Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, Аналог теоремы Поля для кусочно голоморфных функций, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 12, 55–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8557>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:07:38

УДК 517.53

В. И. Буслаев

Аналог теоремы Поля для кусочно голоморфных функций

Известная теорема Поля для функции, заданной своим голоморфным ростком в точке $z = \infty$, распространена в статье на случай кусочно голоморфной функции, заданной на произвольном компакте в $\mathbb{C}$. Полученный результат применен к проблеме существования компактов, имеющих минимальный трансфинитный диаметр во внешнем поле логарифмического потенциала единичного отрицательного заряда среди всех компактов, вне которых многозначная кусочно аналитическая функция является однозначной кусочно голоморфной функцией.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: рациональные приближения, непрерывные дроби, ганкелевы определители, аппроксимации Паде.

DOI: 10.4213/sm8557

§ 1. Введение

Пусть E – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, $E \neq \overline{\mathbb{C}}$. Через $H(E)$ будем обозначать множество функций, голоморфных на E (т.е. в некоторой окрестности E). Через $\mathcal{M}(E)$ и $\mathcal{M}^\ominus(E)$ будем обозначать множества борелевских положительных единичных мер, носители $S(\mu) = \text{Supp}(\mu)$ которых принадлежат E и $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ соответственно.

Пусть $T = \{\{e_{n,j}\}_{j=1}^n\}_{n=1}^\infty$ – (треугольная) таблица точек (не обязательно различных) в $\overline{\mathbb{C}}$. Будем писать $T \subset E$, если $e_{n,j} \in E$ при всех $j = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$. Поставим в соответствие n -й строке таблицы T сферически нормированный многочлен

$$\omega_n^T(z) := \prod_{|e_{n,j}| \leq 1} (z - e_{n,j}) \prod_{|e_{n,j}| > 1} \left(\frac{z}{e_{n,j}} - 1 \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Отметим, что многочлен ω_n^T определен и в случае, когда n -я строка таблицы T содержит бесконечно удаленные точки. В этом случае множитель, соответствующий бесконечно удаленной точке, тождественно равен -1 , и $\deg \omega_n^T = n - n^*$, где n^* – число точек n -й строки, совпадающих с бесконечно удаленной точкой. Последовательность $\{\omega_n^T(z)\}_{n=1}^\infty$ сферически нормированных многочленов, ассоциированных со строками таблицы T , будем обозначать через $W(T)$.

Пусть E – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, $\mu \in \mathcal{M}(E)$. Таблицу точек $T = \{\{e_{n,j}\}_{j=1}^n\}_{n=1}^\infty \subset E$ будем называть μ -таблицей, если

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{e_{n,j}} \xrightarrow{*} \mu,$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

где δ_ξ – мера Дирака с носителем в точке ξ . Здесь и всюду в дальнейшем символом $\xrightarrow{*}$ обозначается слабая сходимост мер:

$$\mu_n \xrightarrow{*} \mu \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu,$$

где f – произвольная непрерывная в $\overline{\mathbb{C}}$ функция.

Множество всех μ -таблиц будем обозначать через $\mathcal{T}_\mu$. Отметим, что если $\mu \in \mathcal{M}(E)$, $T \in \mathcal{T}_\mu$ и $W(T) = \{\omega_n^T(z)\}_{n=1}^\infty$, то равномерно на компактах, лежащих в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$, имеет место соотношение

$$\frac{1}{n} \log |\omega_n^T(z)| \rightarrow -\mathcal{V}^\mu(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E, \quad (1)$$

где $\mathcal{V}^\mu$ – сферически нормированный логарифмический потенциал меры μ :

$$\mathcal{V}^\mu(z) := - \int_{|t| \leq 1} \log |z - t| d\mu(t) - \int_{|t| > 1} \log \left| \frac{z}{t} - 1 \right| d\mu(t). \quad (2)$$

Из (2) следует, в частности, что $\mathcal{V}^{\delta_\infty}(z) \equiv 0$, $z \in \mathbb{C}$. Легко видеть, что в отличие от обычного потенциала

$$V^\mu(z) := - \int \log |z - t| d\mu(t),$$

определенного только лишь при условии $\int_{|t| > 1} \log |t| d\mu(t) < +\infty$, сферически нормированный потенциал $\mathcal{V}^\mu$ определен всегда и отличается от обычного (в случае его существования) на постоянное слагаемое.

Пусть E – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, $f \in H(E)$, $T \in E$, $W(T) = \{\omega_n^T(z)\}_{n=1}^\infty$. Напомним далее, что *последовательностью многоточечных аппроксимаций Паде функции f в точках таблицы T* называется последовательность рациональных функций $\{R_n^T\}_{n=1}^\infty$, где $R_n^T = P_n^T/Q_n^T$, $\deg P_n^T \leq n$, $\deg Q_n^T \leq n$, $Q_n^T \not\equiv 0$,

$$\frac{fQ_n^T - P_n^T}{\omega_{2n+1}^T} \in H(E), \quad \text{при этом если } \infty \in E, \text{ то } z^{n+1} \frac{fQ_n^T - P_n^T}{\omega_{2n+1}^T} \in H(E).$$

Обратим внимание на то, что многочлены ω_{2n}^T (с четными нижними индексами) в определении последовательности $\{R_n^T\}_{n=1}^\infty$ не участвуют (так как рациональная функция R_n^T порядка n имеет $2n+1$ свободных параметров).

Если E состоит из единственной точки ∞ , то на E существует единственная таблица $T \subset E$ (все точки $e_{n,j}$ которой совпадают с ∞). Этот случай соответствует последовательности классических диагональных аппроксимаций Паде функции $f \in H(\infty)$ в точке ∞ .

Напомним, что расстояния $\rho(z_1, z_2)$ и $\rho(K_1, K_2)$ между точками z_1 и z_2 и компактами $K_1, K_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ в сферической метрике определяются соответственно как

$$\rho(z_1, z_2) := \frac{|z_1 - z_2|}{(1 + |z_1|^2)^{1/2} (1 + |z_2|^2)^{1/2}}, \quad \rho(K_1, K_2) := \min_{z_1 \in K_1, z_2 \in K_2} \rho(z_1, z_2).$$

Круг $\{z : \rho(z, w) < \delta\}$ сферического радиуса δ с центром в точке w будем обозначать через $U_{w, \delta}$. Расстояние между компактами $K_1, K_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ в сферической

метрике Хаусдорфа определяется следующим образом:

$$\rho_H(K_1, K_2) = \inf \{ \delta : K_1 \subset K_2^\delta, K_2 \subset K_1^\delta \}, \quad \text{где } K^\delta := \overline{\bigcup_{w \in K} U_{w, \delta}}.$$

Под записью $K_n \rightarrow K$ при $n \rightarrow \infty$ будем понимать сходимость компактов K_n , $n = 1, 2, \dots$, к компакту K в сферической метрике Хаусдорфа при $n \rightarrow \infty$.

Для всякого компакта $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, функции $\varphi \in H(E)$ и достаточно малого положительного числа δ определим раздутие E_δ компакта E (точнее, (δ, φ) -раздутие $E_\delta(\varphi)$) следующим (неоднозначным) образом. Для всякой точки $w \in E$ фиксируем число $\delta(w)$ такое, что $0 < \delta(w) < \delta/2$ и круг $U_{w, 2\delta(w)}$ принадлежит области голоморфности функции φ . Из покрытия компакта E кругами $U_{w, \delta(w)}$, $w \in E$, выберем конечное подпокрытие $\bigcup_{l=1}^{L_\delta} U_{w_l, \delta(w_l)}$, $w_l \in E$, $l = 1, \dots, L_\delta$. Далее, зафиксируем числа $\delta^*(w_l) \in [\delta(w_l), 2\delta(w_l)]$, $l = 1, \dots, L_\delta$, такие, что

$$|\delta^*(w_l) \pm \delta^*(w_k)| \neq \rho(w_l, w_k) \quad \text{при всех } 1 \leq l < k \leq L_\delta. \quad (3)$$

Ясно, что такие числа существуют, и при таких числах окружности $\partial U_{w_l, \delta^*(w_l)}$ и $\partial U_{w_k, \delta^*(w_k)}$ не касаются друг друга (т.е. либо не пересекаются, либо имеют две различные точки пересечения). Замкнутое множество $\bigcup_{l=1}^{L_\delta} \overline{U_{w_l, \delta^*(w_l)}}$ будем называть раздутием компакта E и обозначать через E_δ (при необходимости, для того чтобы подчеркнуть зависимость раздутия от функции φ , будем говорить о раздутии $E_\delta(\varphi)$). Отметим, что $\varphi \in H(E_\delta(\varphi))$, а также отметим некоторые геометрические свойства раздутий E_δ .

(i) $\rho(E, \partial E_\delta) > 0$, так как всякая точка $z \in E$ покрывается некоторым открытым кругом $U_{w_l, \delta^*(w_l)}$, $1 \leq l \leq L_\delta$, и, следовательно, входит в E_δ вместе с некоторой своей окрестностью.

(ii) Граница ∂E_δ состоит из конечного числа замкнутых дуг окружностей, пересекающихся в силу (3) под углами, отличными от 0 и π . Для всякой граничной точки $z_0 \in \partial E_\delta$ найдется круг $U_{z_0, \varepsilon}$ такой, что $\gamma_{z_0, \varepsilon} = U_{z_0, \varepsilon} \cap \partial E_\delta$ – это либо дуга окружности, либо объединение двух дуг с общей концевой точкой z_0 (второй случай возможен только лишь для конечного числа граничных точек). Кривую $\gamma_{z_0, \varepsilon}$ ориентируем таким образом, чтобы при движении по ней точки множества $U_{z_0, \varepsilon} \cap E_\delta$ оставались слева.

(iii) Граница ∂E_δ состоит из конечного числа непересекающихся контуров, ориентированных в соответствии с указанными в (ii) локальными ориентациями (которые, очевидно, согласованы между собой).

(iv) $\rho_H(E, E_\delta) \leq \delta$ (так как $E \subset E_\delta \subset E^\delta$) и, следовательно, $E_\delta \rightarrow E$ при $\delta \rightarrow 0$.

Для функции $\varphi \in H(E)$ и функции Ψ , (кусочно) голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$, положим

$$\oint_E \varphi(t) \Psi(t) dt := \int_{\partial E_\delta(\varphi)} \varphi(t) \Psi(t) dt. \quad (4)$$

Заметим, что определение интеграла $\oint_E \varphi(t) \Psi(t) dt$ не зависит от выбора раздутия $E_\delta(\varphi)$. Действительно, пусть $E_{\delta_1} = E_{\delta_1}(\varphi)$ и $E_{\delta_2} = E_{\delta_2}(\varphi)$ – два раздутия компакта E . Пользуясь свойством (i), фиксируем некоторое положительное δ_0

такое, что $\delta_0 < \min\{\rho(E, \partial E_{\delta_1}), \rho(E, \partial E_{\delta_2})\}$. Тогда $E_{\delta_0} \subset E_{\delta_1}$ и $E_{\delta_0} \subset E_{\delta_2}$, и в силу того, что $\varphi\Psi \in H(E_{\delta_1} \setminus E)$ и $\varphi\Psi \in H(E_{\delta_2} \setminus E)$, имеем равенства

$$\int_{\partial E_{\delta_1}} \varphi(t)\Psi(t) dt = \int_{\partial E_{\delta_0}} \varphi(t)\Psi(t) dt = \int_{\partial E_{\delta_2}} \varphi(t)\Psi(t) dt.$$

Известно (см., например, [1]), что многоточечная аппроксимация Паде всегда существует и единственна (как рациональная функция), а ее знаменатель Q_n^T удовлетворяет следующим соотношениям ортогональности:

$$\oint_E \frac{f(t)Q_n^T(t)}{\omega_{2n+1}^T(t)} t^\nu dt = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1. \quad (5)$$

Легко видеть, что соотношения (5) представляют собой однородную систему n линейных уравнений, определяющих $n+1$ неизвестных коэффициентов многочлена Q_n^T . Отметим, что соотношениям (5) удовлетворяет многочлен

$$\begin{vmatrix} \oint_E \frac{f(t)}{\omega_{2n+1}^T(t)} t^0 dt & \oint_E \frac{f(t)}{\omega_{2n+1}^T(t)} t^1 dt & \dots & \oint_E \frac{f(t)}{\omega_{2n+1}^T(t)} t^n dt \\ \oint_E \frac{f(t)}{\omega_{2n+1}^T(t)} t^1 dt & \oint_E \frac{f(t)}{\omega_{2n+1}^T(t)} t^2 dt & \dots & \oint_E \frac{f(t)}{\omega_{2n+1}^T(t)} t^{n+1} dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \oint_E \frac{f(t)}{\omega_{2n+1}^T(t)} t^{n-1} dt & \oint_E \frac{f(t)}{\omega_{2n+1}^T(t)} t^n dt & \dots & \oint_E \frac{f(t)}{\omega_{2n+1}^T(t)} t^{2n-1} dt \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Если многочлен (6) не равен нулю тождественно, то его можно взять в качестве знаменателя Q_n^T . Коэффициент при z^n многочлена (6) обозначим через $\Delta_n(f, W(T))$, т.е.

$$\Delta_n(f, W(T)) := \det \left(\oint_E \frac{f(t)}{\omega_{2n+1}^T(t)} t^{l+k} dt \right)_{l,k=0,\dots,n-1}. \quad (7)$$

Пусть K – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, $K \neq \overline{\mathbb{C}}$, ψ – вещественнозначная, непрерывная на K функция. Напомним, что трансфинитным диаметром $d_\psi K$ компакта K во внешнем поле ψ называется величина

$$d_\psi K := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{z_1, \dots, z_n \subset K} \prod_{1 \leq q < r \leq n} |z_q - z_r| e^{-(\psi(z_q) + \psi(z_r))} \right)^{2/(n-1)n} \quad (8)$$

(подробнее см., например, [2]). Если $\psi \equiv 0$ и $K \subset \mathbb{C}$, то $d_\psi K = d(K)$, где $d(K)$ – стандартный трансфинитный диаметр компакта K комплексной плоскости (при отсутствии внешнего поля).

Весьма полезной при работе с величинами $d_\psi K$ является теорема Рахманова (см. [3]), упрощенный (но достаточный для целей этой статьи) вариант которой формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА РАХМАНОВА. Пусть ψ – функция, непрерывная в некоторой окрестности компакта $K \subset \mathbb{C}$, и $K_n \rightarrow K$ при $n \rightarrow \infty$, где K_n , $n = 1, 2, \dots$, –

последовательность компактов, состоящих из континуумов, число которых ограничено сверху постоянной, не зависящей от индекса n . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\psi K_n = d_\psi K. \quad (9)$$

Во многих задачах теории рациональных приближений внешнее поле ψ возникает в виде правой части соотношения (1), т.е. $\psi(z) = -\mathcal{V}^\mu(z)$, где $\mu \in \mathcal{M}^\ominus(K)$. В этом случае для упрощения обозначений положим

$$d_\mu K := d_{-\mathcal{V}^\mu} K. \quad (10)$$

В [4] показано, во-первых, что $d_\mu K < +\infty$ при всех $K \subset \overline{\mathbb{C}}$, $K \neq \overline{\mathbb{C}}$, $\mu \in \mathcal{M}^\ominus(K)$, и, во-вторых, что $d_\mu K$ инвариантен при дробно линейных преобразованиях, а именно, для всякого невырожденного дробно линейного преобразования T имеет место равенство

$$d_{T\mu} TK = C_{\mu,T} d_\mu K, \quad (11)$$

где $TK = \{Tz : z \in K\}$, $T\mu$ – мера, определенная равенством $T\mu(B) = \mu(T^{-1}B)$, $C_{\mu,T}$ – положительная постоянная, зависящая от μ и T , но не зависящая от K .

Заметим, что теорема Рахманова имеет место и для компактов $K \subset \overline{\mathbb{C}}$, если $\psi = -\mathcal{V}^\mu$, $\mu \in \mathcal{M}^\ominus(K)$.

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ РАХМАНОВА. Пусть $K \subset \overline{\mathbb{C}}$, $K \neq \overline{\mathbb{C}}$, $\mu \in \mathcal{M}^\ominus(K)$, и пусть $K_n \rightarrow K$ при $n \rightarrow \infty$, где K_n , $n = 1, 2, \dots$, – последовательность компактов, состоящих из континуумов, число которых ограничено сверху постоянной, не зависящей от индекса n . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\mu K_n = d_\mu K. \quad (12)$$

Действительно, выбирая невырожденное дробно линейное преобразование T такое, что $TK \subset \{|z| \leq 1\}$, замечая, что $K_n \rightarrow K \iff TK_n \rightarrow TK$, и пользуясь равенствами (11) и (9) для последовательности компактов TK_n , $n = 1, 2, \dots$, во внешнем поле $\psi = -\mathcal{V}^{T\mu}$, получаем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_\mu K_n = C_{\mu,T}^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} d_{T\mu} TK_n = C_{\mu,T}^{-1} d_{T\mu} TK = d_\mu K,$$

совпадающее с равенством (12).

Пусть E – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, $f \in H(E)$. Обозначим через $\mathfrak{K}_{E,f}$ семейство компактов $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ таких, что $K \cap E = \emptyset$ и функция f допускает мероморфное продолжение во все связные компоненты дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, имеющие непустое пересечение с E .

Дадим небольшое пояснение к сделанному определению семейства $\mathfrak{K}_{E,f}$. Как было показано выше, включение $f \in H(E)$ влечет за собой включение $f \in H(E_\delta)$, где раздutie $E_\delta = E_\delta(f)$ состоит из конечного числа непересекающихся континуумов $E_{\delta,1}, \dots, E_{\delta,m}$. Поэтому включение $K \in \mathfrak{K}_{E,f}$ означает, что, во-первых, $K \cap E_\delta = \emptyset$ (при $\delta < \rho(K, E)$) и, во-вторых, при всех $j = 1, \dots, m$ функции $f|_{E_{\delta,j}}$ допускают мероморфные продолжения f_j в связную компоненту $D_{\delta,j}$ дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащую континуум $E_{\delta,j}$, причем $f_j = f_k$, если $D_{\delta,j} = D_{\delta,k}$.

§ 2. Формулировка результата

В настоящей статье будет доказан следующий аналог хорошо известной в геометрической теории функций теоремы Поля [5].

ТЕОРЕМА 1 (аналог теоремы Поля). Пусть E – компакт в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащий точку $z = \infty$, $E \neq \overline{\mathbb{C}}$, $f \in H(E)$, $\Psi = \{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность голоморфных в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ функций такая, что

$$\frac{1}{2n} \log |\Psi_n(z)| \rightarrow \psi(z) \quad (13)$$

равномерно на компактах, лежащих в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$. Тогда для всякого компакта K , состоящего из конечного числа континуумов и такого, что $K \in \mathfrak{K}_{E,f}$, имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, \Psi)|^{1/n^2} \leq d_{-\psi} K, \quad (14)$$

где

$$\Delta_n(f, \Psi) := \det \left(\oint_E f(t) \Psi_n(t) t^{l+k} dt \right)_{l,k=0,\dots,n-1}. \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Интеграл, стоящий в правой части (15), определяется равенством (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение теоремы остается справедливым, если условие $\infty \in E$ заменить условием

$$\psi(z) = \mathcal{V}^\lambda(z), \quad \text{где } \lambda - \text{некоторая мера из } \mathcal{M}(E) \quad (16)$$

(это замечание будет доказано в § 3 одновременно с теоремой 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $\mu \in \mathcal{M}(E)$, $T \in \mathcal{T}_\mu$, $W(T) = \{\omega_{2n+1}^T\}_{n=1}^{\infty}$, то, полагая $\Psi_n = (\omega_{2n+1}^T)^{-1}$, имеем в силу (1) соотношение (13) с $\psi(z) = \mathcal{V}^\mu(z)$. Поэтому в этом случае с учетом обозначений (7) и (10) неравенство (14) имеет следующий вид

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, W(T))|^{1/n^2} \leq d_\mu K. \quad (17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $E = \{\infty\}$ и $\Psi_n(z) \equiv 1$ при всех $n = 1, 2, \dots$, то $\psi(z) \equiv 0$, $d_{-\psi} K = d(K)$ и при $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{-n} z^{-n} \in H(\infty)$ имеем равенство

$$\Delta_n(f, \Psi) = \det \left(\oint_E f(t) \Psi_n(t) t^{l+k} dt \right)_{l,k=0,\dots,n-1} = \det(-2\pi i f_{-l-k-1})_{l,k=0,\dots,n-1}.$$

Таким образом, в случае, когда $\Psi_n(z) \equiv 1$ и функция f , голоморфная на $E = \{\infty\}$, допускает мероморфное продолжение в $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, неравенство (14) совпадает с неравенством

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\det(f_{-l-k-1})_{l,k=0,\dots,n-1}|^{1/n^2} \leq d(K),$$

составляющим содержание теоремы Поля [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если из предположений теоремы 1 исключить предположение о конечности числа континуумов, из которых состоит компакт K , то утверждение теоремы можно сохранить в чуть ослабленном виде:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, \Psi)|^{1/n^2} \leq \varliminf_{\delta \rightarrow 0} d_{-\psi} K_\delta, \quad (18)$$

где K_δ – δ -раздутие компакта K . Это следует непосредственно из неравенств (14) для раздутий K_δ (так как $K_\delta \in \mathfrak{K}_{E,f}$ при $\delta < \rho(K, E)$ и K_δ при любом $\delta > 0$ состоит из конечного числа континуумов).

Как следствие теоремы 1 и ряда других полученных ранее результатов отметим следующую ниже теорему 2. Перед формулировкой теоремы 2 введем некоторые дополнительные обозначения.

Пусть E – произвольный континуум в $\overline{\mathbb{C}}$, $E \neq \overline{\mathbb{C}}$. Через $\mathcal{A}(E)$ будем обозначать множество функций, голоморфных на E и допускающих аналитическое продолжение вдоль любого пути в $\overline{\mathbb{C}}$, не проходящего через конечное множество точек, среди которых по крайней мере одна является точкой ветвления.

Через $\mathcal{E}_m$ обозначим множество компактов $E \subset \overline{\mathbb{C}}$, представимых в виде $E = \bigsqcup_{j=1}^m E_j$, где $E_1, \dots, E_m$ – набор непересекающихся континуумов в $\overline{\mathbb{C}}$ (допускается вырождение континуума в точку).

При $E = \bigsqcup_{j=1}^m E_j \in \mathcal{E}_m$ через $\mathcal{A}(E)$ будем обозначать множество кусочно аналитических на E функций, т.е. множество функций f , определенных на E и таких, что $f|_{E_j} \in \mathcal{A}(E_j)$; при этом не предполагается, что аналитические ростки $f|_{E_j}$, $j = 1, \dots, m$, являются ростками одной и той же аналитической функции.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $E \in \mathcal{E}_m$, $f \in \mathcal{A}(E)$, $\mu \in \mathcal{M}(E)$, $T \in \mathcal{T}_\mu$, и пусть компакт $F \in \mathfrak{K}_{E,f}$ таков, что

$$d_\mu F = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, W(T))|^{1/n^2}. \quad (19)$$

Тогда

1°. Существует компакт $F^* \subseteq F$ такой, что F^* состоит из конечного числа не вырождающихся в точку континуумов, $F^* \in \mathfrak{K}_{E,f}$ и имеет место равенство

$$d_\mu F^* = d_\mu F = \inf_{K \in \mathfrak{K}_{E,f}} d_\mu K. \quad (20)$$

2°. F^* является замыканием конечного объединения непересекающихся открытых аналитических дуг, в каждой точке z которых выполняется равенство

$$\frac{\partial \psi^{\mu - \tilde{\mu}_{F^*}}}{\partial n_+}(z) = \frac{\partial \psi^{\mu - \tilde{\mu}_{F^*}}}{\partial n_-}(z), \quad (21)$$

где $\tilde{\mu}_{F^*}$ – выметание меры μ на компакт F^* , n_+ и n_- – нормали к F^* в точке z , направленные в противоположные стороны. При этом $\overline{\mathbb{C}} \setminus F^* = \bigcup_{j=1}^m D_j$, где $D_j \supset E_j$ и области D_j и D_k , $j, k = 1, \dots, m$, либо не пересекаются, либо совпадают.

3°. Если каждая из областей D_j , $j = 1, \dots, t$, имеет внутреннюю граничную дугу, то $(1/n)\delta_{Q_n^T} \xrightarrow{*} \tilde{\mu}_{F^*}$, где $\delta_{Q_n^T}$ – считающая мера нулей многочлена Q_n^T (т.е. сумма мер Дирака по всем нулям Q_n^T). При этом $R_n^T(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus F^*$, и для скорости сходимости справедлива оценка

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \left\{ z \in K : |(f - R_n^T)(z)|^{1/n} > \exp \left(-2 \int g_{F^*}(z, t) d\mu(t) \right) + \varepsilon \right\} = 0,$$

где ε – произвольное положительное число, $K \subset \mathbb{C} \setminus F^*$ – произвольный компакт.

Напомним, что выметанием $\tilde{\mu}_{F^*}$ меры μ на компакт F^* называется единственная мера в классе $\mathcal{M}(F^*)$, потенциал которой приблизительно всюду (т.е. за исключением множества нулевой емкости) на F^* совпадает с точностью до постоянной с потенциалом меры μ .

Отметим, что импликация $1^\circ \implies 2^\circ$ сформулирована и доказана в [6] на основе предложенного Е. А. Рахмановым вариационного метода, ранее использованного в аналогичного типа утверждениях (см. [7]–[10]). Импликация $2^\circ \implies 3^\circ$ доказана А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым [11] для случая, когда дополнение $\mathbb{C} \setminus F^*$ состоит из единственной области D_1 (всякая граничная дуга которой, очевидно, является внутренней дугой). В вышеприведенном виде (в случае несвязного дополнения $\mathbb{C} \setminus F^*$) импликация $2^\circ \implies 3^\circ$ доказана в [1]. Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно доказать только лишь утверждение 1° .

Заметим, что в общем виде (без предположения о наличии равенства (19) или каких-либо других дополнительных предположений) компакт минимальной емкости в поле $-\mathcal{V}^\mu$ (т.е. компакт, для которого имеет место утверждение 1°) может не существовать. В частности, для равновесной меры (и нормированной меры Лебега, и многих других мер) $\mu \in \mathcal{M}(E)$, где $E = [-1, 1]$, в [6] и [4] указаны функции соответственно с четырьмя и двумя точками ветвления второго порядка такие, что при всех $F \in \mathfrak{K}_{E,f}$ выполнено неравенство

$$d_\mu F > \inf_{K \in \mathfrak{K}_{E,f}} d_\mu K.$$

С целью показать, что предполагающая часть теоремы 2 содержательна, укажем пример компакта $E \in \mathcal{E}_2$, функции $f \in \mathcal{A}(E)$, меры $\mu \in \mathcal{M}(E)$, таблицы $T \in \mathcal{T}_\mu$ и компакта $F \in \mathfrak{K}_{E,f}$, для которых выполняется равенство (19).

Пусть

$$E_1 = \{0\}, \quad E_2 = \{\infty\}, \quad E = E_1 \sqcup E_2, \\ \mu = \frac{\delta_0 + \delta_\infty}{2} \in \mathcal{M}(E), \quad \mathcal{V}^{-\mu}(z) = \frac{1}{2} \log |z|,$$

таблица T такова, что ее n -я строка состоит из $[n/2]$ точек, равных нулю, и $n - [n/2]$ точек, равных ∞ , и, следовательно, $T \in \mathcal{T}_\mu$ и

$$W(T) = \{(-1)^{n-[n/2]} z^{[n/2]}\}_{n=1}^\infty.$$

Условие $f \in H(E)$ означает, что $f|_{E_j} = f_j \in H(E_j)$, $j = 1, 2$, и, следовательно,

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^\infty f_{n,1} z^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^\infty f_{-n,2} z^{-n}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \Delta_n(f, W(T)) &= \det \left(\sum_{j=1}^2 \oint_{E_j} \frac{f_j(t)}{\omega_{2n+1}^T(t)} t^{l+k} dt \right)_{l,k=0,\dots,n-1} \\
 &= \det \left(\sum_{j=1}^2 \oint_{E_j} \frac{f_j(t)}{t^n} t^{l+k} dt \right)_{l,k=0,\dots,n-1} \\
 &= (2\pi i)^n \begin{vmatrix} f_{n-1,1} & \dots & f_{0,1} - f_{0,2} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{0,1} - f_{0,2} & \dots & -f_{-n+1,2} \end{vmatrix}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Пусть

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad F = \{z \in \mathbb{C} : z^{-1}(1 + bz)^2 \in [0, -4a]\}. \tag{23}$$

Легко видеть, что $\overline{\mathbb{C}} \setminus F = D_1 \cup D_2$, где области $D_1 \ni 0$ и $D_2 \ni \infty$ либо не пересекаются, либо совпадают. В [12] показано, что непрерывная T -дробь

$$\frac{a_1 z}{1 + b_1 z + \frac{a_2 z}{1 + b_2 z + \dots}} \tag{24}$$

с предельно постоянными коэффициентами $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ сходится равномерно в сферической метрике на компактах, лежащих в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$, и для предельной функции f имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \det \begin{pmatrix} f_{n-1,1} & \dots & f_{0,1} - f_{0,2} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{0,1} - f_{0,2} & \dots & -f_{-n+1,2} \end{pmatrix} \right|^{1/n^2} = \left| \frac{a}{b} \right|^{1/2} = d_\mu F. \tag{25}$$

Легко видеть, что если коэффициенты a_n и b_n постоянны, т.е. $a_n = a$, $b_n = b$ при всех $n = 1, 2, \dots$, то функция $f(z)$ является решением квадратного уравнения $f(z) = az/(1 + bz + f(z))$ и, следовательно, $f \in \mathcal{A}(E)$, а равенство (25) совпадает с учетом (22) с равенством (19), в котором компакт $F \in \mathfrak{K}_{E,f}$ определен в (23).

В [13] аналогичный результат получен для случая $E = \{0\} \sqcup \{\infty\}$, $\mu = p_1 \delta_0 + p_2 \delta_\infty \in \mathcal{M}(E)$ и функций $f \in \mathcal{A}(E)$, представимых непрерывными дробями с постоянными коэффициентами более общего по сравнению с (24) вида.

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 (и ЗАМЕЧАНИЯ 2). Пусть имеют место предположения теоремы 1 или предположения замечания 2. Фиксируем некоторое положительное $\sigma < \frac{1}{3}\rho(E, K)$ и некоторое раздутие $E_\sigma = E_\sigma(f)$ компакта E . Для положительного $\delta < \sigma$ фиксируем некоторое раздутие K_δ компакта K .

Легко видеть, что $K_\delta \cap E_\sigma = \emptyset$ и $K_\delta \in \mathfrak{K}_{E,f}$, причем функция f мероморфна не только в D_δ , где D_δ – объединение всех связных компонент $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_\delta$, имеющих непустое пересечение с $E_\sigma(f)$ (как это следует из определения семейства $\mathfrak{K}_{E,f}$), но и на $\overline{D_\delta}$ (так как $K \in \mathfrak{K}_{E,f}$ и $K \cap \partial K_\delta = \emptyset$ в силу свойства (i) раздутия K_δ). Поэтому функция f имеет на $\overline{D_\delta}$ конечное число полюсов $\xi_1, \dots, \xi_{q_\delta}$. Положим

$$\Xi_\delta = \begin{cases} \{\xi_1, \dots, \xi_{q_\delta}\}, & \text{если } \infty \in E, \\ \{\xi_1, \dots, \xi_{q_\delta}, \infty\}, & \text{если } \infty \notin E. \end{cases}$$

Из равенства $K \cap \partial K_\delta = \emptyset$ и включения $f \in H(E_\sigma)$ следует, что $\varepsilon_\delta := \rho(\Xi_\delta, K \cup E) > 0$. При $0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta$ положим

$$K_{\delta,\varepsilon} := K_\delta \cup \Xi_{\delta,\varepsilon}, \quad \text{где } \Xi_{\delta,\varepsilon} = \bigcup_{\xi \in \Xi_\delta} \overline{U_{\xi,\varepsilon}}. \quad (26)$$

Легко видеть, что

$$K_{\delta,\varepsilon} \rightarrow K_\delta \cup \Xi_\delta \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (27)$$

$$K_{\delta,\varepsilon} \cap E = \emptyset, \quad \partial K_{\delta,\varepsilon} \cap K = \emptyset, \quad K_{\delta,\varepsilon} \in \mathfrak{K}_{E,f} \quad \text{при } 0 < \delta < \sigma, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_\delta, \quad (28)$$

причем функция f голоморфна на $\overline{D_{\delta,\varepsilon}}$, где $D_{\delta,\varepsilon}$ – объединение всех связных компонент $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_{\delta,\varepsilon}$, имеющих непустое пересечение с E . Поэтому функции $f(t)\Psi_n(t)t^\nu$, $n = 1, 2, \dots$, $\nu = 0, 1, \dots$, голоморфны на $\overline{D_{\sigma,\delta,\varepsilon}}$, где $D_{\sigma,\delta,\varepsilon} = D_{\delta,\varepsilon} \setminus E_\sigma$. Заметим, что $\infty \notin D_{\sigma,\delta,\varepsilon}$ и $\partial D_{\sigma,\delta,\varepsilon} = \partial E_\sigma(f) \sqcup \partial \Gamma_{\delta,\varepsilon}$, где $\Gamma_{\delta,\varepsilon} := \partial D_{\delta,\varepsilon}$ состоит из конечного числа контуров, принадлежащих $\partial K_{\delta,\varepsilon}$. Ориентируя контуры из $\Gamma_{\delta,\varepsilon}$ таким образом, чтобы при движении по ним область $D_{\sigma,\delta,\varepsilon}$ оставалась слева, и пользуясь теоремой Коши, получаем равенство

$$\int_{\partial E_\sigma(f)} f(t)\Psi_n(t)t^\nu dt = \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(t)\Psi_n(t)t^\nu dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \nu = 0, 1, \dots$$

Отсюда и из определения (15) определителей $\Delta_n(f, \Psi)$ с учетом замечания 1 имеем равенство

$$\begin{aligned} \Delta_n(f, \Psi) &= \begin{vmatrix} \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(t_1)\Psi_n(t_1)t_1^0 dt_1 & \dots & \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(t_1)\Psi_n(t_1)t_1^{n-1} dt_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(t_n)\Psi_n(t_n)t_n^{n-1} dt_n & \dots & \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(t_n)\Psi_n(t_n)t_n^{2n-2} dt_n \end{vmatrix} \\ &= \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} \dots \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(t_1)\Psi_n(t_1) \dots f(t_n)\Psi_n(t_n)t_1^0 \dots t_n^{n-1} \\ &\quad \times \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

Далее, сделав в последнем интеграле все возможные $n!$ перестановок в наборе $t_1, \dots, t_n$, от которых интеграл не меняет своего значения, и просуммировав, получим равенство

$$\begin{aligned} n! \Delta_n(f, \Psi) &= \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} \dots \int_{\Gamma_{\delta,\varepsilon}} f(t_1)\Psi_n(t_1) \dots f(t_n)\Psi_n(t_n) \\ &\quad \times \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

Из полученного равенства следует, что

$$n! |\Delta_n(f, \Psi)| \leq (M_{\delta, \varepsilon}(f))^n \int_{\Gamma_{\delta, \varepsilon}} \cdots \int_{\Gamma_{\delta, \varepsilon}} \frac{|\Psi_n(t_1)|}{e^{2(n-1)\psi(t_1)}} \cdots \frac{|\Psi_n(t_n)|}{e^{2(n-1)\psi(t_n)}} \\ \times \left(\prod_{1 \leq q < r \leq n} |t_q - t_r| e^{\psi(t_q)} e^{\psi(t_r)} \right)^2 |dt_1| \cdots |dt_n|, \quad (29)$$

где $M_{\delta, \varepsilon}(f) = \max_{t \in \Gamma_{\delta, \varepsilon}} |f(t)|$.

Фиксируем произвольное $\theta > 0$. В силу определения (8) трансфинитного диаметра компакта $\Gamma_{\delta, \varepsilon}$ во внешнем поле $-\psi$ при всех $t_1, \dots, t_n \in \Gamma_{\delta, \varepsilon}$ имеем неравенство

$$\left(\prod_{1 \leq q < r \leq n} |t_q - t_r| e^{\psi(t_q)} e^{\psi(t_r)} \right)^{2/(n-1)n} \\ \leq \max_{t_1, \dots, t_n \in \Gamma_{\delta, \varepsilon}} \left(\prod_{1 \leq q < r \leq n} |t_q - t_r| e^{\psi(t_q)} e^{\psi(t_r)} \right)^{2/(n-1)n} \leq d_{-\psi} \Gamma_{\delta, \varepsilon} + \theta,$$

справедливое при всех достаточно больших $n \geq n_1(\theta)$. Кроме того, из (13) следует, что при $t \in \Gamma_{\delta, \varepsilon}$ и всех достаточно больших $n \geq n_2(\theta)$, выполняется неравенство

$$\frac{|\Psi_n(t)|}{e^{2(n-1)\psi(t)}} \leq (1 + \theta)^{n-1}.$$

Поэтому из (29) получаем неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, \Psi)|^{1/(n-1)n} \leq (1 + \theta)(d_{-\psi} \Gamma_{\delta, \varepsilon} + \theta).$$

Так как θ – произвольное сколь угодно малое положительное число, и так как $\Gamma_{\delta, \varepsilon} \subset K_{\delta, \varepsilon}$, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, \Psi)|^{1/n^2} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, \Psi)|^{1/(n-1)n} \leq d_{-\psi} \Gamma_{\delta, \varepsilon} \leq d_{-\psi} K_{\delta, \varepsilon}. \quad (30)$$

Заметим, что при всех $\varepsilon > 0$ число континуумов, из которых состоит компакт $K_{\delta, \varepsilon} = K_\delta \cup \Xi_{\delta, \varepsilon}$, не превосходит зависящей от δ , но не зависящей от ε постоянной $L_\delta + q_\delta + 1$, где L_δ – верхняя граница числа континуумов компакта K_δ (так как K_δ – это объединение L_δ кругов), q_δ – число полюсов функции f на $\overline{D_\delta}$. Кроме того, в силу (27) $K_{\delta, \varepsilon} \rightarrow K_\delta \cup \Xi_\delta$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому, пользуясь теоремой Рахманова в случае, когда $\infty \in E$ (и, следовательно, $\infty \notin K_\delta \cup \Xi_\delta$), и дополнением к теореме Рахманова в случае, когда $\infty \notin E$, но имеет место предположение (16), получаем равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_{-\psi} K_{\delta, \varepsilon} = d_{-\psi}(K_\delta \cup \Xi_\delta).$$

Так как Ξ_δ – конечное множество точек, то в случае $\infty \in E$ непосредственно из определения (8) трансфинитного диаметра видно, что $d_{-\psi}(K_\delta \cup \Xi_\delta) = d_{-\psi} K_\delta$. А в случае предположений (16) это же равенство выполняется, например, в силу свойства инвариантности величины $d_\lambda K$ (см. равенство (11)).

Поэтому, сделав в неравенстве (30) предельный переход по $\varepsilon \rightarrow 0$, получим неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, \Psi)|^{1/n^2} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_{-\psi} K_{\delta, \varepsilon} = d_{-\psi} K_\delta. \quad (31)$$

Предположим теперь, что компакт K состоит из $k < \infty$ континуумов. Тогда число k_δ связных компонент компакта K_δ также не превосходит k при всех $\delta > 0$. Поэтому, учитывая, что $K_\delta \rightarrow K$ при $\delta \rightarrow 0$ (по свойству (iv) раздутий), и еще раз пользуясь теоремой Рахманова или дополнением к ней, из неравенства (31) получаем при $\delta \rightarrow 0$ требуемое неравенство (14). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть

$$E \in \mathcal{E}_m, \quad f \in \mathcal{A}(E), \quad \mu \in \mathcal{M}(E), \quad T \in \mathcal{T}_\mu, \quad K \in \mathfrak{K}_{E,f}.$$

Так как $\mathcal{A}(E) \subset H(E)$, то в предположении, что компакт K состоит из конечного числа континуумов, по теореме 1 с учетом замечания 3 (см. неравенство (17)) имеем неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, W(T))|^{1/n^2} \leq d_\mu K. \quad (32)$$

Покажем, пользуясь условием $f \in \mathcal{A}(E)$, что неравенство (32) имеет место и без предположения конечности числа континуумов компакта K . Для этого достаточно показать, что найдется компакт $K^* \subseteq K$ такой, что K^* состоит из конечного числа континуумов и $K^* \in \mathfrak{K}_{E,f}$.

Пусть $E = \bigsqcup_{j=1}^m E_j \in \mathcal{E}_m$. В силу определения семейства $\mathfrak{K}_{E,f}$ связные компоненты D_j и D_l дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащие континуумы E_j и E_l соответственно, либо не пересекаются, либо совпадают, причем в последнем случае $f_j = f_l$, где $f_j = f|_{D_j}$, $1 \leq j < l \leq m$. Для упрощения последующих рассуждений покажем, что без потери в общности можно считать, что при всех $1 \leq j < l \leq m$ области D_j и D_l не пересекаются. Действительно, предположим, что $D_j = D_l$ и $f_j = f_l$ при некоторых $j \neq l$. Пусть для определенности $j = m-1$, $l = m$. Обозначим через E_{m-1}^* континуум $E_{m-1} \cup E_m \cup \Gamma$, где Γ – гладкая кривая, лежащая в области $D_{m-1} = D_m$ и соединяющая E_{m-1} с E_m . Вспоминая определение (15) определителей $\Delta_n(f, \Psi)$ и учитывая, что функция $f_{m-1} = f_m$ голоморфна на E_{m-1}^* , а функции $\Psi_n(t)t^\nu$ голоморфны в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$, и, следовательно, при всех $n = 1, 2, \dots$, $\nu = 0, 1, \dots$, имеет место равенство

$$\oint_{E_{m-1}} f_{m-1}(t)\Psi_n(t)t^\nu dt + \oint_{E_m} f_m(t)\Psi_n(t)t^\nu dt = \oint_{E_{m-1}^*} f_{m-1}(t)\Psi_n(t)t^\nu dt,$$

получаем, что все элементы определителя $\Delta_n(f, \Psi)$ не изменятся, если компакт $E = \bigsqcup_{j=1}^m E_j \in \mathcal{E}_m$ заменить компактом $E^* = \bigsqcup_{j=1}^{m-1} E_j^* \in \mathcal{E}_{m-1}$, где $E_j^* = E_j$ при $j = 1, \dots, m-2$, $E_{m-1}^* = E_{m-1} \cup E_m \cup \Gamma$. Повторяя при необходимости это же рассуждение, не более чем через $m-1$ шагов получаем требуемое утверждение.

Итак, пусть $D_j \cap D_l = \emptyset$ при $j \neq l$. Пусть $\delta > 0$, K_δ – раздутие компакта K , состоящее из конечного числа континуумов, ограниченных конечным числом непересекающихся контуров, и пусть $D_{\delta,j}$ – связная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_\delta$, содержащая континуум E_j , $j = 1, \dots, m$. Пусть область $D_{\delta,j}$ ограничивается контурами $\gamma_{\delta,j,1}, \dots, \gamma_{\delta,j,t_j}$, каждый из которых разбивает $\overline{\mathbb{C}}$ на две односвязные области $G_{\delta,j,t}$ и $\Omega_{\delta,j,t}$ (т.е. $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma_{\delta,j,t} = G_{\delta,j,t} \sqcup \Omega_{\delta,j,t}$), $t = 1, \dots, t_j$, такие, что

$$\bigcap_{t=1}^{t_j} G_{\delta,j,t} = D_{\delta,j}, \quad \Omega_{\delta,j,t} \cap \Omega_{\delta,j,s} = \emptyset, \quad 1 \leq t < s \leq t_j. \quad (33)$$

Пусть $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^m \mathcal{A}_j$, где $\mathcal{A}_j$ – множество точек ветвления функции f_j , $j = 1, \dots, m$. Обозначим через κ число точек множества $\mathcal{A}$ ($\kappa < \infty$ по определению класса функций $\mathcal{A}(E)$). Разобьем все контуры $\gamma_{\delta,j,1}, \dots, \gamma_{\delta,j,t_j}$ на две группы. К первой группе (после соответствующей перенумерации) отнесем контуры $\gamma_{\delta,j,1}, \dots, \gamma_{\delta,j,p_j}$, $p_j \leq t_j$, для которых области $\Omega_{\delta,j,t}$, $t = 1, \dots, p_j$, содержат в себе либо один из континуумов E_l , $l \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$, либо одну из точек множества $\mathcal{A}$. Оставшиеся контуры $\gamma_{\delta,j,p_j+1}, \dots, \gamma_{\delta,j,t_j}$ отнесем ко второй группе. Это означает, что при $t = p_j + 1, \dots, t_j$ области $\Omega_{\delta,j,t}$ не содержат в себе никакого из континуумов E_l , $l \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$ и никакой точки из множества $\mathcal{A}$.

Добавим к области $D_{\delta,j}$, $j = 1, \dots, m$, замыкания односвязных областей $\Omega_{\delta,j,t}$, $t = p_j + 1, \dots, t_j$. Так как $\partial D_{\delta,j} \cap \partial \Omega_{\delta,j,t} = \gamma_{\delta,j,t}$, то полученное таким образом множество

$$D_{\delta,j}^* = D_{\delta,j} \cup \left(\bigcup_{t=p_j+1}^{t_j} \overline{\Omega_{\delta,j,t}} \right)$$

является областью, ограниченной контурами $\gamma_{\delta,j,t}$, $t = 1, \dots, p_j$, т.е.

$$\partial D_{\delta,j}^* = \bigcup_{t=1}^{p_j} \gamma_{\delta,j,t}.$$

По теореме о монодромии функция f_j , голоморфная в области $D_{\delta,j}$, допускает голоморфное продолжение в область $D_{\delta,j}^*$ (так как области $\Omega_{\delta,j,t}$, $t = p_j + 1, \dots, t_j$, не содержат точек множества $\mathcal{A}$ и, следовательно, функция f_j имеет аналитическое продолжение вдоль любого пути в каждой односвязной области $\Omega_{\delta,j,t}$, $t = p_j + 1, \dots, t_j$). При этом область $D_{\delta,j}^*$ не содержит ни одного из континуумов E_l , $l \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$. Следовательно, $\gamma_\delta \in \mathfrak{K}_{E,f}$, где

$$\gamma_\delta = \bigcup_{j=1}^m \partial D_{\delta,j}^* = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{t=1}^{p_j} \gamma_{\delta,j,t}.$$

Так как γ_δ состоит из конечного числа контуров, то в силу (32)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, W(T))|^{1/n^2} \leq d_\mu \gamma_\delta. \quad (34)$$

С целью воспользоваться дополнением к теореме Рахманова о возможности предельного перехода по $\delta \rightarrow 0$ в неравенстве (34), оценим сверху число континуумов компакта γ_δ . В силу второго из соотношений (33) при фиксированном $j \in \{1, \dots, m\}$ каждый континуум E_l , $l \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j\}$, и каждая точка из $\mathcal{A}$ не могут лежать более чем в одной из областей $\Omega_{\delta,j,t}$, $t = 1, \dots, p_j$. Следовательно, $p_j \leq m - 1 + \kappa$. Поэтому число $\sum_{j=1}^m p_j$ континуумов компакта γ_δ не превосходит $m(m - 1 + \kappa)$, где $m(m - 1 + \kappa)$, очевидно, не зависит от δ .

Хорошо известно, что из всякой последовательности компактов в $\mathbb{C}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в сферической метрике Хаусдорфа. Следовательно, найдется подпоследовательность $\delta_n \rightarrow 0$ такая, что $\gamma_{\delta_n} \rightarrow \gamma$ при $n \rightarrow \infty$. Легко видеть, что число связных компонент компакта γ не превосходит $m(m - 1 + \kappa)$, а включения $\gamma_{\delta_n} \in \mathfrak{K}_{E,f}$, $n = 1, 2, \dots$, влекут за собой включение $\gamma \in \mathfrak{K}_{E,f}$. Кроме того, так как $\gamma_{\delta_n} \subseteq \partial K_{\delta_n} \subset K_{\delta_n}$ и $K_{\delta_n} \rightarrow K$ при

$n \rightarrow \infty$, то $\gamma \subseteq K$. Воспользовавшись дополнением к теореме Рахманова и сделав в неравенстве (34) предельный переход по подпоследовательности $\delta_n \rightarrow 0$, получим неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, W(T))|^{1/n^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_\mu \gamma_{\delta_n} = d_\mu \gamma \leq d_\mu K. \quad (35)$$

Таким образом, неравенство (32) имеет место при всех $K \in \mathfrak{K}_{E,f}$.

Применив приведенные выше рассуждения к компакту $F \in \mathfrak{K}_{E,f}$, получим, что существует компакт $\gamma = F^*$, число связных компонент которого не превосходит $m(m-1+\kappa)$, такой, что $F^* \subseteq F$, $F^* \in \mathfrak{K}_{E,f}$ и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, W(T))|^{1/n^2} \leq d_\mu F^* \leq d_\mu F. \quad (36)$$

Легко видеть, что перечисленные свойства компакта F^* сохраняются, если из F^* удалить связные компоненты, вырождающиеся в точку. Из (36) и (19) имеем равенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Delta_n(f, W(T))|^{1/n^2} = d_\mu F^* = d_\mu F. \quad (37)$$

Из (35) и (37) следует равенство (20), завершающее доказательство утверждения 1° теоремы 2.

Как было отмечено после формулировки теоремы 2 импликация $1^\circ \implies 2^\circ$ доказана в [6], а импликация $2^\circ \implies 3^\circ$ – в работах [11] и [1]. Таким образом, теорема 2 доказана.

Список литературы

- [1] В. И. Буслаев, “О сходимости многоточечных аппроксимаций Паде кусочно аналитических функций”, *Матем. сб.*, **204**:2 (2013), 39–72; англ. пер.: V. I. Buslaev, “Convergence of multipoint Padé approximants of piecewise analytic functions”, *Sb. Math.*, **204**:2 (2013), 190–222.
- [2] E. B. Saff, V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Appendix B by T. Bloom, Grundlehren Math. Wiss., **316**, Springer-Verlag, Berlin, 1997, xvi+505 с.
- [3] E. A. Rakhmanov, “Orthogonal polynomials and S -curves”, *Recent advances in orthogonal polynomials, special functions, and their applications*, Contemp. Math., **578**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 195–239.
- [4] В. И. Буслаев, “Емкость компакта в поле логарифмического потенциала”, *Современные проблемы математики, механики и математической физики*, Сборник статей, Тр. МИАН, **290**, МАИК, М., 2015, 254–271; англ. пер.: V. I. Buslaev, “Capacity of a compact set in a logarithmic potential field”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **290** (2015), 238–255.
- [5] G. Polya, “Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. III”, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl.*, **1929** (1929), 55–62.
- [6] V. I. Buslaev, S. P. Suetin, “On the existence of compacta of minimal capacity in the theory of rational approximation of multi-valued analytic functions”, *J. Approx. Theory* (to appear); 2015, arXiv:1505.06120.
- [7] A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, “Critical measures, quadratic differentials, and weak limits of zeros of Stieltjes polynomials”, *Comm. Math. Phys.*, **302**:1 (2011), 53–111.

- [8] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суэтин, “Вариация равновесной энергии и S -свойство стационарного компакта”, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011), 113–136; англ. пер.: A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “Variation of the equilibrium energy and the S -property of stationary compact sets”, *Sb. Math.*, **202**:12 (2011), 1831–1852.
- [9] В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суэтин, “Метод внутренних вариаций и существование S -компактов”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 31–58; англ. пер.: V. I. Buslaev, A. Martínez-Finkelshtein, S. P. Suetin, “Method of interior variations and existence of S -compact sets”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **279** (2012), 25–51.
- [10] В. И. Буслаев, “О сходимости m -точечных аппроксимаций Паде набора многозначных аналитических функций”, *Матем. сб.*, **206**:2 (2015), 5–30; англ. пер.: V. I. Buslaev, “Convergence of m -point Padé approximants of a tuple of multivalued analytic functions”, *Sb. Math.*, **206**:2 (2015), 175–200.
- [11] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [12] В. И. Буслаев, “О сходимости непрерывных Т-дробей”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Анатолия Георгиевича Витушкина, Тр. МИАН, **235**, Наука, М., 2001, 36–51; англ. пер.: V. I. Buslaev, “On the convergence of continued T-fractions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **235** (2001), 29–43.
- [13] В. И. Буслаев, “Оценка емкости множества особенностей функций, заданных своим разложением в непрерывную дробь”, *Anal. Math.*, **39**:1 (2013), 1–27.

Виктор Иванович Буслаев
(Viktor I. Buslaev)

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: buslaev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
16.06.2015 и 21.10.2015