Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Мусин, О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 10, 83–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:25:07

УДК 517.982.3

И. Х. Мусин

О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$

В терминах преобразования Фурье–Лапласа описано сопряженное пространство к пространству бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$, частные производные которых удовлетворяют весовым оценкам. Для решений однородного линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами из этого пространства получено интегральное представление.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

1.1. Обозначения. Для $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$ положим $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, $\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2}$.

Для $\xi \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, $r > 0$ через $B(\xi, r)$ обозначим открытый шар в $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ радиуса r с центром в точке ξ , $B(\xi, r) = \{u \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n) : \|u - \xi\| < r\}$. Границу множества $A \subset \mathbb{C}^n$ обозначим через ∂A , $\bar{A}$ – замыкание A .

Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Пусть V – совокупность вещественнозначных функций φ в $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Через Φ обозначим подмножество V , состоящее из выпуклых функций. Для $\varphi \in V$ пусть $\varphi^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle - \varphi(y))$ – преобразование Юнга функции φ , $\tilde{\varphi}(x) = -\inf_{y \in \mathbb{R}^n} (\langle x, y \rangle + \varphi(y))$, $x \in \mathbb{R}^n$. Отметим, что $\varphi^*, \tilde{\varphi} \in \Phi$ и $\tilde{\varphi}(x) = \varphi^*(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Для $\rho > 1$, $\mu \in (1, \rho]$ через $\Phi_{\rho, \mu}$ обозначим множество функций φ из Φ , для которых существуют положительные числа $A_\varphi, B_\varphi, C_\varphi, D_\varphi$ такие, что всюду в $\mathbb{R}^n$ $C_\varphi \|x\|^\mu - D_\varphi \leq \varphi(x) \leq A_\varphi \|x\|^\rho + B_\varphi$.

Для локально выпуклого пространства X через X' обозначим пространство линейных непрерывных функционалов на X , через X^* – сильное сопряженное к X пространство.

Через $H(\Omega)$ будем обозначать пространство функций, голоморфных на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Как обычно, $C(W)$, где $W \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$, – совокупность функций, непрерывных на W .

Через $\bar{\partial}$ будем обозначать оператор Коши–Римана, действующий в пространстве дифференциальных форм [1; гл. 2, п. 2.1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 02-01-01098, 00-15-96189).

1.2. Результаты. Зафиксируем возрастающую последовательность положительных чисел $M_0 = 1, M_1, M_2, \dots$, удовлетворяющую условиям:

- i) $M_k^2 \leq M_{k-1}M_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$;
- ii) существуют числа $H_1 > 1, H_2 > 1$ такие, что $M_{k+1} \leq H_1 H_2^k M_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$;
- iii) найдутся числа $Q_1 > 0, Q_2 > 0$ такие, что $M_k \geq Q_1 Q_2^k k! \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$.

С последовательностью $(M_k)_{k=0}^\infty$ ассоциируется функция, определяемая следующим образом:

$$w(r) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{M_k}, \quad r > 0, \quad w(0) = 0.$$

Она непрерывна на $[0, \infty)$ [2; гл. 1, п. 8]. Из того, что $w(r) = 0$ для $r \in [0, M_1]$, и условия iii) следует, что найдется число $A_w > 0$ такое, что $w(r) \leq A_w r$, $r \geq 0$.

Пусть $\varphi \in V$. По $\varepsilon > 0, m \in \mathbb{N}$ определим банаховы пространства

$$G_\varphi(\varepsilon, m) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : p_{\varphi, \varepsilon, m}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|D^\alpha f(x)|(1 + \|x\|)^m}{\varepsilon^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \exp(\varphi(x))} < \infty \right\},$$

$$P_{\tilde{\varphi}}(\varepsilon) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : N_{\tilde{\varphi}, \varepsilon}(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{\exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z) + w(\varepsilon^{-1} \|z\|))} < \infty \right\}.$$

Пусть

$$G_\varphi = \bigcap_{m=1}^\infty \bigcap_{\varepsilon > 0} G_\varphi(\varepsilon, m), \quad P_{\tilde{\varphi}} = \bigcup_{\varepsilon > 0} P_{\tilde{\varphi}}(\varepsilon).$$

Наделим пространство G_φ топологией проективного предела пространств $G_\varphi(\varepsilon, m)$, а пространство $P_{\tilde{\varphi}}$ — топологией τ_{ind} индуктивного предела пространств $P_{\tilde{\varphi}}(\varepsilon)$.

Преобразование Фурье–Лапласа $\widehat{T}$ функционала $T \in G'_\varphi$ определим по формуле $\widehat{T}(z) = T(e^{i\langle \xi, z \rangle})$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Для случая $n = 1$ при выполнении дополнительных условий на φ из Φ и последовательность $(M_k)_{k=0}^\infty$, а именно:

- 1) найдутся числа $\tilde{H}_1 > 0, \tilde{H}_2 > 1$ такие, что

$$M_{k+m} \leq \tilde{H}_1 \tilde{H}_2^{k+m} M_k M_m \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}_+;$$

- 2) существуют числа $a > 1, K > 0$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(y)| \leq K(1 + |x| + |y|)^{a-1} |x - y|,$$

известно [3], что преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространствами G_φ^* и $P_{\tilde{\varphi}}$.

В настоящей работе задача описания пространства G_φ^* в терминах преобразования Фурье–Лапласа линейных непрерывных функционалов на G_φ рассматривается для случая нескольких переменных при условии, что $\varphi \in \Phi_{\rho, \mu}$, где $\rho > 1, \mu \in (1, \rho]$.

В связи с изучаемой задачей в §3 вводится пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ – проективный предел банаховых пространств

$$\mathcal{E}_m(\varphi) = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}^n) : q_m(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq m} \frac{|D^\alpha f(x)|(1 + \|x\|)^m}{\exp(\varphi(x))} < \infty \right\},$$

$m \in \mathbb{N}$, и изучается преобразование Фурье–Лапласа линейных непрерывных функционалов над этим пространством. Пусть $Q(\tilde{\varphi}) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_+} Q_m(\tilde{\varphi})$, где

$$Q_m(\tilde{\varphi}) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{(1 + \|z\|)^m \exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z))} < \infty \right\}.$$

Пространство $Q(\tilde{\varphi})$ наделяется топологией индуктивного предела нормированных пространств $Q_m(\tilde{\varphi})$. В §3 доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi \in \Phi_{\rho, \mu}$, где $\rho > 1$, $\mu \in (1, \rho]$. Тогда отображение $\mathcal{A}: T \in \mathcal{E}^*(\varphi) \mapsto \hat{T}$, $z \in \mathbb{C}^n$, устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $\mathcal{E}^*(\varphi)$ и $Q(\tilde{\varphi})$.

В §4 теорема 1 используется при описании пространства G_φ^* .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi \in \Phi_{\rho, \mu}$, где $\rho > 1$, $\mu \in (1, \rho]$. Тогда отображение $\mathcal{B}: T \in G_\varphi^* \mapsto \hat{T}$ устанавливает топологический изоморфизм между пространствами G_φ^* и $P_{\tilde{\varphi}}$.

Несмотря на то что пространство G_φ не входит в класс пространств, для которых описания сопряженных были получены Б. А. Тейлором [4] (см. условие Ф3 в [4]), благодаря полученному Р. С. Юлмухаметовым [5] (см. ниже теорему В) обобщению результата Л. Хёрмандера [1; теорема 4.4.3] о продолжении аналитических функций заданного роста с комплексного подпространства на все пространство, оказалось возможным воспользоваться идеями работы [4] для описания пространства G_φ^* . Что касается описания сопряженного пространства для $\mathcal{E}(\varphi)$, то сюръективность отображения $\mathcal{A}$ следует из результатов Г. И. Эскина [6] (см. также [7], [8]) в случае $\varphi(x) = \|x\|^p$, $p > 1$, и С. В. Попенова [9] (см. ниже теорему А) о представлении спектральной функции целой функции специального роста [7], [8]. Оставалось лишь показать инъективность отображения $\mathcal{A}$. Для этого в §3 изучается вопрос о полноте системы экспонент в $\mathcal{E}(\varphi)$.

В качестве одного из возможных приложений теоремы 2 рассматривается задача об интегральном представлении решений из пространства G_φ однородного линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. А именно, пусть $P(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha z^\alpha$ – полином от n переменных степени $m \geq 1$. Пусть $N \in \mathbb{C}^n$ – нехарактеристический вектор для P . Через ∂_N обозначим дифференциальный оператор, действующий на функции $f \in H(\Omega)$, Ω – открытое подмножество $\mathbb{C}^n$, по правилу:

$$(\partial_N f)(z) = \left. \frac{d}{d\lambda} f(z + \lambda N) \right|_{\lambda=0}, \quad z \in \Omega.$$

Пусть $P(z) = P_1^{l_1}(z) \cdots P_r^{l_r}(z)$, где $P_1, \dots, P_r$ – неприводимые полиномы, $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$. Для $i = 1, \dots, r$ пусть $V_i = \{z \in \mathbb{C}^n : P_i(z) = 0, (\partial_N P_i)(z) \neq 0, P_j(z) \neq 0 \text{ при } j \neq i\}$. Рассмотрим на G_φ оператор $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$. В §5 доказана

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi \in \Phi_{\rho, \mu}$, где $\rho > 1$, $\mu \in (1, \rho]$. Функция u из G_φ является решением уравнения $P(D)u = 0$ тогда и только тогда, когда справедливо представление

$$u(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{l_i-1} \langle x, N \rangle^j \int_{V_i} e^{\langle x, \zeta \rangle} d\mu_{ij}(\zeta), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где меры Радона $d\mu_{ij}$ имеют носители, содержащиеся в V_i , и таковы, что найдется положительная непрерывная функция h в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая при любом $m \in \mathbb{N}$ условию $\exp(\varphi^*(\operatorname{Re} z) + w_m(\|z\|)) = o(h(z))$, $\|z\| \rightarrow \infty$, такая, что для всех $i = 1, \dots, r$, $j = 0, \dots, l_i - 1$ $\int_{V_i} h(z) |d\mu_{ij}|(z) < \infty$.

Отметим, что для некоторых $\varphi \in \Phi$ и последовательностей $(M_k)_{k=0}^\infty$ пространство G_φ может не принадлежать классу локализуемых аналитически равномерных пространств [10], для которых справедлив “фундаментальный принцип” Эйлера [11], [12]. Например, если $\varphi(x) = \|x\|^2$, $M_k = k!^\gamma$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma > 1$, то пространство $P_{\tilde{\varphi}}$ не инвариантно относительно сдвигов, и поэтому G_φ не является локализуемым аналитически равномерным пространством (см. [10; предложение 1]). Таким образом, возможны такие ситуации, что представление (1) нельзя получить из результатов работы [10]. Тем не менее доказательство теоремы 3 проводится по обычной схеме доказательства “фундаментального принципа” Эйлера [10]–[13], детально изложенной в [14] для случая одного оператора в частных производных, действующего в пространстве функций, бесконечно дифференцируемых в выпуклых областях $\mathbb{R}^n$.

В §2 приводятся вспомогательные утверждения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, для произвольной строго убывающей к нулю числовой последовательности $(\varepsilon_m)_{m=1}^\infty$

$$G_\varphi = \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{proj} G_\varphi(\varepsilon_m, m), \quad P_{\tilde{\varphi}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{ind} P_{\tilde{\varphi}}(\varepsilon_m).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Всюду далее $\varepsilon_m = H_2^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$. Для краткости полагаем $\theta_m(x) = \exp(\varphi(x) - m \ln(1 + \|x\|))$, $x \in \mathbb{R}^n$; $w_m(r) = w(\varepsilon_m^{-1}r)$, $r \geq 0$; $\|f\|_{\varphi, m} = p_{\varphi, \varepsilon_m, m}(f)$, $f \in G_\varphi$; $G_{\varphi, m} = G_\varphi(\varepsilon_m, m)$, $P_{\tilde{\varphi}, m} = P_{\tilde{\varphi}}(\varepsilon_m)$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Для $\mu > 1$ через V_μ обозначим множество функций $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, для которых существуют положительные числа C_φ, D_φ такие, что $\varphi(x) \geq C_\varphi \|x\|^\mu - D_\varphi$, $x \in \mathbb{R}^n$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mu > 1$, $\varphi \in V_\mu$. Тогда

- 1) найдется число $M_\varphi > 0$ такое, что $|\varphi^*(y) - \varphi^*(x)| \leq M_\varphi$, если $\|y - x\| \leq (1 + \|x\|)^{1/(1-\mu)}$;
- 2) для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется постоянная $A_m > 0$ такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} (\langle \xi, x \rangle - (\varphi(\xi) - m \ln(1 + \|\xi\|))) - \varphi^*(x) \leq A_m + \frac{m}{\mu - 1} \ln(1 + \|x\|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\varphi \in V_\mu$, то, каковы бы ни были $x \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{Z}_+$, верхняя грань функции $\langle \xi, x \rangle - (\varphi(\xi) - m \ln(1 + \|\xi\|))$ переменного $\xi \in \mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n$ достигается в некоторой точке $\xi_m(x)$, для которой

$$\|\xi_m(x)\| \leq K_m \|x\|^{1/(\mu-1)} + K_m,$$

где постоянная $K_m > 0$ не зависит от x .

Для произвольных точек x, y в $\mathbb{R}^n$ таких, что $\|y - x\| \leq (1 + \|x\|)^{1/(1-\mu)}$, имеем

$$\begin{aligned} \varphi^*(y) - \varphi^*(x) &\leq \langle \xi_0(y), y - x \rangle \leq \|\xi_0(y)\| \|y - x\| \leq 2K_0, \\ \varphi^*(x) - \varphi^*(y) &\leq \langle \xi_0(x), x - y \rangle \leq \|\xi_0(x)\| \|x - y\| \leq 2K_0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем первое утверждение леммы с $M_\varphi = 2K_0$.

Далее, для любых $m \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} (\langle \xi, x \rangle - (\varphi(\xi) - m \ln(1 + \|\xi\|))) - \varphi^*(x) &\leq m \ln(1 + \|\xi_m(x)\|) \\ &\leq m \ln(1 + K_m \|x\|^{1/(\mu-1)} + K_m) \leq m \ln(2K_m + 1) + \frac{m}{\mu-1} \ln(1 + \|x\|). \end{aligned}$$

Отсюда получаем второе утверждение леммы.

Итак, если $\mu > 1$, $\varphi \in V_\mu$, то найдется постоянная $M_\varphi > 0$ такая, что

$$|\varphi^*(\operatorname{Im} z) - \varphi^*(\operatorname{Im} \zeta)| \leq M_\varphi, \quad \text{если} \quad \|z - \zeta\| \leq (1 + \|\zeta\|)^{1/(1-\mu)}. \quad (2)$$

Точно так же, как в [3; лемма 2], доказывается

ЛЕММА 2. Для любых $m, p \in \mathbb{N}$ существует постоянная $c \geq 0$ такая, что $w_m(r) + p \ln(1 + r) \leq w_{m+p}(r) + c$, $r \geq 0$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mu > 1$, $\varphi \in V_\mu$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется число $d_m > 0$ такое, что для всех $z \in \mathbb{C}^n$

$$\|\exp(i\langle \xi, z \rangle)\|_{\varphi, m} \leq \exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z) + w_{m+p}(\|z\|) + d_m), \quad p = \left\lceil \frac{m}{\mu-1} \right\rceil + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $z \in \mathbb{C}^n$, $m \in \mathbb{N}$

$$\|e^{i\langle \xi, z \rangle}\|_{\varphi, m} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{|(iz)^\alpha e^{i\langle \xi, z \rangle}|}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \theta_m(\xi)} \leq \exp((\ln \theta_m)^*(-\operatorname{Im} z) + w_m(\|z\|)).$$

Согласно лемме 1

$$(\ln \theta_m)^*(-\operatorname{Im} z) \leq \tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z) + A_m + \frac{m}{\mu-1} \ln(1 + \|z\|), \quad (3)$$

где $A_m > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от z . Из последних двух оценок и леммы 2 получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 4. Пусть $\varphi \in V$. Тогда для любого $T \in G'_\varphi$ $\widehat{T}$ – целая функция, причем для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $D^\alpha T(z) = T((i\xi)^\alpha e^{i\langle \xi, z \rangle})$, $z \in \mathbb{C}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\varphi \in V$, то для любого $T \in G'_\varphi$ функция $\widehat{T}$ определена всюду в $\mathbb{C}^n$. Покажем, что $\widehat{T}$ – целая функция. Зафиксируем произвольную точку ζ из $\mathbb{C}^n$. Для z из шара $B(\zeta, 1)$ в $\mathbb{C}^n$ положим

$$g_z(\xi) = e^{i\langle \xi, z \rangle} - e^{i\langle \xi, \zeta \rangle} - i\langle \xi, z - \zeta \rangle e^{i\langle \xi, \zeta \rangle}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Пользуясь оценкой

$$|D_\xi^\alpha g_z(\xi)| \leq (1 + \|\zeta\|)^{|\alpha|} (1 + \|\xi\| + \|\xi\|^2) e^{\|\xi\|} \|z - \zeta\|^2 e^{\langle \xi, -\operatorname{Im} \zeta \rangle}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

условием iii) и тем, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (\varphi(x)/\|x\|) = +\infty$, для любого $m \in \mathbb{N}$ найдем постоянную $C > 0$, зависящую от ζ и m , такую, что $\|g_z\|_{\varphi, m} \leq C\|z - \zeta\|^2$. В силу непрерывности функционала T имеем $T(g_z) = o(\|z - \zeta\|)$ при $z \rightarrow \zeta$. А так как функционал T линейен, то

$$\widehat{T}(z) - \widehat{T}(\zeta) = \sum_{j=1}^n T(i\xi_j e^{i\langle \xi, \zeta \rangle})(z_j - \zeta_j) + o(\|z - \zeta\|)$$

при $z \rightarrow \zeta$. Следовательно, $\widehat{T}(z)$ голоморфна в точке ζ . Поскольку ζ была произвольной точкой в $\mathbb{C}^n$, то $\widehat{T}$ – целая функция. Очевидно, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ $D^\alpha T(z) = T((i\xi)^\alpha e^{i\langle \xi, z \rangle})$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $\mu > 1$, $\varphi \in V_\mu$. Тогда найдется постоянная $C_\varphi > 0$ такая, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (m \ln(1 + \|x\|) - \varphi(x)) < \frac{m \ln m}{\mu} + C_\varphi m.$$

Доказательство леммы 5 элементарно (см. [3; лемма 11]).

§3. Пространство $\mathcal{E}(\varphi)$

Пусть $\varphi \in V$. Введем пространство $\mathcal{E}(\varphi) = \bigcap_{m=1}^\infty \mathcal{E}_m(\varphi)$, где

$$\mathcal{E}_m(\varphi) = \left\{ f \in C^m(\mathbb{R}^n) : q_m(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq m} \frac{|D^\alpha f(x)|}{\theta_m(x)} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Пространство $\mathcal{E}(\varphi)$ наделяется топологией проективного предела банаховых пространств $\mathcal{E}_m(\varphi)$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ пространство $\mathcal{E}_{m+1}(\varphi)$ вложено в $\mathcal{E}_m(\varphi)$ вполне непрерывно [15; §5, п. 5.4], поэтому в соответствии с определением из [16] $\mathcal{E}(\varphi)$ – пространство (M^*) .

Пусть $Q(\tilde{\varphi}) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_+} Q_m(\tilde{\varphi})$, где

$$Q_m(\tilde{\varphi}) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{(1 + \|z\|)^m \exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z))} < \infty \right\}.$$

Пространство $Q(\tilde{\varphi})$ наделяется топологией σ_{ind} индуктивного предела нормированных пространств $Q_m(\tilde{\varphi})$. Поскольку для каждого $m \in \mathbb{N}$ пространство $Q_m(\tilde{\varphi})$ вложено в $Q_{m+1}(\tilde{\varphi})$ вполне непрерывно, то $Q(\tilde{\varphi})$ – пространство (LN^*) (см. определение в [16]). Отметим, что и $\mathcal{E}^*(\varphi)$ – пространство (LN^*) [16; теорема 5].

Пусть $\mathcal{M}_\varphi$ – множество всех положительных непрерывных функций $\varkappa(z)$ в $\mathbb{C}^n$ таких, что

$$\frac{\varkappa(z)}{(1 + \|z\|)^m \exp(\tilde{\varphi}(\text{Im } z))} \rightarrow \infty, \quad \|z\| \rightarrow \infty.$$

На множестве $Q(\tilde{\varphi})$ можно также рассмотреть топологию σ_{pr} , определяемую с помощью семейства норм вида

$$\|f\|_\varkappa = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{\varkappa(z)}, \quad \varkappa \in \mathcal{M}_\varphi.$$

Согласно [17] топологии σ_{ind} и σ_{pr} совпадают.

Настоящий параграф посвящен доказательству теоремы 1.

Вначале исследуем вопрос о полноте многочленов в $\mathcal{E}(\varphi)$.

ЛЕММА 6. Пусть $\mu > 1$, $\varphi \in V_\mu$. Тогда многочлены плотны в $\mathcal{E}(\varphi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, т.е. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $c_m > 0$ такая, что

$$|D^\alpha f(x)| \leq c_m \theta_m(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |\alpha| \leq m. \quad (4)$$

Приближим f полиномами в $\mathcal{E}(\varphi)$. Это будет проделано в три этапа.

1) Для $r > 0$ пусть $\Pi_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < r, j = 1, \dots, n\}$. Выберем функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ такой, что $\text{supp } \chi \subseteq [-2, 2]$, $\chi(x) = 1$ для $x \in [-1, 1]$, $0 \leq \chi(x) \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Положим $\eta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \chi(x_1)\chi(x_2) \cdots \chi(x_n)$. Пусть $f_\nu(x) = f(x)\eta(x/\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, $f_\nu \in \mathcal{E}(\varphi)$. Покажем, что $f_\nu \rightarrow f$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|f_\nu(x) - f(x)|}{\theta_m(x)} \leq \sup_{x \notin \Pi_\nu} \frac{|f(x)|}{\theta_m(x)} \leq \sup_{x \notin \Pi_\nu} \frac{c_{m+1} \theta_{m+1}(x)}{\theta_m(x)}.$$

Следовательно, при $\nu \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|f_\nu(x) - f(x)|}{\theta_m(x)} \rightarrow 0. \quad (5)$$

Далее¹,

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}^n, 1 \leq |\alpha| \leq m} \frac{|D^\alpha(f_\nu(x) - f(x))|}{\theta_m(x)} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, 1 \leq |\alpha| \leq m} \frac{1}{\theta_m(x)} \left| \sum_{\beta \leq \alpha, |\beta| < |\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} (D^\beta f)(x) \nu^{|\beta| - |\alpha|} (D^{\alpha - \beta} \eta)\left(\frac{x}{\nu}\right) \right. \\ & \quad \left. + (D^\alpha f)(x) \left(\eta\left(\frac{x}{\nu}\right) - 1 \right) \right| \end{aligned}$$

¹ Для мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ запись $\beta \leq \alpha$ означает, что $\beta_j \leq \alpha_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

$$\leq \sup_{x \in \Pi_{2\nu} \setminus \Pi_\nu, 1 \leq |\alpha| \leq m} \frac{1}{\theta_m(x)} \left(\sum_{\beta \leq \alpha, |\beta| < |\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} \nu^{|\beta| - |\alpha|} |(D^\beta f)(x)| \right. \\ \left. \times \left| (D^{\alpha - \beta} \eta) \left(\frac{x}{\nu} \right) \right| \right) + \sup_{x \notin \Pi_\nu, 1 \leq |\alpha| \leq m} \frac{|(D^\alpha f)(x)|}{\theta_m(x)}.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (4), заключаем, что при $\nu \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, 1 \leq |\alpha| \leq m} \frac{|D^\alpha (f_\nu(x) - f(x))|}{\theta_m(x)} \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (5) следует, что $q_m(f_\nu - f) \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$. В силу произвольности $m \in \mathbb{N}$ это означает, что последовательность $(f_\nu)_{\nu=1}^\infty$ сходится к f в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $\nu \rightarrow \infty$.

2) Зафиксируем $\nu \in \mathbb{N}$. Пусть h — не равная тождественно нулю целая функция экспоненциального типа не выше 1, принадлежащая классу $L_1(\mathbb{R})$ и неотрицательная на вещественной прямой. Можно взять, например, $h(z) = \sin^2(z/2)/z^2$, $z \in \mathbb{C}$. Положим $H(z_1, z_2, \dots, z_n) = h(z_1)h(z_2) \cdots h(z_n)$. Воспользовавшись теоремой Пэли–Винера [18; гл. 6], найдем постоянную $C_H > 0$ такую, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|(D^\alpha H)(x)| \leq C_H, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Пусть $\int_{\mathbb{R}^n} H(x) dx = A$. Для $\lambda > 1$ положим

$$f_{\nu, \lambda}(x) = \frac{\lambda^n}{A} \int_{\mathbb{R}^n} f_\nu(y) H(\lambda(x - y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, $f_{\nu, \lambda} \in \mathcal{E}(\varphi)$. Покажем, что $f_{\nu, \lambda} \rightarrow f_\nu$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно, $r(\lambda) = \lambda^{-2n/(2n+1)}$. Для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$(D^\alpha f_{\nu, \lambda})(x) - (D^\alpha f_\nu)(x) = \frac{\lambda^n}{A} \int_{\mathbb{R}^n} ((D^\alpha f_\nu)(y) - (D^\alpha f_\nu)(x)) H(\lambda(x - y)) dy \\ = \frac{\lambda^n}{A} \int_{\|y-x\| \leq r(\lambda)} ((D^\alpha f_\nu)(y) - (D^\alpha f_\nu)(x)) H(\lambda(x - y)) dy \\ + \frac{\lambda^n}{A} \int_{\|y-x\| > r(\lambda)} ((D^\alpha f_\nu)(y) - (D^\alpha f_\nu)(x)) H(\lambda(x - y)) dy.$$

Обозначим слагаемые в правой части последнего равенства через $I_{1, \alpha}(x)$ и $I_{2, \alpha}(x)$ соответственно. Пусть $K_{\nu, m} = \max_{x \in \mathbb{R}^n, |\beta| \leq m+1} |(D^\beta f_\nu)(x)|$. В результате элементарных оценок получаем

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq m} |I_{1, \alpha}(x)| \leq \frac{\pi^{n/2} \sqrt{n} C_H K_{\nu, m}}{A \Gamma(n/2 + 1)} \lambda^{-n/(2n+1)}, \\ \max_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq m} |I_{2, \alpha}(x)| \leq \frac{2C_H K_{\nu, m}}{A} \int_{\|u\| > \lambda^{1/(2n+1)}} H(u) du.$$

Из этих двух оценок следует, что

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq m} |(D^\alpha f_{\nu, \lambda})(x) - (D^\alpha f_\nu)(x)| \rightarrow 0$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$. Следовательно, $q_m(f_{\nu, \lambda} - f_\nu) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Отсюда в силу произвольности $m \in \mathbb{N}$ имеем $f_{\nu, \lambda} \rightarrow f_\nu$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

3) Зафиксируем $\lambda > 0, \nu \in \mathbb{N}$. Приближим $f_{\nu, \lambda}$ многочленами в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Для $N \in \mathbb{N}$ пусть

$$U_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{\sum_{|\alpha|=k} (D^\alpha H)(0) x^\alpha}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Так как

$$H(x) = U_N(x) + \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{(D^\alpha H)(tx) x^\alpha}{(N+1)!},$$

где t — некоторая точка из $(0, 1)$, зависящая от $x \in \mathbb{R}^n$, то, пользуясь неравенством (6), получаем

$$|H(x) - U_N(x)| \leq \frac{C_H (N+2)^n \|x\|^{N+1}}{(N+1)!}. \quad (7)$$

Пусть $R > 0$ таково, что $\text{supp } f_\nu \subset \Pi_R$. Положим

$$V_N(x) = \frac{\lambda^n}{A} \int_{\Pi_R} f_\nu(y) U_N(\lambda(x-y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, V_N — многочлен степени не выше N . Покажем, что последовательность $(V_N)_{N=1}^\infty$ сходится к $f_{\nu, \lambda}$ в $\mathcal{E}(\varphi)$ при $N \rightarrow \infty$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно. Для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n, x \in \mathbb{R}^n$

$$(D^\alpha f_{\nu, \lambda})(x) - (D^\alpha V_N)(x) = \frac{\lambda^n}{A} \int_{\Pi_R} (D^\alpha f_\nu)(y) (H(\lambda(x-y)) - U_N(\lambda(x-y))) dy.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (7), в результате элементарных оценок найдем положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что при любых $N \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq m, x \in \mathbb{R}^n$

$$|(D^\alpha f_{\nu, \lambda})(x) - (D^\alpha V_N)(x)| \leq \frac{C_1 C_2^N (1 + \|x\|)^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Таким образом, для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\|f_{\nu, \lambda} - V_N\|_m \leq \frac{C_1 C_2^N}{(N+1)!} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{(1 + \|x\|)^{N+1}}{\theta_m(x)}.$$

Воспользовавшись теперь леммой 5, найдем положительные постоянные C_3, C_4 такие, что для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\|f_{\nu, \lambda} - V_N\|_m \leq \frac{C_3 C_4^N (N+1)^{(N+1)/\mu}}{(N+1)!}.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $N \rightarrow \infty$. Следовательно, $\|f_{\nu,\lambda} - V_N\|_m \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Это означает, что функцию $f_{\nu,\lambda}$ удалось приблизить многочленами в $\mathcal{E}(\varphi)$, поскольку $m \in \mathbb{N}$ было произвольно.

Из 1)–3) следует полнота многочленов в $\mathcal{E}(\varphi)$.

Для обозначения преобразования Фурье обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ используем символ $\mathcal{F}[f]$, понимая под этим функционал из $S'(\mathbb{R}^n)$, определяемый формулой $(\mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g]) = (2\pi)^n (f, g)$, $g \in S(\mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{F}[g]$ – преобразование Фурье функции g : $\mathcal{F}[g](x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [7], [8]. *Спектральной функцией* функции $f \in H(\mathbb{C}^n)$ называется обобщенная функция $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, обладающая свойствами:

- 1) $g(\xi) e^{-\langle y, \xi \rangle} \in S'(\mathbb{R}^n)$ при всех $y \in \mathbb{R}^n$;
- 2) $f(z) = \mathcal{F}[g(\xi) e^{-\langle y, \xi \rangle}](x)$ при всех $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$.

При доказательстве теоремы 1 нам понадобится следующий результат из работы [9].

ТЕОРЕМА А. Пусть ϕ – некоторая положительная выпуклая в $\mathbb{R}^n$ функция такая, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ существует $y = y(x) \in \mathbb{R}^n$ такое, что $\phi^*(y) = \langle y, x \rangle - \phi(x)$, и, кроме того, для некоторых постоянных $A > 0$, $B > 0$, $\beta > 0$ $\|y(x)\| \leq A\|x\|^\beta + B$, $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть $f(z)$ – некоторая целая в $\mathbb{C}^n$ функция, удовлетворяющая оценке $|f(z)| \leq C(1 + \|z\|)^k e^{\tilde{\phi}(y)}$, где $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $C > 0$. Тогда ее спектральная функция $g(\xi)$ представляется в виде суммы конечно числа обобщенных производных от непрерывных функций $g_\alpha(\xi)$: $g(\xi) = \sum_\alpha D^\alpha g_\alpha(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих при всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и некоторых $l_\alpha \in \mathbb{N}$ оценке $|g_\alpha(\xi)| \leq c_\alpha (1 + \|\xi\|)^{l_\alpha} e^{-\phi(\xi)}$.

Теорема А является обобщением теоремы Г. И. Эскина [6], в которой $\phi(x) = \|x\|^p$, $p > 1$. Доказательство теоремы А проводится по той же схеме, что и в [6] (см. также [7], [8]), при этом используется следующее свойство преобразования Юнга: для $\varphi \in \Phi$ $(\varphi^*)^* = \varphi$ [19].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $T \in \mathcal{E}'(\varphi)$, то найдутся числа $c_1 > 0$, $m \in \mathbb{N}$ такие, что

$$|T(f)| \leq c_1 q_m(f), \quad f \in \mathcal{E}(\varphi). \quad (8)$$

Поскольку для произвольного $f \in G_\varphi$ и любого $m \in \mathbb{N}$

$$q_m(f) \leq \left(\max_{0 \leq p \leq m} \varepsilon_m^p M_p \right) \|f\|_{\varphi, m},$$

то T является также линейным непрерывным функционалом на G_φ . Поэтому определено преобразование Фурье–Лапласа $\hat{T}$ функционала T (являющееся целой функцией в $\mathbb{C}^n$). Из неравенств (8) и (3) имеем при некотором $c_2 > 0$

$$|\hat{T}(z)| \leq c_2 (1 + \|z\|)^{m\mu/(\mu-1)} \exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z)), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Таким образом, линейное отображение $\mathcal{A}$, сопоставляющее всякому функционалу $T \in \mathcal{E}^*(\varphi)$ целую функцию $\hat{T}$, действует из $\mathcal{E}^*(\varphi)$ в $Q(\tilde{\varphi})$.

Отображение $\mathcal{A}$ непрерывно. Действительно, пусть $\varkappa$ – произвольная функция из $\mathcal{M}_\varphi$, $\mathcal{O} = \{f \in Q(\tilde{\varphi}) : |f(z)| \leq \varkappa(z)\}$ – окрестность нуля в $Q(\tilde{\varphi})$. Тогда для всякого $T \in \mathcal{E}'(\varphi)$, принадлежащего полюре в $\mathcal{E}'(\varphi)$ ограниченного в $\mathcal{E}(\varphi)$ множества $\{e^{i\langle \xi, z \rangle} / \varkappa(z)\}_{z \in \mathbb{C}^n}$, имеем $\mathcal{A}(T) \in \mathcal{O}$.

Пользуясь леммой 4 и полнотой многочленов в $\mathcal{E}(\varphi)$, заключаем, что отображение $\mathcal{A}$ инъективно.

Отображение $\mathcal{A}$ сюръективно. Действительно, пусть целая функция $U \in Q(\tilde{\varphi})$ при некоторых $m \in \mathbb{N}$, $c > 0$ удовлетворяет в $\mathbb{C}^n$ неравенству

$$|U(z)| \leq c(1 + \|z\|)^m \exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z)).$$

По теореме А для каждого $y \in \mathbb{R}^n$ функция $U(x + iy)$, рассматриваемая как элемент из $S'(\mathbb{R}^n)$, есть преобразование Фурье обобщенной функции медленного роста $g_y(\xi) = g(\xi)e^{-\langle y, \xi \rangle}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где для обобщенной функции $g(\xi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеет место представление в виде суммы конечного числа дифференциальных операторов конечного порядка от непрерывных функций $g_\alpha(\xi)$: $g(\xi) = \sum_\alpha D^\alpha g_\alpha(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, причем функции $g_\alpha(\xi)$ удовлетворяют при некоторых $l_\alpha \in \mathbb{N}$, $c_\alpha > 0$ оценке

$$|g_\alpha(\xi)| \leq c_\alpha(1 + \|\xi\|)^{l_\alpha} e^{-\varphi(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что для любого $f \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(x)f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_\alpha g_\alpha(\xi) ((-D)^\alpha e^{i\langle x, \xi \rangle}) d\xi \right) f(x) dx. \quad (9)$$

Определим функционал T на $\mathcal{E}(\varphi)$ по формуле

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_\alpha g_\alpha(\xi) ((-D)^\alpha f)(\xi) d\xi, \quad f \in \mathcal{E}(\varphi).$$

Очевидно, $T \in \mathcal{E}'(\varphi)$. Из равенства (9) вытекает, что $\hat{T}(x) = U(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Отсюда по теореме единственности $\hat{T}(z) = U(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Итак, $\mathcal{A}$ – линейное непрерывное взаимно однозначное отображение пространства $\mathcal{E}^*(\varphi)$ на $Q(\tilde{\varphi})$. По теореме об открытом отображении [20], [21; теорема 3.2] $\mathcal{A}$ осуществляет топологический изоморфизм между пространствами $\mathcal{E}^*(\varphi)$ и $Q(\tilde{\varphi})$.

Теорема 1 доказана.

§ 4. Описание пространства, сопряженного к G_φ

Пусть $\varphi \in V$. Введем пространства

$$C_{\varphi, m} = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^n) : \frac{|f(x)|}{\theta_m(x)} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \right\},$$

снабженные нормами

$$\|f\|_{\theta_m} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\theta_m(x)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

По стандартной схеме [4; предложения 2.10, 2.11, следствие 2.12], [3; лемма 5] устанавливается

ЛЕММА 7. Пусть числа $m \in \mathbb{N}$, $c > 0$ таковы, что для $T \in G'_\varphi$ $|T(f)| \leq c\|f\|_{\varphi,m} \quad \forall f \in G_\varphi$. Тогда найдутся функционалы $T_\alpha \in C'_{\varphi,m}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, такие, что

$$|T_\alpha(f)| \leq \frac{c\|f\|_{\theta_m}}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}, \quad f \in C_{\varphi,m},$$

$$и \quad T(f) = \sum_{|\alpha| \geq 0} T_\alpha(D^\alpha f), \quad f \in G_\varphi.$$

Далее нам потребуется следующее утверждение из [5; лемма 1].

ТЕОРЕМА В. Пусть ϕ – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условию

$$|\phi(z) - \phi(w)| \leq M, \quad \text{если} \quad \|z - w\| \leq (1 + \|z\|)^\gamma,$$

где $\gamma < 0$ – некоторое число. Пусть Σ – комплексная плоскость в $\mathbb{C}^n$. Для всякой аналитической функции f на Σ такой, что $\ln|f(z)| \leq \phi(z)$, существует целая функция U в $\mathbb{C}^n$ такая, что $U = f$ на Σ и

$$\ln|U(z)| \leq \phi(z) + N_p \ln(\|z\| + e + d_\Sigma), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где d_Σ – расстояние от Σ до начала координат и постоянная N_p зависит лишь от M , γ и не зависит от функций ϕ , f и от Σ .

При доказательстве инъективности преобразования Фурье–Лапласа в теореме 2 используется следующая лемма.

ЛЕММА 8. Пусть ϕ – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условиям теоремы В. Пусть при некотором $m \in \mathbb{N}$ функция $S \in H(\mathbb{C}^{2n})$ удовлетворяет неравенству

$$|S(z, u)| \leq e^{\phi(z) + w_m(\|u\|)}, \quad z, u \in \mathbb{C}^n,$$

и $S(z, z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$. Тогда найдутся функции $S_1, S_2, \dots, S_n \in H(\mathbb{C}^{2n})$ такие, что $S(z, u) = \sum_{j=1}^n S_j(z, u)(z_j - u_j)$, $z, u \in \mathbb{C}^n$, и

$$|S_j(z, u)| \leq A(1 + \|z\|)^p e^{\phi(z) + w_{m+p}(\|u\|)}, \quad z, u \in \mathbb{C}^n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

при некоторых $A > 0$, $p \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $L(z, t) = S(z, z + t)$, $z, t \in \mathbb{C}^n$. Из условий на S имеем $L(z, 0) = 0$, $z \in \mathbb{C}^n$; $|L(z, t)| \leq e^{\phi(z) + w_m(\|z+t\|)}$, $z, t \in \mathbb{C}^n$.

Пусть $h_{m,n}(z, t) = \phi(z) + w_m(\|z + t\|)$, $z, t \in \mathbb{C}^n$. Для $k = 1, 2, \dots, n-1$ пусть $h_{m,k}(z, t_1, \dots, t_k) = \phi(z) + w_m(\|(z_1 + t_1, \dots, z_k + t_k, z_{k+1}, \dots, z_n)\|)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{C}$. Заметим, что $h_{m,k}$ – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^{n+k}$. Поскольку последовательность $(M_k)_{k=0}^\infty$ удовлетворяет условиям i) и iii), то

$$|w_m(r_2) - w_m(r_1)| \leq K_m |r_2 - r_1|, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0, \quad (10)$$

где $K_m = c_w/\varepsilon_m$, $c_w > 0$ – некоторая постоянная (см. [3; лемма 1]). Поэтому для $\zeta, z \in \mathbb{C}^n$, $\xi, t \in \mathbb{C}^k$ таких, что $\|(\zeta, \xi) - (z, t)\| \leq (1 + \|(z, t)\|)^\gamma$, справедливо неравенство $|h_{m,k}(\zeta, \xi) - h_{m,k}(z, t)| \leq M + K_m$. Положим $L_n(z, t) = L(z, t)$, $z, t \in \mathbb{C}^n$; $L_k(z, t_1, \dots, t_k) = L(z, t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $z \in \mathbb{C}^n$, $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{C}$. Очевидно, $|L_k(z, t)| \leq e^{h_{m,k}(z, t)}$, $(z, t) \in \mathbb{C}^{n+k}$. Так как для любого $z \in \mathbb{C}^n$ $L_1(z, 0) = 0$, то функция $\Psi_1^{(1)}(z, t_1) = L_1(z, t_1)/t_1 \in H(\mathbb{C}^{n+1})$ и $L_1(z, t_1) = \Psi_1^{(1)}(z, t_1)t_1$, $z \in \mathbb{C}^n$, $t_1 \in \mathbb{C}$. Справедлива оценка

$$|\Psi_1^{(1)}(z, t_1)| \leq A_1 e^{h_{m,1}(z, t_1)}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad t_1 \in \mathbb{C},$$

где $A_1 = \exp(2K_m)$. Для $|t_1| > 1$ она очевидна, для случая $|t_1| \leq 1$ эта оценка получается в результате применения принципа максимума к функции $\Psi_1^{(1)}$ в круге $|t_1| \leq 1$ (при фиксированном $z \in \mathbb{C}^n$) и использования неравенства (10). Если для $k = 2, \dots, n$ найдены функции $\Psi_1^{(k-1)}(z, t_1, \dots, t_{k-1}), \dots, \Psi_{k-1}^{(k-1)}(z, t_1, \dots, t_{k-1})$ такие, что $L_{k-1}(z, t_1, \dots, t_{k-1}) = \sum_{j=1}^{k-1} \Psi_j^{(k-1)}(z, t_1, \dots, t_{k-1})t_j$ и при некоторых $A_{k-1} > 0$, $l_{k-1} \in \mathbb{N}$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}^{k-1}$, $j = 1, \dots, k-1$

$$|\Psi_j^{(k-1)}(z, t)| \leq A_{k-1}(1 + \|z\|)^{l_{k-1}}(1 + \|t\|)^{l_{k-1}} e^{h_{m,k-1}(z, t)},$$

то по теореме В найдутся функции $\Psi_1^{(k)}, \dots, \Psi_{k-1}^{(k)} \in H(\mathbb{C}^{n+k})$ такие, что

$$\begin{aligned} \Psi_j^{(k)}(z, t_1, \dots, t_{k-1}, 0) &= \Psi_j^{(k-1)}(z, t_1, \dots, t_{k-1}), \\ z \in \mathbb{C}^n, \quad t_1, \dots, t_{k-1} \in \mathbb{C}, \quad j &= 1, \dots, k-1, \end{aligned}$$

и при некоторых $B_k > 0$, $l_k \in \mathbb{N}$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}^k$, $j = 1, \dots, k-1$

$$|\Psi_j^{(k)}(z, t)| \leq B_k(1 + \|z\|)^{l_k}(1 + \|t\|)^{l_k} e^{h_{m,k}(z, t)}.$$

Поскольку функция $V_k(z, t_1, \dots, t_k) = L_k(z, t_1, \dots, t_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \Psi_j^{(k)}(z, t_1, \dots, t_k)t_j$ обращается в 0 на плоскости $t_k = 0$, то функция

$$\Psi_k^{(k)}(z, t_1, \dots, t_k) = \frac{V_k(z, t_1, \dots, t_k)}{t_k} \in H(\mathbb{C}^{n+k}).$$

Поступая точно так же, как и при оценке $|\Psi_1^{(1)}(z, t_1)|$, получаем

$$|\Psi_k^{(k)}(z, t)| \leq C_k(1 + \|z\|)^{l_k}(1 + \|t\|)^{l_k} e^{h_{m,k}(z, t)}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{C}^k,$$

где $C_k > 0$ – некоторая постоянная. Таким образом, получено представление

$$L_k(z, t_1, \dots, t_k) = \sum_{j=1}^k \Psi_j^{(k)}(z, t_1, \dots, t_k)t_j,$$

где функции $\Psi_1^{(k)}, \dots, \Psi_k^{(k)} \in H(\mathbb{C}^{n+k})$, причем для всех $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}^k$, $j = 1, \dots, k$

$$|\Psi_j^{(k)}(z, t)| \leq A_k(1 + \|z\|)^{l_k}(1 + \|t\|)^{l_k} e^{h_{m,k}(z, t)},$$

где $A_k = \max\{B_k, C_k\}$. При $k = n$, полагая $S_j(z, u) = -\Psi_j^{(n)}(z, u - z)$, $j = 1, 2, \dots, n$, получаем искомое представление функции S . Оценки $|S_j(z, u)|$ получаются из оценок $|\Psi_j^{(k)}|$ с помощью леммы 2.

Лемма 8 доказана.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Для $\varphi \in \Phi$ через $\mathcal{L}_\varphi$ будем обозначать множество всех положительных непрерывных функций $\varkappa(z)$ в $\mathbb{C}^n$ таких, что

$$\frac{\varkappa(z)}{\exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z) + w_m(\|z\|))} \rightarrow \infty, \quad \|z\| \rightarrow \infty.$$

На множестве $P_{\tilde{\varphi}}$ можно также рассмотреть топологию $\tau_{\text{гр}}$, определяемую с помощью семейства норм вида

$$\|f\|_\varkappa = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{\varkappa(z)}, \quad \varkappa \in \mathcal{L}_\varphi.$$

Согласно [17] топологии $\tau_{\text{инд}}$ и $\tau_{\text{гр}}$ совпадают.

Обозначим для каждого $m \in \mathbb{N}$ через $\tilde{\mathcal{E}}_m(\varphi)$ замыкание $\mathcal{E}(\varphi)$ в $\mathcal{E}_m(\varphi)$ с топологией, индуцированной из $\mathcal{E}_m(\varphi)^2$. Тогда $\mathcal{E}(\varphi)$ плотно в $\tilde{\mathcal{E}}_m(\varphi)$, а пространство $\tilde{\mathcal{E}}_{m+1}(\varphi)$ вложено в $\tilde{\mathcal{E}}_m(\varphi)$ вполне непрерывно для каждого $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}(\varphi) = \bigcap_{m=1}^\infty \tilde{\mathcal{E}}_m(\varphi)$ и топология $\mathcal{E}(\varphi)$ совпадает с топологией проективного предела пространств $\tilde{\mathcal{E}}_m(\varphi)$. Для (M^*) -пространства $\mathcal{E}(\varphi)$ справедливо равенство $\mathcal{E}^*(\varphi) = \bigcup_{m=1}^\infty \tilde{\mathcal{E}}_m^*(\varphi)$, причем $\mathcal{E}^*(\varphi)$ – пространство (LN^*) и топология $\mathcal{E}^*(\varphi)$ совпадает с топологией индуктивного предела пространств $\tilde{\mathcal{E}}_m^*(\varphi)$ [16; теорема 5], [15; п. 2.13].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Отображение $\mathcal{B}$ линейно и с учетом леммы 3 действует из G_φ^* в $P_{\tilde{\varphi}}$.

Отображение $\mathcal{B}$ непрерывно. Действительно, пусть $\varkappa$ – произвольная функция из $\mathcal{L}_\varphi$, $\mathcal{V} = \{f \in P_{\tilde{\varphi}} : |f(z)| \leq \varkappa(z)\}$ – окрестность нуля в $P_{\tilde{\varphi}}$. Заметим, что множество $A = \{e^{i\langle \xi, z \rangle} / \varkappa(z)\}_{z \in \mathbb{C}^n}$ ограничено в G_φ . Легко видеть, что $\hat{T} \in \mathcal{V}$ для $T \in G'_\varphi$, принадлежащих полюсу множества A в G'_φ .

Отображение $\mathcal{B}$ взаимно однозначно. Пусть для $T \in G_\varphi^*$ $\hat{T} \equiv 0$. Покажем, что $T(f) = 0 \ \forall f \in G_\varphi$. Действуем по схеме из [4; док-во теоремы 2.8]. По лемме 7 найдутся функционалы $T_\alpha \in C'_\varphi$ (в частности $T_\alpha \in \mathcal{E}'(\varphi)$) такие, что при некоторых $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$, не зависящих от $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, выполнено неравенство

$$|T_\alpha(f)| \leq \frac{c\|f\|_{\theta_m}}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}, \quad f \in C_\varphi, \quad (11)$$

и $T(f) = \sum_{|\alpha| \geq 0} T_\alpha(D^\alpha f)$, $f \in G_\varphi$. Поэтому $\hat{T}(z) = \sum_{|\alpha| \geq 0} V_\alpha(z) z^\alpha$, причем целые функции $V_\alpha(z) = i^{|\alpha|} T_\alpha(\exp(i\langle \xi, z \rangle))$ в силу (11) и (3) удовлетворяют при некотором $B_m > 0$ (не зависящем от $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$) и $q = m/(\mu - 1)$ оценке

$$|V_\alpha(z)| \leq \frac{B_m(1 + \|z\|)^q \exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z))}{\varepsilon_m^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

²Можно показать, что $\tilde{\mathcal{E}}_m(\varphi) = \{f \in \mathcal{E}_m(\varphi) : \sup_{|\alpha| \leq m} (|D^\alpha f(x)| / \theta_m(x)) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty\}$.

Пользуясь этой оценкой, заключаем, что функция $S(z, u) = \sum_{|\alpha| \geq 0} V_\alpha(z) u^\alpha$, $z, u \in \mathbb{C}^n$, целая, при этом для любых $z, u \in \mathbb{C}^n$

$$|S(z, u)| \leq \frac{B_m \varepsilon_m^n}{(\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1})^n} (1 + \|z\|)^q \exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(\|u\|)).$$

Так как $S(z, z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$, то, воспользовавшись леммой 8 (выпуклая функция $\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z)$ удовлетворяет ее условиям согласно лемме 1), найдем функции $S_1, S_2, \dots, S_n \in H(\mathbb{C}^{2n})$ такие, что

$$S(z, u) = \sum_{j=1}^n S_j(z, u)(z_j - u_j), \quad z, u \in \mathbb{C}^n,$$

и при некоторых $A > 0, p \in \mathbb{N}$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$

$$|S_j(z, u)| \leq A(1 + \|z\|)^p \exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z) + w_{m+p}(\|u\|)), \quad z, u \in \mathbb{C}^n. \quad (12)$$

Разлагаем $S_j(z, u)$ в ряд Тейлора по переменной u : $S_j(z, u) = \sum_{|\alpha| \geq 0} S_{j,\alpha}(z) u^\alpha$, $z, u \in \mathbb{C}^n$. Пользуясь неравенством Коши для коэффициентов степенного ряда, неравенством (12), равенством [2; гл. 1]

$$\inf_{r>0} \frac{\exp(w(r))}{r^k} = \frac{1}{M_k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (13)$$

и выбирая $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\varepsilon_k \sqrt{n} < \varepsilon_{m+p}$, для целых функций $S_{j,\alpha}(z)$ получаем оценку

$$|S_{j,\alpha}(z)| \leq \frac{A(1 + \|z\|)^p \exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z))}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

По теореме 1 найдем функционалы $\Psi_{j,\alpha} \in \mathcal{E}^*(\varphi)$ такие, что $\hat{\Psi}_{j,\alpha} = S_{j,\alpha}(z)$. Из свойств (LN^*) -пространств [16; теорема 2], [15; п. 2.9] вытекает, что множество $\{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|} S_{j,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $Q(\tilde{\varphi})$. Следовательно, $\{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \Psi_{j,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $\mathcal{E}^*(\varphi)$, но тогда оно содержится в некотором $\tilde{\mathcal{E}}_s^*(\varphi)$ и ограничено там. Поэтому при некотором $A_1 > 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|\Psi_{j,\alpha}(f)| \leq \frac{A_1 q_s(f)}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}, \quad f \in \tilde{\mathcal{E}}_s(\varphi). \quad (14)$$

Для $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ с отрицательными компонентами, $j = 1, \dots, n$ пусть $\Psi_{j,\alpha}$ — нулевой функционал из $\mathcal{E}^*(\varphi)$, $S_{j,\alpha}(z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$. Справедливо равенство

$$S(z, u) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \sum_{j=1}^n (z_j S_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)}(z) - S_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_j-1, \dots, \alpha_n)}(z)) u^\alpha.$$

Следовательно, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$V_\alpha(z) = \sum_{j=1}^n (z_j S_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)}(z) - S_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \dots, \alpha_n)}(z)), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Из этого равенства и теоремы 1 следует, что для любых $f \in \mathcal{E}(\varphi)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$T_\alpha(f) = -(-i)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^n \left(i \Psi_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} f(\xi) \right) + \Psi_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \dots, \alpha_n)}(f) \right).$$

Пусть $\mathcal{B}_N = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n : \alpha_1 \leq N, \dots, \alpha_n \leq N\}$. Нетрудно проверить, что при любом $N \in \mathbb{N}$ функционал

$$\begin{aligned} T_N(f) = & - \sum_{\alpha \in \mathcal{B}_N} (-i)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^n \left(i \Psi_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} f(\xi) \right) \right. \\ & \left. + \Psi_{j,(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \dots, \alpha_n)}(f) \right) \end{aligned}$$

представляется в виде

$$T_N(f) = - \sum_{j=1}^n (-i)^{N^2} \Psi_{j,(N, \dots, N)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} D^{(N, \dots, N)} f(\xi) \right).$$

Возьмем натуральное число $l > k + s + 1$. Пользуясь оценкой (14) и неравенством

$$M_{k+s} < S_1^s S_2^{(k+s)s} M_k, \quad k, s \in \mathbb{Z}_+, \quad (15)$$

имеем для $f \in G_\varphi$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \left| \Psi_{j,\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} D^\alpha f(\xi) \right) \right| & \leq \frac{A_1}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, |\beta| \leq s} \frac{\left| D^{\alpha+\beta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} f(\xi) \right) \right|}{\theta_s(\xi)} \\ & \leq \frac{A_1}{\varepsilon_k^{|\alpha|} M_{|\alpha|}} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, |\beta| \leq s} \frac{\varepsilon_l^{|\alpha|+|\beta|+1} M_{|\alpha|+|\beta|+1} \theta_l(\xi) \|f\|_{\varphi,l}}{\theta_s(\xi)} \\ & \leq A_1 \left(\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_k} \right)^{|\alpha|} S_1^{s+1} S_2^{(|\alpha|+s+1)(s+1)} \|f\|_{\varphi,l}. \end{aligned}$$

Пользуясь этой оценкой и выбором l , заключаем, что для $f \in G_\varphi$

$$\Psi_{j,(N, \dots, N)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} D^{(N, \dots, N)} f(\xi) \right) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

а значит, и $T_N(f) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, для любого $f \in G_\varphi$ $T(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} T_N(f) = 0$. Тем самым инъективность отображения $\mathcal{B}$ доказана.

Докажем теперь, что отображение $\mathcal{B}$ сюръективно. Пусть $F \in P_{\tilde{\varphi}}$. Тогда $F \in P_{\tilde{\varphi}, m}$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Из теоремы В следует существование функции $U \in H(\mathbb{C}^{2n})$ такой, что $U(z, z) = F(z)$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$ и при некоторых $C > 0$, $d \in \mathbb{N}$ для любых $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$

$$|U(z, \zeta)| \leq C(1 + \|z\| + \|\zeta\|)^d \exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z) + w_m(\|\zeta\|)). \quad (16)$$

Разложим $U(z, \zeta)$ в степенной ряд по степеням ζ : $U(z, \zeta) = \sum_{|\alpha| \geq 0} U_\alpha(z) \zeta^\alpha$. Пользуясь неравенством Коши для коэффициентов степенного ряда, неравенством (16), леммой 2, равенством (13) и выбрав натуральное ν так, чтобы $\varepsilon_\nu \sqrt{n} < \varepsilon_{m+d}$, получаем для целой функции U_α оценку

$$|U_\alpha(z)| \leq \frac{C_1(1 + \|z\|)^d \exp(\tilde{\varphi}(\operatorname{Im} z))}{\varepsilon_\nu^\alpha M_{|\alpha|}}, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. По теореме 1 существуют функционалы $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{E}^*(\varphi)$ такие, что $\widehat{\mathcal{U}}_\alpha = U_\alpha$. По свойствам (LN^*) -пространств множество $\{\varepsilon_\nu^{|\alpha|} M_{|\alpha|} U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $Q(\tilde{\varphi})$. Следовательно, $\{\varepsilon_\nu^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \mathcal{U}_\alpha(f)\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n}$ ограничено в $\mathcal{E}^*(\varphi)$, но тогда оно содержится в некотором $\tilde{\mathcal{E}}_s^*(\varphi)$ и ограничено там. Поэтому при некотором $C_2 > 0$ для любого $f \in \tilde{\mathcal{E}}_s(\varphi)$

$$|\mathcal{U}_\alpha(f)| \leq \frac{C_2 q_s(f)}{\varepsilon_\nu^{|\alpha|} M_{|\alpha|}}.$$

Отсюда, пользуясь неравенством (15), получаем при $j = s + \nu + 1$ и некотором $C_3 > 0$ для любого $f \in G_\varphi$

$$|\mathcal{U}_\alpha(D^\alpha f)| \leq \frac{C_3 \|f\|_{\varphi, j}}{H_2^{|\alpha|}}.$$

Из последней оценки следует, что линейный функционал

$$\mathcal{U}(f) = \sum_{|\alpha| \geq 0} (-i)^{|\alpha|} \mathcal{U}_\alpha(D^\alpha f), \quad f \in G_\varphi,$$

определен корректно и непрерывен. Очевидно, $\widehat{\mathcal{U}} = F$.

Итак, $\mathcal{B}$ – линейное непрерывное взаимно однозначное отображение пространства G_φ^* на $P_{\tilde{\varphi}}$.

Аналогично тому, как это было проделано в [3; лемма 3], можно показать, что вложения $i_{m+1, m}: G_{\varphi, m+1} \rightarrow G_{\varphi, m}$ вполне непрерывны для каждого $m \in \mathbb{N}$. Поэтому пространство G_φ является пространством (M^*) (согласно определению из [16]). Следовательно, $G^*(\varphi)$ – пространство (LN^*) [16; теорема 5]. Очевидно, $P_{\tilde{\varphi}}$ – пространство (LN^*) . Пользуясь теперь теоремой об открытом отображении [20], [21; теорема 3.2], заключаем, что $\mathcal{B}$ – топологический изоморфизм.

Теорема 2 доказана.

§ 5. Экспоненциальное представление решений однородного линейного уравнения в частных производных

Настоящий параграф посвящен доказательству теоремы 3.

Пусть $\varphi \in \Phi_{\rho, \mu}$, где $\rho > 1$, $\mu \in (1, \rho]$. Пусть $P(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha z^\alpha$ — полином от n переменных степени $m \geq 1$, $P_m(z) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha$ — главная часть полинома P . Пусть $N \in \mathbb{C}^n$ — нехарактеристический вектор для P , т.е. $P_m(N) \neq 0$. Далее считаем, что $\|N\| = 1$. Пусть ∂_N — дифференциальный оператор, действующий на функции $f \in H(\Omega)$, Ω — открытое подмножество $\mathbb{C}^n$, по правилу

$$(\partial_N f)(z) = \frac{d}{d\lambda} f(z + \lambda N) \Big|_{\lambda=0}, \quad z \in \Omega.$$

Пусть $P(z) = P_1^{l_1}(z) \cdots P_r^{l_r}(z)$, где $P_1, \dots, P_r$ — неприводимые многочлены, $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$. Пусть V — нулевое множество полинома P ,

$$V_i = \{z \in \mathbb{C}^n : P_i(z) = 0, (\partial_N P_i)(z) \neq 0, P_j(z) \neq 0 \text{ при } j \neq i\},$$

$i = 1, \dots, r$.

Для $W \subset \mathbb{C}^n$, $m \in \mathbb{N}$ введем нормированные пространства

$$\mathcal{K}_m(W) = \left\{ f \in C(W) : s_m(f) = \sup_{z \in W} \frac{|f(z)|}{\exp(\varphi^*(\operatorname{Re} z) + w_m(\|z\|))} < \infty \right\}.$$

Пусть $\mathcal{K}(W) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{K}_m(W)$. Наделим пространство $\mathcal{K}(W)$ топологией Λ индуктивного предела пространств $\mathcal{K}_m(W)$. Обозначим через $\mathcal{H}_\varphi$ множество функций $\varkappa \in C(\mathbb{C}^n)$ таких, что $\varkappa(iz) \in \mathcal{L}_\varphi$. По схеме из [14; предложение 2.1.] с использованием леммы 2 доказывается

ЛЕММА 9. *Пространство $\mathcal{K}(W)$ состоит из функций $f \in C(W)$, для которых при любом $h \in \mathcal{H}_\varphi$ $|f(z)|/h(z) \rightarrow 0$, когда $\|z\| \rightarrow \infty$. Топология Λ совпадает с локально выпуклой топологией на $\mathcal{K}(W)$, определяемой системой норм*

$$p_h(f) = \sup_{z \in W} \frac{|f(z)|}{h(z)}, \quad h \in \mathcal{H}_\varphi.$$

Далее неоднократно будет использоваться следующая лемма Эренрайса–Мальгранжа [14; лемма A.1].

ЛЕММА 10. *Пусть P — полином от n переменных степени m . Тогда найдется постоянная $C > 0$ такая, что для любых $r > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$ и для любой функции f , определенной в шаре $B(z, r)$ и такой, что функция $f(z)/P(z)$ голоморфна в $B(z, r)$, имеем*

$$\left| \frac{f(z)}{P(z)} \right| \leq Cr^{-m} \sup_{\zeta \in B(z, r)} |f(\zeta)|.$$

Пусть $X_{\varphi^*} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_+} X_{\varphi^*, m}$, где

$$X_{\varphi^*, m} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^n) : r_m(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{\exp(\varphi^*(\operatorname{Re} z) + w_m(\|z\|))} < \infty \right\}.$$

Снабдим X_{φ^*} топологией индуктивного предела пространств $X_{\varphi^*, m}$.

Рассмотрим топологическое произведение $\mathcal{K} := \prod_{i=1}^r \mathcal{K}^{l_i}(V_i)$. Обозначим через $\mathcal{N}$ отображение, сопоставляющее каждой функции $F \in X_{\varphi^*}$ последовательность $\mathcal{N}(F) = ((\partial_N^j F)|_{V_i})_{i=1, \dots, r; j=0, \dots, l_i-1}$. Так как операция дифференцирования непрерывна в X_{φ^*} (ввиду (2) и (10)), то линейное отображение $\mathcal{N}$ действует из X_{φ^*} в $\mathcal{K}$ непрерывно.

Линейное пространство $\mathcal{N}(X_{\varphi^*})$ снабжаем топологией, индуцированной из $\mathcal{K}$. Отметим, что введенная топология совпадает с топологией индуктивного предела пространств $(\prod_{i=1}^r \mathcal{K}_m^{l_i}(V_i)) \cap \mathcal{N}(X_{\varphi^*})$, наделенных топологиями, индуцированными из $\prod_{i=1}^r \mathcal{K}_m^{l_i}(V_i)$, $m \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 11. Пусть для $F \in X_{\varphi^*}$ $\mathcal{N}(F) = 0$. Тогда существует функция $g \in X_{\varphi^*}$ такая, что $F(z) = P(z)g(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \in X_{\varphi^*}$. Тогда $F \in X_{\varphi^*, m}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим голоморфную вне V функцию $g(z) = F(z)/P(z)$. Точно так же, как и в [14; лемма 2.2], на основе теорем о принудительном аналитическом продолжении [22; гл. III, § 11, п. 32] доказывается, что g единственным образом продолжается до целой функции. Полагая в лемме Эренрайса–Мальгранжа $r = (1 + \|z\|)^{1/(1-\mu)}$ и пользуясь леммой 2 и неравенствами (2) и (10), имеем

$$|g(z)| \leq C \exp(\varphi^*(\operatorname{Re} z) + w_{m+p}(\|z\|)), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, $p = [1/(\mu - 1)] + 1$. Следовательно, $g \in X_{\varphi^*}$.

Для $\zeta \in \mathbb{C}^n$, $d \geq 0$ пусть $U_{\zeta, d} = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - \zeta\| < (1 + \|\zeta\|)^{-m(d+2)}\}$.

ЛЕММА 12. Пусть $f \in H(\mathbb{C}^n)$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, $d \geq 0$. Пусть пересечение шара $U_{\zeta, d}$ с множеством $\bigcup_{i=1}^r V_i$ непусто. Тогда найдется функция $g \in H(U_{\zeta, d})$ такая, что

$$\partial_N^j (f - g)(z)|_{V_i \cap U_{\zeta, d}} = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 0, \dots, l_i - 1, \quad (17)$$

и для любого $z \in U_{\zeta, d}$

$$|g(z)| \leq C(1 + \|z\|)^\gamma \max_{1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq l_i - 1} \sup_{\xi \in V_i \cap B(\zeta, 3/((1 + \|\zeta\|)^d))} |\partial_N^j f(\xi)|, \quad (18)$$

где постоянные $C > 0$ и $\gamma > 0$ не зависят от f и ζ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет проведено по схеме, подробно изложенной в [14; лемма 3.1]. Будем считать, что $N = (0, \dots, 0, 1)$. Остальные случаи сводятся к этому унитарным преобразованием координат в $\mathbb{C}^n$. Будем пользоваться обозначением $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$. Имеем $P(z', z_n) = \sum_{j=0}^m a_{m-j}(z') z_n^j$, где $a_k(z')$ – полином степени не выше k , $k = 0, 1, \dots, m$. Для $\zeta = (\zeta', \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ пусть $W_\zeta = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} : \|z' - \zeta'\| < 2(1 + \|\zeta\|)^{-m(d+2)}\}$. Поскольку найдется постоянная $c > 0$ такая, что для $z' \in W_\zeta$, $k = 0, 1, \dots, m$

$$|a_k(z') - a_k(\zeta')| \leq c(1 + \|\zeta'\|)^{m-1} \|z' - \zeta'\| \leq \frac{2c}{(1 + \|\zeta\|)^{m(d+1)}},$$

то для $z' \in W_\zeta, s \in \mathbb{C}$

$$|P(z', s) - P(\zeta', s)| \leq \frac{2mc(1 + |s|)^{m-1}}{(1 + \|\zeta\|)^{m(d+1)}} \leq \frac{2mc(1 + |s - \zeta_n|)^{m-1}}{(1 + \|\zeta\|)^{md}}. \quad (19)$$

Выберем число $b > 1$ так, что $2mc(2 + 2mb)^{m-1} < |P_m(N)|b^m$.

Пусть K_ζ – объединение всех связных компонент множества

$$\bigcup_{P(\zeta', s_0)=0} \{s \in \mathbb{C} : |s - s_0| < b(1 + \|\zeta\|)^{-d}\},$$

пересекающихся с кругом $D_\zeta = \{s \in \mathbb{C} : |s - \zeta_n| < (1 + \|\zeta\|)^{-d}\}$.

Отметим, что K_ζ непусто. Действительно, если предположить противное, то для корней $s_j, j = 1, \dots, m$, уравнения $P(\zeta', s) = 0$ имеем $|s_j - \zeta_n| \geq (b + 1) \times (1 + \|\zeta\|)^{-d}$. Пользуясь (19), имеем для $z' \in W_\zeta, s \in \overline{D}_\zeta$

$$|P(z', s) - P(\zeta', s)| < \frac{2mc(2 + 2mb)^{m-1}}{(1 + \|\zeta\|)^{md}} < \frac{|P_m(N)|b^m}{(1 + \|\zeta\|)^{md}}.$$

Для $s \in \partial D_\zeta$ $|P(\zeta', s)| \geq |P_m(N)|b^m(1 + \|\zeta\|)^{-md}$. Таким образом, если $z' \in W_\zeta$, то для $s \in \partial D_\zeta$

$$|P(z', s) - P(\zeta', s)| < |P(\zeta', s)|. \quad (20)$$

Так как пересечение шара $U_{\zeta, d}$ с множеством $\bigcup_{i=1}^r V_i$ непусто, то найдется точка $(\xi', \xi_n) \in U_{\zeta, d}$ такая, что $P(\xi', \xi_n) = 0$. Отметим, что $\xi' \in W_\zeta, \xi_n \in D_\zeta$. Итак, у полинома $P(\xi', s)$ по s имеется корень, лежащий в D_ζ . Ввиду (20) по теореме Руше полиномы $P(\xi', s)$ и $P(\zeta', s)$ должны иметь одинаковое число нулей в D_ζ . Однако по нашему предположению полином $P(\zeta', s)$ не имеет нулей в D_ζ . Получено противоречие. Итак, K_ζ непусто.

Так как для $s \in \overline{K}_\zeta$ $|s - \zeta_n| < (1 + 2mb)(1 + \|\zeta\|)^{-d}$, то для $z' \in W_\zeta, s \in \overline{K}_\zeta$ из оценки (19), определения числа b следует, что $|P(z', s) - P(\zeta', s)| < |P_m(N)|b^m \times (1 + \|\zeta\|)^{-md}$. Заметим, что для $s \in \partial K_\zeta$ $|P(\zeta', s)| \geq |P_m(N)|b^m(1 + \|\zeta\|)^{-md}$. Таким образом, если $z' \in W_\zeta$, то для $s \in \partial K_\zeta$ $|P(z', s) - P(\zeta', s)| < |P(\zeta', s)|$. Поэтому для каждого фиксированного $z' \in W_\zeta$ полиномы $P(z', s)$ и $P(\zeta', s)$ имеют в K_ζ одинаковое число нулей.

Пусть Z – множество всех $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$, для которых либо полиномы $P_i(z', s)$ и $\frac{d}{ds}P_i(z', s)$ имеют общий нуль при некотором $1 \leq i \leq r$, либо имеют общий нуль полиномы $P_i(z', s)$ и $P_j(z', s)$ при некоторых $1 \leq i, j \leq r, i \neq j$. Пусть $q = \sum_{i=1}^r \deg P_i$. Для $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus Z$ пусть $s_1(z'), \dots, s_q(z')$ – корни полинома $P(z', s)$ кратностей $m_1, \dots, m_q$ соответственно. Отметим, что для каждой точки $z'_0 \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus Z$ существует окрестность, в которой функции $s_1(z'), \dots, s_q(z')$ голоморфны.

Для простоты обозначений считаем, что при некотором натуральном $p, 1 \leq p \leq q$, для $z' \in W_\zeta \setminus Z$ имеют место включения $s_i(z') \in K_\zeta$, если $1 \leq i \leq p$, и $s_i(z') \notin \overline{K}_\zeta$, если $p < i \leq q$.

Теперь искомую функцию $g \in H(U_{\zeta,d})$ ищем в виде полинома по z_n : $g(z', z_n) = \sum_{k=0}^{m-1} g_k(z') z_n^k$. Функции g_k определим в результате решения интерполяционной задачи: для $z' \in W_{\zeta} \setminus Z$

$$\begin{cases} \sum_{k=j}^{m-1} \frac{k!}{(k-j)!} (s_i(z'))^{k-j} g_k(z') = \frac{d^j}{dz_n^j} f(z', s_i(z')), & 1 \leq i \leq p, 0 \leq j < m_i; \\ \sum_{k=j}^{m-1} \frac{k!}{(k-j)!} (s_i(z'))^{k-j} g_k(z') = 0, & p < i \leq q, 0 \leq j < m_i. \end{cases}$$

При $m = 1$ $g(z) = g_0(z') = f(z', s_1(z'))$. При $m \geq 2$ определитель $\Delta(s_1(z'), \dots, s_q(z'))$ этой $m \times m$ системы линейных уравнений относительно $g_k(z')$ равняется $\prod_{1 \leq i < j \leq q} (s_j(z') - s_i(z'))^{m_i m_j}$ (см. подробнее [14]). Пусть $\delta(z') = \Delta^2(s_1(z'), \dots, s_q(z'))$, $\delta_k(z') = \Delta_k(z') \Delta(s_1(z'), \dots, s_q(z'))$, где для $k = 1, \dots, m$ $\Delta_k(z')$ – определитель, получаемый из $\Delta(s_1(z'), \dots, s_q(z'))$ заменой k -го столбца на столбец свободных членов. Функции $\delta(z')$ и $\delta_k(z')$ корректно определены на $W_{\zeta} \setminus Z$ в силу симметричности по $s_1(z'), \dots, s_p(z')$ и по $s_{p+1}(z'), \dots, s_q(z')$ и голоморфны там. Так как для некоторой постоянной $a > 0$, зависящей только от P [14; лемма 3.1],

$$|s_i(z')| < a(1 + \|z'\|), \quad z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus Z, \quad (21)$$

то функции $\delta(z')$ и $\delta_k(z')$ локально ограничены в W_{ζ} . По теореме Римана о продолжении [22; гл. III, § 11] функции $\delta(z')$ и $\delta_k(z')$ могут быть единственным образом продолжены до функций, голоморфных в W_{ζ} . А поскольку определение функции δ не зависит от ζ , то δ – целая функция. В силу (21) δ – полином. Пользуясь правилом Крамера, имеем

$$g_k(z') = \frac{\delta_k(z')}{\delta(z')}, \quad z' \in W_{\zeta} \setminus Z, \quad k = 0, \dots, m-1.$$

Так же, как и в [14], показывается, что функции g_k единственным образом продолжаются до функций, голоморфных в W_{ζ} , $k = 0, \dots, m-1$. Таким образом, $g \in H(U_{\zeta,d})$ и условие (17) выполнено по построению.

Пусть z' – произвольная точка из W_{ζ} . Применяя лемму 10 к функциям g_k , $k = 0, \dots, m-1$, в шаре $B'(z', R(\zeta)) = \{\xi' \in \mathbb{C}^{n-1} : \|\xi' - z'\| < R(\zeta)\}$ радиуса $R(\zeta) = (1 + \|\zeta\|)^{-m(d+2)}$, получаем при некотором $C_1 > 0$, зависящем лишь от P и m , оценку

$$|g_k(z')| \leq C_1 (1 + \|z'\|)^{(2d+5)m^2} \max_{1 \leq i \leq p, 0 \leq j < m_i} \sup_{\xi' \in B'(z', R(\zeta))} |\partial_N^j f(\xi', s_i(\xi'))|.$$

Заметим, что если $\xi' \in B(z')$, то для $i = 1, \dots, p$ точки $(\xi', s_i(\xi'))$ лежат в шаре радиуса $3(1 + \|\zeta\|)^{-d}$ с центром в точке ζ . Поэтому

$$|g_k(z')| \leq C_1 (1 + \|z'\|)^{(2d+5)m^2} \max_{1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq l_i - 1} \sup_{\xi \in V_i \cap B(\zeta, 3/(1 + \|\zeta\|)^d)} |\partial_N^j f(\xi)|.$$

Отсюда следует оценка (18).

Лемма 12 доказана.

Построим нужное нам покрытие пространства $\mathbb{C}^n$ и подчиненное ему C^∞ -разбиение единицы для $\mathbb{C}^n$.

Для $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$, $r > 0$ пусть $\Pi(\zeta, r) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |\operatorname{Re}(z_j - \zeta_j)| < r, |\operatorname{Im}(z_j - \zeta_j)| < r, j = 1, \dots, n\}$ – куб с центром в точке ζ . Далее будут рассматриваться кубы только такого вида. Обозначим через $\mathbb{Z}_{2n}$ множество точек в $\mathbb{C}^n$ с целочисленными координатами.

Зафиксируем $s, \nu \in \mathbb{Z}_+$. Для $\zeta \in \mathbb{Z}_{2n}$ пусть $r_\zeta = (1 + |\operatorname{Re} \zeta_1| + \dots + |\operatorname{Re} \zeta_n| + |\operatorname{Im} \zeta_1| + \dots + |\operatorname{Im} \zeta_n| + 4ns)^s$, $A_\zeta^{(\nu)} = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_j, \operatorname{Im} z_j \in \{0, 1, \dots, 3^\nu r_\zeta\}\}$. Через $\mathcal{U}^{(\nu)}$ обозначим покрытие $\mathbb{C}^n$, состоящее из кубов $\Omega_{\zeta, k}^{(\nu)} = \Pi(\zeta + k/(3^\nu r_\zeta), 1/(3^\nu r_\zeta))$, где $\zeta \in \mathbb{Z}_{2n}$, $k \in A_\zeta^{(\nu)}$. Отметим, что при $s \geq 1$ каждый куб $\Omega_{\zeta, k}^{(\nu)}$ может пересекаться не более чем с $3^{2n} - 1$ кубами вида $\Omega_{\xi, m}^{(\nu)}$, где $m \in A_\xi^{(\nu)}$ и $m \neq k$, и не более чем с 5^{2n} кубами вида $\Omega_{\xi, m}^{(\nu)}$, где $\xi \neq \zeta$ и

$$\max_{1 \leq j \leq n} (|\operatorname{Re}(\xi_j - \zeta_j)|, |\operatorname{Im}(\xi_j - \zeta_j)|) = 1,$$

и не пересекается с теми кубами $\Omega_{\xi, m}^{(\nu)}$, $m \in A_\xi^{(\nu)}$, для которых

$$\max_{1 \leq j \leq n} (|\operatorname{Re}(\xi_j - \zeta_j)|, |\operatorname{Im}(\xi_j - \zeta_j)|) \geq 2.$$

Таким образом, при $s \geq 1$ количество кубов $\Omega_{\xi, m}^{(\nu)}$, $\xi \in \mathbb{Z}_{2n}$, $m \in A_\xi^{(\nu)}$, с которыми произвольно взятый куб $\Omega_{\zeta, k}^{(\nu)}$ может пересекаться, не превосходит $L_s = 3^{2n} - 1 + (3^{2n} - 1)5^{2n}$. При $s = 0$ количество кубов $\Omega_{\xi, m}^{(\nu)}$, $\xi \in \mathbb{Z}_{2n}$, $m \in A_\xi^{(\nu)}$, с которыми может пересекаться произвольно взятый куб $\Omega_{\zeta, k}^{(\nu)}$, не превосходит $L_0 = 3^{2n} - 1$.

Построим C^∞ -разбиение единицы для $\mathbb{C}^n$, подчиненное покрытию $\mathcal{U}^{(\nu)}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Через $T^{(\nu)}$ обозначим покрытие пространства $\mathbb{C}^n$ кубами $T_{\zeta, k}^{(\nu)} = \Pi(\zeta + k/(3^\nu r_\zeta), 2/(3^{\nu+1} r_\zeta))$, где $\zeta \in \mathbb{Z}_{2n}$, $k \in A_\zeta^{(\nu)}$. Выберем функцию $\eta \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ так, чтобы $0 \leq \eta(z) \leq 1$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$; $\eta(z) = 1$ для $z \in \overline{\Pi((0, \dots, 0), \frac{2}{3})}$; $\eta(z) = 0$ для $z \in \Pi((0, \dots, 0), 1) \setminus \Pi((0, \dots, 0), \frac{3}{4})$. Для $\zeta \in \mathbb{Z}_{2n}$, $k \in A_\zeta^{(\nu)}$ пусть $h_{\zeta, k}^{(\nu)}(z) = \eta(3^\nu r_\zeta(z - (\zeta + 3^{-\nu} r_\zeta^{-1} k)))$, $z \in \mathbb{C}^n$. Введем функцию $h^{(\nu)}(z) = \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}_{2n}} \sum_{k \in A_\zeta^{(\nu)}} h_{\zeta, k}^{(\nu)}(z)$. По построению $h^{(\nu)} \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ и $1 \leq h^{(\nu)}(z) \leq L_s$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$. Положим

$$\chi_{\zeta, k}^{(\nu)}(z) = \frac{h_{\zeta, k}^{(\nu)}(z)}{h^{(\nu)}(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Отметим, что $\chi_{\zeta, k}^{(\nu)} \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$, $\operatorname{supp} \chi_{\zeta, k}^{(\nu)} \subseteq \Omega_{\zeta, k}^{(\nu)}$ и $\sum_{\zeta \in \mathbb{Z}_{2n}} \sum_{k \in A_\zeta^{(\nu)}} \chi_{\zeta, k}^{(\nu)}(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}^n$. Нетрудно проверить, что при некотором $C_\eta > 0$, зависящем только от η , n, s , справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \chi_{\zeta, k}^{(\nu)}(z) \right| \leq C_\eta 3^\nu (1 + \|z\|)^s, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (22)$$

ЛЕММА 13. Пусть u – плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^n$ такая, что при некоторых $M > 0$, $d \geq 0$

$$|u(z_2) - u(z_1)| \leq M, \quad \text{если} \quad \|z_2 - z_1\| \leq (1 + \|z_1\|)^{-d}. \quad (23)$$

Пусть функция $f \in H(\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{z \in V_i} |(\partial_N^j f)(z)| e^{-u(z)} \leq 1, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 0 \leq j \leq l_i - 1. \quad (24)$$

Тогда найдутся функция $g \in H(\mathbb{C}^n)$, число $a > 0$, не зависящее от f , и число $b > 0$, не зависящее от f и от u , такие, что

$$\partial_N^j (f - g)(z)|_{V_i} = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 0, \dots, l_i - 1, \quad (25)$$

и

$$|g(z)| \leq a(1 + \|z\|)^b e^{u(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем целое $\nu > \frac{1}{2} \log_3(2n)$ и целое $s > m(d + 2)$. Если для $\zeta \in \mathbb{Z}_{2n}$, $k \in A_\zeta^{(\nu)}$ пересечение шара $B_{\zeta,k}$ с центром в точке $b_{\zeta,k} = \zeta + k3^{-\nu}r_\zeta^{-1}$ радиуса $(1 + \|\zeta + k3^{-\nu}r_\zeta^{-1}\|)^{-m(d+2)}$ с множеством $\bigcup_{i=1}^r V_i$ пусто, полагаем $g_{\zeta,k}(z) \equiv 0$ на $B_{\zeta,k}$. Если же пересечение $B_{\zeta,k} \cap \bigcup_{i=1}^r V_i$ непусто, то по лемме 12 найдется функция $g_{\zeta,k} \in H(B_{\zeta,k})$, для которой

$$\partial_N^j (f - g_{\zeta,k})|_{V_i \cap B_{\zeta,k}} = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad j = 0, \dots, l_i - 1, \quad (27)$$

и

$$|g_{\zeta,k}(z)| \leq C_1(1 + \|z\|)^\gamma \max_{1 \leq i \leq r, 0 \leq j < l_i} \sup_{\xi \in V_i \cap B(b_{\zeta,k}, 3/(1 + \|b_{\zeta,k}\|)^d)} |\partial_N^j f(\xi)|, \\ z \in B_{\zeta,k},$$

где постоянные $C_1 > 0$ и $\gamma > 0$ не зависят от $\zeta \in \mathbb{Z}_{2n}$, $k \in A_\zeta^{(\nu)}$. Отсюда и из (24), принимая во внимание (23), выводим

$$|g_{\zeta,k}(z)| \leq C_2(1 + \|z\|)^\gamma e^{u(z)}, \quad z \in B_{\zeta,k}, \quad (28)$$

где постоянная $C_2 > 0$ не зависит от $\zeta \in \mathbb{Z}_{2n}$, $k \in A_\zeta^{(\nu)}$. В силу выбора ν и s для любых $\zeta \in \mathbb{Z}_{2n}$, $k \in A_\zeta^{(\nu)}$ справедливо включение $\Omega_{\zeta,k}^{(\nu)} \subset B_{\zeta,k}$. Отметим, что если для некоторых $\zeta, \xi \in \mathbb{Z}_{2n}$, $k, l \in A_\zeta^{(\nu)}$ пересечение множеств $\Omega_{\zeta,k}^{(\nu)}$ и $\Omega_{\xi,l}^{(\nu)}$ непусто, то функция $(g_{\zeta,k}(z) - g_{\xi,l}(z))/P(z)$ единственным образом может быть продолжена до голоморфной функции в $\Omega_{\zeta,k}^{(\nu)} \cap \Omega_{\xi,l}^{(\nu)}$ (см., например, [14; теорема 2.3, лемма 2.2]). Опеним сверху модуль этой функции. Пусть $z \in T_{\zeta,k}^{(\nu)} \cap T_{\xi,l}^{(\nu)}$. Заметим, что шар $B(z, 3^{-\nu-1}(1 + 2\|z\| + 4n + 4ns)^{-s})$ содержится в $\Omega_{\zeta,k}^{(\nu)} \cap \Omega_{\xi,l}^{(\nu)} \cap B(z, (1 +$

$\|z\|)^{-m(d+2)}$). Применяя в этом шаре лемму 10 к функции $(g_{\zeta,k}(z) - g_{\xi,l}(z))/P(z)$ и пользуясь неравенствами (23) и (28), имеем для $z \in T_{\zeta,k}^{(\nu)} \cap T_{\xi,l}^{(\nu)}$

$$\frac{|g_{\zeta,k}(z) - g_{\xi,l}(z)|}{|P(z)|} \leq C_3(1 + \|z\|)^{\gamma_1} e^{u(z)}, \quad (29)$$

где постоянная $C_3 > 0$ не зависит от $\zeta, \xi \in \mathbb{Z}_{2n}, k, l \in A_{\zeta}^{(\nu)}$ и $\gamma_1 = \gamma + sm$.

Для $\zeta \in \mathbb{Z}_{2n}, k \in A_{\zeta}^{(\nu)}$ введем в рассмотрение функцию

$$h_{\zeta,k}(z) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_{2n}} \sum_{l \in A_{\xi}^{(\nu)}} \frac{\chi_{\xi,l}^{(\nu)}(z)(g_{\zeta,k}(z) - g_{\xi,l}(z))}{P(z)}, \quad z \in T_{\zeta,k}^{(\nu)}, \quad (30)$$

где произведение $\chi_{\xi,l}^{(\nu)}(z)(g_{\zeta,k}(z) - g_{\xi,l}(z))$ доопределено нулем вне носителя $\chi_{\xi,l}^{(\nu)}$. Учитывая (29), имеем

$$|h_{\zeta,k}(z)| \leq L_s C_3(1 + \|z\|)^{\gamma_1} e^{u(z)}, \quad z \in T_{\zeta,k}^{(\nu)}. \quad (31)$$

Пользуясь оценкой (22) и тем, что число ненулевых слагаемых в (30) не превосходит L_s , имеем

$$\left| \frac{\partial h_{\zeta,k}}{\partial \bar{z}_j}(z) \right| \leq C_4(1 + \|z\|)^{\gamma_2} e^{u(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad j = 1, \dots, n, \quad (32)$$

где $C_4 = L_s C_{\eta} C_3 3^{\nu}$, $\gamma_2 = \gamma_1 + (m+1)s$.

Для $z \in T_{\zeta,k}^{(\nu)} \cap T_{\xi,l}^{(\nu)}$

$$h_{\zeta,k}(z) - h_{\xi,l}(z) = \frac{g_{\zeta,k}(z) - g_{\xi,l}(z)}{P(z)}. \quad (33)$$

Это равенство позволяет определить $(0,1)$ -форму H в $\mathbb{C}^n$: $H(z) = \bar{\partial} h_{\zeta,k}(z)$, $z \in T_{\zeta,k}^{(\nu)}, \zeta \in \mathbb{Z}_{2n}, k \in A_{\zeta}^{(\nu)}$. Пользуясь неравенством (32), имеем

$$\|H(z)\|^2 := \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial h_{\zeta,k}}{\partial \bar{z}_j}(z) \right|^2 \leq n C_4^2 (1 + \|z\|)^{2\gamma_2} e^{2u(z)}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Кроме того, $\bar{\partial} H = 0$. Поскольку функция $\sigma(z) = u(z) + (\gamma_2 + n + 1) \ln(1 + \|z\|)$ плюрисубгармонична в $\mathbb{C}^n$, то по теореме 4.4.2 [1] найдется функция $v \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{C}^n)$ такая, что $\bar{\partial} v = H$ и

$$2 \int_{\mathbb{C}^n} |v(z)|^2 e^{-2\sigma(z)} (1 + \|z\|)^{-2} d\lambda \leq \int_{\mathbb{C}^n} \|H(z)\|^2 e^{-2\sigma(z)} d\lambda, \quad (34)$$

где $d\lambda$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$. Определим функцию g в $\mathbb{C}^n$, полагая

$$g(z) = g_{\zeta,k}(z) - P(z)(h_{\zeta,k}(z) - v(z)), \quad z \in T_{\zeta,k}^{(\nu)}.$$

Ввиду равенства (33) функция g определена корректно. Очевидно, $g \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{C}^n)$. Так как $\bar{\partial} g = 0$, то g – целая функция. Очевидно, g удовлетворяет условию (25). Из оценок (28), (31), (34) следует, что

$$\int_{\mathbb{C}^n} |g(z)|^2 e^{-2\sigma(z)} (1 + \|z\|)^{-(2m+2)} d\lambda < \infty.$$

Применяя неравенство о среднем к плюрисубгармонической функции $|g(z)|$ и пользуясь условием (23), переходим от интегральных оценок к равномерным. В итоге получаем оценку (26).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Ограничимся доказательством необходимости. Пусть для $u \in G_\varphi$ $P(D)u = 0$. Пусть $I = \{P(z)g(z), g \in X_{\varphi^*}\}$. Очевидно, $I \subset \ker \mathcal{N}$. Отсюда ввиду непрерывности $\mathcal{N}$ следует, что $\bar{I} \subset \ker \mathcal{N}$. Из леммы 11 следует, что $\ker \mathcal{N} \subset I$. Таким образом, $\ker \mathcal{N} = I$ и I замкнуто в X_{φ^*} . Покажем, что отображение $\mathcal{N}$ является открытым отображением из X_{φ^*} на $\mathcal{N}(X_{\varphi^*})$. Пусть U – окрестность нуля в X_{φ^*} . Покажем, что $\mathcal{N}(U)$ – окрестность нуля в $\mathcal{N}(X_{\varphi^*})$. Положим для краткости $\psi_k(z) = \varphi^*(\operatorname{Re} z) + w_k(\|z\|)$. Для $\delta > 0$, $k \in \mathbb{N}$ пусть $U_{k,\delta} = \{f \in X_{\varphi^*,k} : |f(z)| \leq \delta e^{\psi_k(z)}, z \in \mathbb{C}^n\}$, $\mathcal{O}_{k,\delta} = \{f \in X_{\varphi^*} : |(\partial_N^j f)(z)| \leq \delta e^{\psi_k(z)}, i = 1, \dots, r, j = 0, \dots, l_i - 1, z \in V_i\}$. По лемме 13 для любых $k \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathcal{O}_{k,\delta}$ найдем функцию $g \in H(\mathbb{C}^n)$, числа $a_k > 0$, не зависящие от f , и $p \in \mathbb{N}$, не зависящее от f и k , такие, что $\partial_N^j(f - g)|_{V_i} = 0, i = 1, \dots, r, j = 0, \dots, l_i - 1$, и $|g(z)| \leq a_k \delta (1 + \|z\|)^p e^{\psi_k(z)}, z \in \mathbb{C}^n$. По лемме 2 для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется постоянная $c_k > 0$ такая, что $(1 + \|z\|)^p e^{\psi_k(z)} \leq c_k e^{\psi_{k+p}(z)}, z \in \mathbb{C}^n$. Подберем числа $\delta_k > 0, k = 1, 2, \dots$, так, что $\bigcup_{k=1}^\infty U_{k+p,\delta_k} \subset U$. Пусть $\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{O}_{k,\delta_k} c_k^{-1} a_k^{-1}$. Положим $\mathcal{R} = \{(f|_{V_1}, \dots, (\partial_N^{l_1-1} f)|_{V_1}, \dots, f|_{V_r}, \dots, (\partial_N^{l_r-1} f)|_{V_r}) : f \in V\}$. Отметим, что $\mathcal{R}$ – окрестность нуля в $\mathcal{N}(X_{\varphi^*})$. Проверка показывает, что $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}(U)$. Значит, $\mathcal{N}(U)$ – окрестность нуля в $\mathcal{N}(X_{\varphi^*})$. Следовательно, $\mathcal{N}$ – открытое отображение из X_{φ^*} на $\mathcal{N}(X_{\varphi^*})$. Таким образом, отображение $\widetilde{\mathcal{N}}$, действующее из X_{φ^*}/I в $\mathcal{N}(X_{\varphi^*})$ по правилу: $\widetilde{\mathcal{N}}(F) = \mathcal{N}(f)$, где $F \in X_{\varphi^*}/I, f \in F$, осуществляет топологический изоморфизм между X_{φ^*}/I и $\mathcal{N}(X_{\varphi^*})$.

Из теоремы 2 следует, что отображение $L: T \in G'_\varphi \mapsto T(e^{\langle \xi, z \rangle}), z \in \mathbb{C}^n$, устанавливает топологический изоморфизм между пространствами G_φ^* и X_{φ^*} . По $u \in G_\varphi$ определим линейный непрерывный функционал Φ_u на X_{φ^*} по правилу $\Phi_u(f) = L^{-1}(f)(u), f \in X_{\varphi^*}$. Так как $P(D)u = 0$, то для любого $f \in I$ $\Phi_u(f) = 0$. Это позволяет определить линейный непрерывный функционал $\tilde{\Phi}_u$ на X_{φ^*}/I , действующий по правилу $\tilde{\Phi}_u(F) = \Phi_u(f), F \in X_{\varphi^*}/I, f \in F$. Отметим, что $\tilde{\Phi}_u(F) = (\tilde{\Phi}_u \circ \widetilde{\mathcal{N}}^{-1})(f|_{V_1}, \dots, (\partial_N^{l_1-1} f)|_{V_1}, \dots, f|_{V_r}, \dots, (\partial_N^{l_r-1} f)|_{V_r}), F \in X_{\varphi^*}/I, f \in F$. Продолжим по теореме Хана–Банаха линейный непрерывный функционал $\tilde{\Phi}_u \circ \widetilde{\mathcal{N}}^{-1}$ с $\mathcal{N}(X_{\varphi^*})$ на $\mathcal{H}$. Пользуясь леммой 9, теоремой Рисса об общем виде функционала, получаем

$$\tilde{\Phi}_u(F) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{l_i-1} \int_{V_i} (\partial_N^j f)(\zeta) d\mu_{ij}(\zeta), \quad F \in X_{\varphi^*}/I, \quad f \in F,$$

где меры Радона $d\mu_{ij}$ имеют носители, содержащиеся в V_i , и таковы, что для некоторой положительной непрерывной функции $h \in \mathcal{H}_\varphi$ $\int_{V_i} h(\zeta) |d\mu_{ij}|(\zeta) < \infty$ для всех $i = 1, \dots, r, j = 0, \dots, l_i - 1$. Если в качестве $F \in X_{\varphi^*}/I$ взять класс эквивалентности для $f(\zeta) = e^{\langle x, \zeta \rangle}, \zeta \in \mathbb{C}^n, x \in \mathbb{R}^n$, то получим представление (1).

Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1966.
2. Мандельброт С. Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения. М.: ИЛ, 1955.
3. Мусин И. Х. О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 10. С. 57–86.
4. Taylor B. A. Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions // Comm. Pure Appl. Math. 1971. V. 24. № 1. P. 39–51.
5. Юлмухаметов Р. С. Целые функции многих переменных с заданным поведением в бесконечности // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 4. С. 205–224.
6. Эскин Г. И. Обобщение теоремы Палая–Винера–Шварца // УМН. 1961. Т. 16. № 1. С. 185–188.
7. Владимиров В. С. Функции, голоморфные в трубчатых конусах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27. № 1. С. 75–100.
8. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
9. Попенов С. В. Об одном весовом пространстве целых функций // Исследования по теории аппроксимации функций. Уфа: БФАН СССР, 1986. С. 89–96.
10. Hansen S. Localizable analytically uniform spaces and the fundamental principle // Trans. Amer. Math. Soc. 1981. V. 264. № 1. P. 235–250.
11. Ehrenpreis L. Fourier analysis in several complex variables. New York: Wiley-Interscience Publ., 1970.
12. Паламодов В. П. Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Наука, 1971.
13. Беренштейн К., Струнна Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 54. М.: ВИНТИ, 1989.
14. Hansen S. On the “fundamental principle” of L. Ehrenpreis // Partial differential equations / ed. B. Bojarski. Warsaw: PWN-Polish Scientific Publishers, 1983. P. 185–201. (Banach Center Publ. V. 10.)
15. Жаринов В. В. Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // УМН. 1979. Т. 34. № 4(208). С. 97–131.
16. Себастьян-и-Сильва Ж. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. 1957. Т. 1. № 1. С. 60–77.
17. Напалков В. В. О сравнении топологий в некоторых пространствах целых функций // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 4. С. 827–830.
18. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.
19. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
20. Робертсон А. П., Робертсон В. П. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
21. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
22. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Часть II. Функции нескольких переменных. М.: Наука, 1985.