Общероссийский математический портал

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 10, 67–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm853>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 05:14:18

УДК 517.5

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

**Оптимальное восстановление
значений функций и их производных
по неточно заданному преобразованию Фурье**

В работе рассматриваются задачи оптимального восстановления значения производных функций по информации о преобразовании Фурье этих функций, заданном приближенно на конечном интервале или всей прямой. Изучается также тесно связанная с этой проблематикой задача С.Б. Стечкина о приближении производных ограниченными линейными функционалами. Получены соответствующие этим постановкам точные неравенства для производных колмогоровского типа.

Библиография: 15 названия.

§1. Постановка задач

Начнем с формулировки конкретных задач, которые изучаются в настоящей работе, а затем приведем общую постановку задачи оптимального восстановления функционалов, объединяющую эти задачи. Пусть S – пространство Шварца быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, S' – соответствующее пространство обобщенных функций, $F: S' \rightarrow S'$ – преобразование Фурье, $n \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$. Положим

$$X_p^n = \{x \in S' \mid Fx(\cdot) \in L_p(\mathbb{R}), x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\}$$

и

$$C_p^n = \{x(\cdot) \in X_p^n \mid \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1\}.$$

Задача об оптимальном восстановлении значения $x^{(k)}(\tau)$, $0 \leq k < n$, $\tau \in \mathbb{R}$, на классе C_p^n по информации о преобразовании Фурье $Fx(\cdot)$, заданном на интервале $\Delta_\sigma = (-\sigma, \sigma)$, $0 < \sigma \leq \infty$, с погрешностью $\delta > 0$ в метрике пространства $L_p(\Delta_\sigma)$, заключается в нахождении величины

$$E_p(n, k, \sigma, \delta) = \inf_{\varphi} \sup_{\substack{x(\cdot) \in C_p^n, y(\cdot) \in L_p(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} |x^{(k)}(\tau) - \varphi(y(\cdot))| \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 02-01-39012, 02-01-00386), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-304.2003.1), Программы “Университеты России” (грант № УР.04.03.067), а также при поддержке U.S. CRDF–R.F. Ministry of Education Award (грант № VZ-0100-0).

(где нижняя грань берется по всем функциям $\varphi: L_p(\Delta_\sigma) \rightarrow \mathbb{C}$), называемой *погрешностью оптимального восстановления*, и функции $\widehat{\varphi}$, на которой достигается нижняя грань в (1), называемой *оптимальным методом восстановления*.

В работе изучается также задача о наилучшем приближении $x^{(k)}(\tau)$, $0 \leq k < n$, $\tau \in \mathbb{R}$, на классе C_p^n по информации о преобразовании Фурье $Fx(\cdot)$, заданном на интервале $\Delta_\sigma = (-\sigma, \sigma)$, линейными непрерывными функционалами на $L_p(\Delta_\sigma)$, норма которых не превосходит некоторого фиксированного положительного числа N . Она состоит в нахождении величины

$$e_p(n, k, \sigma, N) = \inf_{y^*} \sup_{x(\cdot) \in C_p^n} |x^{(k)}(\tau) - \langle y^*, Fx(\cdot) \rangle| \quad (2)$$

(где нижняя грань берется по всем линейным функционалам y^* на $L_p(\Delta_\sigma)$ таким, что $\|y^*\| \leq N$), а также функционала $\widehat{y}^*$, на котором достигается нижняя грань в (2), называемого *экстремальным*.

Если в (2) вместо $Fx(\cdot)$ поставить $x(\cdot)$, то мы получаем классическую задачу С.Б. Стечкина, так что (2) есть некоторое ее обобщение, которое мы также называем *задачей Стечкина*.

Приведем теперь общую постановку задачи об оптимальном восстановлении линейного функционала на классе элементов по некоторой информации о самих элементах. Пусть X – вещественное или комплексное векторное пространство и C – непустое подмножество (класс элементов) в X . Про каждый элемент $x \in C$ мы располагаем информацией $I(x)$, где I – отображение (называемое *информационным*) из C в другое вещественное или комплексное векторное пространство Y . В случае, когда информация задана неточно, I – многозначное отображение. Пусть, далее, заданы линейный функционал x' на X и семейство Φ функций $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$. Задача об оптимальном восстановлении функционала x' на классе C по информации I с помощью функций (*методов восстановления*) из Φ заключается в нахождении величины

$$E(x', C, I) = \inf_{\varphi \in \Phi} \sup_{\substack{x \in C \\ y \in I(x)}} |\langle x', x \rangle - \varphi(y)|, \quad (3)$$

называемой *погрешностью оптимального восстановления* (функционала x' на C по информации I), и метода, на котором достигается нижняя грань в (3), называемого *оптимальным методом восстановления*.

Задачи (1) и (2) укладываются в общую схему. В первом случае $X = X_p^n$, $C = C_p^n$, $Y = L_p(\Delta_\sigma)$, $I: X_p^n \rightarrow L_p(\Delta_\sigma)$, $Ix(\cdot) = Fx(\cdot)|_{\Delta_\sigma} + \delta BL_p(\Delta_\sigma)$, где $BL_p(\Delta_\sigma)$ – единичный шар в $L_p(\Delta_\sigma)$, $\langle x', x(\cdot) \rangle = x^{(k)}(\tau)$ и Φ – совокупность всех функций на $L_p(\Delta_\sigma)$. Для второй задачи $X = X_p^n$, $C = C_p^n$, $Y = L_p(\Delta_\sigma)$, $I: X_p^n \rightarrow L_p(\Delta_\sigma)$, $Ix(\cdot) = Fx(\cdot)|_{\Delta_\sigma}$, $\langle x', x(\cdot) \rangle = x^{(k)}(\tau)$ и $\Phi = NBY^*$, где BY^* – единичный шар в сопряженном пространстве к Y .

Задача оптимального восстановления линейного функционала на классе элементов для случая, когда I – линейное отображение, $\dim Y < \infty$ и Φ – множество всех функций из Y в $\mathbb{R}$, была поставлена С.А. Смоляком [1]. Им было доказано, что если в этой ситуации C – выпуклое центрально симметричное множество, то среди оптимальных методов есть линейный. Далее эта задача обобщалась и развивалась в различных направлениях (см. [2]–[7]).

Задачи оптимального восстановления функций и их производных в метрике L_2 (т.е. задача оптимального восстановления оператора, а не функционала) по неточно заданным коэффициентам Фурье (для периодических функций) и по неточно заданному преобразованию Фурье (для функций на прямой) изучались в работах [8], [9]. Круг проблем, связанных с задачей Стечкина, освещен в обзорной статье [10].

Аналог задачи (1) в периодическом случае при $p = \infty$ рассматривался в работе [11].

§ 2. Формулировки основных результатов

В силу инвариантности рассматриваемых классов относительно сдвига всюду в дальнейшем считаем, что $\tau = 0$. Начнем со случая, когда $p = \infty$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\delta > 0$, $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$, $0 < \sigma \leq \infty$,

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{\pi(2n+1)(2n-2k-1)}{2\delta^2(2n-k)} \right)^{1/(2n+1)}$$

и $\sigma_0 = \min\{\sigma, \hat{\sigma}\}$. Тогда

$$E_\infty(n, k, \sigma, \delta) = \frac{\sigma_0^{k+1}}{\pi} \left(\frac{\delta}{k+1} + \sqrt{\frac{1}{2n-2k-1} \left(\frac{\pi}{\sigma_0^{2n+1}} - \frac{\delta^2}{2n+1} \right)} \right),$$

а метод

$$\hat{\varphi}(y(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma_0} (it)^k (1 - \delta\lambda|t|^{2n-k}) y(t) dt, \quad (4)$$

где

$$\lambda = \frac{\sigma_0^{-2n+k}}{\sqrt{2n-2k-1}} \left(\frac{\pi}{\sigma_0^{2n+1}} - \frac{\delta^2}{2n+1} \right)^{-1/2}, \quad (5)$$

является оптимальным.

Из теоремы 1 вытекает, что при $\sigma \geq \hat{\sigma}$

$$E_\infty(n, k, \sigma, \delta) = K \delta^{(2n-2k-1)/(2n+1)}, \quad (6)$$

где

$$K = \frac{(n+1/2)^{(k+1)/(2n+1)}}{k+1} \left(\frac{2n-k}{\pi(2n-2k-1)} \right)^{(2n-k)/(2n+1)}. \quad (7)$$

Тем самым в рассматриваемой задаче имеет место эффект “насыщения” погрешности оптимального восстановления, заключающийся в том, что при фиксированном $\delta > 0$ знание преобразования Фурье функции из C_∞^n , заданного с погрешностью δ в равномерной метрике, на интервалах, больших чем $\Delta_{\hat{\sigma}}$, не ведет к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Таким образом, нарушение соотношения

$$\delta^2 \sigma^{2n+1} \leq \frac{\pi(2n+1)(2n-2k-1)}{2(2n-k)} \quad (8)$$

приводит к тому, что получаемая информация о преобразовании Фурье оказывается избыточной. Этот факт нам представляется важным для приложений, когда нужно считаться с тем, что получение дополнительной информации требует определенных затрат.

Из равенства (6) в силу инвариантности пространства X_∞^n относительно сдвига вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $k, n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq k < n$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq K \|Fx(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^{(2n-2k-1)/(2n+1)} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{(2k+2)/(2n+1)},$$

где константа K определена равенством (7).

Перейдем теперь к задаче (1) для $p = 1$. Если $k > 0$ и $\sigma < \infty$, положим

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{4\pi}{\sigma^{2n-1}} \frac{\varepsilon^{2(2n-k-1)} \left(\int_1^\varepsilon (x^k - 1)x^{-2n} dx \right)^2}{\varepsilon^{2n-2k-1} \int_1^\varepsilon (x^k - 1)^2 x^{-2n} dx + (2n - 2k - 1)^{-1}}$$

(здесь и далее для краткости записи не приводятся выражения для интегралов, которые могут быть явно вычислены). Очевидно, что функция $\Phi(\cdot)$ непрерывна на $(1, +\infty)$. Нетрудно убедиться, что $\Phi(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 1$ и $\Phi(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow +\infty$. Тем самым для любого $\delta > 0$ уравнение

$$\Phi(\varepsilon) = \delta^2 \tag{9}$$

имеет решение, принадлежащее интервалу $(1, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\delta > 0$, $k, n \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$, $0 < \sigma \leq \infty$. Положим

$$a = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_\delta}, & 0 < \sigma < \infty; \\ \left(\frac{2\pi(2n-2k-1)}{\delta^2(2n-1)(2n-k-1)} \right)^{1/(2n-1)}, & \sigma = \infty, \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} \frac{2}{\delta} \left(\frac{\varepsilon_\delta}{\sigma} \right)^{2n-k-1} \int_1^{\varepsilon_\delta} (x^k - 1)x^{-2n} dx, & 0 < \sigma < \infty; \\ \frac{k\delta^{(2n-2k-1)/(2n-1)}}{\pi(2n-2k-1)} \left(\frac{2\pi(2n-2k-1)}{(2n-1)(2n-k-1)} \right)^{k/(2n-1)}, & \sigma = \infty, \end{cases}$$

где ε_δ — решение уравнения (9). Тогда

$$E_1(n, k, \sigma, \delta) = \lambda + \frac{\delta}{2\pi} a^k,$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma} \mu_\delta(t) y(t) dt, \tag{10}$$

где

$$\mu_\delta(t) = \begin{cases} (it)^k, & |t| \leq a; \\ (ia)^k \operatorname{sign} t^k, & a < |t| < \sigma, \end{cases} \quad (11)$$

является оптимальным. При $k = 0$

$$E_1(n, 0, \sigma, \delta) = \frac{\delta}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{n-1/2} \sqrt{\pi(2n-1)}}$$

и метод

$$\widehat{\varphi}(y(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma} y(t) dt \quad (12)$$

оптимальный.

Из теоремы 2 при $\sigma = \infty$ вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $k, n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq k < n$. Тогда имеет место точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq K_1 \|Fx(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})}^{(2n-2k-1)/(2n-1)} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{k/(2n-1)},$$

где

$$K_1 = \frac{1}{(2n-k-1)^{k/(2n-1)}} \left(\frac{2n-1}{2\pi(2n-2k-1)} \right)^{(2n-k-1)/(2n-1)}.$$

Перейдем к случаю $p = 2$. Если $\sigma < \infty$, то положим

$$\Psi(h) = \frac{2\pi\sigma^{2n-2k-1}h^{4n-2k-1} \int_0^{\sigma h} x^{2k}(1+x^{2n})^{-2} dx}{(\sigma h)^{2n-2k-1} \int_0^{\sigma h} x^{2(n+k)}(1+x^{2n})^{-2} dx + (2n-2k-1)^{-1}}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $\Psi(\cdot)$ непрерывна на $(0, +\infty)$, $\Psi(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и $\Phi(h) \rightarrow +\infty$ при $h \rightarrow +\infty$. Тем самым для любого $\delta > 0$ уравнение

$$\Psi(h) = \delta^2 \quad (13)$$

имеет решение, принадлежащее интервалу $(0, +\infty)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\delta > 0$, $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$, $0 < \sigma \leq \infty$. Если $0 < \sigma < \infty$, то через h_δ обозначим решение уравнения (13), а если $\sigma = \infty$, то положим

$$h_\delta = \left(\frac{(2k+1)\delta^2}{2\pi(2n-2k-1)} \right)^{1/(2n)}.$$

Тогда

$$E_2(n, k, \sigma, \delta) = \frac{\delta^2 + 2\pi h_\delta^{2n}}{2\pi\delta h_\delta^{k+1/2}} \left(2 \int_0^{\sigma h_\delta} x^{2k}(1+x^{2n})^{-2} dx \right)^{1/2},$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(y(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma} \frac{(it)^k}{1 + (h_\delta t)^{2n}} y(t) dt$$

является оптимальным.

При $\sigma = \infty$ получаем

$$E_2(n, k, \infty, \delta) = K_2 \delta^{(2n-2k-1)/(2n)},$$

где

$$K_2 = \left((2k+1) \sin \frac{\pi(2k+1)}{2n} \right)^{-1/2} \left(\frac{2k+1}{2\pi(2n-2k-1)} \right)^{(2n-2k-1)/(4n)}.$$

Отсюда следует точное неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq K_2 \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{(2n-2k-1)/(2n)} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{(2k+1)/(2n)}.$$

В силу равенства Парсеваля

$$\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$$

оно может быть записано в виде

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq (2\pi)^{(2n-2k-1)/(4n)} K_2 \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{(2n-2k-1)/(2n)} \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{(2k+1)/(2n)}.$$

Это неравенство было доказано Л. В. Тайковым [12].

Перейдем теперь к задаче Стечкина о приближении k -й производной функции из класса C_p^n по информации о ее преобразовании Фурье на интервале Δ_σ с помощью линейных функционалов, норма которых не превосходит фиксированного положительного числа N .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $n, k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$, $0 < \sigma \leq \infty$, $N > 0$,

$$\widehat{\sigma}_N = \left(\frac{\pi N(k+1)(2n+1)}{2n-k} \right)^{1/(k+1)}$$

и $\sigma_N = \min\{\sigma, \widehat{\sigma}_N\}$. Тогда

$$e_\infty(n, k, \sigma, N) = \frac{\sigma_N^{-n+k+1/2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2n-2k-1} + \frac{\gamma^2(\sigma, N)}{2n+1}}, \quad (14)$$

где

$$\gamma(\sigma, N) = \max \left\{ 0, (2n+1) \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\pi N}{\sigma_N^{k+1}} \right) \right\},$$

и функционал

$$\langle \widehat{y}^*, Fx(\cdot) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma_N} (it)^k \left(1 - \gamma(\sigma, N) \left(\frac{|t|}{\sigma_N} \right)^{2n-k} \right) Fx(t) dt \quad (15)$$

является экстремальным.

Из теоремы 4 вытекает, что при фиксированном N для $\sigma \geq \hat{\sigma}_N$

$$e_\infty(n, k, \sigma, N) = \sqrt{\frac{2k+2}{2n-2k-1}} \left(\frac{2n-k}{\pi(k+1)(2n+1)} \right)^{(2n-k)/(2k+2)} N^{-(2n-2k-1)/(2k+2)}.$$

Это означает, что аналогично задаче восстановления в рассматриваемой задаче Стечкина также наблюдается эффект “насыщения”, заключающийся в том, что при фиксированном N знание преобразования Фурье на интервалах, больших чем $(-\hat{\sigma}_N, \hat{\sigma}_N)$, не ведет к уменьшению погрешности $e_\infty(n, k, \sigma, N)$. Аналогом соотношения (8) здесь является неравенство

$$\frac{\sigma^{k+1}}{N} \leq \frac{\pi(k+1)(2n+1)}{2n-k},$$

нарушение которого ведет к избыточности получаемой информации о преобразовании Фурье.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$ и $N > 0$. Тогда при $\sigma < \infty$

$$e_1(n, k, \sigma, N) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma^{n-k-1/2}} \times \sqrt{\frac{2k^2 \varepsilon^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)(2n-k-1)(2n-1)} + \frac{2\varepsilon^{-k}}{2n-k-1} - \frac{\varepsilon^{-2k}}{2n-1}},$$

где

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{(2\pi N_0)^{1/k}}, \quad N_0 = \min \left\{ N, \frac{\sigma^k}{2\pi} \right\},$$

и функционал

$$\begin{aligned} \langle \hat{y}^*, Fx(\cdot) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < (2\pi N_0)^{1/k}} (it)^k Fx(t) dt \\ &\quad + N_0 i^k \int_{(2\pi N_0)^{1/k} \leq |t| < \sigma} \text{sign } t^k Fx(t) dt \end{aligned} \quad (16)$$

является экстремальным. При $\sigma = \infty$

$$e_1(n, k, \infty, N) = \frac{\sqrt{2} k (2\pi N)^{-(2n-2k-1)/(2k)}}{\sqrt{\pi(2n-1)(2n-k-1)(2n-2k-1)}},$$

а функционал

$$\langle \hat{y}^*, Fx(\cdot) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < (2\pi N)^{1/k}} (it)^k Fx(t) dt + N \int_{|t| \geq (2\pi N)^{1/k}} i^k \text{sign } t^k Fx(t) dt$$

экстремальный. Если $k = 0$, то

$$e_1(n, 0, \sigma, N) = \begin{cases} \infty, & 0 < N < \frac{1}{2\pi}; \\ \frac{1}{\sigma^{n-1/2} \sqrt{\pi(2n-1)}}, & N \geq \frac{1}{2\pi}, \sigma < \infty; \\ 0 & N \geq \frac{1}{2\pi}, \sigma = \infty, \end{cases}$$

при этом функционал

$$\langle \hat{y}^*, Fx(\cdot) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma} Fx(t) dt$$

является экстремальным.

Рассмотрим теперь задачу Стечкина для случая, когда $p = 2$. Положим

$$\Omega(h) = \frac{1}{2\pi^2 h^{2k+1}} \int_0^{\sigma h} x^{2k} (1 + x^{2n})^{-2} dx.$$

Функция $\Omega(h)$ непрерывна при $h \in (0, +\infty)$. При этом

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Omega(h) = \frac{\sigma^{2k+1}}{2\pi^2(2k+1)},$$

а $\lim_{h \rightarrow \infty} \Omega(h) = 0$. Поэтому при всех

$$0 < N < \frac{\sigma^{k+1/2}}{\pi \sqrt{2(2k+1)}}$$

уравнение

$$\Omega(h) = N^2 \tag{17}$$

имеет решение.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $n, k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$ и $N > 0$. Тогда при всех $0 < \sigma < \infty$

$$e_2(n, k, \sigma, N) = \left(\frac{\hat{h}_N^{2n-2k-1}}{\pi} \int_0^{\sigma \hat{h}_N} \frac{x^{2(k+n)}}{(1+x^{2n})^2} dx + \frac{\sigma^{-(2n-2k-1)}}{\pi(2n-2k-1)} \right)^{1/2},$$

где

$$\hat{h}_N = \begin{cases} h_N, & 0 < N < \hat{N}; \\ 0, & N \geq \hat{N}, \end{cases} \quad \hat{N} = \frac{\sigma^{k+1/2}}{\pi \sqrt{2(2k+1)}},$$

а h_N – решение уравнения (17). При этом функционал

$$\langle \hat{y}^*, Fx(\cdot) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma} \frac{(it)^k}{1 + (\hat{h}_N t)^{2n}} y(t) dt \tag{18}$$

является экстремальным. При $\sigma = \infty$

$$e_2(n, k, \infty, N) = \frac{\sqrt{2k+1}}{(4n^2 \sin \frac{\pi(2k+1)}{2n})^{n/(2k+1)}} \left(\frac{2n-2k-1}{2\pi N^2} \right)^{(2n-2k-1)/(2(2k+1))},$$

а функционал (18), в котором

$$\hat{h}_N = \left(\frac{2n-2k-1}{8\pi n^2 N^2 \sin \frac{\pi(2k+1)}{2n}} \right)^{1/(2k+1)},$$

экстремальный.

Отметим, что в случае $\sigma = \infty$ результат, сформулированный в этой теореме, может быть получен из работы [12].

§ 3. Доказательства

В основе доказательств сформулированных теорем лежат соображения, связанные с общими принципами теории экстремальных задач. Суть дела заключается в том, что рассматриваемые здесь задачи редуцируются к некоторым выпуклым задачам, для которых необходимым и достаточным условием того, что допустимая точка есть решение данной задачи, является равенство нулю производной (или принадлежность нуля субдифференциалу) функции Лагранжа в этой точке. Такое условие представляет из себя некоторое тождество. С другой стороны, сама задача восстановления является двойственной к указанным выпуклым задачам и поэтому, решив их (т.е. получив нужное тождество), мы, вообще говоря, решаем и двойственную задачу (подробнее о таком подходе к решению различных экстремальных задач см. [13]–[15]). Следующая теорема представляет собой итоговый результат приведенных соображений.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $n, k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < n$, $0 < \sigma \leq \infty$, $\delta > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ и при всех $x(\cdot) \in X_p^n$ выполняется равенство

$$x^{(k)}(0) = \langle \hat{y}^*, Fx(\cdot) \rangle + \lambda \int_{\mathbb{R}} x^{(n)}(t) \overline{\hat{x}^{(n)}(t)} dt, \quad (19)$$

где $\hat{y}^*$ – некоторый линейный непрерывный функционал на $L_p(\Delta_\sigma)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, а $\hat{x}(\cdot) \in X_p^n$ и удовлетворяет следующим условиям:

- i) $\|F\hat{x}(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} = \delta$;
- ii) $\|\hat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$;
- iii) $\langle \hat{y}^*, F\hat{x}(\cdot) \rangle = \delta \|\hat{y}^*\|$.

Тогда

$$E_p(n, k, \sigma, \delta) = \lambda + \delta \|\hat{y}^*\|, \quad (20)$$

а $\hat{y}^*$ – оптимальный метод восстановления. Кроме того, в задаче Стечкина для $N = \|\hat{y}^*\|$

$$e_p(n, k, \sigma, N) = \lambda,$$

а $\hat{y}^*$ – экстремальный функционал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая равенство (19), имеем

$$\begin{aligned} E_p(n, k, \sigma, \delta) &\leq \sup_{\substack{x(\cdot) \in C_p^n, y(\cdot) \in L_p(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} |x^{(k)}(0) - \langle \hat{y}^*, y(\cdot) \rangle| \\ &\leq \sup_{x(\cdot) \in C_p^n} |x^{(k)}(0) - \langle \hat{y}^*, Fx(\cdot) \rangle| + \delta \|\hat{y}^*\| = \lambda + \delta \|\hat{y}^*\|. \end{aligned} \quad (21)$$

С другой стороны, в силу i) для любого метода восстановления $\varphi(y(\cdot))$ имеем

$$\begin{aligned} 2|\hat{x}^{(k)}(0)| &\leq |\hat{x}^{(k)}(0) - \varphi(0)| + |-\hat{x}^{(k)}(0) - \varphi(0)| \\ &\leq 2 \sup_{\substack{x(\cdot) \in C_p^n, y(\cdot) \in L_p(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} |x^{(k)}(0) - \varphi(y(\cdot))|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $E_p(n, k, \sigma, \delta) \geq |\widehat{x}^{(k)}(0)|$. Учитывая (19), ii) и iii), получаем

$$E_p(n, k, \sigma, \delta) \geq |\widehat{x}^{(k)}(0)| = |\langle \widehat{y}^*, F\widehat{x}(\cdot) \rangle + \lambda \|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}| = \lambda + \delta \|\widehat{y}^*\|.$$

Из этого неравенства и (21) вытекает равенство (20) и оптимальность метода $\widehat{y}^*$.

Перейдем к задаче Стечкина. По доказанному в задаче оптимального восстановления среди оптимальных методов существует метод, задаваемый линейным непрерывным функционалом, поэтому

$$\begin{aligned} E_p(n, k, \sigma, \delta) &= \inf_{N > 0} \inf_{\|y^*\| \leq N} \sup_{\substack{x(\cdot) \in C_p^n, y(\cdot) \in L_p(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} |x^{(k)}(0) - \langle y^*, y(\cdot) \rangle| \\ &\leq \inf_{\|y^*\| \leq N} \sup_{x(\cdot) \in C_p^n} |x^{(k)}(0) - \langle y^*, Fx(\cdot) \rangle| + \delta N = e_p(n, k, \sigma, N) + \delta N. \end{aligned}$$

Следовательно, при всех $N > 0$

$$e_p(n, k, \sigma, N) \geq E_p(n, k, \sigma, \delta) - \delta N. \quad (22)$$

Отсюда из (20) для $N = \|\widehat{y}^*\|$ получаем

$$e_p(n, k, \sigma, N) \geq \lambda.$$

С другой стороны, в силу (19)

$$e_p(n, k, \sigma, N) \leq \sup_{x(\cdot) \in C_p^n} |x^{(k)}(0) - \langle \widehat{y}^*, Fx(\cdot) \rangle| = \lambda.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем, что для всех $x(\cdot) \in X_\infty^n$ имеет место равенство

$$x^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma_0} (it)^k (1 - \delta\lambda|t|^{2n-k}) Fx(t) dt + \lambda \int_{\mathbb{R}} x^{(n)}(t) \overline{\widehat{x}^{(n)}(t)} dt, \quad (23)$$

где функция $\widehat{x}(\cdot) \in X_\infty^n$ такова, что

$$F\widehat{x}(t) = \begin{cases} (-i)^k \delta \operatorname{sign} t^k, & |t| < \sigma_0; \\ \frac{(-i)^k}{\lambda t^{2n-k}}, & |t| \geq \sigma_0. \end{cases}$$

В силу теоремы Планшереля имеем

$$\int_{\mathbb{R}} x^{(n)}(t) \overline{\widehat{x}^{(n)}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t^{2n} Fx(t) \overline{F\widehat{x}(t)} dt. \quad (24)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma_0} (it)^k (1 - \delta\lambda|t|^{2n-k}) Fx(t) dt + \lambda \int_{\mathbb{R}} x^{(n)}(t) \overline{\widehat{x}^{(n)}(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma_0} ((it)^k (1 - \delta\lambda|t|^{2n-k}) + \lambda t^{2n} i^k \delta \operatorname{sign} t^k) Fx(t) dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq \sigma_0} (it)^k Fx(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (it)^k Fx(t) dt = x^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Равенство $\|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$ легко проверяется. Докажем, что справедливо равенство $\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_\infty(\Delta_\sigma)} = \delta$. При $\sigma_0 \geq \sigma$ это непосредственно вытекает из определения $F\widehat{x}(\cdot)$. Пусть $\sigma_0 < \sigma$. Тогда $\sigma_0 = \widehat{\sigma}$ и нетрудно убедиться, что $(\lambda\widehat{\sigma}^{2n-k})^{-1} = \delta$. Тем самым $|F\widehat{x}(t)| \leq \delta$ при $|t| \geq \widehat{\sigma}$. Проверим теперь выполнение условия iii) теоремы 7. Имеем

$$\langle \widehat{y}^*, F\widehat{x}(\cdot) \rangle = \frac{\delta}{2\pi} \int_{|t| < \sigma_0} |t|^k (1 - \delta\lambda|t|^{2n-k}) dt. \quad (25)$$

Докажем, что $1 - \delta\lambda|t|^{2n-k} > 0$ при $|t| < \sigma_0$. В силу определения σ_0 имеем

$$\delta^2 \sigma_0^{2n+1} 2(2n-k) \leq \delta^2 \widehat{\sigma}^{2n+1} 2(2n-k) = \pi(2n+1)(2n-2k-1).$$

Отсюда вытекает, что

$$\delta^2 \sigma_0^{2n+1} (2n+1) \leq (2n-2k-1)(\pi(2n+1) - \delta^2 \sigma_0^{2n+1}) = \sigma_0^{-2n+2k+1} (2n+1) \lambda^{-2},$$

т.е. $\delta\lambda\sigma_0^{2n-k} \leq 1$. Тем самым при $|t| < \sigma_0$ $1 - \delta\lambda|t|^{2n-k} > 1 - \delta\lambda\sigma_0^{2n-k} \geq 0$. Следовательно, правая часть (25) равна $\delta\|\widehat{y}^*\|$. Для завершения доказательства остается применить теорему 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим сначала случай $0 < k < n$. Покажем, что для всех $x(\cdot) \in X_1^n$ имеет место равенство

$$x^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mu_\delta(t) Fx(t) dt + \lambda \int_{\mathbb{R}} x^{(n)}(t) \overline{\widehat{x}^{(n)}(t)} dt, \quad (26)$$

где функция $\widehat{x}(\cdot) \in X_1^n$ такова, что

$$F\widehat{x}(t) = \begin{cases} 0, & |t| \leq a; \\ (-i)^k \frac{|t|^k - a^k}{\lambda t^{2n}} \operatorname{sign} t^k, & a < |t| < \sigma; \\ \frac{(it)^k}{\lambda t^{2n}}, & |t| \geq \sigma. \end{cases}$$

Действительно, учитывая (24), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma} \mu_\delta(t) Fx(t) dt + \lambda \int_{\mathbb{R}} x^{(n)}(t) \overline{\widehat{x}^{(n)}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq a} (it)^k Fx(t) dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{a < |t| < \sigma} ((ia)^k \operatorname{sign} t^k + i^k (|t|^k - a^k) \operatorname{sign} t^k) Fx(t) dt \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq \sigma} (it)^k Fx(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (it)^k Fx(t) dt = x^{(k)}(0). \end{aligned}$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться в справедливости равенств

$$\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_1(\Delta_\sigma)} = \delta, \quad \|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1. \quad (27)$$

Остается применить теорему 7.

Пусть теперь $k = 0$. Если $\sigma = \infty$, то в силу равенства

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} Fx(t) dt,$$

рассмотрев любую функцию $\widehat{x}(\cdot)$, удовлетворяющую условиям $\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R})} = \delta$, $\|\widehat{x}^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = 1$, и применив теорему 7, получаем утверждение теоремы для $k = 0$ и $\sigma = \infty$.

Случай $k = 0$, $\sigma < \infty$ требует отдельного рассмотрения. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ определим функцию $\widehat{x}_\varepsilon(\cdot) \in X_1^n$ так, чтобы

$$F\widehat{x}_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & |t| \leq \varepsilon; \\ \frac{c_1}{t^{2n}}, & \varepsilon < |t| < \sigma; \\ \frac{c_2}{t^{2n}}, & |t| \geq \sigma. \end{cases}$$

Положив

$$c_1 = \frac{(2n-1)\delta}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^{2n-1}} - \frac{1}{\sigma^{2n-1}} \right)^{-1},$$

$$c_2 = \sqrt{2n-1} \sigma^{n-1/2} \left(\pi - \frac{(2n-1)\delta^2}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon^{2n-1}} - \frac{1}{\sigma^{2n-1}} \right)^{-1} \right)^{1/2},$$

нетрудно убедиться, что для функции $\widehat{x}_\varepsilon(\cdot)$ выполнены условия (27). Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 7, можно показать, что

$$\begin{aligned} E_1(n, 0, \sigma, \delta) &\geq |\widehat{x}_\varepsilon(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F\widehat{x}_\varepsilon(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma} F\widehat{x}_\varepsilon(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{c_2}{t^{2n}} dt = \frac{\delta}{2\pi} + \frac{c_2}{\sigma^{2n-1}\pi(2n-1)}. \end{aligned}$$

Устремляя ε к нулю, получаем оценку

$$E_1(n, 0, \sigma, \delta) \geq \frac{\delta}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{n-1/2}\sqrt{\pi(2n-1)}}.$$

С другой стороны, для метода, определенного равенством (12), имеем

$$\begin{aligned} E_1(n, 0, \sigma, \delta) &\leq \sup_{\substack{x(\cdot) \in C_1^n, y(\cdot) \in L_1(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_1(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \left| x(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma} y(t) dt \right| \\ &\leq \sup_{x(\cdot) \in C_1^n} \left| x(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma} Fx(t) dt \right| + \frac{\delta}{2\pi} = \frac{\delta}{2\pi} + \sup_{x(\cdot) \in C_1^n} \frac{1}{\pi} \int_{\sigma}^{\infty} |Fx(t)| dt \\ &\leq \frac{\delta}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sqrt{\int_{\sigma}^{\infty} t^{2n} |Fx(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{\sigma}^{\infty} \frac{dt}{t^{2n}}} \leq \frac{\delta}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{n-1/2}\sqrt{\pi(2n-1)}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3 проводится по той же схеме, что и теорем 1 и 2, используя тождество

$$x^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma} \frac{(it)^k}{1 + (h_\delta t)^{2n}} F x(t) dt + \lambda \int_{\mathbb{R}} x^{(n)}(t) \overline{\widehat{x}^{(n)}(t)} dt,$$

в котором

$$\lambda = \frac{h_\delta^{2n-k-1/2}}{\delta} \left(2 \int_0^{\sigma h_\delta} x^{2k} (1 + x^{2n})^{-2} dx \right)^{1/2},$$

а функция $\widehat{x}(\cdot) \in X_2^n$ такова, что

$$F\widehat{x}(t) = \begin{cases} \frac{h_\delta^{2n}}{\delta} \frac{(it)^k}{1 + (h_\delta t)^{2n}}, & |t| < \sigma; \\ \frac{(-i)^k}{\lambda} t^{k-2n}, & |t| \geq \sigma. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Обозначим через $N(\delta)$ норму линейного функционала (4) (как функционала на $L_\infty(\Delta_\sigma)$). Имеем

$$N(\delta) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sigma_0^{k+1}}{k+1} - \delta \lambda \frac{\sigma_0^{2n+1}}{2n+1} \right),$$

где

$$\sigma_0 = \begin{cases} \sigma, & 0 < \delta \leq \delta_0; \\ \left(\frac{\pi(2n+1)(2n-2k-1)}{2\delta^2(2n-k)} \right)^{1/(2n+1)}, & \delta > \delta_0, \end{cases}$$

$$\delta_0 = \sigma^{-n-1/2} \sqrt{\frac{\pi(2n+1)(2n-2k-1)}{2(2n-k)}}.$$

Тем самым, учитывая (5), при $0 < \delta \leq \delta_0$

$$N(\delta) = \frac{\sigma^{k+1}}{\pi} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{\delta(\pi/\sigma^{2n+1} - \delta^2/(2n+1))^{-1/2}}{(2n+1)\sqrt{2n-2k-1}} \right).$$

Нетрудно убедиться, что при $0 < \delta \leq \delta_0$ функция $N(\delta)$ монотонно убывает от N_2 до N_1 , где

$$N_2 = \frac{\sigma^{k+1}}{\pi(k+1)}, \quad N_1 = \frac{\sigma^{k+1}(2n-k)}{\pi(k+1)(2n+1)}.$$

Следовательно, при $N_1 \leq N < N_2$ уравнение $N(\delta) = N$ имеет единственное решение

$$\delta_N = \sigma^{-n-1/2} \sqrt{\frac{\pi(2n+1)(2n-2k-1)}{(2n+1)\gamma^{-2}(\sigma, N) + 2n-2k-1}}.$$

При этом с учетом того факта, что при $N_1 \leq N < N_2$ $\sigma_N = \sigma$, из теоремы 7 вытекает, что экстремальный функционал будет иметь вид (15).

Если $\delta \geq \delta_0$, то

$$N(\delta) = \left(\frac{\pi(2n+1)(2n-2k-1)}{2\delta^2(2n-k)} \right)^{(k+1)/(2n+1)} \frac{2n-k}{\pi(k+1)(2n+1)}.$$

При $\delta \geq \delta_0$ функция $N(\delta)$ монотонно убывает от N_1 до 0. Отсюда при всех $0 < N \leq N_1$ существует единственное решение уравнения $N(\delta) = N$, выражаемое равенством

$$\delta_N = \sqrt{n-k - \frac{1}{2} \left(\frac{2n-k}{\pi(2n+1)} \right)^{(2n-k)/(2k+2)} \left(\frac{1}{(k+1)N} \right)^{(2n+1)/(2k+2)}}.$$

При $0 < N \leq N_1$ $\sigma_N = \hat{\sigma}_N$ и экстремальный функционал снова имеет вид (15). Выражение для $e_\infty(n, k, \sigma, N)$ при $0 < N < N_2$ получается в соответствии с теоремой 7 подстановкой в (5) $\delta = \delta_N$.

Пусть теперь $N \geq N_2$. Тогда из (22) следует, что при всех $\delta > 0$

$$e_\infty(n, k, \sigma, N) \geq E_\infty(n, k, \sigma, \delta) - \delta N.$$

Устремляя δ к нулю, получаем

$$e_\infty(n, k, \sigma, N) \geq \frac{1}{\sigma^{n-k-1/2} \sqrt{\pi(2n-2k-1)}}.$$

Непосредственная оценка функционала (15), который при $N \geq N_2$ принимает вид

$$\langle \hat{y}^*, Fx(\cdot) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \sigma} (it)^k Fx(t) dt \quad (28)$$

(норма его равна N_2), дает

$$\begin{aligned} |x^{(k)}(0) - \langle \hat{y}^*, Fx(\cdot) \rangle| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq \sigma} |t|^k |Fx(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq \sigma} |t|^n |Fx(t)| |t|^{k-n} dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_{|t| \geq \sigma} |t|^{2n} |Fx(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{|t| \geq \sigma} |t|^{2k-2n} dt} \\ &\leq \frac{1}{\sigma^{n-k-1/2} \sqrt{\pi(2n-2k-1)}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $k > 0$, $0 < \sigma < \infty$, $\varepsilon \in (1, +\infty)$, а δ определено равенством (9). Обозначим через $N(\varepsilon)$ норму линейного функционала (10) (как функционала на $L_1(\Delta_\sigma)$). Имеем

$$N(\varepsilon) = \frac{\sigma^k}{2\pi\varepsilon^k}.$$

Поэтому при $0 < N < \sigma^k/(2\pi)$ с учетом тождества (26) утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 7. Если $N \geq \sigma^k/(2\pi)$, то из (22) следует, что при всех $\delta > 0$

$$e_1(n, k, \sigma, N) \geq E_1(n, k, \sigma, \delta) - \delta N.$$

Устремляя ε к единице (при этом $\delta \rightarrow 0$), получаем

$$e_1(n, k, \sigma, N) \geq \frac{1}{\sigma^{n-k-1/2} \sqrt{\pi(2n-2k-1)}}.$$

При $N \geq \sigma^k/(2\pi)$ функционал (16) принимает вид (28). Учитывая оценку (29), имеем

$$e_1(n, k, \sigma, N) \leq \frac{1}{\sigma^{n-k-1/2} \sqrt{\pi(2n-2k-1)}}.$$

При $k > 0$ и $\sigma = \infty$ норма линейного функционала (10) равна

$$N(\delta) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi(2n-2k-1)}{\delta^2(2n-1)(2n-k-1)} \right)^{k/(2n-1)}.$$

Поэтому при всех $N > 0$ найдется δ_N , для которого $N(\delta_N) = N$, и с учетом тождества (26) утверждение теоремы вытекает из теоремы 7.

Пусть теперь $k = 0$. Тогда при всех $\delta > 0$

$$e_1(n, 0, \sigma, N) \geq E_1(n, 0, \sigma, \delta) - \delta N = \left(\frac{1}{2\pi} - N \right) \delta + \frac{1}{\sigma^{n-1/2} \sqrt{\pi(2n-1)}}.$$

Устремляя δ к бесконечности, получаем

$$e_1(n, 0, \sigma, N) = \infty.$$

Если $N \geq 1/(2\pi)$, то, устремляя δ к нулю, из того же неравенства будем иметь

$$e_1(n, 0, \sigma, N) \geq \frac{1}{\sigma^{n-1/2} \sqrt{\pi(2n-1)}}.$$

Обратное неравенство следует из (29) при $k = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6 проводится по той же схеме, которая использовалась при доказательствах теорем 4 и 5.

Список литературы

1. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1965.
2. Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory / ed. C. A. Micchelli, T. J. Rivlin. New York: Plenum Press, 1977. P. 1-54.
3. Traub J. F., Woźniakowski H. A general theory of optimal algorithms. New York: Academic Press, 1980.
4. Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on optimal recovery // Numerical analysis, Proc. SERC Summer Sch., Lancaster/Engl., 1984. Berlin: Springer-Verlag, 1984. P. 21-93. (Lecture Notes in Math. V. 1129.)
5. Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Труды МИАН. 1989. Т. 189. С. 3-20.

6. Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Матем. заметки. 1991. Т. 50. №6. С. 85–93.
7. Osipenko K. Yu. Optimal recovery of analytic functions. Huntington, New York: Nova Science Publ., Inc., 2000.
8. Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 79–100.
9. Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прилож. 2003. Т. 37. №3. С. 51–64.
10. Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // УМН. 1996. Т. 51. №6. С. 89–124.
11. Osipenko K. Yu. Optimal recovery of periodic functions from Fourier coefficients given with an error // J. Complexity. 1996. V. 12. P. 35–46.
12. Тайков Л.В. Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования // Матем. заметки. 1968. Т. 4. №2. С. 233–238.
13. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. О неравенствах для производных колмогоровского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. №12. С. 73–106.
14. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Вышуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2003.
15. Magaril-Ilyayev G. G., Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M. Optimal recovery and extremum theory // Comput. Methods Funct. Theory. 2002. V. 2. P. 87–112.

Московский государственный институт
радиотехники, электроники и автоматики
(технический университет);

МАТИ – Российский государственный технологический
университет им. К.Э. Циолковского
E-mail: georg@magaril.mccme.ru
konst@osipenko.mccme.ru

Поступила в редакцию
26.02.2004