}$ вещественна на Σ . Из этого мы не сможем заключить, что функция $\tilde{\mathcal{V}}$ однозначна и, следовательно, не сможем применить теорему Лиувилля о целых функциях. Поэтому наш метод доказательства теоремы 1.1 не работает в четных размерностях. Тем не менее вопрос о том, верна ли гипотеза кузнечных мехов в четномерных пространствах Лобачевского, остается открытым, так как ни одного контрпримера тоже не известно.

В евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ левая часть формулы Шлефли (1.1) обращается в нуль. Поэтому дифференциал объема не входит в эту формулу. Отсюда

сразу следует, что *полная средняя кривизна*

$$\text{TMC}(P) = \sum_{F \subset P, \dim F = n-2} V_{n-2}(F)(\pi - \alpha_F) \quad (1.2)$$

многогранника P в $\mathbb{E}^n$ постоянна при его изгибаниях; см. [25], [26]. Аналогично, для изгибаемого многогранника P_t в Λ^n в процессе изгибания постоянна линейная комбинация $(n-1)V_n(P_t) - \text{TMC}(P_t)$. (Строгое определение полной средней кривизны невложенного многогранника приведено в замечании 9.10.)

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Полная средняя кривизна любого ограниченного изгибаемого многогранника в Λ^n , где n нечетно и $n \geq 3$, постоянна в процессе изгибания.*

В трехмерном случае имеются явные формулы для объемов симплексов в $\mathbb{S}^3$ и в Λ^3 . Впервые такая формула была получена Дж. Сфорцей (см. [22]). Более удобные формулы в терминах функции Лобачевского

$$\mathcal{L}(x) = - \int_0^x \ln |2 \sin t| dt,$$

или, эквивалентно, в терминах дилогарифма

$$\text{Li}_2(x) = - \int_0^x \ln(1-t) \frac{dt}{t}$$

были получены в работах [27]–[30]. Возможно, теоремы 1.2 и 1.3 в трехмерном случае могли бы быть выведены из этих явных формул. Однако это кажется очень сложной задачей, так как эти формулы очень громоздки. В настоящей работе мы ими не пользуемся.

Статья организована следующим образом. В §§ 2–6 содержатся доказательства теорем 1.2 и 1.3. Главной технической леммой в этих доказательствах является лемма 3.2, дающая достаточное условие того, что все ветви многозначной аналитической функции, определенной на главном открытом по Зарисскому подмножестве $\mathfrak{X} \subset \mathbb{C}^m$, вещественны на связной компоненте U множества $\mathfrak{X} \cap \mathbb{R}^m$. Ключевую роль в ее доказательстве играет специальная унипотентная фильтрация на кольце многозначных аналитических функций на комплексном аналитическом многообразии. Конструкция этой фильтрации дается в § 2. В § 3 мы формулируем и доказываем лемму 3.2. В § 4 приведены результаты К. Аомото об аналитических продолжениях функций $V_{\mathfrak{X}^n}(C)$. В § 5 и § 6 мы применяем лемму 3.2 для доказательства теорем 1.2 и 1.3. Все необходимые нам определения и обозначения, касающиеся изгибаемых многогранников, содержатся в § 7. Также в этом параграфе мы даем более точную формулировку теоремы 1.1 (теорема 7.3). В §§ 8–11 мы изучаем аналитическое продолжение обобщенного ориентированного объема изгибаемого многогранника и доказываем теорему 7.3.

В настоящей статье нам придется работать с разными классами функций на комплексных аналитических многообразиях. Зафиксируем терминологию, которой мы будем пользоваться в дальнейшем. Будем использовать термин “аналитическая функция” для обозначения *многозначных* аналитических функций

(как правило, явно указывая, что рассматриваемая функция является многозначной), а термин “голоморфная функция” всегда будет обозначать *однозначную* аналитическую функцию (в рассматриваемой точке или на всем рассматриваемом многообразии). Кольцо голоморфных функций на комплексном аналитическом многообразии Y будет обозначаться через $\mathcal{O}(Y)$. Напомним, что функция, голоморфная на всем аффинном пространстве $\mathbb{C}^m$, называется *целой*. Практически все комплексные аналитические многообразия, рассматриваемые в статье, будут гладкими аффинными алгебраическими многообразиями над полем комплексных чисел. Следуя общепринятой терминологии, мы будем называть *регулярной функцией* на (замкнутом) аффинном подмногообразии $Y \subset \mathbb{C}^m$ функцию, являющуюся ограничением на Y многочлена от координат в $\mathbb{C}^m$. Кольцо регулярных функций на Y будет обозначаться через $\mathbb{C}[Y]$. Кроме того, через $\mathbb{C}(Y)$ мы будем обозначать поле рациональных функций на Y , т.е. поле частных кольца $\mathbb{C}[Y]$.

Автор благодарен С. О. Горчинскому, С. Ю. Немировскому и И. Х. Сабитову за плодотворные обсуждения и рецензенту статьи за полезные замечания.

§ 2. Унипотентные фильтрации на пространствах аналитических функций

Пусть $\mathfrak{X}$ – связное комплексное аналитическое многообразие. Выберем отмеченную точку $z^* \in \mathfrak{X}$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{X}}$ универсальное накрывающее многообразие многообразия $\mathfrak{X}$. Оно может быть естественным образом отождествлено с пространством гомотопических классов путей в $\mathfrak{X}$, начинающихся в точке z^* , по отношению к гомотопии, оставляющей на месте концы путей. В качестве отмеченной точки в многообразии $\tilde{\mathfrak{X}}$ мы возьмем точку $\tilde{z}^*$, соответствующую постоянному пути, все время остающемуся в точке z^* . Пусть $p: \tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$ – проекция. Фундаментальная группа

$$\pi = \pi_1(\mathfrak{X}, z^*)$$

действует на пространстве $\tilde{\mathfrak{X}}$ слева при помощи накрывающих преобразований; мы обозначим через T_γ накрывающее преобразование, соответствующее элементу $\gamma \in \pi$. Для каждого пути α в многообразии $\mathfrak{X}$, начинающегося в точке z^* , обозначим через $\tilde{\alpha}$ поднятие пути α в $\tilde{\mathfrak{X}}$, начинающееся в точке $\tilde{z}^*$. Конец пути $\tilde{\alpha}$ зависит только от гомотопического класса пути α . Если γ – петля, то конец пути $\tilde{\gamma}$ совпадает с точкой $T_\gamma \tilde{z}^*$. Для упрощения обозначений мы будем обозначать гомотопический класс петли так же, как и саму эту петлю. Везде в этой статье все пути и, в частности, все петли предполагаются кусочно гладкими. Мы будем обозначать через α^{-1} путь α , проходимый в обратном направлении.

Обозначим через $\mathcal{A}^q(\tilde{\mathfrak{X}})$ пространство голоморфных q -форм на многообразии $\tilde{\mathfrak{X}}$. В частности, $\mathcal{A}^0(\tilde{\mathfrak{X}}) = \mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{X}})$ – пространство голоморфных функций на $\tilde{\mathfrak{X}}$. По определению *оператор монодромии* $M_\gamma: \mathcal{A}^q(\tilde{\mathfrak{X}}) \rightarrow \mathcal{A}^q(\tilde{\mathfrak{X}})$, соответствующий элементу $\gamma \in \pi$, есть оператор взятия обратного образа вдоль

накрывающего отображения T_γ . Соответствие $\gamma \mapsto M_\gamma$ является антигомоморфизмом, т.е. $M_{\gamma_1\gamma_2} = M_{\gamma_2}M_{\gamma_1}$. Оператор вариации $\text{Var}_\gamma: \mathcal{A}^q(\tilde{\mathcal{X}}) \rightarrow \mathcal{A}^q(\tilde{\mathcal{X}})$ определяется по формуле

$$\text{Var}_\gamma \theta = M_\gamma \theta - \theta.$$

Теперь определим подпространства $\mathcal{F}_k^q \subset \mathcal{A}^q(\tilde{\mathcal{X}})$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$. Положим $\mathcal{F}_{-1}^q = \{0\}$. При $k = 0, 1, \dots$ мы рекурсивно определим $\mathcal{F}_k^q$ как подпространство пространства $\mathcal{A}^q(\tilde{\mathcal{X}})$, состоящее из всех θ таких, что $\text{Var}_\gamma \theta \in \mathcal{F}_{k-1}^q$ для всех $\gamma \in \pi$. Будем называть фильтрацию

$$\{0\} = \mathcal{F}_{-1}^q \subset \mathcal{F}_0^q \subset \mathcal{F}_1^q \subset \mathcal{F}_2^q \subset \dots$$

π -унипотентной фильтрацией. Конечно, объединение всех подпространств $\mathcal{F}_k^q$, вообще говоря, не совпадает со всем пространством $\mathcal{A}^q(\tilde{\mathcal{X}})$.

Каждую q -форму $\theta \in \mathcal{A}^q(\tilde{\mathcal{X}})$ можно рассматривать как многозначную аналитическую q -форму на $\mathcal{X}$ с выбранной главной ветвью в окрестности точки z^* . (Действие операторов монодромии M_γ сводится к другим выборам главной ветви без изменения самой многозначной q -формы.) В частности, пространство $\mathcal{A}^q(\mathcal{X})$ однозначных голоморфных q -форм на многообразии $\mathcal{X}$ можно естественным образом рассматривать как подпространство пространства $\mathcal{A}^q(\tilde{\mathcal{X}})$. А именно, вложение $\mathcal{A}^q(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathcal{A}^q(\tilde{\mathcal{X}})$ задается обратным образом p^* вдоль проекции p . Легко видеть, что $p^*\mathcal{A}^q(\mathcal{X})$ есть в точности подпространство всех π -инвариантных голоморфных q -форм на $\tilde{\mathcal{X}}$. Значит, $p^*\mathcal{A}^q(\mathcal{X}) = \mathcal{F}_0^q$.

Хотя выше все определения были даны для произвольного q , нам будут больше всего интересны случаи $q = 0$ и $q = 1$, т.е. функции и 1-формы. Так как многообразие $\tilde{\mathcal{X}}$ односвязно, всякая замкнутая 1-форма $\theta \in \mathcal{A}^1(\tilde{\mathcal{X}})$ точна. Поэтому функция

$$\mathcal{I}(\theta)(\tilde{z}) = \int_{\tilde{z}^*}^{\tilde{z}} \theta$$

корректно определена и голоморфна на $\tilde{\mathcal{X}}$.

ЛЕММА 2.1. 1. Пространства $\mathcal{F}_k^q$ инвариантны относительно операторов монодромии M_γ и операторов вариации Var_γ .

2. Если $\theta_1 \in \mathcal{F}_k^q$ и $\theta_2 \in \mathcal{F}_l^r$, то $\theta_1 \wedge \theta_2 \in \mathcal{F}_{k+l}^{q+r}$.

3. Если $\theta \in \mathcal{F}_k^q$, то $d\theta \in \mathcal{F}_k^{q+1}$.

4. Если $\theta \in \mathcal{F}_k^1$ и $d\theta = 0$, то $\mathcal{I}(\theta) \in \mathcal{F}_{k+1}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 сразу следует из равенства

$$\text{Var}_\beta M_\gamma = M_\gamma \text{Var}_{\gamma\beta\gamma^{-1}}.$$

Докажем утверждение 2 по индукции по $k+l$. Если $k+l = -1$, то либо $\theta_1 = 0$, либо $\theta_2 = 0$, значит, утверждение верно. Предположим, что утверждение доказано для $k+l = m-1$, и докажем его для $k+l = m$. Для каждого элемента $\gamma \in \pi$ мы имеем

$$\text{Var}_\gamma(\theta_1 \wedge \theta_2) = (\text{Var}_\gamma \theta_1) \wedge \theta_2 + (M_\gamma \theta_1) \wedge (\text{Var}_\gamma \theta_2).$$

Так как $\text{Var}_\gamma \theta_1 \in \mathcal{F}_{k-1}^q$ и $\text{Var}_\gamma \theta_2 \in \mathcal{F}_{l-1}^r$, то из индукционного предположения следует, что $\text{Var}_\gamma(\theta_1 \wedge \theta_2) \in \mathcal{F}_{k+l-1}^{q+r}$. Значит, $\theta_1 \wedge \theta_2 \in \mathcal{F}_{k+l}^{q+r}$.

Утверждение 3 легко доказывается по индукции по k . База индукции при $k = -1$ очевидна. Шаг индукции получается из равенства $\text{Var}_\gamma d\theta = d \text{Var}_\gamma \theta$.

Теперь докажем утверждение 4 тоже по индукции по k . Если $k = -1$, то утверждение очевидно. Предположим, что утверждение верно для $k - 1$, и докажем его для k , где $k \geq 0$. Пусть $\theta \in \mathcal{F}_k^1$ и $d\theta = 0$. Тогда для каждого элемента $\gamma \in \pi$ имеем $\text{Var}_\gamma \theta \in \mathcal{F}_{k-1}^1$, $d \text{Var}_\gamma \theta = 0$ и

$$\text{Var}_\gamma \mathcal{I}(\theta) = \mathcal{I}(\text{Var}_\gamma \theta) + c$$

для некоторой константы $c \in \mathbb{C}$. По предположению индукции $\mathcal{I}(\text{Var}_\gamma \theta) \in \mathcal{F}_k^0$. Так как $k \geq 0$, мы имеем $c \in \mathcal{F}_k^0$. Значит, $\text{Var}_\gamma \mathcal{I}(\theta) \in \mathcal{F}_k^0$. Следовательно, $\mathcal{I}(\theta) \in \mathcal{F}_{k+1}^0$.

Для любого связного накрытия $\tilde{\mathfrak{X}}$ многообразия $\mathfrak{X}$ универсальное накрытие многообразия $\tilde{\mathfrak{X}}$ совпадает с $\tilde{\mathfrak{X}}$. Поэтому, заменив в описанной выше конструкции многообразие $\mathfrak{X}$ на многообразие $\tilde{\mathfrak{X}}$, мы получим новую фильтрацию $\tilde{\mathcal{F}}_k^q$ на пространстве $\mathcal{A}^q(\tilde{\mathfrak{X}})$; эта фильтрация будет называться $\tilde{\pi}$ -унипотентной фильтрацией, где $\tilde{\pi} \subset \pi$ – фундаментальная группа многообразия $\tilde{\mathfrak{X}}$. Нам будет особенно важен следующий частный случай. Пусть $\hat{\pi}$ – ядро естественного эпиморфизма $\pi \rightarrow H_1(\mathfrak{X}; \mathbb{Z}_2)$, где $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ – циклическая группа порядка 2, и пусть $\hat{\mathfrak{X}}$ – накрытие многообразия $\mathfrak{X}$, соответствующее подгруппе $\hat{\pi}$. Тогда $\pi_1(\hat{\mathfrak{X}}, \hat{z}^*) = \hat{\pi}$, где отмеченная точка $\hat{z}^*$ в многообразии $\hat{\mathfrak{X}}$ выбрана так, что точка $\tilde{z}^*$ переходит в $\hat{z}^*$ и потом в z^* при проекциях $\tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \hat{\mathfrak{X}} \rightarrow \mathfrak{X}$. Обозначим проекцию $\tilde{\mathfrak{X}} \rightarrow \hat{\mathfrak{X}}$ через $\hat{p}$. Рассмотрим $\hat{\pi}$ -унипотентную фильтрацию на $\mathcal{A}^q(\tilde{\mathfrak{X}})$

$$\{0\} = \hat{\mathcal{F}}_{-1}^q \subset \hat{\mathcal{F}}_0^q \subset \hat{\mathcal{F}}_1^q \subset \hat{\mathcal{F}}_2^q \subset \dots$$

Тогда $\hat{\mathcal{F}}_k^q$ – пространство, состоящее из всех q -форм $\theta \in \mathcal{A}^q(\tilde{\mathfrak{X}})$ таких, что $\text{Var}_\gamma \theta \in \hat{\mathcal{F}}_{k-1}^q$ для всех $\gamma \in \hat{\pi}$. Лемма 2.1 остается верной для фильтрации $\hat{\mathcal{F}}_k^q$. В частности, утверждение 1 этой леммы утверждает, что пространства $\hat{\mathcal{F}}_k^q$ инвариантны относительно всех операторов монодромии M_γ таких, что $\gamma \in \hat{\pi}$. Так как $\hat{\pi}$ – нормальная подгруппа группы π , доказательство утверждения 1 леммы 2.1 на самом деле дает следующий более сильный факт.

ЛЕММА 2.2. *Пространства $\hat{\mathcal{F}}_k^q$ инвариантны относительно всех операторов монодромии M_γ , $\gamma \in \pi$.*

ПРИМЕР 2.3. Возьмем $\mathfrak{X} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и рассмотрим функцию $\text{Ln } z$ как элемент пространства $\mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{X}})$. Вариация этой функции вдоль любой петли есть константа вида $2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$. Значит, функция $\text{Ln } z$ принадлежит пространству $\mathcal{F}_1^0$ и тем более пространству $\hat{\mathcal{F}}_1^0$. Более интересен следующий пример. Возьмем $\mathfrak{X} = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ и рассмотрим функцию $\text{Arc sin } z$ как элемент пространства $\mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{X}})$. Подгруппа $\hat{\pi} \subset \pi$ имеет индекс 4 и состоит из гомотопических классов всех петель γ , имеющих четные числа вращения вокруг точек 1 и -1 . Легко видеть, что монодромия функции $\text{Arc sin } z$ вдоль любой петли γ , гомотопический класс

которой принадлежит подгруппе $\widehat{\pi}$, дает функцию вида $\text{Arcsin } z + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому функция $\text{Arcsin } z$ принадлежит пространству $\widehat{\mathcal{F}}_1^0$. Однако легко видеть, что функция $\text{Arcsin } z$ не принадлежит ни одному из пространств $\mathcal{F}_k^0$.

Предположим, что группа $H_1(\mathfrak{X}; \mathbb{Z}_2)$ конечна; пусть 2^s – ее порядок. Введем обозначения

$$H = H_1(\mathfrak{X}; \mathbb{Z}_2), \quad H^* = H^1(\mathfrak{X}; \mathbb{Z}_2).$$

Имеется каноническое отождествление $H^* = \text{Hom}(\pi, \mathbb{Z}_2)$. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ невырожденное спаривание $H^* \otimes H \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Гомологический класс в группе H , представленный петлей γ или гомотопическим классом $\gamma \in \pi$, будет обозначаться через $[\gamma]$.

Полезно дать следующее описание пространств $\widehat{\mathcal{F}}_k^q$ в терминах всех операторов монодромии M_γ , $\gamma \in \pi$. Для каждого класса когомологий $\rho \in H^*$ определим соответствующий ему *скрученный оператор вариации* по формуле

$$\text{Var}_\gamma^\rho \theta = M_\gamma \theta - (-1)^{\rho(\gamma)} \theta.$$

ЛЕММА 2.4. *Предположим, что $k, q \geq 0$. Тогда пространство $\widehat{\mathcal{F}}_k^q$ совпадает с пространством всех q -форм $\theta \in \mathcal{A}^q(\widetilde{\mathfrak{X}})$, которые допускают разложение*

$$\theta = \sum_{\rho \in H^*} \theta_\rho \quad (2.1)$$

такое, что $\text{Var}_\gamma^\rho \theta_\rho \in \widehat{\mathcal{F}}_{k-1}^q$ для всех $\gamma \in \pi$ и всех $\rho \in H^$. Если $\theta \in \widehat{\mathcal{F}}_k^q$, то в качестве 1-форм θ_ρ можно взять 1-формы, задаваемые по формуле*

$$\theta_\rho = \frac{1}{2^s} \sum_{j=1}^{2^s} (-1)^{\rho(\gamma_j)} M_{\gamma_j} \theta, \quad (2.2)$$

где $\gamma_1, \dots, \gamma_{2^s} \in \pi$ – какие-нибудь представители всех 2^s смежных классов $\pi/\widehat{\pi}$, причем $\gamma_1 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале предположим, что θ допускает разложение вида (2.1). Для всех $\gamma \in \widehat{\pi}$ и всех $\rho \in H^*$ имеет место равенство $\rho(\gamma) = 0$, значит, $\text{Var}_\gamma^\rho \theta_\rho = \text{Var}_\gamma^\rho \theta_\rho \in \widehat{\mathcal{F}}_{k-1}^q$. Следовательно, $\theta_\rho \in \widehat{\mathcal{F}}_k^q$ для всех ρ , значит, $\theta \in \widehat{\mathcal{F}}_k^q$.

Теперь предположим, что $\theta \in \widehat{\mathcal{F}}_k^q$. Рассмотрим q -формы θ_ρ , задаваемые по формуле (2.2). Так как $[\gamma_1], \dots, [\gamma_{2^s}]$ суть все различные элементы группы H и $[\gamma_1] = 0$, легко видеть, что $\sum_{\rho \in H^*} \theta_\rho = \theta$. Докажем, что $\text{Var}_\gamma^\rho \theta_\rho \in \widehat{\mathcal{F}}_{k-1}^q$ для всех $\gamma \in \pi$. Пусть ν_γ – инволютивная перестановка множества $\{1, \dots, 2^s\}$ такая, что $[\gamma_{\nu_\gamma(j)}] = [\gamma_j] + [\gamma]$ в группе H . Тогда

$$\begin{aligned} \text{Var}_\gamma^\rho \theta_\rho &= \frac{1}{2^s} \sum_{j=1}^{2^s} (-1)^{\rho(\gamma_j)} \text{Var}_\gamma^\rho M_{\gamma_j} \theta \\ &= \frac{1}{2^s} \sum_{j=1}^{2^s} ((-1)^{\rho(\gamma_j)} M_{\gamma_j} \gamma \theta - (-1)^{\rho(\gamma_j) + \rho(\gamma)} M_{\gamma_j} \theta) \\ &= \frac{1}{2^s} \sum_{j=1}^{2^s} (-1)^{\rho(\gamma_j)} (M_{\gamma_j} \gamma \theta - M_{\gamma_{\nu_\gamma(j)}} \theta) = \frac{1}{2^s} \sum_{j=1}^{2^s} (-1)^{\rho(\gamma_j)} M_{\gamma_{\nu_\gamma(j)}} \text{Var}_{\gamma_j \gamma \gamma_{\nu_\gamma(j)}}^{-1} \theta. \end{aligned}$$

Каждое слагаемое в последней сумме принадлежит пространству $\widehat{\mathcal{F}}_{k-1}^q$, так как $\gamma_j \gamma \gamma_{\nu_\gamma(j)}^{-1} \in \widehat{\pi}$ для всех j . Значит, $\text{Var}_\gamma^\rho \theta_\rho \in \widehat{\mathcal{F}}_{k-1}^q$.

Напомним определение *итерированного интеграла*, введенное А. Н. Паршиным в [31] и К.-Т. Ченом в [32]; см. также [33]. Пусть даны 1-формы $\omega_1, \dots, \omega_k$ на многообразии $\mathfrak{X}$ и путь $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathfrak{X}$. Пусть $f_j(t) dt$ – обратный образ 1-формы ω_j вдоль отображения α , $j = 1, \dots, k$. По определению итерированный интеграл 1-форм $\omega_1, \dots, \omega_k$ вдоль пути α задается по формуле

$$\int_\alpha \omega_1 \cdots \omega_k = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq 1} \cdots \int f_1(t_1) \cdots f_k(t_k) dt_1 \cdots dt_k.$$

Линейная комбинация итерированных интегралов

$$\sum_n c_n \int_\alpha \omega_{n,1} \cdots \omega_{n,k_n}, \quad (2.3)$$

где $\omega_{n,j} \in \mathcal{A}^1(\mathfrak{X})$, $c_n \in \mathbb{C}$, может рассматриваться как функция пути α . Эта функция называется *гомотопически инвариантной*, если ее значение не изменяется при гомотопиях пути α с неподвижными концами. (Отметим, что требование гомотопической инвариантности весьма ограничительное и не выполняется автоматически.) Наибольшее из чисел k_n будет называться *длиной* линейной комбинации итерированных интегралов (2.3). Гомотопически инвариантная линейная комбинация итерированных интегралов определяет голоморфную функцию $\Phi \in \mathcal{O}(\widetilde{\mathfrak{X}})$ по формуле

$$\Phi(\widetilde{\alpha}(1)) = \sum_n c_n \int_\alpha \omega_{n,1} \cdots \omega_{n,k_n}, \quad (2.4)$$

где α – всевозможные пути в $\mathfrak{X}$, начинающиеся в точке z^* . Хорошо известным фактом является то, что функция Φ имеет унипотентную монодромию; см., например, [20]. В наших обозначениях это утверждение формулируется следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Любая функция $\Phi \in \mathcal{O}(\widetilde{\mathfrak{X}})$, задаваемая гомотопически инвариантной линейной комбинацией итерированных интегралов длины k от 1-форм $\omega_{n,j}$, голоморфных на многообразии $\mathfrak{X}$, лежит в пространстве $\mathcal{F}_k^0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Одним из основных свойств итерированных интегралов является следующая формула для итерированного интеграла вдоль композиции двух путей (см. [31; предложение 2] и [33; предложение 1.5.1]):

$$\int_{\beta\alpha} \omega_1 \cdots \omega_k = \sum_{l=0}^k \left(\int_\beta \omega_1 \cdots \omega_l \right) \left(\int_\alpha \omega_{l+1} \cdots \omega_k \right),$$

где интеграл пустого кортежа 1-форм полагается равным 1 и предполагается, что композиция $\beta\alpha$ корректно определена, т.е. конец пути β совпадает с началом пути α . Из этой формулы следует, что вариация функции Φ , заданной

формулой (2.4), вдоль петли γ с концами в z^* имеет вид

$$(\mathrm{Var}_\gamma \Phi)(\tilde{\alpha}(1)) = \sum_n \sum_{l=1}^{k_n} c_n \left(\int_\gamma \omega_{n,1} \cdots \omega_{n,l} \right) \left(\int_\alpha \omega_{n,l+1} \cdots \omega_{n,k_n} \right).$$

Это гомотопически инвариантная комбинация итерированных интегралов длины, не превосходящей $k-1$, вдоль пути α . Доказательство предложения легко завершается при помощи индукции по k .

Аналогично, любая функция Φ , задаваемая гомотопически инвариантной линейной комбинацией итерированных интегралов длины k от 1-форм $\omega_{n,j}$, голоморфных на многообразии $\hat{\mathfrak{X}}$, лежит в пространстве $\hat{\mathcal{F}}_k^0$.

§ 3. Вполне вещественные функции

В настоящей статье под вещественным (соответственно комплексным) аффинным алгебраическим многообразием всегда понимается подмножество аффинного пространства $\mathbb{R}^m$ (соответственно $\mathbb{C}^m$), которое может быть задано полиномиальными уравнениями. Иными словами, мы не различаем аффинные многообразия, совпадающие как подмножества $\mathbb{R}^m$ (соответственно $\mathbb{C}^m$), но соответствующие разным идеалам в кольце многочленов. Кроме того, мы не требуем, чтобы аффинные многообразия были неприводимыми, если это не указано явно. Мы говорим, что аффинное многообразие $X \subset \mathbb{C}^m$ является *гиперповерхностью*, если все ее неприводимые компоненты $(m-1)$ -мерны. Таким образом, мы допускаем, что гиперповерхность может быть приводимой.

Для любого аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{C}^m$ мы обозначим через X^{reg} множество его гладких точек и обозначим через $X(\mathbb{R})$ множество его вещественных точек, т.е. пересечение $X \cap \mathbb{R}^m$. Мы также положим $X^{\mathrm{reg}}(\mathbb{R}) = X^{\mathrm{reg}} \cap X(\mathbb{R})$.

Будем называть неприводимое аффинное алгебраическое многообразие $X \subset \mathbb{C}^m$ *существенно вещественным*, если X задается системой полиномиальных уравнений с вещественными коэффициентами и $X^{\mathrm{reg}}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Последнее условие эквивалентно условию $\dim_{\mathbb{R}} X(\mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{C}} X$. Например, окружность $z_1^2 + z_2^2 = 1$ в $\mathbb{C}^2$ является существенно вещественным многообразием, а мнимая окружность $z_1^2 + z_2^2 = -1$ — нет, хотя она и определена над полем вещественных чисел. Приводимое аффинное многообразие $X \subset \mathbb{C}^m$ будет называться *существенно вещественным*, если все его неприводимые компоненты существенно вещественны.

Теперь пусть $X \subset \mathbb{C}^m$ — существенно вещественная гиперповерхность с неприводимыми компонентами $X_1, \dots, X_s$ и U — компонента связности множества $\mathbb{R}^m \setminus X(\mathbb{R})$. Рассмотрим комплексное аналитическое многообразие $\mathfrak{X} = \mathbb{C}^m \setminus X$, выберем в нем отмеченную точку z^* , лежащую в U , и применим к $\mathfrak{X}$ все конструкции, описанные в § 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Функция $\Phi \in \mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{X}})$ будет называться *вполне вещественной* на множестве U , если значения $\Phi(\tilde{z})$ вещественны для всех $\tilde{z} \in p^{-1}(U)$.

Если рассматривать Φ как многозначную функцию на $\mathfrak{X}$, то это определение можно эквивалентно переформулировать следующим образом: Φ вполне вещественна на множестве U , если все ветви функции Φ на U являются вещественнозначными. Например, функция $\operatorname{Arg} \sin z$ является вполне вещественной на отрезке $(-1, 1)$. С другой стороны, функция $\operatorname{Ln} z$ не является вполне вещественной на луче $(0, +\infty)$, хотя ее главная ветвь вещественнозначна на этом луче.

Аналогично, будем говорить, что 1-форма $\theta \in \mathcal{A}^1(\tilde{\mathfrak{X}})$ вполне вещественна на U , если $\theta(\tilde{z}, v) \in \mathbb{R}$ для всех $\tilde{z} \in \tilde{\mathfrak{X}}$ и всех $v \in T_{\tilde{z}}\tilde{\mathfrak{X}}$ таких, что $p(\tilde{z}) \in U$ и $p_*(v) \in T_{p(\tilde{z})}\mathbb{R}^m$. Очевидно, что 1-форма $\theta = \sum_{j=1}^m \theta_j dz_j$ вполне вещественна на U тогда и только тогда, когда все функции θ_j вполне вещественны на U , где $z_1, \dots, z_m$ суть стандартные координаты в $\mathbb{C}^m$.

Следующие свойства вполне вещественных функций проверяются непосредственно.

1. Множество функций, вполне вещественных на U , является подкольцом кольца $\mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{X}})$.
2. Если функция Φ вполне вещественна на U , то функции $M_\gamma \Phi$ тоже вполне вещественны на U для всех $\gamma \in \pi$.
3. Если функция Φ вполне вещественна на U , то 1-форма $d\Phi$ тоже вполне вещественна на U .

Утверждение, обратное свойству 3, вообще говоря, неверно. Например, 1-форма dz/z вполне вещественна на луче $(0, +\infty)$, но ее интеграл

$$\mathcal{I}\left(\frac{dz}{z}\right) = \operatorname{Ln} z + c$$

не является вполне вещественным на $(0, +\infty)$. Тем не менее имеется один очень важный для нас специальный случай, в котором обращение свойства 3 верно. Чтобы сформулировать этот результат, нам нужно ввести некоторые обозначения.

Пусть дано разложение $X = Y \cup Z \cup W$ такое, что Y – неприводимая компонента гиперповерхности X , $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_q$ и $W = W_1 \cup \dots \cup W_r$ – объединения неприводимых компонент многообразия X и все неприводимые компоненты $Y, Z_1, \dots, Z_q, W_1, \dots, W_r$ попарно различны. Пусть $f(z) = 0, g_1(z) = 0, \dots, g_q(z) = 0, h_1(z) = 0, \dots, h_r(z) = 0$ – неприводимые полиномиальные уравнения с вещественными коэффициентами, задающие гиперповерхности $Y, Z_1, \dots, Z_q, W_1, \dots, W_r$ соответственно. Договоримся выбирать знаки многочленов $h_j(z)$ так, что $h_j(z) > 0$ в области U . (Знаки многочленов $f(z)$ и $g_j(z)$ не важны.) Каждой точке $z \in \mathbb{R}^m \setminus W(\mathbb{R})$ мы сопоставим вектор $\kappa(z) = (\kappa_1(z), \dots, \kappa_r(z)) \in \mathbb{Z}_2^r$ такой, что $\kappa_j(z) = 0$, если $h_j(z) > 0$, и $\kappa_j(z) = 1$, если $h_j(z) < 0$. Тогда $\kappa_j(z)$ есть приведенный по модулю 2 коэффициент зацепления пары точек $\{z^*, z\}$ и гиперповерхности $W_j(\mathbb{R})$ в пространстве $\mathbb{R}^m$.

ЛЕММА 3.2. Пусть четверка (Y, Z, W, U) удовлетворяет условиям:

- (А) граница ∂U области U содержит точку, принадлежащую множеству $Y^{\operatorname{reg}}(\mathbb{R})$ и не принадлежащую множеству $Z \cup W$;

(Б) векторы $\kappa(z)$, где z пробегает все точки множества $Y^{\text{reg}}(\mathbb{R})$, не принадлежащие множеству $Z \cup W$, порождают всю группу $\mathbb{Z}_2^r$.

Пусть $\theta \in \mathcal{A}^1(\tilde{\mathcal{X}})$ – 1-форма такая, что:

- (i) θ вполне вещественна на U ;
- (ii) θ замкнута;
- (iii) θ лежит в пространстве $\widehat{\mathcal{F}}_k^1$ для некоторого k ;
- (iv) в окрестности каждой точки $z_0 \in Y \setminus (Z \cup W)$ каждая ветвь 1-формы θ имеет вид

$$\theta = \frac{\omega}{\sqrt{f(z)}}, \quad (3.1)$$

где ω – 1-форма, голоморфная в точке z_0 ;

- (v) в окрестности каждой точки $z_0 \in Z_j^{\text{reg}}$, не принадлежащей объединению всех остальных неприводимых компонент многообразия X , каждая ветвь 1-формы θ имеет вид

$$\theta = \frac{ic \, dg_j(z)}{g_j(z)} + \omega, \quad (3.2)$$

где c – вещественная константа и ω – 1-форма, голоморфная в точке z_0 .

Тогда функция $\mathcal{I}(\theta)$ вполне вещественна на U .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. В условиях (iv) и (v) леммы 3.2 1-форма θ рассматривается как многозначная аналитическая 1-форма на многообразии $\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Докажем лемму по индукции по k . База индукции при $k = -1$ очевидна. Предположим, что утверждение леммы верно для 1-форм, лежащих в $\widehat{\mathcal{F}}_{k-1}^1$, и докажем его для 1-формы $\theta \in \widehat{\mathcal{F}}_k^1$.

Группа $H = H_1(\mathcal{X}; \mathbb{Z}_2)$ порождена классами гомологий обходов вокруг неприводимых компонент многообразия X и поэтому конечна. Следовательно, по лемме 2.4 1-форма θ есть сумма 1-форм θ_ρ , задаваемых по формуле (2.2), и $\text{Var}_\gamma^\rho \theta_\rho \in \widehat{\mathcal{F}}_{k-1}^1$ для всех $\gamma \in \pi$. Из того, что 1-форма θ удовлетворяет условиям (i), (ii), (iv) и (v), следует, что 1-формы θ_ρ тоже удовлетворяют условиям (i), (ii), (iv) и (v). Чтобы доказать, что функция $\mathcal{I}(\theta)$ вполне вещественна на U , нам достаточно доказать, что функции $\mathcal{I}(\theta_\rho)$ вполне вещественны на U для всех ρ . Зафиксируем какой-нибудь класс когомологий ρ . Если $\theta_\rho \in \widehat{\mathcal{F}}_{k-1}^1$, то функция $\mathcal{I}(\theta_\rho)$ вполне вещественна на U по предположению индукции. Поэтому мы будем предполагать, что $\theta_\rho \notin \widehat{\mathcal{F}}_{k-1}^1$.

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что функция $\Psi = \mathcal{I}(\theta_\rho)$ вещественна во всех точках множества $p^{-1}(U)$. Так как 1-форма $d\Psi = \theta_\rho$ вполне вещественна на U , нам достаточно показать, что каждая компонента связности множества $p^{-1}(U)$ содержит точку, в которой значение функции Ψ вещественно. Поэтому нам достаточно доказать, что значения $\Psi(T_\gamma \tilde{z}^*)$ вещественны для всех $\gamma \in \pi$. Рассмотрим отображение $\mu: \pi \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемое по формуле

$$\mu(\gamma) = \text{Im } \Psi(T_\gamma \tilde{z}^*) = \text{Im} \int_{\tilde{z}^*}^{T_\gamma \tilde{z}^*} \theta_\rho.$$

(Интеграл не зависит от пути, так как многообразие $\tilde{\mathfrak{X}}$ односвязно, а 1-форма θ_ρ замкнута.) Нам нужно показать, что $\mu(\gamma) = 0$ для всех $\gamma \in \pi$.

Пусть z_0 – точка из условия (А). Так как z_0 – гладкая точка границы области U , мы можем выбрать несамопересекающийся путь α из z^* в z_0 , который весь лежит в U , за исключением своего конца z_0 . Пусть δ – петля в многообразии $\mathfrak{X}$, которая начинается в точке z^* , идет вдоль пути α до точки z , близкой к z_0 , обходит один раз вокруг Y в положительном направлении около точки z_0 и затем возвращается в точку z^* вдоль пути α^{-1} . Очевидно, что гомотопический класс петли δ не зависит от выбора точки z и обхода вокруг Y , если они достаточно близки к z_0 . Поэтому гомотопический класс $\delta \in \pi$ корректно определен. (Однако гомотопический класс δ может зависеть от пути α ; предполагается, что путь α фиксирован.)

Из того, что каждая ветвь 1-формы θ_ρ в окрестности точки z_0 имеет вид (3.1), следует, что $M_\delta \theta_\rho = -\theta_\rho$. Если бы значение $\rho(\delta)$ было равно нулю, мы получили бы $\text{Var}_\delta^\rho \theta_\rho = -2\theta_\rho$, что привело бы нас к противоречию, так как $\text{Var}_\delta^\rho \theta_\rho \in \widehat{\mathcal{F}}_{k-1}^1$, а $\theta_\rho \notin \widehat{\mathcal{F}}_{k-1}^1$. Поэтому $\rho(\delta) = 1$.

ЛЕММА 3.4. *Имеет место равенство $\mu(\delta) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как каждая ветвь 1-формы θ_ρ в окрестности точки z_0 имеет вид (3.1), мы получаем, что

$$\int_{\tilde{z}^*}^{T_\delta \tilde{z}^*} \theta_\rho = \int_{\tilde{\delta}} \theta_\rho = 2 \int_{\tilde{\alpha}} \theta_\rho.$$

Последний интеграл веществен, так как 1-форма θ_ρ вполне вещественна на U . Значит, $\mu(\delta) = 0$.

ЛЕММА 3.5. *Для любых элементов $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$ выполнено равенство*

$$\mu(\gamma_1 \gamma_2) = \mu(\gamma_1) + (-1)^{\rho(\gamma_1)} \mu(\gamma_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \mu(\gamma_1 \gamma_2) &= \text{Im} \int_{\tilde{z}^*}^{T_{\gamma_1 \gamma_2} \tilde{z}^*} \theta_\rho = \mu(\gamma_1) + \text{Im} \int_{T_{\gamma_1} \tilde{z}^*}^{T_{\gamma_1 \gamma_2} \tilde{z}^*} \theta_\rho \\ &= \mu(\gamma_1) + \text{Im} \int_{\tilde{z}^*}^{T_{\gamma_2} \tilde{z}^*} M_{\gamma_1} \theta_\rho \\ &= \mu(\gamma_1) + (-1)^{\rho(\gamma_1)} \mu(\gamma_2) + \text{Im} \int_{\tilde{z}^*}^{T_{\gamma_2} \tilde{z}^*} \text{Var}_{\gamma_1}^\rho \theta_\rho. \end{aligned}$$

Из свойств (i), (ii), (iv) и (v) для 1-формы θ_ρ сразу следуют те же свойства для 1-формы $\text{Var}_{\gamma_1}^\rho \theta_\rho$. Кроме того, $\text{Var}_{\gamma_1}^\rho \theta_\rho \in \widehat{\mathcal{F}}_{k-1}^1$. Поэтому по предположению индукции мы заключаем, что функция $\mathcal{S}(\text{Var}_{\gamma_1}^\rho \theta_\rho)$ вполне вещественна на U . Значит, значение

$$\mathcal{S}(\text{Var}_{\gamma_1}^\rho \theta_\rho)(T_{\gamma_2} \tilde{z}^*) = \int_{\tilde{z}^*}^{T_{\gamma_2} \tilde{z}^*} \text{Var}_{\gamma_1}^\rho \theta_\rho$$

вещественно, откуда сразу следует утверждение леммы.

ЛЕММА 3.6. *Образ отображения μ есть конечно порожденная подгруппа группы $\mathbb{R}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – образ отображения μ . Нам нужно показать, что для любых чисел $a_1, a_2 \in A$ числа $a_1 + a_2$ и $a_1 - a_2$ тоже принадлежат множеству A . Если $a_1, a_2 \in A$, то $a_1 = \mu(\gamma_1)$ и $a_2 = \mu(\gamma_2)$ для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$. Значит, число $\mu(\gamma_1\gamma_2) = a_1 + (-1)^{\rho(\gamma_1)}a_2$ принадлежит множеству A . С другой стороны, выше мы построили элемент $\delta \in \pi$ такой, что $\mu(\delta) = 0$ и $\rho(\delta) = 1$. Поэтому число $\mu(\gamma_1\delta\gamma_2) = a_1 - (-1)^{\rho(\gamma_1)}a_2$ тоже принадлежит множеству A . Значит, A является подгруппой группы $\mathbb{R}$. Однако группа π конечно порождена, так как она является фундаментальной группой дополнения до комплексного аффинного многообразия. Поэтому группа A также конечно порождена.

Предположим, что $A \neq 0$. Всякая нетривиальная конечно порожденная подгруппа группы $\mathbb{R}$ является свободной абелевой группой, поэтому допускает эпиморфизм на группу $\mathbb{Z}_2$. Выберем произвольный эпиморфизм $\varpi: A \rightarrow \mathbb{Z}_2$ и рассмотрим отображение

$$\nu: \pi \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varpi} \mathbb{Z}_2.$$

Это отображение сюръективно, так как отображения μ и ϖ сюръективны. Из леммы 3.5 следует, что ν – гомоморфизм, т.е. $\nu \in H^* = \text{Hom}(\pi, \mathbb{Z}_2)$.

Пусть $\eta, \zeta_1, \dots, \zeta_q, \xi_1, \dots, \xi_r$ – классы гомологий малых обходов вокруг неприводимых компонент $Y, Z_1, \dots, Z_q, W_1, \dots, W_r$ многообразия X соответственно в группе $H = H_1(\mathfrak{X}; \mathbb{Z}_2)$. Хорошо известно, что эти элементы образуют базис группы H . Для каждой точки $z \in \mathbb{R}^m \setminus W(\mathbb{R})$ положим $\xi(z) = \sum_{j=1}^r \kappa_j(z) \xi_j$. Кроме того, для каждой точки $z \in \mathbb{R}^m \setminus X(\mathbb{R})$ обозначим через $\sigma(z), \tau_1(z), \dots, \tau_q(z)$ приведенные по модулю 2 коэффициенты зацепления пары точек $\{z^*, z\}$ с гиперповерхностями $Y(\mathbb{R}), Z_1(\mathbb{R}), \dots, Z_q(\mathbb{R})$ соответственно и положим

$$\eta(z) = \sigma(z)\eta, \quad \zeta(z) = \sum_{j=1}^q \tau_j(z)\zeta_j, \quad \chi(z) = \eta(z) + \zeta(z) + \xi(z).$$

ЛЕММА 3.7. $\langle \nu, \zeta_j \rangle = 0$ при $j = 1, \dots, q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z_0 – гладкая точка гиперповерхности Z_j , не принадлежащая объединению всех остальных неприводимых компонент многообразия X . Рассмотрим петлю γ в многообразии $\mathfrak{X}$, которая сначала идет от точки z^* до точки $z \in \mathfrak{X}$, близкой к z_0 , вдоль некоторого пути α , потом обходит вокруг Z_j в положительном направлении по малому контуру β и затем возвращается в точку z^* вдоль пути α^{-1} . Тогда $[\gamma] = \zeta_j$. По свойству (v) для 1-формы θ_ρ каждая ветвь функции θ_ρ мероморфна в точке z_0 . Поэтому $M_\gamma \theta_\rho = \theta_\rho$. Значит,

$$\Psi(T_\gamma \tilde{z}^*) = \int_{\tilde{\gamma}} \theta_\rho = \int_{\tilde{\beta}} \theta_\rho = -2\pi c, \quad (3.3)$$

где $\tilde{\beta}$ – поднятие пути β , начинающееся в конце пути $\tilde{\alpha}$, и c – вещественная константа из формулы (3.2) для той ветви 1-формы θ_ρ , которая реализуется на пути $\tilde{\beta}$. Следовательно, $\mu(\gamma) = 0$; значит, $\langle \nu, \zeta_j \rangle = 0$.

ЛЕММА 3.8. Пусть $z \in \mathbb{R}^m \setminus X(\mathbb{R})$ и $\langle \rho, \chi(z) \rangle = 1$. Тогда $\langle \nu, \chi(z) \rangle = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольный путь β в $\mathbb{R}^m$ с концами z^* и z , пересекающий гиперповерхность $X(\mathbb{R})$ трансверсально в конечном числе ее гладких точек. В окрестности каждой точки пересечения пути β и гиперповерхности $X(\mathbb{R})$ заменим малый отрезок пути β на малый положительный полуобход вокруг X в $\mathbb{C}^m$ (рис. 2). Обозначим через β_1 полученный путь из z^* в z в многообразии $\mathfrak{X}$. Рассмотрим петлю γ в многообразии $\mathfrak{X}$ с концами в точке z^* , которая получается, если пройти из точки z^* в точку z вдоль пути β_1 , а потом вернуться в точку z^* вдоль пути $\bar{\beta}_1^{-1}$, обратного к пути, полученного из β_1 при помощи покоординатного комплексного сопряжения. Легко видеть, что $[\gamma] = \chi(z)$, так как точки пересечения пути β с компонентами $Y(\mathbb{R}), Z_1(\mathbb{R}), \dots, Z_q(\mathbb{R}), W_1(\mathbb{R}), \dots, W_r(\mathbb{R})$ гиперповерхности $X(\mathbb{R})$ дают вклады в класс гомологий $[\gamma]$, равные $\eta, \zeta_1, \dots, \zeta_q, \xi_1, \dots, \xi_r$ соответственно. Очевидно, путь $\bar{\gamma}$, покоординатно сопряженный пути γ , совпадает с γ^{-1} . Из того, что 1-форма θ_ρ вещественна на $p^{-1}(U)$, следует, что ее интегралы вдоль начинающихся в точке $\tilde{z}^*$ поднятий $\tilde{\gamma}$ и $\bar{\tilde{\gamma}}$ путей γ и $\bar{\gamma}$ соответственно сопряжены друг другу, т.е.

$$\int_{\tilde{z}^*}^{T_{\gamma^{-1}}\tilde{z}^*} \theta_\rho = \int_{\tilde{z}^*}^{T_\gamma\tilde{z}^*} \theta_\rho = \overline{\int_{\tilde{z}^*}^{T_\gamma\tilde{z}^*} \theta_\rho}. \quad (3.4)$$

Значит, $\mu(\gamma^{-1}) = -\mu(\gamma)$. С другой стороны, по лемме 3.5 мы получаем

$$\mu(\gamma^{-1}) = -(-1)^{\rho(\gamma)} \mu(\gamma) = -(-1)^{\langle \rho, \chi(z) \rangle} \mu(\gamma) = \mu(\gamma).$$

Следовательно, $\mu(\gamma) = 0$. Таким образом, $\langle \nu, \chi(z) \rangle = 0$.

Рис. 2. Петля γ из доказательства леммы 3.8

ЛЕММА 3.9. Пусть $z \in Y^{\text{reg}}(\mathbb{R})$ и $z \notin Z \cup W$. Тогда $\langle \nu, \xi(z) \rangle = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности точки z подмногообразие $Y(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^m$ является гладкой гиперповерхностью. Возьмем две точки $z_{\pm} \in \mathbb{R}^m \setminus X(\mathbb{R})$, близкие к точке z и лежащие по разные стороны от гиперповерхности $Y(\mathbb{R})$. Тогда

$\zeta(z_{\pm}) = \zeta(z)$, $\xi(z_{\pm}) = \xi(z)$ и $\eta(z_+) = \eta(z_-) + \eta$. Значит, $\chi(z_+) = \chi(z_-) + \eta$. Так как $\langle \rho, \eta \rangle = \rho(\delta) = 1$, то отсюда следует, что $\langle \rho, \chi(z_+) \rangle = \langle \rho, \chi(z_-) \rangle + 1$. Следовательно, ровно одно из двух значений $\langle \rho, \chi(z_{\pm}) \rangle$ равно 1. Мы можем считать, что $\langle \rho, \chi(z_+) \rangle = 1$. Тогда по лемме 3.8 $\langle \nu, \chi(z_+) \rangle = 0$. Согласно леммам 3.4 и 3.7 $\langle \nu, \eta \rangle = \nu(\delta) = 0$ и $\langle \nu, \zeta_j \rangle = 0$ для всех j . Значит, $\langle \nu, \xi(z) \rangle = \langle \nu, \xi(z_+) \rangle = 0$.

Продолжим доказательство леммы 3.2. Согласно условию (Б) векторы $\xi(z)$, где z пробегает все точки множества $Y^{\text{reg}}(\mathbb{R})$, не принадлежащие $Z \cup W$, порождают подгруппу H , натянутую на элементы $\xi_1, \dots, \xi_r$. Значит, из леммы 3.9 следует, что $\langle \nu, \xi_j \rangle = 0$ при $j = 1, \dots, r$. Но согласно леммам 3.4 и 3.7 $\langle \nu, \eta \rangle = 0$ и $\langle \nu, \zeta_j \rangle = 0$ при $j = 1, \dots, q$. Значит, $\nu = 0$, что невозможно, так как гомоморфизм $\nu: \pi \rightarrow \mathbb{Z}_2$ должен быть сюръективен. Это противоречие доказывает, что $A = 0$, т.е. $\mu(\gamma) = 0$ для всех $\gamma \in \pi$. Следовательно, функция $\mathcal{J}(\theta_\rho)$ вполне вещественна на U , что завершает доказательство леммы 3.2.

В дальнейшем лемма 3.2 будет использоваться при индуктивном доказательстве теоремы 1.3. Для доказательства теоремы 1.2 потребуется немного более сложное утверждение. Чтобы его сформулировать, нам нужно ввести еще несколько понятий и обозначений. Обозначим через $\tilde{U}$ компоненту связности прообраза $p^{-1}(U)$, содержащую отмеченную точку $\tilde{z}^*$. Напомним, что всякую функцию Ψ , голоморфную на многообразии $\tilde{\mathfrak{X}}$, можно рассматривать как многозначную аналитическую функцию на многообразии $\mathfrak{X}$. Предположим, что функция Ψ имеет тривиальные вариации вдоль всех петель γ , лежащих в области U . Тогда мы будем называть *главной ветвью* функции Ψ в области U ее ветвь, реализуемую на компоненте связности $\tilde{U}$ прообраза $p^{-1}(U)$, т.е. функцию ψ на U такую, что $\psi(p(\tilde{z})) = \Psi(\tilde{z})$ для всех $\tilde{z} \in \tilde{U}$. Совершенно аналогично определяется главная ветвь 1-формы, голоморфной на $\tilde{\mathfrak{X}}$ и имеющей тривиальные вариации вдоль всех петель γ , лежащих в U . Будем говорить, что функция $\Psi \in \mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{X}})$ удовлетворяет *нулевым граничным условиям* на $\tilde{U}$, если для каждой точки $z_0 \in \partial U$ главная ветвь $\psi(z)$ функции Ψ стремится к нулю, когда точка z стремится к z_0 , оставаясь внутри области U .

ЛЕММА 3.10. Пусть четверка (Y, Z, W, U) удовлетворяет условиям (А) и (Б) из леммы 3.2, и пусть 1-форма $\theta \in \mathcal{A}^1(\tilde{\mathfrak{X}})$ удовлетворяет условиям (ii)–(iv) из леммы 3.2, а вместо условий (i) и (v) выполняются условия:

- (i)' главная ветвь 1-формы θ в области U корректно определена и вещественна, т.е. $\text{Var}_\gamma \theta = 0$ для всех петель γ , лежащих в U , и 1-форма θ вещественна на $\tilde{U}$;
- (i)'' 1-формы $\varphi_\gamma = i(M_\gamma \theta - (-1)^{\text{lk}(\gamma, Y)} \theta)$ вполне вещественны на U для всех элементов $\gamma \in \pi$;
- (v)' в окрестности каждой точки $z_0 \in Z_j^{\text{reg}}$, не принадлежащей объединению всех остальных неприводимых компонент многообразия X , каждая ветвь 1-формы θ имеет вид

$$\theta = \frac{c dg_j(z)}{g_j(z)} + \omega, \quad (3.5)$$

где c – вещественная константа, ω – 1-форма, голоморфная в точке z_0 .

Пусть функция $\Psi \in \mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{X}})$ такова, что $d\Psi = \theta$, $\text{Var}_\gamma \Psi = 0$ для всех петель γ , лежащих в U , и Ψ удовлетворяет нулевым граничным условиям на $\tilde{U}$. Тогда функции

$$\Phi_\gamma = i(M_\gamma \Psi - (-1)^{\text{lk}(\gamma, Y)} \Psi)$$

вполне вещественны на U для всех $\gamma \in \pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (v)' для 1-формы θ сразу вытекает, что все 1-формы φ_γ удовлетворяют условию (v) из леммы 3.2. Все остальные условия леммы 3.2 для 1-форм φ_γ тоже вытекают из соответствующих условий для 1-формы θ . Поэтому, применяя лемму 3.2 к 1-формам φ_γ , мы можем заключить, что все функции $\mathcal{J}(\varphi_\gamma)$ вполне вещественны на U . Заметим, однако, что интересующие нас функции Φ_γ не совпадают с функциями $\mathcal{J}(\varphi_\gamma)$, а отличаются от них на константы, а именно

$$\Phi_\gamma(\tilde{z}) = \mathcal{J}(\varphi_\gamma)(\tilde{z}) + \Phi_\gamma(\tilde{z}^*).$$

Поэтому нам еще нужно доказать, что значения $\Phi_\gamma(\tilde{z}^*)$ вещественны для всех $\gamma \in \pi$. Это доказательство следует тому же плану, что и доказательство леммы 3.2, хотя и отличается многими деталями. Чтобы подчеркнуть параллелизм с доказательством леммы 3.2, мы будем использовать те же обозначения для объектов, играющих схожие роли в этих доказательствах.

Рассмотрим гомоморфизм $\rho \in \text{Hom}(\pi, \mathbb{Z}_2) = H^*$, задаваемый по формуле

$$\rho(\gamma) = \text{lk}(\gamma, Y) \pmod{2}.$$

Тогда $\varphi_\gamma = i \text{Var}_\gamma^\rho \theta$ и $\Phi_\gamma = i \text{Var}_\gamma^\rho \Psi$. Возьмем петлю δ , точно такую же, как в доказательстве леммы 3.2. Тогда $\text{lk}(\delta, Y) = 1$, значит, $\rho(\delta) = 1$. Точно так же, как в доказательстве леммы 3.2, из свойства (iv) следует, что $M_\delta \theta = -\theta$.

Рассмотрим отображение $\mu: \pi \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемое по формуле

$$\mu(\gamma) = \text{Im } \Phi_\gamma(\tilde{z}^*) = \text{Re } \Psi(T_\gamma \tilde{z}^*) - (-1)^{\rho(\gamma)} \text{Re } \Psi(\tilde{z}^*).$$

Наша цель состоит в том, чтобы доказать, что $\mu(\gamma) = 0$ для всех γ .

ЛЕММА 3.11. *Имеет место равенство $\mu(\delta) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — путь от точки z^* до точки $z_0 \in \partial U$, при помощи которого строилась петля δ (см. доказательство леммы 3.2). Так как путь α целиком, кроме своего конца, лежит в U , то из нулевых граничных условий на $\tilde{U}$ для функции Ψ следует, что $\lim_{t \rightarrow 1} \Psi(\tilde{\alpha}(t)) = 0$. Но $d\Psi = \theta$, значит,

$$\Psi(\tilde{z}^*) = - \int_{\tilde{\alpha}} \theta, \quad \Psi(T_\delta \tilde{z}^*) = - \int_{T_\delta \tilde{\alpha}} \theta = - \int_{\tilde{\alpha}} M_\delta \theta = \int_{\tilde{\alpha}} \theta,$$

откуда

$$\Phi_\delta(\tilde{z}^*) = i(\Psi(T_\delta \tilde{z}^*) + \Psi(\tilde{z}^*)) = 0.$$

Следовательно, $\mu(\delta) = 0$.

ЛЕММА 3.12. Для любых элементов $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$ выполнено равенство

$$\mu(\gamma_1 \gamma_2) = \mu(\gamma_1) + (-1)^{\rho(\gamma_1)} \mu(\gamma_2). \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже было доказано выше, функции $\mathcal{J}(\varphi_\gamma)$ вполне вещественны на U для всех $\gamma \in \pi$. В частности, значение $\mathcal{J}(\varphi_{\gamma_1})(T_{\gamma_2} \tilde{z}^*)$ вещественно. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\varphi_{\gamma_1})(T_{\gamma_2} \tilde{z}^*) &= \Phi_{\gamma_1}(T_{\gamma_2} \tilde{z}^*) - \Phi_{\gamma_1}(\tilde{z}^*) \\ &= i(\Psi(T_{\gamma_1 \gamma_2} \tilde{z}^*) - (-1)^{\rho(\gamma_1)} \Psi(T_{\gamma_2} \tilde{z}^*) - \Psi(T_{\gamma_1} \tilde{z}^*) + (-1)^{\rho(\gamma_1)} \Psi(\tilde{z}^*)). \end{aligned}$$

Приравнивая нулю мнимую часть этого числа, мы получаем в точности равенство (3.6).

Точно так же, как лемма 3.6 следовала из лемм 3.4 и 3.5, из лемм 3.11 и 3.12 следует, что образ отображения μ есть конечно порожденная подгруппа $A \subset \mathbb{R}$. Предположим, что $A \neq 0$, выберем произвольный эпиморфизм $\varpi: A \rightarrow \mathbb{Z}_2$ и рассмотрим сюръективное отображение

$$\nu: \pi \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varpi} \mathbb{Z}_2.$$

Из леммы 3.12 следует, что ν – гомоморфизм, т.е. $\nu \in H^*$.

ЛЕММА 3.13. $\langle \nu, \zeta_j \rangle = 0$ при $j = 1, \dots, q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точно так же, как в доказательстве леммы 3.7 из свойства (v) выводилось равенство (3.3), из свойства (v)' выводится равенство

$$\Psi(T_\gamma \tilde{z}^*) - \Psi(\tilde{z}^*) = 2\pi i c,$$

где γ – такая же, как в доказательстве леммы 3.7, петля, зацепляющаяся за гиперповерхность Z_j . Так как $\rho(\gamma) = 0$, то отсюда следует, что $\mu(\gamma) = 0$, значит, $\langle \nu, \zeta_j \rangle = 0$.

ЛЕММА 3.14. Пусть $z \in \mathbb{R}^m \setminus X(\mathbb{R})$ и $\langle \rho, \chi(z) \rangle = 0$. Тогда $\langle \nu, \chi(z) \rangle = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим петлю γ точно так же, как в доказательстве леммы 3.8. Напомним, что $[\gamma] = \chi(z)$ и $\gamma^{-1} = \bar{\gamma}$. Так как $\rho(\gamma) = 0$, то

$$\mu(\gamma) = \operatorname{Re} \Psi(T_\gamma \tilde{z}^*) - \operatorname{Re} \Psi(\tilde{z}^*) = \operatorname{Re} \int_{\tilde{\gamma}} \theta.$$

Аналогично,

$$\mu(\gamma^{-1}) = \mu(\bar{\gamma}) = \operatorname{Re} \int_{\tilde{\bar{\gamma}}} \theta.$$

Из того, что 1-форма θ вещественна на $\tilde{U}$, следует, что ее интегралы вдоль начинающихся в точке $\tilde{z}^*$ поднятий $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\bar{\gamma}}$ путей γ и $\bar{\gamma}$ соответственно сопряжены друг другу. Поэтому $\mu(\gamma^{-1}) = \mu(\gamma)$. С другой стороны, из леммы 3.12 следует, что $\mu(\gamma^{-1}) = -\mu(\gamma)$. Значит, $\mu(\gamma) = 0$. Следовательно, $\langle \nu, \chi(z) \rangle = 0$.

ЛЕММА 3.15. Пусть $z \in Y^{\text{reg}}(\mathbb{R})$ и $z \notin Z \cup W$. Тогда $\langle \nu, \xi(z) \rangle = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как в доказательстве леммы 3.9, возьмем две точки $z_{\pm} \in \mathbb{R}^m \setminus X(\mathbb{R})$, близкие к точке z и лежащие по разные стороны от гиперповерхности $Y(\mathbb{R})$. Тогда $\langle \rho, \chi(z_+) \rangle = \langle \rho, \chi(z_-) \rangle + 1$, значит, ровно одно из двух значений $\langle \rho, \chi(z_{\pm}) \rangle$ равно 0. Мы можем считать, что $\langle \rho, \chi(z_-) \rangle = 0$. Тогда по лемме 3.14 $\langle \nu, \chi(z_-) \rangle = 0$. Согласно леммам 3.11 и 3.13 $\langle \nu, \eta \rangle = 0$ и $\langle \nu, \zeta_j \rangle = 0$ для всех j . Значит, $\langle \nu, \xi(z) \rangle = \langle \nu, \xi(z_-) \rangle = 0$.

Так же, как в доказательстве леммы 3.2, из лемм 3.11, 3.13, 3.15 и условия (Б) из леммы 3.2 следует, что $\nu = 0$, что невозможно, так как гомоморфизм $\nu: \pi \rightarrow \mathbb{Z}_2$ должен быть сюръективным. Это противоречие доказывает, что $A = 0$, т.е. $\mu(\gamma) = 0$ для всех $\gamma \in \pi$, что завершает доказательство леммы 3.10.

§ 4. Аналитическое продолжение объема

Как в § 1, рассмотрим аффинное пространство $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n(n+1)/2}$ симметрических комплексных матриц размера $(n+1) \times (n+1)$ с единицами на диагонали, аффинную гиперповерхность $X \subset \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C})$, состоящую из всех матриц C , для которых хотя бы один из главных миноров равен нулю, и области $\mathcal{C}_{\mathbb{S}^n}$ и $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$ в $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C})$, состоящие из матриц Грама вершин всевозможных невырожденных симплексов в $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и всевозможных ограниченных невырожденных симплексов в $\Lambda^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$ соответственно.

Пусть $\mathbb{X}^n$ – либо $\mathbb{S}^n$, либо Λ^n . Рассмотрим комплексное аналитическое многообразие $\mathfrak{X} = \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C}) \setminus X$ и возьмем в качестве его отмеченной точки точку C^* , соответствующую правильному симплексу в $\mathbb{X}^n$ с ребром 1; тогда $C^* \in \mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}$. Мы будем пользоваться всеми обозначениями из § 2. Однако отмеченные точки для многообразий $\tilde{\mathfrak{X}}$ и $\hat{\mathfrak{X}}$ будут обозначаться через $\tilde{C}^*$ и $\hat{C}^*$ вместо $\tilde{z}^*$ и $\hat{z}^*$ соответственно.

Введем параметр ε , равный 1 для $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$, и равный -1 для $\mathbb{X}^n = \Lambda^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Отмеченные точки C^* в случаях $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$ и $\mathbb{X}^n = \Lambda^n$ отличны друг от друга. Поэтому универсальные накрытия $\tilde{\mathfrak{X}}$ многообразия $\mathfrak{X}$ в этих двух случаях изоморфны, но этот изоморфизм не канонический. То же самое верно для накрытий $\hat{\mathfrak{X}}$. Мы всегда будем помнить, что накрытия $\tilde{\mathfrak{X}}$ и $\hat{\mathfrak{X}}$ зависят от того, какое из пространств $\mathbb{X}^n$ мы рассматриваем, но не будем отмечать это явно в обозначениях.

Пусть φ – функция, голоморфная в точке C^* и допускающая аналитические продолжения вдоль всех путей в многообразии $\mathfrak{X}$. Тогда аналитическое продолжение функции φ дает корректно определенную голоморфную функцию на многообразии $\tilde{\mathfrak{X}}$, которую мы будем обозначать через $\tilde{\varphi}$. Более точно, мы полагаем $\tilde{\varphi}(\tilde{C}) = \varphi(p(\tilde{C}))$ для точек $\tilde{C}$, близких к точке $\tilde{C}^*$, и потом продолжаем аналитически функцию $\tilde{\varphi}(\tilde{C})$. Очевидно, что если функция φ голоморфна на всем многообразии $\mathfrak{X}$, то $\tilde{\varphi}$ есть просто обратный образ функции φ вдоль проекции p , т.е. $\tilde{\varphi}(\tilde{C}) = \varphi(p(\tilde{C}))$ для всех $\tilde{C} \in \tilde{\mathfrak{X}}$.

Как в § 1, рассмотрим функцию $V_{\mathbb{X}^n}(C)$, выражающую объем симплекса в $\mathbb{X}^n$ через матрицу косинусов (для $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$) или гиперболических косинусов (для $\mathbb{X}^n = \Lambda^n$) длин его ребер. Эта функция определена и вещественно-аналитична

в области $\mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}$. К. Аомото (см. [20]) доказал, что функция $V_{\mathbb{X}^n}$ допускает аналитическое продолжение до многозначной аналитической функции на $\tilde{\mathcal{X}}$ и монодромия этой функции на $\tilde{\mathcal{X}}$ унитарна. В нашей терминологии его результат формулируется следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Аналитическое продолжение функции $V_{\mathbb{X}^n}$ дает корректно определенную голоморфную функцию $\tilde{V}_{\mathbb{X}^n} \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{X}})$. При этом $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n} \in \tilde{\mathcal{F}}^1_{[n/2]-1}$ и $\tilde{V}_{\mathbb{X}^n} \in \tilde{\mathcal{F}}^0_{[n/2]}$.*

К. Аомото доказывал это утверждение следующим образом. Он использовал формулу Шлефли для того, чтобы записать функцию $\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$ в виде гомотопически инвариантной линейной комбинации итерированных интегралов 1-форм, голоморфных на $\tilde{\mathcal{X}}$, и отсюда выводил, что монодромия этой функции на $\tilde{\mathcal{X}}$ унитарна (см. предложение 2.5). Хотя формула для объема через итерированные интегралы интересна сама по себе, использование итерированных интегралов в доказательстве предложения 4.2 излишне. На самом деле предложение 4.2 можно вывести непосредственно из формулы Шлефли и основных свойств унитарных фильтратий, перечисленных в лемме 2.1. Ниже мы приведем этот упрощенный вариант принадлежащего К. Аомото доказательства предложения 4.2, так как детали этого доказательства будут использоваться при дальнейшем изучении функции $\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$.

Введем некоторые обозначения. Для любых подмножеств $I, J \subset \{0, \dots, n\}$ таких, что $|I| = |J|$, обозначим через $D_{I,J}(C)$ минор матрицы $C \in \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C})$, образованный строками с номерами из I и столбцами с номерами из J . Главные миноры $D_{I,I}(C)$ мы будем обозначать просто через $D_I(C)$. Обозначим через C_I подматрицу матрицы C , образованную строками и столбцами с номерами из I ; тогда $D_I(C) = \det C_I$. Определитель самой матрицы C мы будем обозначать через $D(C)$, т.е. $D(C) = D_{\{0, \dots, n\}}(C)$. Хорошо известно, что многочлены $D_I(C)$ неприводимы при $|I| \geq 3$ и $D_{\{j,k\}}(C) = (1 + c_{jk})(1 - c_{jk})$. Положим $D_{\{j,k\}}^{\pm}(C) = 1 \pm c_{jk}$.

Для каждого подмножества $I \subset \{0, \dots, n\}$ такого, что $|I| \geq 2$, обозначим через $\mathcal{H}_I$ аффинную гиперповерхность в пространстве $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C})$, задаваемую уравнением $D_I(C) = 0$, и положим $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\{0, \dots, n\}}$. Если $|I| = 2$, мы обозначим через $\mathcal{H}_I^{\pm}$ гиперповерхности (гиперплоскости), задаваемые уравнениями $D_I^{\pm}(C) = 0$. Тогда X есть объединение всех гиперповерхностей $\mathcal{H}_I$, $I \subset \{0, \dots, n\}$, $|I| \geq 2$. Неприводимыми компонентами многообразия X являются все гиперповерхности $\mathcal{H}_I$ такие, что $|I| \geq 3$, и все гиперповерхности $\mathcal{H}_I^{+}$ и $\mathcal{H}_I^{-}$ такие, что $|I| = 2$. (Очевидно, все эти компоненты попарно различны.) Таким образом, число неприводимых компонент гиперповерхности X равно

$$s = 2^{n+1} + \frac{n(n-1)}{2} - 2.$$

Хорошо известно, что множество $\mathcal{C}_{\mathbb{S}^n}$ состоит из всех положительно определенных матриц в $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R})$, а множество $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$ — из всех матриц $C \in \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R})$ таких, что $(-1)^{|I|} D_I(C) < 0$ для всех I и $c_{jk} > 1$ для всех j и k . Последнее условие может быть переписано в виде $D_I^{+}(C) > 0$ и $D_I^{-}(C) < 0$ для всех I

таких, что $|I| = 2$. Отсюда следует, что множества $\mathcal{C}_{\mathbb{S}^n}$ и $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$ являются компонентами связности множества $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R}) \setminus X(\mathbb{R})$. (Связность множеств $\mathcal{C}_{\mathbb{S}^n}$ и $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$ следует из связности пространств невырожденных симплексов в $\mathbb{S}^n$ и в Λ^n соответственно.)

Ниже мы часто будем использовать индукцию по размерности n . Поэтому введем дополнительный индекс (n) , указывающий на размерность пространства $\mathbb{X}^n$, к которому относится рассматриваемый объект; например, мы будем писать $X_{(n)}$, $\mathfrak{X}_{(n)}$, $\widehat{\mathcal{F}}_{k,(n)}^q$ и т.д. Однако для упрощения обозначений мы будем опускать этот индекс всегда, когда его значение понятно из контекста.

Пусть $I \subset \{0, \dots, n\}$ – подмножество мощности $m + 1$. Обозначим через pr_I проекцию $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{G}_{(m)}(\mathbb{C})$, задаваемую по формуле $C \mapsto C_I$. Очевидно, что $\text{pr}_I(\mathfrak{X}_{(n)}) = \mathfrak{X}_{(m)}$, $\text{pr}_I(\mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}) = \mathcal{C}_{\mathbb{X}^m}$ и $\text{pr}_I(C_{(n)}^*) = C_{(m)}^*$. Проекция $\text{pr}_I: \mathfrak{X}_{(n)} \rightarrow \mathfrak{X}_{(m)}$ накрывается корректно определенными отображениями $\widehat{\text{pr}}_I: \widehat{\mathfrak{X}}_{(n)} \rightarrow \widehat{\mathfrak{X}}_{(m)}$ и $\widetilde{\text{pr}}_I: \widetilde{\mathfrak{X}}_{(n)} \rightarrow \widetilde{\mathfrak{X}}_{(m)}$ такими, что $\widehat{\text{pr}}_I(\widehat{C}_{(n)}^*) = \widehat{C}_{(m)}^*$ и $\widetilde{\text{pr}}_I(\widetilde{C}_{(n)}^*) = \widetilde{C}_{(m)}^*$. Рассмотрим гомоморфизм обратного образа

$$\widetilde{\text{pr}}_I^*: \mathcal{A}^q(\widetilde{\mathfrak{X}}_{(m)}) \rightarrow \mathcal{A}^q(\widetilde{\mathfrak{X}}_{(n)}).$$

Из определения фильтрации $\widehat{\mathcal{F}}_k^q$ сразу следует, что $\widetilde{\text{pr}}_I^*(\widehat{\mathcal{F}}_{k,(m)}^q) \subset \widehat{\mathcal{F}}_{k,(n)}^q$ для всех k и q .

Теперь возьмем точку $C \in \mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}$ и рассмотрим симплекс Δ^n в $\mathbb{X}^n$, соответствующий матрице C . Обозначим через Δ_I грань симплекса Δ^n , натянутую на вершины с номерами из подмножества $I \subset \{0, \dots, n\}$. Если $|I| = n - 1$, мы обозначим через $\alpha_I = \alpha_I(C)$ двугранный угол симплекса Δ^n при $(n - 2)$ -мерной грани Δ_I . Рассмотрим стандартную векторную модель пространства $\mathbb{X}^n$ в $\mathbb{V}$, где $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{n+1}$, если $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$, и $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{1,n}$, если $\mathbb{X}^n = \Lambda^n$. Пусть $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{V}$ – векторы, представляющие вершины симплекса Δ^n , и пусть $\mathbf{v}^0, \dots, \mathbf{v}^n$ – базис пространства $\mathbb{V}$, двойственный базису $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$. Тогда $\mathbf{v}^0, \dots, \mathbf{v}^n$ суть векторы внутренних нормалей к $(n - 1)$ -мерным граням симплекса Δ^n , если $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$, и векторы внешних нормалей к $(n - 1)$ -мерным граням симплекса Δ^n , если $\mathbb{X}^n = \Lambda^n$. Значит,

$$\cos \alpha_I(C) = -\frac{\varepsilon \langle \mathbf{v}^j, \mathbf{v}^k \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{v}^j, \mathbf{v}^j \rangle \langle \mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k \rangle}}.$$

Так как матрица Грама векторов $\mathbf{v}^0, \dots, \mathbf{v}^n$ есть матрица C^{-1} и $\varepsilon^n D(C) > 0$, мы получаем, что

$$\cos \alpha_I(C) = \frac{\varepsilon^{n-1} D_{I', I''}(C)}{\sqrt{D_{I'}(C) D_{I''}(C)}}, \quad \sin \alpha_I(C) = \sqrt{\frac{D(C) D_I(C)}{D_{I'}(C) D_{I''}(C)}}, \quad (4.1)$$

где I' и I'' – два n -элементных подмножества множества $\{0, \dots, n\}$, содержащих подмножество I (см. также [20; формула (3.10)]). Вторая из этих двух формул получается из первой при помощи тождества Якоби

$$DD_I = D_{I'} D_{I''} - D_{I', I''}^2. \quad (4.2)$$

Дифференцируя первую из формул (4.1), мы легко получаем

$$d\alpha_I = \frac{\varepsilon^{n-1}}{\sqrt{DD_I}} \left(\frac{D_{I',I''} d(D_{I'} D_{I''})}{2D_{I'} D_{I''}} - dD_{I',I''} \right). \quad (4.3)$$

Для каждой матрицы $C \in \mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}$ выполнены неравенства $\varepsilon^{|I|+1} D_I(C) > 0$. Положим

$$R_I(C) = \sqrt{\varepsilon^{|I|+1} D_I(C)},$$

где выбирается положительное значение квадратного корня. В частности, положим $R(C) = \sqrt{\varepsilon^n D(C)}$.

По формуле Шлефли (1.1) для симплекса Δ^n в области $\mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}$ выполнено следующее равенство:

$$dV_{\mathbb{X}^n}(C) = \frac{\varepsilon}{n-1} \sum_{I \subset \{0, \dots, n\}, |I|=n-1} V_I(C) d\alpha_I(C), \quad (4.4)$$

где $V_I(C) = V_{\mathbb{X}^{n-2}}(C_I)$ есть $(n-2)$ -мерный объем грани Δ_I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.2. Будем вести доказательство по индукции по размерности n с шагом 2. Начнем индукцию со случаев $n = 0$ и $n = 1$.

При $n = 0$ мы принимаем соглашение, что $\mathfrak{X}$ – точка и $V_{\mathbb{X}^0} = 1$. Тогда $\tilde{\mathfrak{X}} = \hat{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}$ и $\hat{\mathcal{F}}_0^0 = \mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{X}}) = \mathbb{C}$. Поэтому утверждение предложения тривиально.

При $n = 1$ имеется только одна переменная c_{01} и $\mathfrak{X} = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Тогда

$$V_{\mathbb{S}^1}(c_{01}) = \arccos c_{01}, \quad V_{\mathbb{A}^1}(c_{01}) = \operatorname{ar} \operatorname{ch} c_{01}, \quad (4.5)$$

$$dV_{\mathbb{X}^1} = \frac{-\varepsilon dc_{01}}{\sqrt{\varepsilon(1 - c_{01}^2)}}. \quad (4.6)$$

Аналитическое продолжение 1-формы $dV_{\mathbb{X}^1}$ становится однозначным на двулистом разветвленном накрытии комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с ветвлением в точках ± 1 , и оно тем более является однозначным на четырехлистном накрытии $\tilde{\mathfrak{X}}$ многообразия $\mathfrak{X}$. Значит, 1-форма $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^1}$ принадлежит пространству $\hat{\mathcal{F}}_0^1 = \hat{p}^* \mathcal{A}^1(\tilde{\mathfrak{X}})$. Из утверждения 4 леммы 2.1 следует, что $\tilde{V}_{\mathbb{X}^1} \in \hat{\mathcal{F}}_1^0$.

Теперь докажем индукционный переход: предположим, что предложение верно для размерности $n-2$ и докажем его для размерности n . Доказательство опирается на формулу Шлефли (4.4). Отметим, что наше соглашение $V_{\mathbb{X}^0} = 1$ делает эту формулу верной и при $n = 2$. Действительно, в этом случае она принимает вид $dV_{\mathbb{X}^2} = \varepsilon(d\alpha_{\{0\}} + d\alpha_{\{1\}} + d\alpha_{\{2\}})$, что верно, так как

$$V_{\mathbb{X}^2} = \varepsilon(\alpha_{\{0\}} + \alpha_{\{1\}} + \alpha_{\{2\}} - \pi). \quad (4.7)$$

Очевидно, что аналитические продолжения $\tilde{R}_I \in \mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{X}})$ функций R_I корректно определены. Более того, аналитические продолжения всех функций R_I становятся однозначными не только на $\tilde{\mathfrak{X}}$, но и на $\hat{\mathfrak{X}}$. Значит, все функции $\tilde{R}_I$ принадлежат подпространству $\hat{p}^* \mathcal{O}(\hat{\mathfrak{X}}) \subset \mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{X}})$. Тогда из формулы (4.3) следует, что функции α_I допускают аналитические продолжения $\tilde{\alpha}_I \in \mathcal{O}(\tilde{\mathfrak{X}})$ такие,

что 1-формы

$$d\tilde{\alpha}_I = \frac{\varepsilon^{n-1}}{\tilde{R}\tilde{R}_I} \left(\frac{\tilde{D}_{I',I''} d(\tilde{D}_{I'}\tilde{D}_{I''})}{2\tilde{D}_{I'}\tilde{D}_{I''}} - d\tilde{D}_{I',I''} \right) \quad (4.8)$$

принадлежат пространству $\tilde{\mathcal{F}}_0^1 = \hat{p}^* \mathcal{A}^1(\tilde{\mathcal{X}}) \subset \mathcal{A}^1(\tilde{\mathcal{X}})$. (Отметим, однако, что сами функции $\tilde{\alpha}_I$ не принадлежат пространству $\hat{p}^* \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{X}})$.)

По предположению индукции функция $V_{\mathbb{X}^{n-2}}$ имеет корректно определенное аналитическое продолжение $\tilde{V}_{\mathbb{X}^{n-2}} \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{X}}_{(n-2)})$. Поэтому из формулы (4.4) следует, что 1-форма $dV_{\mathbb{X}^n}$ аналитически продолжается до замкнутой 1-формы $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n} \in \mathcal{A}^1(\tilde{\mathcal{X}}_{(n)})$, задаваемой формулой

$$d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n} = \frac{\varepsilon}{n-1} \sum_{I \subset \{0, \dots, n\}, |I|=n-1} \tilde{\mathbf{r}}_I^*(\tilde{V}_{\mathbb{X}^{n-2}}) d\tilde{\alpha}_I. \quad (4.9)$$

Искомая функция $\tilde{V}_{\mathbb{X}^n} \in \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{X}})$ задается формулой

$$\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}(\tilde{C}) = V_{\mathbb{X}^n}^* + \frac{\varepsilon}{n-1} \int_{\tilde{C}_{(n)}^*} \sum_{I \subset \{0, \dots, n\}, |I|=n-1} \tilde{\mathbf{r}}_I^*(\tilde{V}_{\mathbb{X}^{n-2}}) d\tilde{\alpha}_I, \quad (4.10)$$

где $V_{\mathbb{X}^n}^* = V_{\mathbb{X}^n}(C_{(n)}^*)$ – объем правильного симплекса с ребром 1 в пространстве $\mathbb{X}^n$. Так как многообразие $\tilde{\mathcal{X}}$ односвязно, то интеграл в правой части формулы (4.10) не зависит от пути интегрирования. Кроме того, мы видим, что $\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}(\tilde{C}) = V_{\mathbb{X}^n}(p(\tilde{C}))$ в окрестности точки $\tilde{C}_{(n)}^*$.

По предположению индукции функция $\tilde{V}_{\mathbb{X}^{n-2}}$ лежит в $\hat{\mathcal{F}}_{[n/2]-1, (n-2)}^0$. Значит, $\tilde{\mathbf{r}}_I^*(\tilde{V}_{\mathbb{X}^{n-2}}) \in \hat{\mathcal{F}}_{[n/2]-1, (n)}^0$ для всех I таких, что $|I| = n-1$. Но $d\tilde{\alpha}_I \in \hat{\mathcal{F}}_{0, (n)}^1$, значит, из утверждения 2 леммы 2.1 следует, что $\tilde{\mathbf{r}}_I^*(\tilde{V}_{\mathbb{X}^{n-2}}) d\tilde{\alpha}_I \in \hat{\mathcal{F}}_{[n/2]-1, (n)}^1$. Следовательно, из формулы (4.10) вытекает, что $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n} \in \hat{\mathcal{F}}_{[n/2]-1, (n)}^1$. Таким образом, согласно утверждению 4 леммы 2.1 $\tilde{V}_{\mathbb{X}^n} \in \hat{\mathcal{F}}_{[n/2], (n)}^0$.

Для доказательства теорем 1.3 и 1.2 мы применим леммы 3.2 и 3.10 соответственно для 1-формы $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$. Для этого нам нужно разложить гиперповерхность X в объединение $Y \cup Z \cup W$. Положим

$$Y = \mathcal{H}, \quad Z = \bigcup_{|I|=n} \mathcal{H}_I, \quad W = \bigcup_{2 \leq |I| < n} \mathcal{H}_I.$$

Будем предполагать, что $n \geq 2$; тогда гиперповерхность Y неприводима. В §5 мы проверим, что гиперповерхность X существенно вещественна и что четверки $(Y, Z, W, \mathcal{C}_{\mathbb{S}^n})$ и $(Y, Z, W, \mathcal{C}_{\Lambda^n})$ удовлетворяют условиям (А) и (Б) из леммы 3.2. Очевидно, что 1-форма $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$ замкнута, т.е. удовлетворяет условию (ii) из леммы 3.2. По предположению 4.2 1-форма $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$ удовлетворяет условию (iii) из леммы 3.2.

ЛЕММА 4.3. 1-форма $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$ удовлетворяет условию (iv) из леммы 3.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $Y = \mathcal{H}$, то неприводимое уравнение, задающее гиперповерхность Y , имеет вид $D(C) = 0$. Пусть C^0 – точка на гиперповерхности Y , не принадлежащая объединению $Z \cup W$. Тогда из формулы (4.8)

следует, что в окрестности точки C^0 каждая ветвь каждой 1-формы $d\tilde{\alpha}_I$ имеет вид $\omega_I/\sqrt{D(C)}$, где ω_I – 1-форма, голоморфная в точке C^0 . Однако ни одна из ветвей ни одной из многозначных функций $\tilde{r}_I^*(\tilde{V}_{\mathbb{X}^{n-2}})(C) = \tilde{V}_{\mathbb{X}^{n-2}}(C_I)$ не имеет особенностей вне гиперповерхности W . Поэтому условие (iv) из леммы 3.2 для 1-формы $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$ следует из формулы (4.9).

Чтобы применить лемму 3.2 (соответственно лемму 3.10), нам еще нужно проверить условия (i) и (v) (соответственно условия (i)', (i)'' и (v)'). В дальнейшем мы проверим, что 1-форма $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$ удовлетворяет условиям (i) и (v) в случаях $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$ и $\mathbb{X}^n = \Lambda^{2m}$ и удовлетворяет условиям (i)', (i)'' и (v)' в случае $\mathbb{X}^n = \Lambda^{2m+1}$, опираясь на теоремы 1.3 и 1.2 для $\mathbb{X}^{n-2}$ соответственно. После этого теоремы 1.3 и 1.2 для $\mathbb{X}^n$ будут следовать соответственно из лемм 3.2 и 3.10 для 1-формы $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$. Такие индуктивные доказательства теорем 1.3 и 1.2 будут даны в § 6 после того, как мы проверим условия (A) и (B) из леммы 3.2.

§ 5. Условия (A) и (B)

В этом параграфе мы всегда предполагаем, что $n \geq 2$.

ЛЕММА 5.1. *Гиперповерхность $X \subset \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C})$ существенно вещественна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неприводимые компоненты гиперповерхности X задаются полиномиальными уравнениями $D_I(C) = 0$ и $D_I^\pm(C) = 0$ с вещественными коэффициентами. Более того, каждый из многочленов $D_I(C)$ и $D_I^\pm(C)$ принимает на пространстве $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R})$ как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, каждая из неприводимых компонент вещественной гиперповерхности $X(\mathbb{R})$ разделяет пространство $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R})$, значит, содержит гладкие точки.

ЛЕММА 5.2. *Четверки $(Y, Z, W, \mathcal{C}_{\mathbb{S}^n})$ и $(Y, Z, W, \mathcal{C}_{\Lambda^n})$ удовлетворяют условию (A) из леммы 3.2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в пространстве $\mathbb{X}^n$ точки $v_0, \dots, v_n$ такие, что они лежат в некоторой $(n-1)$ -мерной плоскости, но никакие n из них не лежат в $(n-2)$ -мерной плоскости. Тогда симплекс с вершинами $v_0, \dots, v_n$ вырожден, но все его собственные грани не вырождены. Пусть $C^0 = (c_{jk}^0)$ – матрица косинусов (в случае $\mathbb{X}^n = \mathbb{S}^n$) или гиперболических косинусов (в случае $\mathbb{X}^n = \Lambda^n$) попарных расстояний между точками $v_0, \dots, v_n$. Тогда $D(C^0) = 0$ и $D_I(C^0) \neq 0$ для всех I таких, что $|I| \leq n$. Значит, $C^0 \in Y(\mathbb{R})$ и $C^0 \notin Z \cup W$. Кроме того, используя тождество Якоби (4.2), получаем

$$\left. \frac{\partial D}{\partial c_{01}} \right|_{C^0} = -2D_{\{0,2,\dots,n\},\{1,2,\dots,n\}}(C^0) = \pm 2\sqrt{D_{\{0,2,\dots,n\}}(C^0)D_{\{1,2,\dots,n\}}(C^0)} \neq 0.$$

Следовательно, C^0 – гладкая точка гиперповерхности Y . Наконец, так как точки $v_0, \dots, v_n$ можно сдвинуть на сколь угодно малые расстояния так, чтобы симплекс с вершинами в них стал невырожденным, то $C^0 \in \partial\mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}$.

Если $n = 2$, то условие (Б) из леммы 3.2 выполнено, так как $W = \emptyset$. Поэтому мы предположим, что $n \geq 3$. Чтобы доказать, что четверки $(Y, Z, W, \mathcal{C}_{\mathbb{S}^n})$ и $(Y, Z, W, \mathcal{C}_{\Lambda^n})$ удовлетворяют условию (Б), нам понадобится следующая вспомогательная лемма. Пусть $W_1, \dots, W_r$ – неприводимые компоненты гиперповерхности W , перечисленные в произвольном порядке. Легко подсчитать, что

$$r = 2^{n+1} + \frac{n^2 - 3n}{2} - 4.$$

ЛЕММА 5.3. *Для каждого $\lambda = 1, \dots, r$ найдется матрица $C^\lambda \in \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R})$ такая, что гладкие гиперповерхности $Y^{\text{reg}}(\mathbb{R})$ и $W_\lambda^{\text{reg}}(\mathbb{R})$ пересекаются трансверсально в C^λ и C^λ не принадлежит объединению гиперповерхности Z и всех компонент W_μ таких, что $\mu \neq \lambda$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неприводимая компонента W_λ – это либо $\mathcal{H}_I$, где $3 \leq |I| < n$, либо $\mathcal{H}_I^\sigma$, где $|I| = 2$ и $\sigma \in \{+, -\}$. Без ограничения общности мы можем считать, что $I = \{0, \dots, k-1\}$, где $2 \leq k < n$. Если $|I| \geq 3$, то выберем знак σ произвольным образом. Рассмотрим матрицу $C^\lambda = (c_{ji}^\lambda) \in \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R})$ такую, что

$$\begin{aligned} c_{0j}^\lambda &= c_{j0}^\lambda = -\sigma \frac{1}{\sqrt{k-1}}, & 1 \leq j \leq k-1, \\ c_{0j}^\lambda &= c_{j0}^\lambda = 2, & k \leq j \leq n-1, \\ c_{1n}^\lambda &= c_{n1}^\lambda = \left(1 - \frac{1}{4(k-1)(n-k)}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

и все остальные недиагональные элементы матрицы C^λ равны нулю. Обозначим множество $\{k, \dots, n-1\}$ через K . Непосредственное вычисление главных миноров матрицы C^λ дает

$$D_J(C^\lambda) = \begin{cases} -\frac{4|K \setminus J| + \frac{1}{k-1}|I \setminus J|}{4(k-1)(n-k) - 1}, & \text{если } 0, 1, n \in J, \\ 1 - \frac{|J \cap I| - 1}{k-1} - 4|J \cap K|, & \text{если } 0 \in J, \quad \{1, n\} \not\subset J, \\ -\frac{1}{4(k-1)(n-k) - 1}, & \text{если } 0 \notin J, \quad 1, n \in J, \\ 1, & \text{если } 0 \notin J, \quad \{1, n\} \not\subset J. \end{cases}$$

Значит, $D(C^\lambda) = D_I(C^\lambda) = 0$ и все остальные главные миноры матрицы C^λ ненулевые. Кроме того, если $|I| = 2$, то $D_I^\sigma(C^\lambda) = 0$ и $D_I^{-\sigma}(C^\lambda) \neq 0$. Значит, $C^\lambda \in Y(\mathbb{R}) \cap W_\lambda(\mathbb{R})$ и C^λ не лежит в объединении остальных неприводимых компонент гиперповерхности X . Далее,

$$\left. \frac{\partial D_I}{\partial c_{01}} \right|_{C^\lambda} = \sigma \frac{2}{\sqrt{k-1}}, \quad \left. \frac{\partial D}{\partial c_{0k}} \right|_{C^\lambda} = \frac{16}{4(k-1)(n-k) - 1}.$$

Так как минор $D_I(C)$ не зависит от c_{0k} , мы получаем, что градиенты многочленов D_I и D в точке C^λ линейно независимы. Следовательно, C^λ – гладкая

точка каждой из гиперповерхностей Y и W_λ и эти гиперповерхности пересекаются трансверсально в точке C^λ .

ЛЕММА 5.4. *Четверки $(Y, Z, W, \mathcal{C}_{\mathbb{S}^n})$ и $(Y, Z, W, \mathcal{C}_{\Lambda^n})$ удовлетворяют условию (Б) из леммы 3.2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_1, \dots, a_r$ – стандартный базис группы $\mathbb{Z}_2^r$. Заметим, что функции $\kappa: \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R}) \setminus W \rightarrow \mathbb{Z}_2^r$, соответствующие четверкам $(Y, Z, W, \mathcal{C}_{\mathbb{S}^n})$ и $(Y, Z, W, \mathcal{C}_{\Lambda^n})$, не совпадают друг с другом, так как знаки уравнений $h_\lambda(C) = 0$, задающих гиперповерхности W_λ , фиксируются разными способами. Тем не менее оба случая рассматриваются единообразно. Пусть $\mathbb{X}^n$ – либо Λ^n , либо $\mathbb{S}^n$, и пусть κ – функция, соответствующая четверке $(Y, Z, W, \mathcal{C}_{\mathbb{X}^n})$. Обозначим через $\mathcal{K}$ подгруппу группы $\mathbb{Z}_2^r$, порожденную всеми векторами $\kappa(C)$, где $C \in Y^{\text{reg}}(\mathbb{R}) \setminus (Z \cup W)$. Наша цель состоит в том, чтобы доказать, что $\mathcal{K} = \mathbb{Z}_2^r$.

Рассмотрим матрицы C^λ , $\lambda = 1, \dots, r$, из леммы 5.3. Гиперповерхности $Y^{\text{reg}}(\mathbb{R})$ и $W_\lambda^{\text{reg}}(\mathbb{R})$ пересекаются трансверсально в точке C^λ , и никакие другие неприводимые компоненты гиперповерхности X не проходят через C^λ . Пусть C_+^λ и C_-^λ – две точки на $Y^{\text{reg}}(\mathbb{R})$, близкие к C^λ и лежащие по разные стороны от $W_\lambda(\mathbb{R})$. Тогда $\kappa_\lambda(C_+^\lambda) = \kappa_\lambda(C_-^\lambda) + 1$ и $\kappa_\mu(C_+^\lambda) = \kappa_\mu(C_-^\lambda)$ для всех $\mu \neq \lambda$. Значит, $\kappa(C_+^\lambda) = \kappa(C_-^\lambda) + a_\lambda$. Следовательно, $a_\lambda \in \mathcal{K}$. Так как это верно для всех λ , то мы получаем, что $\mathcal{K} = \mathbb{Z}_2^r$.

§ 6. Доказательства теорем 1.2 и 1.3

Докажем теоремы 1.2 и 1.3 индукцией по размерности n . В обоих случаях индукция будет вестись с шагом 2, т.е. мы будем доказывать утверждение теоремы 1.2 (соответственно теоремы 1.3) для размерности n , опираясь на утверждение этой теоремы для размерности $n - 2$. Поэтому нам нужно сначала проверить базу индукции при $n = 1$ и $n = 2$.

База индукции: $n = 1$. В этом случае имеется только одна переменная $c = c_{01}$. Объем одномерного симплекса – это просто длина отрезка, поэтому $\tilde{V}_{\Lambda^1} = \text{Ar ch}(c)$ и $\tilde{V}_{\mathbb{S}^1} = \text{Arc cos}(c)$. Имеем $\mathcal{C}_{\Lambda^1} = (1, +\infty)$ и $\mathcal{C}_{\mathbb{S}^1} = (-1, 1)$. Утверждение теоремы 1.3 выполнено, так как все ветви многозначной функции $\text{Arc cos}(c)$ вещественны на интервале $(-1, 1)$. Утверждение теоремы 1.2 выполнено, так как каждая ветвь многозначной функции $\text{Ar ch}(c)$ на луче $(1, +\infty)$ имеет вид $\pm \text{ar ch } c + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, и знак определяется тем, четен или нечетен коэффициент зацепления петли, вдоль которой производилось аналитическое продолжение, и пары точек $\mathcal{H} = \{-1, 1\}$.

База индукции: $n = 2$. Из равенств (4.1) и (4.7) следует, что

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{X}^2}(C) = & \varepsilon \arccos\left(\frac{\varepsilon(c_{12} - c_{01}c_{02})}{\sqrt{(1 - c_{01}^2)(1 - c_{02}^2)}}\right) + \varepsilon \arccos\left(\frac{\varepsilon(c_{02} - c_{01}c_{12})}{\sqrt{(1 - c_{01}^2)(1 - c_{12}^2)}}\right) \\ & + \varepsilon \arccos\left(\frac{\varepsilon(c_{01} - c_{02}c_{12})}{\sqrt{(1 - c_{02}^2)(1 - c_{12}^2)}}\right) - \varepsilon\pi. \end{aligned}$$

Если $C \in \mathcal{C}_{\mathbb{X}^2}$, то аргументы арккосинусов в правой части этой формулы лежат в интервале $(-1, 1)$, так как они являются косинусами углов треугольника. После аналитического продолжения вдоль какой-либо петли квадратные корни в знаменателях могут изменить свои знаки. Однако аргументы арккосинусов будут по-прежнему принадлежать интервалу $(-1, 1)$. Из того, что все ветви арккосинуса вещественны на интервале $(-1, 1)$, следует, что функции $\tilde{V}_{\mathbb{S}^2}(C)$ и $\tilde{V}_{\Lambda^2}(C)$ вполне вещественны на множествах $\mathcal{C}_{\mathbb{S}^2}$ и $\mathcal{C}_{\Lambda^2}$ соответственно.

Шаг индукции в доказательстве теоремы 1.3. Пусть $\mathbb{X}^n$, $n \geq 3$, – либо сфера, либо четномерное пространство Лобачевского. Предположим, что утверждение теоремы 1.3 верно для $\mathbb{X}^{n-2}$. Докажем утверждение теоремы 1.3 для $\mathbb{X}^n$.

Мы хотим применить лемму 3.2 к 1-форме $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$. Эта 1-форма замкнута, т.е. удовлетворяет условию (ii). Из предложения 4.2 и леммы 4.3 следует, что 1-форма $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$ удовлетворяет условиям (iii) и (iv). В § 5 мы доказали, что гиперповерхность X существенно вещественна и четверка $(Y, Z, W, \mathcal{C}_{\mathbb{X}^n})$ удовлетворяет условиям (А) и (Б). По предположению индукции каждая ветвь функции $\tilde{V}_{\mathbb{X}^{n-2}}$ вещественна на множестве $\mathcal{C}_{\mathbb{X}^{n-2}}$. Поэтому каждая ветвь каждой из функций $\tilde{V}_I = \tilde{\text{rg}}_I^*(\tilde{V}_{\mathbb{X}^{n-2}})$, где $|I| = n - 1$, вещественна на $\mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}$. С другой стороны, из формулы (4.8) видно, что обе ветви 1-формы $d\tilde{\alpha}_I$ вещественны на $\mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}$. Следовательно, из формулы (4.9) следует, что 1-форма $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$ вполне вещественна на $\mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}$, т.е. удовлетворяет условию (i).

Если φ – функция, голоморфная в точке C^* , и β – путь, начинающийся в точке C^* , такой, что функция φ допускает аналитическое продолжение вдоль β , то мы будем обозначать через $\varphi^{(\beta)}$ голоморфную функцию в окрестности конца пути β , полученную в результате этого аналитического продолжения.

Теперь докажем, что 1-форма $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$ удовлетворяет условию (v). Нам нужно изучить поведение многозначной 1-формы $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$ в окрестности точки C^0 , являющейся гладкой точкой одной из гиперповерхностей $\mathcal{H}_J$ такой, что $|J| = n$, и не лежащей ни на одной из остальных гиперповерхностей $\mathcal{H}_K$, $K \neq J$. Без ограничения общности мы можем считать, что $J = \{0, \dots, n - 1\}$. Пусть β – путь из C^* в C^0 , лежащий в $\mathfrak{X}$, за исключением его конечной точки C^0 . Так как $C^0 \notin W$, то все функции $V_I^{(\beta)}$, где $|I| = n - 1$, голоморфны в точке C^0 . Далее, из формулы (4.8) следует, что 1-форма $d\alpha_I^{(\beta)}$ голоморфна в точке C^0 , если $I \not\subset J$, а если $I \subset J$, то 1-форма $d\alpha_I^{(\beta)}$ мероморфна в точке C^0 и

$$d\alpha_I^{(\beta)} = \frac{\varepsilon^{n-1} D_{I \cup \{n\}, J}}{2R^{(\beta)} R_I^{(\beta)}} \cdot \frac{dD_J}{D_J} + \eta_{I, \beta}, \quad (6.1)$$

где $\eta_{I, \beta}$ есть 1-форма, голоморфная в точке C^0 . Коэффициент при dD_J/D_J в формуле (6.1) голоморфен в точке C^0 . Поэтому из формулы (4.9) следует, что 1-форма $dV_{\mathbb{X}^n}^{(\beta)}$ мероморфна в точке C^0 и

$$dV_{\mathbb{X}^n}^{(\beta)} = Q_\beta \cdot \frac{dD_J}{D_J} + \eta_\beta, \quad (6.2)$$

где Q_β и η_β суть функция и 1-форма соответственно, голоморфные в точке C^0 , причем

$$Q_\beta(C^0) = \frac{\varepsilon^n}{2(n-1)} \sum_{I \subset J, |I|=n-1} \frac{D_{I \cup \{n\}, J}(C^0)}{R^{(\beta)}(C^0) R_I^{(\beta)}(C^0)} \cdot V_I^{(\beta)}(C^0). \quad (6.3)$$

Так как $D_J(C^0) = 0$, то из тождества Якоби (4.2) следует, что

$$\frac{D_{I \cup \{n\}, J}(C^0)}{R^{(\beta)}(C^0) R_I^{(\beta)}(C^0)} = \pm i$$

для всех $I \subset J$ таких, что $|I| = n-1$. Значит,

$$Q_\beta(C^0) = \frac{i}{2(n-1)} \sum_{I \subset J, |I|=n-1} \pm V_I^{(\beta)}(C^0) \quad (6.4)$$

при подходящем выборе знаков $\pm$.

Так как 1-форма $dV_{\mathbb{X}^n}^{(\beta)}$ замкнута, то функция $Q_\beta(C)$ постоянна на гиперповерхности $\mathcal{H}_J$ в окрестности точки C^0 . Значит,

$$Q_\beta(C) = Q_\beta(C^0) + D_J(C) F_\beta(C),$$

где функция F_β голоморфна в точке C^0 . Следовательно, равенство (6.2) может быть переписано в виде

$$dV_{\mathbb{X}^n}^{(\beta)} = Q_\beta(C^0) \cdot \frac{dD_J}{D_J} + \omega_\beta, \quad (6.5)$$

где ω_β – 1-форма, голоморфная в точке C^0 .

Нам нужно доказать, что число $Q_\beta(C^0)$ чисто мнимо для любых C^0 и β . Интеграл 1-формы $dV_{\mathbb{X}^n}^{(\beta)}$ вдоль малого контура, обходящего вокруг $\mathcal{H}_J$, равен $2\pi i Q_\beta(C^0)$. Значит, число $Q_\beta(C^0)$ не изменяется при непрерывных деформациях пары (C^0, β) таких, что C^0 остается в множестве $\mathcal{H}_J^{\text{reg}} \setminus \bigcup_{K \neq J} \mathcal{H}_K$ и путь β все время ведет в точку C^0 и целиком содержится в $\mathfrak{X}$, за исключением его конечной точки C^0 . Гиперповерхность $\mathcal{H}_J$ неприводима, так как $n \geq 3$. Значит, множество $\mathcal{H}_J^{\text{reg}} \setminus \bigcup_{K \neq J} \mathcal{H}_K$ связно. Кроме того, если точка C^0 непрерывно движется по этому множеству, то мы всегда можем непрерывно изменять ведущий в нее путь β . Следовательно, нам достаточно доказать, что число $Q_\beta(C^0)$ чисто мнимо для какой-нибудь одной точки C^0 и для всех путей β , ведущих в нее.

Выберем точку C^0 следующим образом. Возьмем в пространстве $\mathbb{X}^{n-2}$ правильный $(n-2)$ -мерный симплекс $[u_1 \dots u_{n-1}]$ с ребром 1 и обозначим центр этого симплекса через u_0 . Пусть $\underline{C}$ – матрица Грама точек $u_0, \dots, u_{n-1}$ (в стандартной векторной модели пространства $\mathbb{X}^{n-2}$). Тогда $\underline{C} \in \partial \mathcal{H}_{\mathbb{X}^{n-1}} \cap \mathcal{H}_{(n-1)}^{\text{reg}}$ и все собственные главные миноры матрицы $\underline{C}$ ненулевые (см. доказательство леммы 5.2). Рассмотрим пространство L всех матриц $C \in \mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{R})$, для которых их верхняя левая угловая подматрица C_J размера $n \times n$ совпадает с $\underline{C}$.

Тогда $L \subset \mathcal{H}_J^{\text{reg}}(\mathbb{R})$. В качестве координат в пространстве L можно взять матричные элементы $c_{0n}, c_{1n}, \dots, c_{n-1,n}$. Каждый главный минор $D_K(C)$ такой, что $n \in K$, становится на L многочленом $P_K(c_{0n}, \dots, c_{n-1,n})$. Из того, что все собственные главные миноры матрицы $\underline{C}$ ненулевые, следует, что ни один из многочленов P_K не равен нулю тождественно. Значит, найдутся вещественные числа $c_{0n}^0, \dots, c_{n-1,n}^0$ такие, что $P_K(c_{0n}^0, \dots, c_{n-1,n}^0) \neq 0$ для всех K таких, что $n \in K$. Тогда все главные миноры полученной матрицы C^0 , кроме минора D_J , будут ненулевыми, значит, она будет лежать в множестве $\mathcal{H}_J^{\text{reg}}(\mathbb{R}) \setminus \bigcup_{K \neq J} \mathcal{H}_K$.

Теперь покажем, что $Q_\beta(C^0) \in i\mathbb{R}$ для любого пути β из C^* в C^0 , лежащего в $\mathfrak{X}$, за исключением его конечной точки C^0 . Для каждого подмножества $I \subset J$ такого, что $|I| = n - 1$, матрица C_I^0 является матрицей Грама вершин невырожденного симплекса, значит $C_I^0 \in \mathcal{C}_{\mathbb{X}^{n-2}}$. Следовательно, из теоремы 1.3 для $\mathbb{X}^{n-2}$ вытекает, что $V_I^{(\beta)}(C^0) \in \mathbb{R}$. Теперь из равенства (6.4) следует, что $Q_\beta(C^0) \in i\mathbb{R}$.

Таким образом, мы доказали, что 1-форма $d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$ удовлетворяет всем условиям леммы 3.2. Значит, функция $\mathcal{J}(d\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}) = \tilde{V}_{\mathbb{X}^n} - V_{\mathbb{X}^n}^*$ вполне вещественна на множестве $\mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}$. (Напомним, что $V_{\mathbb{X}^n}^* = V_{\mathbb{X}^n}(C^*)$.) Так как $V_{\mathbb{X}^n}^* \in \mathbb{R}$, то отсюда следует, что функция $\tilde{V}_{\mathbb{X}^n}$ вполне вещественна на $\mathcal{C}_{\mathbb{X}^n}$, что завершает доказательство теоремы 1.3.

Шаг индукции в доказательстве теоремы 1.2. Пусть n нечетно и $n \geq 3$. Предположим, что утверждение теоремы 1.2 верно для Λ^{n-2} . Докажем его для Λ^n . Утверждение теоремы 1.2 может быть переформулировано следующим образом.

Для любого элемента $\gamma \in \pi = \pi_1(\mathfrak{X}, C^)$ функция*

$$\tilde{W}_\gamma = i(M_\gamma \tilde{V}_{\Lambda^n} - (-1)^{\text{lk}(\gamma, \mathcal{H})} \tilde{V}_{\Lambda^n}) \quad (6.6)$$

вполне вещественна на $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$.

Мы хотим применить лемму 3.10 к 1-форме $d\tilde{V}_{\Lambda^n}$. Условия (А) и (Б) из леммы 3.2 были проверены в § 5, условие (ii) очевидно, условия (iii) и (iv) выполнены согласно предложению 4.2 и лемме 4.3. Главная ветвь dV_{Λ^n} 1-формы $d\tilde{V}_{\Lambda^n}$ корректно определена и вещественна в области U , значит условие (i)' тоже выполнено.

Условие (i)'' для 1-формы $d\tilde{V}_{\Lambda^n}$ утверждает, что все 1-формы $d\tilde{W}_\gamma$ вполне вещественны на $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$. Докажем это. Очевидно, что $M_\gamma \tilde{R} = (-1)^{\text{lk}(\gamma, \mathcal{H})} \tilde{R}$ и $M_\gamma \tilde{R}_I = (-1)^{\text{lk}(\gamma, \mathcal{H}_I)} \tilde{R}_I$. Из равенства (4.8) следует, что

$$M_\gamma d\tilde{\alpha}_I = (-1)^{\text{lk}(\gamma, \mathcal{H}) + \text{lk}(\gamma, \mathcal{H}_I)} d\tilde{\alpha}_I. \quad (6.7)$$

Коэффициент зацепления петли γ и гиперповерхности $\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_{I,(n)}$ в пространстве $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C})$ равен коэффициенту зацепления петли $\text{pr}_I(\gamma)$ и гиперповерхности $\mathcal{H}_{(n-2)}$ в пространстве $\mathcal{G}_{(n-2)}(\mathbb{C})$. Поэтому, сопоставляя равенства (4.9), (6.6) и (6.7), мы видим, что

$$d\tilde{W}_{\gamma,(n)} = \frac{(-1)^{\text{lk}(\gamma, \mathcal{H})+1}}{n-1} \sum_{\substack{I \subset \{0, \dots, n\} \\ |I|=n-1}} (-1)^{\text{lk}(\gamma, \mathcal{H}_I)} \tilde{\text{pr}}_I^*(\tilde{W}_{\text{pr}_I(\gamma), (n-2)}) d\tilde{\alpha}_{I,(n)}. \quad (6.8)$$

По предположению индукции функции $\widetilde{W}_{\text{pr}_I(\gamma), (n-2)}$ вполне вещественны на множестве $\mathcal{C}_{\Lambda^{n-2}}$. Значит, функции $\widetilde{\text{pr}}_I^*(\widetilde{W}_{\text{pr}_I(\gamma), (n-2)})$ вполне вещественны на $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$. С другой стороны, из формулы (4.8) следует, что 1-формы $d\widetilde{\alpha}_{I, (n)}$ вполне вещественны на $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$. Следовательно, из формулы (6.8) вытекает, что 1-форма $d\widetilde{W}_{\gamma, (n)}$ вполне вещественна на $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$.

Докажем, что 1-форма $d\widetilde{V}_{\Lambda^n}$ удовлетворяет условию (v)'. Так же, как в доказательстве теоремы 1.3, пусть C^0 – гладкая точка гиперповерхности $\mathcal{H}_J$, где $|J| = n$, не лежащая ни на одной из гиперповерхностей $\mathcal{H}_K$, $K \neq J$, и пусть β – путь из C^* в C^0 , содержащийся в многообразии $\mathfrak{X}$, за исключением его концевой точки C^0 . Мы можем опять предполагать, что $J = \{0, \dots, n-1\}$. Формулы (6.4) и (6.5) получаются дословно так же, как в доказательстве теоремы 1.3. Нам нужно доказать, что числа $Q_\beta(C^0)$ вещественны для любых C^0 и β . Как в доказательстве теоремы 1.3, нам достаточно это сделать для какой-нибудь одной точки C^0 и всех путей β , ведущих в нее. Выберем матрицу C^0 точно так же, как в доказательстве теоремы 1.3. Напомним, что C_J^0 – матрица Грама точек $u_0, \dots, u_{n-1}$ в Λ^{n-2} таких, что $u_1, \dots, u_{n-1}$ суть вершины правильного $(n-2)$ -мерного симплекса, а u_0 – его центр. Матрицы C_I^0 лежат в области $\mathcal{C}_{\Lambda^{n-2}}$ для всех $I \subset J$ таких, что $|I| = n-1$, т.е. для всех $I = J \setminus \{j\}$, $j = 0, \dots, n-1$. Из утверждения теоремы 1.2 для Λ^{n-2} следует, что

$$\text{Re } V_I^{(\beta)}(C^0) = \pm V_{\Lambda^{n-2}}(C_I^0).$$

Подставляя это в равенство (6.4), мы получаем, что

$$\text{Im } Q_\beta(C^0) = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} s_j V_{\Lambda^{n-2}}(C_{J \setminus \{j\}}^0) \quad (6.9)$$

для некоторых коэффициентов $s_0, \dots, s_{n-1} \in \{-1, 1\}$.

Будем непрерывно менять пару (C^0, β) так, чтобы матрица C^0 оставалась в множестве $\mathcal{H}_J^{\text{reg}}(\mathbb{R}) \setminus \bigcup_{K \neq J} \mathcal{H}_K$. Тогда ее подматрица C_J^0 остается в множестве $\partial \mathcal{C}_{\Lambda^{n-1}}$. Очевидно, что коэффициенты s_j не изменяются при таких непрерывных деформациях. С другой стороны, как было отмечено выше, значение $Q_\beta(C^0)$ тоже не изменяется при таких деформациях. Значит, линейная комбинация

$$\sum_{j=0}^{n-1} s_j V_{\Lambda^{n-2}}(C_{J \setminus \{j\}}) \quad (6.10)$$

постоянна, когда матрица C пробегает некоторую окрестность точки C^0 на гиперповерхности $\mathcal{H}_J(\mathbb{R})$. Теперь заметим, что сумма (6.10) зависит не от всей матрицы C , а лишь от ее подматрицы C_J . При этом любая достаточно малая деформация матрицы C_J^0 , при которой она остается вещественной и вырожденной, продолжается до деформации пары (C^0, β) , в процессе которой C^0 остается в множестве $\mathcal{H}_J^{\text{reg}}(\mathbb{R}) \setminus \bigcup_{K \neq J} \mathcal{H}_K$. Действительно, деформация матрицы C^0 может быть выбрана такой, что матричные элементы $c_{0n}^0, \dots, c_{n-1,n}^0$ остаются неизменными, а деформация пути β легко строится ввиду гладкости гиперповерхности $\mathcal{H}_J$ в окрестности точки C^0 . Следовательно, линейная

комбинация

$$\sum_{j=0}^{n-1} s_j V(v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n-1}) \quad (6.11)$$

постоянна, если точки $v_0, \dots, v_{n-1} \in \Lambda^{n-2}$ движутся в достаточно малых окрестностях точек $u_0, \dots, u_{n-1}$ соответственно. Здесь $V(w_1, \dots, w_{n-1})$ обозначает $(n-2)$ -мерный объем симплекса в Λ^{n-2} с вершинами в точках $w_1, \dots, w_{n-1}$. Положим

$$V_j = V(v_0, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{n-1}), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

ЛЕММА 6.1. *Единственной (с точностью до умножения на число) линейной комбинацией объемов $V_0, \dots, V_{n-1}$, которая остается постоянной, когда точки $v_0, \dots, v_{n-1}$ движутся в достаточно малых окрестностях точек $u_0, \dots, u_{n-1}$ соответственно, является линейная комбинация*

$$V_0 - \sum_{j=1}^{n-1} V_j = 0. \quad (6.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (6.12) верно, так как симплекс $[v_1 \dots v_{n-1}]$ с объемом V_0 разбивается на n симплексов

$$[v_0 \dots v_{j-1} v_{j+1} \dots v_{n-1}], \quad j = 1, \dots, n-1,$$

с объемами $V_1, \dots, V_{n-1}$ соответственно.

Пусть теперь $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j V_j$ — какая-нибудь постоянная линейная комбинация. Возьмем $v_j = u_j$ при $j = 1, \dots, n-1$ и разрешим двигаться только точке v_0 . Тогда объем V_0 постоянен, а объемы $V_1, \dots, V_{n-1}$ становятся функциями точки v_0 . Из соображений симметрии очевидно, что градиенты этих функций в точке $v_0 = u_0$ суть касательные векторы $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ одной и той же длины к отрезкам $[u_0 u_1], \dots, [u_0 u_{n-1}]$ соответственно. Единственная линейная комбинация этих векторов, равная нулю, это $\xi_1 + \dots + \xi_{n-1}$. Значит, коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ должны быть все равны друг другу. Тогда в силу равенства (6.12)

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j V_j = (\lambda_0 + \lambda_1) V_0.$$

Однако очевидно, что объем V_0 не постоянен, если мы разрешаем двигаться всем точкам v_j , следовательно должно выполняться равенство $\lambda_0 + \lambda_1 = 0$.

Продолжим доказательство теоремы 1.2. Из леммы 6.1 следует, что линейная комбинация (6.11) пропорциональна линейной комбинации (6.12) и, значит, равна нулю. Следовательно, правая часть равенства (6.9) равна нулю, что завершает доказательство того, что 1-форма $d\tilde{V}_{\Lambda^n}$ удовлетворяет условию (v)'.

Главная ветвь $V_{\Lambda^n}(C)$ многозначной функции $\tilde{V}_{\Lambda^n}$ в области $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$ корректно определена и удовлетворяет нулевым граничным условиям, так как объем любого вырожденного симплекса равен нулю. Таким образом, лемма 3.10 может быть применена для 1-формы $d\tilde{V}_{\Lambda^n}$ и функции $\tilde{V}_{\Lambda^n}$. Из этой леммы следует, что функции $\tilde{W}_\gamma$ вполне вещественны на $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$ для всех $\gamma \in \pi$, что завершает доказательство теоремы 1.2.

§ 7. Изгибаемые многогранники и их объемы

В этом параграфе мы дадим строгое определение изгибаемого многогранника и переформулируем более точно теорему 1.1. Прежде всего, в теории изгибаемых многогранников, как правило, ограничиваются рассмотрением только симплициальных многогранников. Действительно, произвольная полиэдральная поверхность имеет симплициальное подразделение. Переходя к этому подразделению, мы вводим новые шарниры. Поэтому все изгибания исходной полиэдральной поверхности индуцируют изгибания получившейся симплициальной поверхности и, возможно, появляются какие-нибудь новые изгибания. Значит, теорема 1.1 для всех изгибаемых многогранников сразу следует из теоремы 1.1 для симплициальных изгибаемых многогранников. Ниже мы всегда будем работать только с симплициальными многогранниками.

Напомним, что k -мерным *псевдомногообразием* называется конечный симплициальный комплекс K такой, что:

- 1) каждый симплекс комплекса K содержится в k -мерном симплексе;
- 2) каждый $(k - 1)$ -мерный симплекс комплекса K содержится ровно в двух k -мерных симплексах;
- 3) K сильно связан, т.е. дополнение $K \setminus \text{Sk}^{k-2}(K)$ связно, где через $\text{Sk}^{k-2}(K)$ обозначен $(k - 2)$ -мерный остов комплекса K .

Говорят, что псевдомногообразие K *ориентировано*, если на его k -мерных симплексах выбраны ориентации так, что для любых двух k -мерных симплексов σ_1 и σ_2 с общей $(k - 1)$ -мерной гранью ориентации этой грани, индуцированные выбранными ориентациями симплексов σ_1 и σ_2 , противоположны друг другу.

Как и раньше, мы будем отождествлять пространство Лобачевского Λ^n с его стандартной векторной моделью в $\mathbb{R}^{1,n}$. Пусть Δ^k – аффинный симплекс с вершинами $v_0, \dots, v_k$. Назовем отображение $P: \Delta^k \rightarrow \Lambda^n$ *псевдолинейным*, если

$$P(\beta_0 v_0 + \dots + \beta_k v_k) = \frac{\beta_0 P(v_0) + \dots + \beta_k P(v_k)}{|\beta_0 P(v_0) + \dots + \beta_k P(v_k)|}$$

для любых неотрицательных чисел $\beta_0, \dots, \beta_k$ таких, что $\beta_0 + \dots + \beta_k = 1$, где $|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. Легко видеть, что ограничение псевдолинейного отображения на грань симплекса Δ^k тоже является псевдолинейным.

В дальнейшем мы будем предполагать, что размерность n не меньше 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть K – ориентированное $(n - 1)$ -мерное псевдомногообразие. *Ограниченным (симплициальным) многогранником* комбинаторного типа K в пространстве Лобачевского Λ^n назовем отображение $P: K \rightarrow \Lambda^n$ такое, что его ограничение на каждый симплекс псевдомногообразия K псевдолинейно. *Изгибанием* ограниченного многогранника комбинаторного типа K назовем непрерывное семейство многогранников $P_t: K \rightarrow \Lambda^n$, где t пробегает некоторый интервал (a, b) , такое, что длины всех ребер многогранника P_t постоянны при изменении t . Изгибание P_t называется *нетривиальным*, если отображения P_{t_1} и P_{t_2} не могут быть получены друг из друга при помощи

изометрии пространства Λ^n ни при каких достаточно близких друг к другу $t_1 \neq t_2$.

Отметим, что для ограниченных симплицальных многогранников требование постоянства длин ребер в процессе изгибания сразу же гарантирует, что все грани многогранника остаются конгруэнтными себе в процессе изгибания.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Определение 7.1 является естественным аналогом стандартного определения изгибаемого многогранника в евклидовом пространстве, использовавшегося в работах [10]–[15]. Единственное отличие состоит в том, что в евклидовом случае нужно использовать аффинные отображения вместо псевдолинейных. На самом деле использование псевдолинейных отображений в определении 7.1 удобно, но не обязательно. Если не требовать, чтобы ограничение отображения P на каждый симплекс псевдомногообразия K было псевдолинейным, а требовать лишь, чтобы ограничение отображения P на каждый симплекс Δ псевдомногообразия K было непрерывным отображением на выпуклую оболочку точек $P(v)$, где v пробегает все вершины симплекса Δ , и при этом не различать многогранники одного комбинаторного типа такие, что все пары их соответствующих вершин совпадают, то такое определение симплицального многогранника будет эквивалентно определению 7.1 (именно такое определение использовано в работе [8]).

Пусть

$$[v_1^{(s)} \dots v_n^{(s)}], \quad s = 1, \dots, q,$$

– все положительно ориентированные $(n - 1)$ -мерные симплексы псевдомногообразия K . По определению *обобщенным ориентированным объемом* многогранника $P: K \rightarrow \Lambda^n$ называется число

$$\mathcal{V}_K(P) = \sum_{s=1}^q V_{\text{ор}}(\mathbf{o}, P(v_1^{(s)}), \dots, P(v_n^{(s)})), \quad (7.1)$$

где $\mathbf{o}$ – произвольная точка в Λ^n и через $V_{\text{ор}}(v_0, \dots, v_n)$ обозначен ориентированный объем симплекса в Λ^n с вершинами $v_0, \dots, v_n$ с ориентацией, заданной указанным порядком вершин. Легко видеть, что число $\mathcal{V}_K(P)$ не зависит от выбора точки $\mathbf{o}$.

Эквивалентное определение обобщенного ориентированного объема может быть дано следующим образом. Для каждой точки x в дополнении к поверхности $P(K)$ обозначим через $\lambda_P(x)$ алгебраическое число пересечений пути, уходящего из точки x на бесконечность, и $(n - 1)$ -мерного цикла $P(K)$. Легко показать, что оно не зависит от выбора пути. Функция $\lambda_P(x)$ называется *индикаторной функцией* многогранника P . Тогда

$$\mathcal{V}_K(P) = \int_{\Lambda^n} \lambda_P(x) dV(x), \quad (7.2)$$

где $dV(x)$ – стандартный элемент объема в Λ^n .

Если $P: K \rightarrow \Lambda^n$ – вложение, то $\mathcal{V}_K(P)$ есть не что иное, как обычный ориентированный объем области, ограниченной полиэдральной поверхностью $P(K)$.

Следующая теорема есть более точная переформулировка теоремы 1.1, являющейся основным результатом настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть n нечетно. Пусть K – ориентированное $(n-1)$ -мерное псевдомногообразие и $P_t: K \rightarrow \Lambda^n$, $t \in (a, b)$, – изгибание ограниченного многогранника комбинаторного типа K . Тогда обобщенный ориентированный объем $\mathcal{V}_K(P_t)$ постоянен.

Определение 7.1 допускает, что изгибаемые многогранники могут быть самопересекающимися и вырожденными. Например, можно построить пример изгибаемого многогранника в смысле этого определения, который геометрически будет представлять собой объединение границ двух тетраэдров с общим ребром (детали см. в [8; § 2]). Естественно, эти два тетраэдра можно вращать независимо друг от друга вокруг их общего ребра. Рассматривая вопрос о существовании изгибаемых многогранников, нам хотелось бы избежать таких “патологических” примеров. Для этого к определению изгибаемого многогранника нужно добавить некоторые дополнительные условия. Например, в работе [8] добавлены следующие два условия.

1. Образ каждого симплекса псевдомногообразия K при отображении P есть невырожденный симплекс той же размерности в Λ^n .
2. Симплициальный комплекс K не может быть представлен в виде объединения двух своих подкомплексов K_1 и K_2 таких, что

$$\dim K_1 = \dim K_2 = n - 1$$

и множество $P(K_1 \cap K_2)$ лежит в некоторой $(n-2)$ -мерной плоскости в Λ^n .

Многогранники, удовлетворяющие условию 1, мы будем называть *многогранниками с невырожденными гранями*, а многогранники, удовлетворяющие обоим условиям 1 и 2, – *невырожденными многогранниками*. В работе [7] автором были построены примеры невырожденных изгибаемых многогранников в пространствах $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^n$ и Λ^n всех размерностей. Этот результат делает содержательным утверждение теоремы 7.3.

Вначале мы докажем теорему 7.3 для многогранников с невырожденными гранями. С геометрической точки зрения только этот случай содержательный. Тем не менее для полноты нашего результата затем мы покажем, что теорема 7.3 для всех изгибаемых многогранников в смысле определения 7.1 следует из теоремы 7.3 для многогранников с невырожденными гранями.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.4. Можно легко модифицировать определение 7.1 так, чтобы получить строгое определение не обязательно симплициального изгибаемого многогранника. А именно, в определении псевдомногообразия нужно заменить симплициальный комплекс на клеточный комплекс, склеенный из аффинных выпуклых многогранников вдоль изоморфизмов их граней. В этом случае нет подходящего аналога псевдолинейного отображения, поэтому требование того, чтобы ограничение отображения P на каждую клетку комплекса K было псевдолинейным, нужно заменить на требование того, чтобы ограничение

отображения P на каждую клетку σ комплекса K было непрерывным отображением на выпуклую оболочку точек $P(v)$, где v пробегает все вершины клетки σ , как в замечании 7.2. Обобщенный ориентированный объем многогранника $P: K \rightarrow \Lambda^n$ задается той же формулой (7.2). Однако, как уже было отмечено в начале этого параграфа, теорема 1.1 для произвольных изгибаемых многогранников сразу следует из теоремы 1.1 для симплицальных изгибаемых многогранников. Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем только симплицальные изгибаемые многогранники в смысле определения 7.1.

§ 8. Конфигурационное пространство многогранников с заданными длинами ребер

Пусть K – ориентированное $(n-1)$ -мерное псевдомногообразие с m вершинами и r ребрами, и пусть $\mathbb{V}(K)$ и $\mathbb{E}(K)$ – множества вершин и ребер псевдомногообразия K соответственно. Многогранник $P: K \rightarrow \Lambda^n$ полностью определяется положением его вершин. Для каждой вершины v псевдомногообразия K обозначим через $\mathbf{x}_v$ вектор, отвечающий точке $P(v)$ в стандартной векторной модели пространства Λ^n , и обозначим через $x_{v,0}, \dots, x_{v,n}$ координаты вектора $\mathbf{x}_v$. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{m(n+1)} = (\mathbb{R}^{1,n})^m$ с координатами $x_{v,j}$, $v \in \mathbb{V}(K)$, $j = 0, \dots, n$. Точка этого пространства, соответствующая многограннику $P: K \rightarrow \Lambda^n$, тоже будет обозначаться через P . Тогда множество всех ограниченных многогранников $P: K \rightarrow \Lambda^n$ комбинаторного типа K есть подмножество пространства $\mathbb{R}^{m(n+1)}$, задаваемое уравнениями и неравенствами

$$\langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = x_{v,0}^2 - x_{v,1}^2 - \dots - x_{v,n}^2 = 1, \quad (8.1)$$

$$x_{v,0} > 0, \quad (8.2)$$

где v пробегает все вершины псевдомногообразия K .

Зафиксируем набор $\ell = (\ell_e)$ положительных вещественных чисел, индексированных ребрами $e \in \mathbb{E}(K)$. Тогда конфигурационное пространство $\Sigma^+(\ell)$ всех многогранников $P: K \rightarrow \Lambda^n$ с заданным набором длин ребер ℓ есть подмножество пространства $\mathbb{R}^{m(n+1)}$, задаваемое m уравнениями (8.1), m неравенствами (8.2) и r уравнениями

$$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = x_{u,0}x_{v,0} - x_{u,1}x_{v,1} - \dots - x_{u,n}x_{v,n} = \text{ch } \ell_{[uv]}, \quad (8.3)$$

где $[uv]$ пробегает все ребра псевдомногообразия K . (Конечно же, конфигурационное пространство $\Sigma^+(\ell)$ может быть пустым.) Мы также обозначим через $\Sigma(\ell)$ вещественное аффинное многообразие в $\mathbb{R}^{m(n+1)}$, задаваемое $m+r$ квадратичными уравнениями (8.1) и (8.3). Так как комплекс K связан, из уравнений (8.3) следует, что для любой точки $P = (x_{v,j}) \in \Sigma(\ell)$ либо все координаты $x_{v,0}$ положительны, либо все координаты $x_{v,0}$ отрицательны. Поэтому

$$\Sigma(\ell) = \Sigma^+(\ell) \cup (-\Sigma^+(\ell)).$$

Следующее предложение является переформулировкой теоремы 7.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Пусть n нечетно. Тогда функция $\mathcal{V}_K(P)$ постоянна на каждой связной компоненте множества $\Sigma^+(\ell)$.

Любое вещественное аффинное многообразие $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ обладает естественной стратификацией, которая может быть построена следующим образом (см. [34; § 11, (b)]). Пусть $d = \dim \Sigma$. Тогда $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где Σ_1 – объединение всех d -мерных неприводимых компонент многообразия Σ и Σ_2 – объединение всех неприводимых компонент многообразия Σ размерностей, строго меньших, чем d . Положим

$$M = \Sigma_1^{\text{reg}} \setminus \Sigma_2, \quad \Sigma' = \Sigma_1^{\text{sing}} \cup \Sigma_2;$$

тогда $\Sigma = M \sqcup \Sigma'$. Множество Σ' является вещественным аффинным многообразием размерности, строго меньшей, чем d . Все связные компоненты множества M берутся в качестве d -мерных стратов. Затем та же процедура рекурсивно применяется к многообразию Σ' . Полученная таким образом стратификация будет называться *стандартной стратификацией* многообразия Σ . Согласно этой конструкции каждый страт S этой стратификации является связным открытым (в аналитической топологии) подмножеством множества гладких точек неприводимого вещественного аффинного многообразия. Отсюда вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Пусть S – страт стандартной стратификации вещественного аффинного многообразия $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ и Ξ – замыкание страта S в топологии Зарисского в $\mathbb{C}^N$. Тогда Ξ есть неприводимое комплексное аффинное многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} \Xi = \dim_{\mathbb{R}} S$ и $S \subset \Xi^{\text{reg}}$.

Интересующее нас множество $\Sigma^+(\ell)$, вообще говоря, не является вещественным аффинным многообразием, но является объединением некоторых компонент связности вещественного аффинного многообразия $\Sigma(\ell)$. Мы будем называть ограничение стандартной стратификации многообразия $\Sigma(\ell)$ на множество $\Sigma^+(\ell)$ *стандартной стратификацией* множества $\Sigma^+(\ell)$.

Так как стандартная стратификация множества $\Sigma^+(\ell)$ состоит из конечного числа стратов, то, чтобы доказать предложение 8.1, нам достаточно показать, что функция $\mathcal{V}_K(P)$ постоянна на каждом страте S стандартной стратификации множества $\Sigma^+(\ell)$. Это доказательство будет состоять из трех шагов. Сначала мы покажем, используя формулу Шлефли, что функция $\mathcal{V}_K(P)$, ограниченная на страт S , может быть аналитически продолжена до многозначной аналитической функции $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$ на плотном открытом по Зарисскому подмножестве $\Upsilon \subset \Xi^{\text{reg}}$, где Ξ – замыкание множества S в топологии Зарисского в $\mathbb{C}^{m(n+1)}$. Потом мы выведем из теоремы 1.2, что аналитическая функция $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$ на самом деле однозначна. Наконец, используя теорему Лиувилля о целых функциях, мы покажем, что функция $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$ постоянна. Эта схема будет реализована в § 9 и § 10 для изгибаемых многогранников с невырожденными гранями. Таким образом, мы докажем теорему 7.3 для таких изгибаемых многогранников. В § 11 мы покажем, что теорема 7.3 для произвольных многогранников следует из теоремы 7.3 для многогранников с невырожденными гранями.

§ 9. Доказательство теоремы 7.3 для многогранников с невырожденными гранями

В этом параграфе предполагается, что все рассматриваемые многогранники имеют невырожденные грани. Заметим, что свойство многогранника $P: K \rightarrow \Lambda^n$ иметь невырожденные грани полностью определяется его комбинаторным типом и набором длин ребер. Поэтому в этом параграфе мы рассматриваем только такие пары (K, ℓ) , для которых многогранники комбинаторного типа K с набором длин ребер ℓ имеют невырожденные грани.

Определим *ориентированный двугранный угол* α_F многогранника $P: K \rightarrow \Lambda^n$ при $(n-2)$ -мерной грани F псевдомногообразия K следующим образом. Пусть σ_1, σ_2 — два $(n-1)$ -мерных симплекса псевдомногообразия K , содержащие грань F . Возьмем произвольную точку $\mathbf{x} \in P(F)$. Пусть $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — единичные векторы в касательных пространствах $T_{\mathbf{x}}P(\sigma_1)$ и $T_{\mathbf{x}}P(\sigma_2)$ соответственно, ортогональные к подпространству $T_{\mathbf{x}}P(F)$ и направленные внутрь симплексов $P(\sigma_1)$ и $P(\sigma_2)$ соответственно. Пусть $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ — векторы внешних нормалей к симплексам $P(\sigma_1)$ и $P(\sigma_2)$ соответственно в точке $\mathbf{x}$, т.е. единичные векторы в касательном пространстве $T_{\mathbf{x}}\Lambda^n$, ортогональные подпространствам $T_{\mathbf{x}}P(\sigma_1)$ и $T_{\mathbf{x}}P(\sigma_2)$ соответственно и такие, что произведение направления вектора $\mathbf{m}_i$ на положительную ориентацию симплекса $P(\sigma_i)$ дает положительную ориентацию пространства Λ^n . Назовем положительным направление вращения вокруг грани $P(F)$ от вектора $\mathbf{m}_1$ к вектору $\mathbf{n}_1$ и обозначим через $\alpha_F = \alpha_F(P)$ угол поворота от вектора $\mathbf{n}_1$ до вектора $\mathbf{n}_2$ в этом положительном направлении. Этот угол определен с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Мы будем всегда рассматривать угол α_F как элемент группы $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Легко видеть, что угол α_F не зависит от выбора точки $\mathbf{x}$ и не меняется, если мы меняем местами симплексы σ_1 и σ_2 .

Формулу Шлефли для дифференциала объема обычно пишут для выпуклых многогранников, как в § 1. Однако выпуклость совершенно не важна. Следующий вариант формулы Шлефли непосредственно следует из формулы Шлефли для симплекса в Λ^n , формулы (7.1) и приведенного выше определения ориентированных двугранных углов.

ЛЕММА 9.1 (формула Шлефли). *Дифференциал обобщенного ориентированного объема многогранника $P: K \rightarrow \Lambda^n$ с невырожденными гранями выражается по формуле*

$$d\mathcal{V}_K(P) = -\frac{1}{n-1} \sum_{F \subset K, \dim F = n-2} V_F(P) d\alpha_F(P), \quad (9.1)$$

где сумма берется по всем $(n-2)$ -мерным граням F псевдомногообразия K и $V_F(P)$ есть (неориентированный) $(n-2)$ -мерный объем симплекса $P(F)$.

Ограничим уравнение (9.1) на множество $\Sigma^+(\ell)$. Для каждой грани F ее объем $V_F(P)$ зависит лишь от набора длин ребер ℓ и, значит, постоянен на множестве $\Sigma^+(\ell)$; мы обозначим этот объем через $V_{F,\ell}$.

ЛЕММА 9.2. Для каждой $(n - 2)$ -мерной грани F псевдомногообразия K ограничение функции $\exp(i\alpha_F(P))$ на множество $\Sigma^+(\ell)$ совпадает с ограничением некоторого многочлена $Q_F(P)$ от координат $x_{v,j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ_1, σ_2 – два $(n - 1)$ -мерных симплекса псевдомногообразия K , содержащих грань F . Обозначим вершины симплексов σ_1 и σ_2 , противоположные грани F , через v_0 и v_1 соответственно и вершины грани F через $v_2, \dots, v_n$, где порядок вершин выбран так, чтобы порядок $v_1, v_2, \dots, v_n$ давал положительную ориентацию симплекса σ_2 . Пусть C – матрица Грама векторов $\mathbf{x}_{v_0}, \dots, \mathbf{x}_{v_n}$. Из определения ориентированных двугранных углов следует, что знак синуса угла $\alpha_F(P)$ совпадает со знаком определителя $\det(\mathbf{x}_{v_0}, \dots, \mathbf{x}_{v_n})$. Квадрат этого определителя равен $(-1)^n D(C)$. Поэтому из формул (4.1) следует, что

$$\cos \alpha_F(P) = \frac{(-1)^{n-1} D_{I', I''}(C)}{\sqrt{D_{I'}(C) D_{I''}(C)}},$$

$$\sin \alpha_F(P) = \sqrt{\frac{(-1)^n D_I(C)}{D_{I'}(C) D_{I''}(C)}} \cdot \det(\mathbf{x}_{v_0}, \dots, \mathbf{x}_{v_n}),$$

где $I = \{2, \dots, n\}$, $I' = \{0, 2, \dots, n\}$ и $I'' = \{1, 2, \dots, n\}$. Миноры $D_I(C)$, $D_{I'}(C)$ и $D_{I''}(C)$ постоянны на множестве $\Sigma^+(\ell)$, а $D_{I', I''}(C)$ и $\det(\mathbf{x}_{v_0}, \dots, \mathbf{x}_{v_n})$ являются многочленами от координат $x_{v,j}$. Значит, ограничения функций $\cos \alpha_F(P)$ и $\sin \alpha_F(P)$ на множество $\Sigma^+(\ell)$ являются многочленами, следовательно, ограничение функции $\exp(i\alpha_F(P))$ на множество $\Sigma^+(\ell)$ – тоже многочлен.

Вообще говоря, многочлены $Q_F(P)$ такие, что $\exp(i\alpha_F(P)) = Q_F(P)$ на множестве $\Sigma^+(\ell)$, не единственны. Начиная с этого места, мы выберем какие-нибудь многочлены, обладающие этим свойством.

Теперь пусть S – страт стандартной стратификации множества $\Sigma^+(\ell)$. Так как S связан и объемы $V_F(P) = V_{F,\ell}$ постоянны на S , мы можем проинтегрировать уравнение (9.1). В результате мы получим, что на страте S выполнено равенство

$$\mathcal{V}_K(P) = \frac{i}{n-1} \sum_{F \subset K, \dim F = n-2} V_{F,\ell} \operatorname{Ln} Q_F(P) + c_S, \quad (9.2)$$

где c_S – вещественная константа, зависящая только от страта S . Эту формулу следует понимать следующим образом. Каждое слагаемое $V_{F,\ell} \operatorname{Ln} Q_F(P)$ может нетривиальным образом изменяться при обходе вдоль какой-нибудь петли в S . Однако вся сумма в правой части формулы (9.2) не меняется при обходах вдоль петель в S , так как нам известно, что объем $\mathcal{V}_K(P)$ корректно определен на S . Формула (9.2) означает, что мы можем выбрать ветвь суммы в правой части так, что указанное равенство будет выполнено. (Выбор другой ветви приведет лишь к изменению константы c_S .)

Пусть Ξ – замыкание множества S в топологии Зарисского в $\mathbb{C}^{m(n+1)}$. По предложению 8.2 Ξ неприводимо, $\dim_{\mathbb{C}} \Xi = \dim_{\mathbb{R}} S$ и $S \subset \Xi^{\text{reg}}$. Поэтому если аналитическое продолжение некоторой функции, определенной на множестве S , вдоль пути в многообразии Ξ существует, то оно единственно.

Углы $\alpha_F(P)$ корректно определены для всех $P \in S$. Значит, многочлены $Q_F(P)$ не принимают нулевого значения в точках страта S . Однако многочлены $Q_F(P)$ могут принимать нулевое значение в точках многообразия Ξ . Пусть $\Upsilon \subset \Xi$ – открытое по Зарисскому подмножество, состоящее из всех гладких точек P многообразия Ξ , в которых значения всех многочленов Q_F ненулевые. Подмножество Υ непусто, так как оно содержит S , значит, Υ плотно в Ξ . Мы получаем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3. *Функция $\mathcal{V}_K(P)$ допускает аналитические продолжения вдоль всех путей в многообразии Υ . Получаемая многозначная аналитическая функция $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$ на Υ задается по формуле*

$$\tilde{\mathcal{V}}_K(P) = \frac{i}{n-1} \sum_{F \subset K, \dim F = n-2} V_{F,\ell} \operatorname{Ln} Q_F(P) + c_S. \quad (9.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.4. Формулу (9.3) следует понимать следующим образом: для любой ветви функции $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$ можно выбрать ветви логарифмов в правой части так, что равенство (9.3) будет выполнено. Однако, возможно, не для любого выбора ветвей логарифмов в правой части формулы (9.3) будет получаться какая-то ветвь функции $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$. Такая ситуация довольно часто возникает при работе с многозначными функциями и может быть проиллюстрирована на следующем простейшем примере: равенство $2\sqrt{z} = \sqrt{z} + \sqrt{z}$, конечно же, выполнено при правильном выборе ветвей квадратных корней, однако ветви квадратных корней в правой части могут быть выбраны так, что их сумма будет равна нулю, а не $2\sqrt{z}$.

Так как все объемы $V_{F,\ell}$ являются вещественными константами, из предложения 9.3 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 9.5. *Любые две ветви многозначной аналитической функции $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$ в окрестности произвольной точки $P_0 \in \Upsilon$ отличаются друг от друга на вещественную константу.*

Рассмотрим формулу (7.1) для точки $\mathbf{o} = (1, 0, \dots, 0) \in \Lambda^n \subset \mathbb{R}^{1,n}$. Обозначим через $C^{(s)} = (c_{jk}^{(s)})$ матрицу Грама вершин симплекса $[\mathbf{o}P(v_1^{(s)}) \dots P(v_n^{(s)})]$, $s = 1, \dots, q$. Для каждого $I \subset \{0, \dots, n\}$ положим $D_I^{(s)} = D_I(C^{(s)})$. Чтобы указать зависимость матриц $C^{(s)}$ и миноров $D_I^{(s)}$ от многогранника P , мы иногда будем писать $C^{(s)}(P)$ и $D_I^{(s)}(P)$ соответственно.

Все элементы всех матриц $C^{(s)}$ являются многочленами от координат $x_{v,j}$, т.е. регулярными функциями на Ξ . Поэтому все миноры $D_I^{(s)}$ тоже являются регулярными функциями на Ξ . Пусть $\Omega \subset \Xi$ – открытое по Зарисскому подмножество, состоящее из всех гладких точек P многообразия Ξ таких, что ни один из миноров $D_I^{(s)}$, где $s = 1, \dots, q$, $I \subset \{0, \dots, n\}$, не обращается в нуль в P .

ЛЕММА 9.6. *Подмножество $\Omega \cap S$ плотно в S (в аналитической топологии).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа изометрий $\text{Isom}(\Lambda^n)$ естественным образом действует на множестве $\Sigma^+(\ell)$. Это действие согласовано со стандартной стратификацией, т.е. образ любого страта под действием преобразования, задаваемого любым элементом группы $\text{Isom}(\Lambda^n)$, снова является стратом. Так как подгруппа $\text{Isom}^+(\Lambda^n)$ сохраняющих ориентацию изометрий связна, а число стратов конечно, то каждый страт инвариантен по отношению к действию группы $\text{Isom}^+(\Lambda^n)$. Пусть P_0 – точка страта S . Тогда $(n-1)$ -мерные симплексы $[P_0(v_1^{(s)}) \dots P_0(v_n^{(s)})]$, $s = 1, \dots, q$, невырожденные. Значит, существует изометрия $h \in \text{Isom}^+(\Lambda^n)$, сколь угодно близкая к тождественной, такая, что для $P = h \circ P_0$ все n -мерные симплексы $[P(v_1^{(s)}) \dots P(v_n^{(s)})]$, $s = 1, \dots, q$, невырожденные. Тогда $P \in \Omega \cap S$.

В частности, мы получаем, что множество Ω непусто. По предложению 8.2 многообразие Ξ неприводимо. Значит, Ω является плотным открытым по Зарисскому подмножеством многообразия Ξ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.7. Если размерность n нечетна, то функция $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$ из предложения 9.3 является однозначной голоморфной функцией на Υ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем какую-нибудь точку $P_0 \in \Omega \cap S$. Все симплексы $[\mathbf{o} P_0(v_1^{(s)}) \dots P_0(v_n^{(s)})]$, $s = 1, \dots, q$, невырожденные. Положим $\varepsilon_s = 1$, если симплекс $[\mathbf{o} P_0(v_1^{(s)}) \dots P_0(v_n^{(s)})]$ положительно ориентирован, и $\varepsilon_s = -1$, если симплекс $[\mathbf{o} P_0(v_1^{(s)}) \dots P_0(v_n^{(s)})]$ отрицательно ориентирован. Тогда для всех многогранников $P \in S$ в некоторой окрестности многогранника P_0 формула (7.1) принимает вид

$$\mathcal{V}_K(P) = \sum_{s=1}^q \varepsilon_s V(\mathbf{o}, P(v_1^{(s)}), \dots, P(v_n^{(s)})),$$

где через $V(v_0, \dots, v_n)$ обозначен неориентированный объем симплекса с вершинами $v_0, \dots, v_n$. Используя функцию $V_{\Lambda^n}(C)$, мы можем переписать это равенство в виде

$$\mathcal{V}_K(P) = \sum_{s=1}^q \varepsilon_s V_{\Lambda^n}(C^{(s)}(P)). \quad (9.4)$$

Согласно предложению 9.3 функция $\mathcal{V}_K(P)$ вещественно-аналитична на S и допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути γ в многообразии Υ , начинающегося в точке P_0 . Из того, что P_0 – гладкая точка многообразия Ξ и $\dim_{\mathbb{C}} \Xi = \dim_{\mathbb{R}} S$, следует, что аналитическое продолжение функции $\mathcal{V}_K(P)$ вдоль γ единственно. Чтобы доказать, что получающаяся аналитическая функция $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$ однозначна, нам нужно доказать, что функция $\mathcal{V}_K^{(\gamma)}(P)$, получающаяся из функции $\mathcal{V}_K(P)$ при ее аналитическом продолжении вдоль произвольной петли γ в Υ с концами в точке P_0 , есть снова та же функция $\mathcal{V}_K(P)$. Более того, нам достаточно доказать это утверждение только для петель γ , содержащихся в множестве $\Upsilon \cap \Omega$. Действительно, так как Ω есть плотное открытое по Зарисскому подмножество многообразия Ξ , то любая петля в Υ гомотопна петле, содержащейся в $\Upsilon \cap \Omega$.

Пусть γ – петля в множестве $\Upsilon \cap \Omega$ с концами в точке P_0 . Согласно следствию 9.5 $\mathcal{V}_K^{(\gamma)}(P) = \mathcal{V}_K(P) + c_\gamma$ для некоторой вещественной константы c_γ . Пусть γ^2 – петля, проходящая дважды вдоль γ . Тогда $\mathcal{V}_K^{(\gamma^2)}(P) = \mathcal{V}_K(P) + 2c_\gamma$. Для каждого s рассмотрим путь $C^{(s)}(\gamma^2)$. Это замкнутый путь в множестве $\mathcal{G}_{(n)}(\mathbb{C}) \setminus X$, имеющий четные коэффициенты зацепления со всеми неприводимыми компонентами гиперповерхности X . Продолжая аналитически обе части равенства (9.4) вдоль петли γ^2 , мы получаем, что

$$\mathcal{V}_K(P) + 2c_\gamma = \sum_{s=1}^q \varepsilon_s V_{\Lambda^n}^{(C^{(s)}(\gamma^2))}(C^{(s)}(P))$$

для P , близких к P_0 . В частности, это равенство выполняется при $P = P_0$. Значит,

$$2c_\gamma = \sum_{s=1}^q \varepsilon_s (V_{\Lambda^n}^{(C^{(s)}(\gamma^2))}(C^{(s)}(P_0)) - V_{\Lambda^n}(C^{(s)}(P_0))). \quad (9.5)$$

При каждом s матрица $C^{(s)}(P_0)$ принадлежит множеству $\mathcal{C}_{\Lambda^n}$, так как она является матрицей Грама невырожденного симплекса $[o P_0(v_1^{(s)}) \dots P_0(v_n^{(s)})]$. Так как коэффициент зацепления петли $C^{(s)}(\gamma^2)$ и гиперповерхности $\mathcal{H}$ четен, то из теоремы 1.2 следует, что все слагаемые в правой части формулы (9.5) чисто мнимые. Но $c_\gamma \in \mathbb{R}$, значит, $c_\gamma = 0$, что завершает доказательство предложения.

Нам понадобится следующее следствие теоремы Лиувилля о целых функциях. Оно кажется стандартным, тем не менее для удобства читателей мы дадим его доказательство в § 10.

ЛЕММА 9.8. Пусть A – гладкое неприводимое комплексное аффинное многообразие и φ – голоморфная функция на A . Предположим, что существуют регулярные функции $f_1, \dots, f_N \in \mathbb{C}[A]$ такие, что

$$\operatorname{Im} \varphi(x) \leq \max_{n=1, \dots, N} \ln |f_n(x)| \quad (9.6)$$

для всех $x \in A$. Тогда φ – константа. (Здесь мы считаем, что $\ln 0 = -\infty$.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.9. Если размерность n нечетна, то функция $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$ постоянна на Υ . Следовательно, функция $\mathcal{V}_K(P)$ постоянна на S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 9.7 $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$ есть голоморфная функция на Υ . Из формулы (9.3) мы получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tilde{\mathcal{V}}_K(P) &= \frac{1}{n-1} \sum_{F \subset K, \dim F = n-2} V_{F, \ell} \ln |Q_F(P)| \\ &\leq \max_{F \subset K, \dim F = n-2} \frac{NV_{F, \ell} \ln |Q_F(P)|}{n-1} \\ &\leq \max \left(0, \max_{F \subset K, \dim F = n-2} \ln |Q_F(P)^L| \right), \end{aligned}$$

где N – число $(n - 2)$ -мерных симплексов псевдомногообразия K и L – положительное целое число, большее, чем все числа $NV_{F,\ell}/(n - 1)$. Напомним, что $Q_F(P)$ – регулярные функции на Υ . Возьмем главное открытое по Зарисскому подмножество $\Xi_f \subset \Xi$ такое, что $\Xi_f \subset \Upsilon$. (Напомним, что открытое по Зарисскому подмножество неприводимого аффинного многообразия называется *главным*, если оно является дополнением до множества нулей регулярной функции.) Тогда Ξ_f – неприводимое аффинное многообразие. Кроме того, многообразие Ξ_f гладкое, так как $\Upsilon \subset \Xi^{\text{reg}}$. Применяя лемму 9.8 к ограничению функции $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$ на многообразии Ξ_f , мы получаем, что функция $\tilde{\mathcal{V}}_K(P)$ постоянна на Ξ_f , а значит, и на всем Υ .

Так как стандартная стратификация множества $\Sigma^+(\ell)$ состоит из конечного числа стратов, то из предложения 9.9 следует, что функция $\mathcal{V}_K(P)$ постоянна на каждой компоненте связности множества $\Sigma^+(\ell)$. Значит, предложение 8.1 и, следовательно, теорема 7.3 верны для многогранников с невырожденными гранями.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.10. Подставляя ориентированные двугранные углы α_F в формулу (1.2), мы получим определение *полной средней кривизны* любого многогранника $P: K \rightarrow \Lambda^n$ с невырожденными гранями. Так как углы α_F определены по модулю группы $2\pi\mathbb{Z}$, то полная средняя кривизна определена по модулю подгруппы группы $\mathbb{R}$, порожденной числами $2\pi V_F(P)$ для всех $(n - 2)$ -мерных граней F псевдомногообразия K . Однако для любого изгибаемого многогранника $P_t: K \rightarrow \Lambda^n$ можно выбрать вещественнозначную ветвь полной средней кривизны многогранника P_t . Из теоремы 7.3 и формулы Шлефли (9.1) вытекает следующее утверждение, являющееся более точной формулировкой следствия 1.5.

СЛЕДСТВИЕ 9.11. Пусть n нечетно. Пусть K – ориентированное $(n - 1)$ -мерное псевдомногообразие и $P_t: K \rightarrow \Lambda^n$ – изгибание ограниченного многогранника комбинаторного типа K с невырожденными гранями. Тогда полная средняя кривизна многогранника P_t постоянна.

§ 10. Доказательство леммы 9.8

ЛЕММА 10.1. Пусть A – неприводимое комплексное аффинное многообразие и f – непостоянная регулярная функция на A , не принимающая нулевого значения. Тогда многозначная функция $\text{Ln } f$ не имеет однозначной голоморфной ветви на A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале предположим, что A – кривая. Тогда можно выколоть из $\mathbb{C}$ конечное множество точек $B = \{b_0 = 0, b_1, \dots, b_q\}$ так, что f будет давать конечнолистное (неразветвленное) накрытие $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus B) \rightarrow \mathbb{C} \setminus B$. Возьмем положительное число R , отличное от $|b_1|, \dots, |b_q|$, и положим

$$S_R^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}.$$

Тогда ограничение функции f на множество $f^{-1}(S_R^1)$ является конечнолистным накрытием $f^{-1}(S_R^1) \rightarrow S_R^1$. Каждая компонента связности γ множества $f^{-1}(S_R^1)$ является замкнутым путем в A . Если точка x проходит по петле γ , то ее образ $f(x)$ проходит несколько раз по окружности S_R^1 в одном и том же направлении, значит, любая ветвь функции $\text{Ln } f$ изменяется на ненулевую константу.

Теперь предположим, что $A \subset \mathbb{C}^N$ – неприводимое аффинное многообразие размерности $d > 1$. Так как функция f непостоянна на многообразии A , то найдется гладкая точка $x \in A$, в которой дифференциал df не равен нулю. Возьмем произвольный касательный вектор $\xi \in T_x A$ такой, что $\langle df, \xi \rangle \neq 0$. Несложно показать, что найдется неприводимая аффинная кривая $\Gamma \subset A$ такая, что x – гладкая точка кривой Γ и ξ – касательный вектор к кривой Γ в точке x . Действительно, в качестве кривой Γ можно взять, например, неприводимую компоненту, содержащую точку x , плоского сечения $A \cap \Pi$, где $\Pi \subset \mathbb{C}^N$ – такая $(N - d + 1)$ -мерная плоскость, что $T_x A \cap T_x \Pi = \langle \xi \rangle$. Тогда ограничение функции f на кривую Γ непостоянно. Значит, функция $\text{Ln } f$ не имеет однозначной ветви на Γ . Значит, она не имеет однозначной ветви и на A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9.8. Пусть d – размерность многообразия A . Тогда имеется конечное регулярное отображение $F: A \rightarrow \mathbb{C}^d$. Обозначим через k степень этого отображения. Тогда каждая точка z из некоторого открытого по Зарисскому подмножества $U \subset \mathbb{C}^d$ имеет ровно k прообразов при отображении F . Более того, прообразам каждой точки $z \in \mathbb{C}^d \setminus U$ можно приписать кратности так, чтобы сумма кратностей всех прообразов была равна k и получающееся отображение $F^{-1}: \mathbb{C}^d \rightarrow \text{Sym}^k(A)$ было непрерывным, где через $\text{Sym}^k(A)$ обозначена k -я симметрическая степень многообразия A . Положим

$$\psi(x) = \exp(-i\varphi(x)).$$

Для каждой точки $z \in \mathbb{C}^d$ положим

$$\Psi_j(z) = \sigma_j(\psi(x_1), \dots, \psi(x_k)), \quad (10.1)$$

где σ_j есть j -й элементарный симметрический многочлен и $x_1, \dots, x_k$ суть прообразы точки z при отображении F . Функции $\Psi_j(z)$ голоморфны на U и непрерывны на $\mathbb{C}^d$. Значит, они имеют устранимые особенности на множестве $\mathbb{C}^d \setminus U$ и, следовательно, являются целыми функциями на $\mathbb{C}^d$ (см. [35; гл. III, § 11, п. 32, теорема 3]).

Теперь оценим функции $\Psi_j(z)$. Из неравенства (9.6) следует, что

$$|\Psi_j(z)| \leq \sigma_j \left(\max_{n=1, \dots, N} |f_n(x_1)|, \dots, \max_{n=1, \dots, N} |f_n(x_k)| \right). \quad (10.2)$$

Кольцо $\mathbb{C}[A]$ является целым расширением кольца $\mathbb{C}[\mathbb{C}^d] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_d]$. Значит, каждая функция f_n удовлетворяет полиномиальному соотношению вида

$$f_n^{s_n} + g_{n,1} f_n^{s_n-1} + \dots + g_{n,s_n} = 0,$$

где $g_{n,l}$ – многочлены от $z = F(x)$. Следовательно, оценки (10.2) дают оценки

$$|\Psi_j(z)| \leq C_j(1 + |z|^{K_j})$$

для некоторых $C_j, K_j > 0$. По теореме Лиувилля о целых функциях функции $\Psi_j(z)$ являются многочленами (см. [36; п. П 1.1]).

Из равенств (10.1) следует, что функция ψ удовлетворяет полиномиальному соотношению

$$\psi^k(x) - \Psi_1(F(x))\psi^{k-1}(x) + \Psi_2(F(x))\psi^{k-2}(x) - \dots + (-1)^k \Psi_k(F(x)) = 0.$$

Коэффициенты $\Psi_j(F(x))$ являются регулярными функциями на A . Значит, функция ψ цела над кольцом $\mathbb{C}[A]$. С другой стороны, функция ψ голоморфна на A . Отсюда вытекает, что функция ψ рациональна на A (см. [37; гл. 8, п. 3.1]). Так как многообразие A гладкое и функция ψ принимает конечные значения во всех точках многообразия A , мы получаем, что функция ψ регулярна на A . Функция $-i\varphi$ является однозначной голоморфной ветвью функции $\text{Ln } \psi$ на A . По лемме 10.1 это было бы невозможно, если бы функция ψ была непостоянна. Следовательно, функции ψ и φ постоянны.

§ 11. Доказательство теоремы 7.3 для произвольных многогранников

Теорема 7.3 для произвольных изгибаемых многогранников сразу следует из теоремы 7.3 для изгибаемых многогранников с невырожденными гранями и следующей леммы.

ЛЕММА 11.1. Пусть $P_t: K \rightarrow \Lambda^n$ – ограниченный изгибаемый многогранник. Тогда существуют $(n-1)$ -мерные псевдомногообразия $K^{(1)}, \dots, K^{(k)}$ и ограниченные изгибаемые многогранники с невырожденными гранями

$$P_t^{(l)}: K^{(l)} \rightarrow \Lambda^n, \quad l = 1, \dots, k,$$

такие, что индикаторная функция $\lambda_{P_t}(x)$ равна сумме $\sum_{l=1}^k \lambda_{P_t^{(l)}}(x)$ для всех t и всех $x \in \Lambda^n \setminus P_t(K)$. Таким образом,

$$\mathcal{V}_K(P_t) = \sum_{l=1}^k \mathcal{V}_{K^{(l)}}(P_t^{(l)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ℓ – набор длин ребер изгибаемого многогранника $P_t: K \rightarrow \Lambda^n$. Образ $P_t(\sigma)$ каждого симплекса σ псевдомногообразия K определяется с точностью до изометрии пространства Λ^n набором длин ребер симплекса σ . Нам будет удобно выбрать многогранник $\Delta_\sigma \subset \Lambda^n$, изометричный многогранникам $P_t(\sigma)$ для всех t , и выбрать проекции $\varpi_\sigma: \sigma \rightarrow \Delta_\sigma$ и изометрии $\varphi_{\sigma,t}: \Delta_\sigma \rightarrow P_t(\sigma)$ такие, что $\varphi_{\sigma,t} \circ \varpi_\sigma = P_t|_\sigma$ для всех t . Будем говорить, что симплекс σ псевдомногообразия K ℓ -невырожденный, если $\dim \Delta_\sigma = \dim \sigma$, и ℓ -вырожденный, если $\dim \Delta_\sigma < \dim \sigma$. Если симплекс σ ℓ -невырожденный, то Δ_σ – симплекс.

Последовательность $\theta = (\sigma_0, \dots, \sigma_m)$ $(n-1)$ -мерных симплексов псевдомногообразия K называется *толстым путем*, если $\dim(\sigma_{j-1} \cap \sigma_j) = n-2$ при $j = 1, \dots, m$ и $\sigma_{j-1} \neq \sigma_{j+1}$ при $j = 1, \dots, m-1$. Число m будет называться *длиной* толстого пути θ . Назовем толстый путь θ *допустимым*, если $m \geq 1$ и выполнены следующие условия:

- 1) симплекс σ_0 ℓ -невыврожденный, а симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ ℓ -вырожденные;
- 2) симплексы $\tau_j = \sigma_{j-1} \cap \sigma_j$ являются ℓ -невыврожденными, $j = 1, \dots, m$;
- 3) $\dim(P_t(\tau_1) \cap \dots \cap P_t(\tau_m)) = n-2$.

Докажем, что условие 3) не зависит от t . Действительно, пусть ι_{t_2, t_1} — изометрия пространства Λ^n , переводящая симплекс $P_{t_1}(\sigma_0)$ в симплекс $P_{t_2}(\sigma_0)$, и пусть Π_{t_1} и Π_{t_2} суть $(n-2)$ -мерные плоскости в Λ^n , содержащие грани $P_{t_1}(\tau_1)$ и $P_{t_2}(\tau_1)$ соответственно. Легко видеть, что из условий 1) и 2) следует, что отображения P_{t_1} и P_{t_2} отображают все симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ в плоскости Π_{t_1} и Π_{t_2} соответственно, причем

$$P_{t_2}|_{\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_{m-1}} = \iota_{t_2, t_1} \circ P_{t_1}|_{\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_{m-1}}.$$

Следовательно, многогранники $P_{t_1}(\tau_1) \cap \dots \cap P_{t_1}(\tau_m)$ и $P_{t_2}(\tau_1) \cap \dots \cap P_{t_2}(\tau_m)$ изометричны. Более того, $(n-2)$ -мерный выпуклый многогранник

$$F_\theta = \varphi_{\sigma_0, t}^{-1}(P_t(\tau_1) \cap \dots \cap P_t(\tau_m)) \subset \partial\Delta_{\sigma_0}$$

не зависит от t .

Назовем допустимый толстый путь $\theta = (\sigma_0, \dots, \sigma_m)$ *максимальным*, если симплекс σ_m является ℓ -невыврожденным. Очевидно, что если θ — максимальный допустимый толстый путь, то обратная последовательность $\theta^{-1} = (\sigma_m, \dots, \sigma_0)$ тоже является максимальным допустимым толстым путем, причем изометрия

$$\gamma_\theta: F_\theta \xrightarrow{\varphi_{\sigma_0, t}} P_t(\tau_1) \cap \dots \cap P_t(\tau_m) \xrightarrow{\varphi_{\sigma_m, t}^{-1}} F_{\theta^{-1}}$$

не зависит от t .

ЛЕММА 11.2. *Число допустимых толстых путей конечно. Пусть σ — какой-нибудь ℓ -невыврожденный $(n-1)$ -мерный симплекс псевдомногообразия K . Тогда многогранники F_θ , где θ пробегает всевозможные максимальные допустимые пути, начинающиеся с симплекса σ , образуют разбиение границы $\partial\Delta_\sigma$ симплекса Δ_σ на конечное число выпуклых многогранников с непересекающимися внутренностями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать, что число допустимых толстых путей конечно, нам достаточно показать, что любой допустимый толстый путь $\theta = (\sigma_0, \dots, \sigma_m)$ является несамопересекающимся, т.е. симплексы $\sigma_0, \dots, \sigma_m$ попарно различны. Предположим обратное. Возьмем наименьшее j такое, что $\sigma_j = \sigma_i$ для некоторого $i < j$. Если $i \neq 0$, то симплексы τ_i , τ_{i+1} и τ_j суть три попарно различные $(n-2)$ -мерные грани симплекса σ_i . Отсюда следует, что $\dim(P_t(\tau_i) \cap P_t(\tau_{i+1}) \cap P_t(\tau_j)) < n-2$, что противоречит свойству 3) в определении допустимого толстого пути. Если $i = 0$, то $j = m$. Из минимальности j следует, что $\sigma_1 \neq \sigma_{m-1}$. Значит, τ_1 , τ_m — различные $(n-2)$ -мерные грани

ℓ -невыврожденного симплекса σ_0 . Следовательно, $\dim(P_t(\tau_1) \cap P_t(\tau_m)) < n - 2$, и мы опять получаем противоречие с условием 3).

Докажем, что внутренности многогранников F_θ и $F_{\theta'}$, соответствующих разным максимальным допустимым путям $\theta = (\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_m)$ и $\theta' = (\sigma, \sigma'_1, \dots, \sigma'_{m'})$, не пересекаются. Если $\sigma_1 \neq \sigma'_1$, то многогранники F_θ и $F_{\theta'}$ лежат в разных $(n - 2)$ -мерных гранях симплекса Δ_σ , значит, имеют непересекающиеся внутренности. Предположим, что $\sigma_1 = \sigma'_1$. Выберем наименьшее j такое, что $\sigma_j \neq \sigma'_j$. Тогда τ_{j-1} , τ_j и τ'_j суть три попарно различные $(n - 2)$ -мерные грани симплекса σ_{j-1} . Значит, $\dim(P_t(\tau_{j-1}) \cap P_t(\tau_j) \cap P_t(\tau'_j)) < n - 2$. Следовательно, $\dim(F_\theta \cap F_{\theta'}) < n - 2$. Таким образом, внутренности граней F_θ и $F_{\theta'}$ не пересекаются.

Наконец, докажем, что объединение многогранников F_θ для всех максимальных допустимых путей θ , начинающихся с симплекса σ , есть вся граница $\partial\Delta_\sigma$. Обозначим через $A_m(\sigma)$ множество всех допустимых толстых путей длины m , начинающихся с σ , и обозначим через $MA(\sigma)$ множество всех максимальных допустимых толстых путей, начинающихся с σ . Докажем, что при $m > 1$

$$\bigcup_{\theta \in A_{m-1}(\sigma)} F_\theta \subset \bigcup_{\theta \in A_m(\sigma) \cup MA(\sigma)} F_\theta. \quad (11.1)$$

Пусть $\theta = (\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1})$ – допустимый толстый путь, не являющийся максимальным. Пусть $\tau_m^{(1)}, \dots, \tau_m^{(p)}$ – все ℓ -невыврожденные $(n - 2)$ -мерные грани симплекса σ_{m-1} , отличные от грани τ_{m-1} . При $j = 1, \dots, p$ рассмотрим $(n - 1)$ -мерный симплекс $\sigma_m^{(j)}$ псевдомногообразия K такой, что $\sigma_{m-1} \cap \sigma_m^{(j)} = \tau_m^{(j)}$, и положим $\theta^{(j)} = (\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}, \sigma_m^{(j)})$. Из того, что симплекс σ_{m-1} является ℓ -вырожденным, мы получаем, что $P_t(\tau_{m-1}) \subset \bigcup_{j=1}^p P_t(\tau_m^{(j)})$. Значит,

$$P_t(\tau_1) \cap \dots \cap P_t(\tau_{m-1}) \subset \bigcup_{j=1}^p (P_t(\tau_1) \cap \dots \cap P_t(\tau_{m-1}) \cap P_t(\tau_m^{(j)})).$$

Более того, так как пересечение $P_t(\tau_1) \cap \dots \cap P_t(\tau_{m-1})$ является $(n - 2)$ -мерным выпуклым многогранником, то оно содержится в объединении только тех многогранников $P_t(\tau_1) \cap \dots \cap P_t(\tau_{m-1}) \cap P_t(\tau_m^{(j)})$, которые являются $(n - 2)$ -мерными, т.е. которые отвечают допустимым толстым путям $\theta^{(j)}$. Поэтому многогранник F_θ содержится в объединении многогранников $F_{\theta^{(j)}}$, соответствующих допустимым толстым путям $\theta^{(j)}$, откуда немедленно следует включение (11.1). Так как множества $A_m(\sigma)$ пусты при достаточно больших m , мы получаем, что $\bigcup_{\theta \in MA(\sigma)} F_\theta \supset \bigcup_{\theta \in A_1(\sigma)} F_\theta = \partial\Delta_\sigma$. Последнее равенство выполнено, так как все толстые пути (σ, σ_1) длины 1 допустимы.

Продолжим доказательство леммы 11.1. Возьмем несвязное объединение гиперболических симплексов Δ_σ , где σ пробегает все ℓ -невыврожденные $(n - 1)$ -мерные симплексы псевдомногообразия K . Для каждого максимального допустимого толстого пути $\theta = (\sigma_0, \dots, \sigma_m)$ склеим $(n - 2)$ -мерные многогранники $F_\theta \subset \partial\Delta_{\sigma_0}$ и $F_{\theta^{-1}} \subset \partial\Delta_{\sigma_m}$ вдоль изометрии γ_θ . Пусть $\mathcal{K}$ – получившийся клеточный комплекс. Для каждого t отображения $\varphi_{\sigma,t}: \Delta_\sigma \rightarrow \Lambda^n$ составляют корректно определенное отображение $\mathcal{P}_t: \mathcal{K} \rightarrow \Lambda^n$. В частности, отсюда

следует, что тавтологические отображения $\Delta_\sigma \rightarrow \mathcal{K}$ являются вложениями, т.е. что мы не склеиваем никакие две различные точки одной и той же клетки Δ_σ . Согласно конструкции каждая клетка комплекса $\mathcal{K}$ содержится в его $(n-1)$ -мерной клетке и каждая $(n-2)$ -мерная клетка комплекса $\mathcal{K}$ содержится ровно в двух его $(n-1)$ -мерных клетках. Подразобьем комплекс $\mathcal{K}$ на выпуклые гиперболические симплексы. Пусть $K^{(1)}, \dots, K^{(k)}$ – связные компоненты получившегося симплициального комплекса. Тогда симплициальные комплексы $K^{(1)}, \dots, K^{(k)}$ являются $(n-1)$ -мерными псевдомногообразиями. Ориентация каждого ℓ -невыврожденного $(n-1)$ -мерного симплекса σ псевдомногообразия K индуцирует ориентацию симплекса Δ_σ . Значит, псевдомногообразия $K^{(1)}, \dots, K^{(k)}$ обладают каноническими ориентациями. Обозначим через $P_t^{(j)}$ ограничение отображения $\mathcal{P}_t$ на $K^{(j)}$. Так как ограничение отображения $\mathcal{P}_t$ на каждую клетку Δ_σ является изометрией, мы видим, что $P_t^{(j)}: K^{(j)} \rightarrow \Lambda^n$ есть изгибаемый многогранник с невырожденными гранями. Из конструкции следует, что $P_t^{(j)}(K^{(j)}) \subset P_t(K)$ для всех j и t и $\lambda_{P_t}(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_{P_t^{(i)}}(x)$ для всех t и всех $x \in \Lambda^n \setminus P_t(K)$.

Список литературы

- [1] R. Bricard, “Mémoire sur la théorie de l’octaèdre articulé”, *J. Math. Pures Appl. Sér. 5*, **3** (1897), 113–148.
- [2] R. Connelly, “A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **47** (1977), 333–338.
- [3] Н. Х. Кёйпер, “Изгибаемые полиэдральные сферы в E^3 , по Роберту Коннелли”, *Исследования по метрической теории поверхностей*, Математика. Новое в зарубежной науке, **18**, Мир, М., 1980, 210–227; пер. с англ.: N. H. Kuiper, “Sphères polyédriques flexibles dans E^3 , d’après Robert Connelly”, *Séminaire Bourbaki*, 30e année (1977/78), *Lecture Notes in Math.*, **710**, Springer, Berlin, 1979, 147–168, Exp. No. 514.
- [4] R. Connelly, “A flexible sphere”, *Math. Intelligencer*, **1:3** (1978/1979), 130–131.
- [5] H. Stachel, “Flexible octahedra in the hyperbolic space”, *Non-Euclidean geometries*, *Math. Appl. (N. Y.)*, **581**, Springer, New York, 2006, 209–225.
- [6] H. Stachel, “Flexible cross-polytopes in the Euclidean 4-space”, *J. Geom. Graph.*, **4:2** (2000), 159–167.
- [7] А. А. Гайфуллин, “Изгибаемые кросс-политопы в пространствах постоянной кривизны”, *Алгебраическая топология, выпуклые многогранники и смежные вопросы*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Тр. МИАН, **286**, МАИК, М., 2014, 88–128; англ. пер.: А. А. Gaifullin, “Flexible cross-polytopes in spaces of constant curvature”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **286** (2014), 77–113; arXiv: 1312.7608.
- [8] А. А. Гайфуллин, “Вложенные изгибаемые сферические кросс-политопы с непостоянными объемами”, *Геометрия, топология и приложения*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения профессора Николая Петровича Долбилина, Тр. МИАН, **288**, МАИК, М., 2015, 67–94; англ. пер.: А. А. Gaifullin, “Embedded flexible spherical cross-polytopes with nonconstant volumes”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **288** (2015), 56–80; arXiv: 1501.06198.
- [9] R. Connelly, “Conjectures and open questions in rigidity”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, *Acad. Sci. Fennica, Helsinki*, 1980, 407–414.

- [10] И. Х. Сабитов, “Объем многогранника как функция его метрики”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **2**:4 (1996), 1235–1246.
- [11] И. Х. Сабитов, “Обобщенная формула Герона–Тарталья и некоторые ее следствия”, *Матем. сб.*, **189**:10 (1998), 105–134; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “A generalized Heron–Tartaglia formula and some of its consequences”, *Sb. Math.*, **189**:10 (1998), 1533–1561.
- [12] I. Kh. Sabitov, “The volume as a metric invariant of polyhedra”, *Discrete Comput. Geom.*, **20**:4 (1998), 405–425.
- [13] R. Connelly, I. Sabitov, A. Walz, “The Bellows conjecture”, *Beiträge Algebra Geom.*, **38**:1 (1997), 1–10.
- [14] A. A. Gaifullin, “Sabitov polynomials for volumes of polyhedra in four dimensions”, *Adv. Math.*, **252** (2014), 586–611; arXiv:1108.6014.
- [15] A. A. Gaifullin, “Generalization of Sabitov’s theorem to polyhedra of arbitrary dimensions”, *Discrete Comput. Geom.*, **52**:2 (2014), 195–220; arXiv:1210.5408.
- [16] V. Alexandrov, “An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space”, *Beiträge Algebra Geom.*, **38**:1 (1997), 11–18.
- [17] И. Х. Сабитов, “Алгебраические методы решения многогранников”, *УМН*, **66**:3(399) (2011), 3–66; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “Algebraic methods for solution of polyhedra”, *Russian Math. Surveys*, **66**:3 (2011), 445–505.
- [18] Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников, “Геометрия пространств постоянной кривизны”, *Геометрия – 2, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления*, **29**, ВИНИТИ, М., 1988, 5–146; англ. пер.: D. V. Alekseevskii, E. B. Vinberg, A. S. Solodovnikov, “Geometry of spaces of constant curvature”, *Geometry II, Encyclopaedia Math. Sci.*, **29**, Springer, Berlin, 1993, 1–138.
- [19] H. S. M. Coxeter, “The functions of Schläfli and Lobatschewsky”, *Quart. J. Math.*, **6** (1935), 13–29.
- [20] K. Aomoto, “Analytic structure of Schläfli function”, *Nagoya Math. J.*, **68** (1977), 1–16.
- [21] L. Schläfli, “On the multiple integral $\int^n dx dy \cdots dz$ whose limits are $p_1 = a_1x + b_1y + \cdots + h_1z > 0$, $p_2 > 0$, $\dots$, $p_n > 0$, and $x^2 + y^2 + \cdots + z^2 < 1$ ”, *Quart. J. Pure Appl. Math.*, **2** (1858), 269–301; **3** (1860), 54–68, 97–108.
- [22] G. Sforza, “Spazi metrico-proiettivi”, *Ricerche di Estensionimetria Integratale, Ser. III*, **VIII**, Appendice (1907), 41–66.
- [23] I. Rivin, “Volumes of degenerating polyhedra – on a conjecture of J. W. Milnor”, *Geom. Dedicata*, **131**:1 (2008), 73–85; arXiv:math/0512065.
- [24] Feng Luo, “Continuity of the volume of simplices in classical geometries”, *Commun. Contemp. Math.*, **8**:3 (2006), 411–431; arXiv:math/0412208.
- [25] R. Alexander, “Lipschitzian mappings and total mean curvature of polyhedral surfaces. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **288**:2 (1985), 661–678.
- [26] F. J. Almgren, Jr., I. Rivin, “The mean curvature integral is invariant under bending”, *The Epstein birthday schrift*, *Geom. Topol. Monogr.*, **1**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998, 1–21.
- [27] Yu. Cho, H. Kim, “On the volume formula for hyperbolic tetrahedra”, *Discrete Comput. Geom.*, **22**:3 (1999), 347–366.
- [28] J. Murakami, M. Yano, “On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron”, *Comm. Anal. Geom.*, **13**:2 (2005), 379–400.
- [29] J. Murakami, A. Ushijima, “A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths”, *J. Geom.*, **83**:1-2 (2005), 153–163; arXiv:math/0402087.
- [30] Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, “О формуле объема гиперболического тетраэдра”, *УМН*, **60**:2(362) (2005), 159–160; англ. пер.: D. A. Derevnin, A. D. Mednykh, “A formula for the volume of a hyperbolic tetrahedron”, *Russian Math. Surveys*, **60**:2 (2005), 346–348.

- [31] А. Н. Паршин, “Об одном обобщении якобиева многообразия”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **30**:1 (1966), 175–182; англ. пер.: A. N. Parshin, “A generalization of the Jacobian variety”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **84**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969, 187–196.
- [32] К.-Т. Chen, “Iterated path integrals and generalized paths”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 935–938.
- [33] К.-Т. Chen, “Iterated integrals of differential forms and loop space homology”, *Ann. of Math. (2)*, **97**:2 (1973), 217–246.
- [34] Н. Whitney, “Elementary structure of real algebraic varieties”, *Ann. of Math. (2)*, **66**:3 (1957), 545–556.
- [35] Б. В. Шабат, *Введение в комплексный анализ*, т. II: *Функции нескольких переменных*, 3-е изд., Наука, М., 1985, 464 с.; англ. пер.: B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis. Part II. Functions of several variables*, Transl. Math. Monogr., **110**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, x+371 pp.
- [36] Е. М. Чирка, *Комплексные аналитические множества*, Наука, М., 1985, 272 с.; англ. пер.: E. M. Chirka, *Complex analytic sets*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **46**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, xx+372 pp.
- [37] И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, Наука, М., 1972, 567 с.; англ. пер.: I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*, Grundlehren Math. Wiss., **213**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1974, xv+439 pp.

Александр Александрович Гайфуллин
(Aleksandr A. Gaifullin)

Математический институт им. В. А. Стеклова

Российской академии наук, г. Москва

E-mail: agaif@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
26.03.2015 и 04.08.2015