Общероссийский математический портал

Ю. А. Аминов, М. Г. Шаевска, Кручение Гаусса 2-мерной поверхности, заданной в неявном виде, в 4-мерном евклидовом пространстве, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 11, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm856>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:39:32

УДК 514

Ю. А. Аминов, М. Г. Шаевска

Кручение Гаусса 2-мерной поверхности, заданной в неявном виде, в 4-мерном евклидовом пространстве

В работе найдено выражение для кручения Гаусса поверхности F^2 в 4-мерном евклидовом пространстве E^4 , заданной в неявном виде системой двух уравнений. В качестве примера рассмотрено применение этой формулы для пересечения двух квадрик.

Библиография: 4 названия.

В настоящей работе рассматривается 2-мерная поверхность $F^2 \subset E^4$, ее кривизна и кручение Гаусса. Кривизна Гаусса K связана с внутренней геометрией и топологией поверхности. Интеграл по замкнутой поверхности F^2 от K , деленный на 2π , равен характеристике Эйлера χ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{F^2} K dS = \chi.$$

Кручение Гаусса κ_G является инвариантом внешней геометрии поверхности. Если a и b – полуоси эллипса нормальной кривизны, то $\kappa_G = \pm 2ab$, причем знак плюс берется в том случае, когда при вращении касательного вектора в положительном направлении соответствующая точка на эллипсе движется в положительном направлении согласно ориентации в нормальной плоскости, и знак минус, если эта точка движется в отрицательном направлении. Если $ds^2 = g_{ij} du_i du_j$ – метрика поверхности и $L_{ij}^\alpha du_i du_j$ – вторые квадратичные формы, то

$$\kappa_G = \frac{(L_{h1}^1 L_{l2}^2 - L_{h2}^1 L_{l1}^2) g^{hl}}{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}}, \quad (1)$$

см. [1; гл. 6, п. 5].

Кручение Гаусса тоже связано с топологией, но с топологией погружения:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{F^2} \kappa_G dS = \nu,$$

где ν – инвариант Уитни. Этот инвариант равен сумме индексов особых точек нормального поля. Если $n(x)$ – нормальное поле с конечным числом особых точек P_i на замкнутой поверхности, то

$$\nu = \sum_i \text{Ind } n(P_i).$$

Эйлерова характеристика χ тоже связана с индексами особых точек Q_j векторного поля τ , касательного к замкнутой поверхности:

$$\chi = \sum_j \text{Ind } \tau(Q_j).$$

Рассмотрим поверхность $F^2 \subset E^4$ в неявном представлении

$$\begin{aligned} \Phi^1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0, \\ \Phi^2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть бивектор $[\text{grad } \Phi^1 \text{ grad } \Phi^2] \neq 0$. Производные функций Φ^i по координатам x_k обозначим индексами снизу, например $\frac{\partial \Phi^i}{\partial x_k} = \Phi_k^i$.

В работе [2] было найдено выражение для кривизны Гаусса K поверхности в евклидовом пространстве в неявном виде (2). Здесь же получен и более общий результат – выражение для тензора Римана подмногообразия евклидова пространства, а в публикациях [3], [4] – для подмногообразия риманова пространства.

В настоящей работе находится формула для вычисления кручения Гаусса κ_G в наиболее простом виде. Пусть $\Delta = |[\text{grad } \Phi^1 \text{ grad } \Phi^2]|^2$.

Введем вектор $h = (h^{11}, h^{12}, h^{13}, h^{14}, h^{22}, h^{23}, h^{24}, h^{33}, h^{34}, h^{44})$. Он имеет десять координат. Пусть

$$\sigma^i = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\Phi_i^1 \text{ grad } \Phi^2 - \Phi_i^2 \text{ grad } \Phi^1), \quad i = 1, \dots, 4,$$

где $\Delta = |[\text{grad } \Phi^1 \text{ grad } \Phi^2]|^2$. Тогда $h^{ir} = \delta^{ir} - (\sigma^i \sigma^r)$, где скобки $(\cdot)$ обозначают скалярное произведение.

Далее, пусть вектор q с шестью координатами имеет выражение

$$q = \begin{pmatrix} q^{12} \\ q^{13} \\ q^{14} \\ q^{23} \\ q^{24} \\ q^{34} \end{pmatrix}, \quad q^{ij} = \varepsilon^{ijkl} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \Phi_k^1 & \Phi_l^1 \\ \Phi_k^2 & \Phi_l^2 \end{vmatrix},$$

ε^{ijkl} – символ Кронекера.

Введем обозначение

$$(ijkl) = \begin{vmatrix} \Phi_{ik}^1 & \Phi_{il}^1 \\ \Phi_{jk}^2 & \Phi_{jl}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_{jk}^1 & \Phi_{jl}^1 \\ \Phi_{ik}^2 & \Phi_{il}^2 \end{vmatrix}.$$

Построим матрицу B типа 10×6

$$B = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{bmatrix} (1112) & (1113) & (1114) & (1123) & (1124) & (1134) \\ (1212) & (1213) & (1214) & (1223) & (1224) & (1234) \\ (1312) & (1313) & (1314) & (1323) & (1324) & (1334) \\ (1412) & (1413) & (1414) & (1423) & (1424) & (1434) \\ (2212) & (2213) & (2214) & (2223) & (2224) & (2234) \\ (2312) & (2313) & (2314) & (2323) & (2324) & (2334) \\ (2412) & (2413) & (2414) & (2423) & (2424) & (2434) \\ (3312) & (3313) & (3314) & (3323) & (3324) & (3334) \\ (3412) & (3413) & (3414) & (3423) & (3424) & (3434) \\ (4412) & (4413) & (4414) & (4423) & (4424) & (4434) \end{bmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F^2 \subset E^4$ – регулярная поверхность, представленная в неявном виде с помощью системы уравнений (2). Тогда кручение Гаусса

$$\kappa_G = (hBq). \quad (3)$$

Приведенная формула удобна для вычислений особенно в том случае, когда функции Φ^σ алгебраические.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала тот случай, когда $\text{grad } \Phi^1$ и $\text{grad } \Phi^2$ ортогональны друг другу:

$$(\text{grad } \Phi^1 \text{ grad } \Phi^2) = 0.$$

Пусть $|\text{grad } \Phi^\alpha| = \lambda_\alpha$ и заметим, что нормальные векторы имеют вид

$$n_\alpha = \frac{\text{grad } \Phi^\alpha}{\lambda_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Пусть $r = r(u_1, u_2)$ – параметрическое представление поверхности. Тогда выполняются тождества $\Phi^\sigma(x_1(u_1, u_2), \dots, x_4(u_1, u_2)) \equiv \text{const}$.

Дифференцируя обе стороны системы уравнений (2), получаем

$$\Phi_i^\sigma \frac{\partial x_i}{\partial u_k} = 0, \quad (4)$$

$$\Phi_{ij}^\sigma \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial u_l} + \Phi_i^\sigma \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_l} = 0. \quad (5)$$

Заметим, что $r_{u_k} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_k} \right)$, $r_{u_k u_l} = \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_l} \right)$. Тогда уравнение (5) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\lambda_\sigma} \Phi_{ij}^\sigma \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial u_l} + (n_\sigma r_{u_k u_l}) = 0.$$

Согласно определению вторых квадратичных форм имеем

$$L_{kl}^\sigma = (n_\sigma r_{u_k u_l}) = -\frac{1}{\lambda_\sigma} \Phi_{ij}^\sigma \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial u_l}.$$

Пусть $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. Подставим выражения L_{kl}^σ в формулу (1):

$$\begin{aligned} \kappa_G &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\Phi_{ij}^1 \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \frac{\partial x_j}{\partial u_1} \Phi_{ms}^2 \frac{\partial x_m}{\partial u_l} \frac{\partial x_s}{\partial u_2} - \Phi_{ij}^1 \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \frac{\partial x_j}{\partial u_2} \Phi_{ms}^2 \frac{\partial x_m}{\partial u_l} \frac{\partial x_s}{\partial u_1} \right) g^{hl} \\ &= \Phi_{ij}^1 \Phi_{ms}^2 \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \frac{\partial x_m}{\partial u_l} q^{js} g^{hl}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$q^{js} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial x_j}{\partial u_1} \frac{\partial x_s}{\partial u_2} - \frac{\partial x_j}{\partial u_2} \frac{\partial x_s}{\partial u_1} \right).$$

Заметим, что q^{js} являются координатами единичного бивектора $q = \frac{1}{\sqrt{g}}[r_{u_1} r_{u_2}]$ касательной плоскости. Между бивектором нормальной плоскости $p = [n_1 n_2]$ и бивектором q существует связь

$$q^{js} = \varepsilon^{jsrn} p^{rn},$$

где $\varepsilon^{j s r n}$ – символ Кронекера. Имеем

$$p = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} [\text{grad } \Phi^1 \text{ grad } \Phi^2],$$

$$p^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \Phi_i^1 & \Phi_j^1 \\ \Phi_i^2 & \Phi_j^2 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Таким образом, q^{js} представлены с помощью производных функций Φ^α . В уравнении (6) заменим $j \rightarrow s \rightarrow j$ и учтем, что $q^{js} = -q^{sj}$. Тогда получим

$$\varkappa_G = -\Phi_{is}^1 \Phi_{mj}^2 \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \frac{\partial x_m}{\partial u_l} g^{hl} q^{js}. \quad (8)$$

Введем обозначение

$$h^{im} = \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \frac{\partial x_m}{\partial u_l} g^{hl}.$$

Взяв сумму правых и левых частей уравнений (6) и (8), получим

$$\varkappa_G = \frac{1}{2} (\Phi_{ij}^1 \Phi_{ms}^2 - \Phi_{is}^1 \Phi_{mj}^2) h^{im} q^{js}, \quad (9)$$

$$\varkappa_G = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i \leq m; j < s} (imjs) h^{im} q^{js}.$$

Выражения

$$(imjs) = \begin{vmatrix} \Phi_{ij}^1 & \Phi_{is}^1 \\ \Phi_{mj}^2 & \Phi_{ms}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_{mj}^1 & \Phi_{ms}^1 \\ \Phi_{ij}^2 & \Phi_{is}^2 \end{vmatrix}$$

являются элементами матрицы B .

В формуле (9) возможны два случая: $i \leq m$ и $i \geq m$. В определении вектора h мы положили, что $i \leq m$, и пусть по определению вектора q индексы $j < s$. Заметим, что $(imjs) = -(imsj)$, $q^{js} = -q^{sj}$. Тогда

$$\varkappa_G = (hBq).$$

Для h^{im} выражение найдем позже.

Теперь рассмотрим общий случай, когда $\text{grad } \Phi^1$ и $\text{grad } \Phi^2$ могут быть не ортогональны друг другу. Пусть

$$n_1 = \frac{1}{\lambda_1} \text{grad } \Phi^1,$$

$$n_2 = a \text{grad } \Phi^1 + b \text{grad } \Phi^2.$$

Чтобы найти коэффициенты a и b , воспользуемся двумя условиями: $(n_1 n_2) = 0$ и $n^2 = 1$. Обозначим $\mu = (\text{grad } \Phi^1 \text{ grad } \Phi^2)$. Тогда

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{\lambda_1^2} \mu,$$

$$a^2 \lambda_1^2 + 2ab\mu + b^2 \lambda_2^2 = 0.$$

Пусть $\Delta = \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \mu^2 = |\text{grad } \Phi^1 \text{ grad } \Phi^2|^2$. Получаем выражения для a и b :

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{\lambda_1 \sqrt{\Delta}} \mu, \\ b &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \lambda_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Снова имеем выражения L_{kl}^1 :

$$L_{kl}^1 = -\frac{1}{\lambda_1} \Phi_{ij}^1 \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l}. \quad (11)$$

Выражение L_{kl}^2 в этом случае более сложно:

$$\begin{aligned} L_{kl}^2 &= (a \text{ grad } \Phi^1 + b \text{ grad } \Phi^2 r_{u_k u_l}) = a(\text{grad } \Phi^1 r_{u_k u_l}) + b(\text{grad } \Phi^2 r_{u_k u_l}) \\ &= -a \Phi_{ij}^1 \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l} - b \Phi_{ij}^2 \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \frac{\partial x_j}{\partial u_l}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя выражения (11) и (12) в (1), получаем

$$\begin{aligned} \kappa_G &= \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} L_{h1}^1 & L_{l1}^2 \\ L_{h2}^1 & L_{l2}^2 \end{vmatrix} g^{hl} \\ &= \frac{1}{\lambda_1 \sqrt{g}} \begin{vmatrix} \Phi_{ij}^1 \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \frac{\partial x_j}{\partial u_1} & a \Phi_{rs}^1 \frac{\partial x_r}{\partial u_l} \frac{\partial x_s}{\partial u_1} + b \Phi_{rs}^2 \frac{\partial x_r}{\partial u_l} \frac{\partial x_s}{\partial u_1} \\ \Phi_{ij}^1 \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \frac{\partial x_j}{\partial u_2} & a \Phi_{rs}^1 \frac{\partial x_r}{\partial u_l} \frac{\partial x_s}{\partial u_2} + b \Phi_{rs}^2 \frac{\partial x_r}{\partial u_l} \frac{\partial x_s}{\partial u_2} \end{vmatrix} g^{hl} \\ &= \frac{a}{\lambda_1} \Phi_{ij}^1 \Phi_{rs}^1 h^{ir} q^{js} + \frac{b}{\lambda_1} \Phi_{ij}^1 \Phi_{rs}^2 h^{ir} q^{js}. \end{aligned}$$

Первая сумма равна нулю, так как если изменим обозначение индексов суммирования $j \rightarrow s \rightarrow j$ и $i \rightarrow r \rightarrow i$, то получим ту же сумму, но со знаком минус. Следовательно, имеем

$$\kappa_G = \frac{1}{2} \frac{b}{\lambda_1} \begin{vmatrix} \Phi_{ij}^1 & \Phi_{is}^1 \\ \Phi_{rj}^2 & \Phi_{rs}^2 \end{vmatrix} h^{ir} q^{js}. \quad (13)$$

Чтобы найти q^{js} , можно воспользоваться бивектором p в (7). Найдем теперь h^{ir} . Введем векторы

$$\sigma^i = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\Phi_i^1 \text{ grad } \Phi^2 - \Phi_i^2 \text{ grad } \Phi^1), \quad i = 1, \dots, 4,$$

где $\Delta = |\text{grad } \Phi^1 \text{ grad } \Phi^2|^2$.

ЛЕММА. Координаты h^{ir} можно найти согласно следующим выражениям:

$$h^{ir} = \delta^{ir} - (\sigma^i \sigma^r),$$

где δ^{ir} — символ Кронекера.

На поверхности F^2 введем криволинейные ортогональные координаты (u_1, u_2) . Это можно сделать в окрестности произвольной точки. Пусть метрика F^2 имеет вид $ds^2 = E du_1^2 + G du_2^2$. Рассмотрим матрицу M , строки которой составлены из координат векторов $n_1, n_2, \frac{1}{\sqrt{E}}r_{u_1}$ и $\frac{1}{\sqrt{G}}r_{u_2}$:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1}\Phi_1^1 & \frac{1}{\lambda_1}\Phi_2^1 & \frac{1}{\lambda_1}\Phi_3^1 & \frac{1}{\lambda_1}\Phi_4^1 \\ a\Phi_1^1 + b\Phi_1^2 & a\Phi_2^1 + b\Phi_2^2 & a\Phi_3^1 + b\Phi_3^2 & a\Phi_4^1 + b\Phi_4^2 \\ \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x_4}{\partial u_1} \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x_4}{\partial u_2} \end{bmatrix}.$$

Так как $n_1, n_2, \frac{1}{\sqrt{E}}r_{u_1}$ и $\frac{1}{\sqrt{G}}r_{u_2}$ — единичные и ортогональны друг другу, то M — ортогональная матрица. Запишем условие ортогональности с помощью столбцов

$$\frac{1}{\lambda_1^2}\Phi_i^1\Phi_r^1 + (a\Phi_i^1 + b\Phi_i^2)(a\Phi_r^1 + b\Phi_r^2) + h^{ir} = \delta^{ir}.$$

Тогда

$$h^{ir} = \delta^{ir} - \Phi_i^1\Phi_r^1\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + a^2\right) - ab(\Phi_r^1\Phi_i^2 + \Phi_i^1\Phi_r^2) - b^2\Phi_i^2\Phi_r^2.$$

С помощью (10) получим

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + a^2 = \frac{\lambda_2^2}{\Delta}, \quad ab = -\frac{\mu}{\Delta}, \quad b^2 = \frac{\lambda_1^2}{\Delta}.$$

Далее,

$$h^{ir} = \delta^{ir} - (\sigma^i\sigma^r).$$

Подставляя h^{ir}, q^{js} и b в (13), получим (3).

Итак, теорема 1 доказана.

Рассмотрим два примера применения полученного результата. Найдем кручение Гаусса для двух поверхностей, заданных системой уравнений.

ПРИМЕР 1. Пусть поверхность задана в явном виде:

$$\begin{aligned} \Phi^1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= u(x_1, x_2) - x_3 = 0, \\ \Phi^2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= v(x_1, x_2) - x_4 = 0. \end{aligned}$$

Вычисляем производные

$$\begin{aligned} \Phi_{x_1}^1 &= u_{x_1}, \quad \Phi_{x_2}^1 = u_{x_2}, \quad \Phi_{x_3}^1 = -1, \quad \Phi_{x_4}^1 = 0, \\ \Phi_{x_1}^2 &= v_{x_1}, \quad \Phi_{x_2}^2 = v_{x_2}, \quad \Phi_{x_3}^2 = 0, \quad \Phi_{x_4}^2 = -1, \\ \text{grad } \Phi^1 &= (u_{x_1}, u_{x_2}, -1, 0), \quad \text{grad } \Phi^2 = (v_{x_1}, v_{x_2}, 0, -1). \end{aligned}$$

Матрица B имеет вид

$$B = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{bmatrix} (1112) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1212) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2212) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} (1112) &= \begin{vmatrix} u_{x_1 x_1} & u_{x_1 x_2} \\ v_{x_1 x_1} & v_{x_1 x_2} \end{vmatrix} = u_{x_1 x_1} v_{x_1 x_2} - u_{x_1 x_2} v_{x_1 x_1}, \\ (1212) &= \begin{vmatrix} u_{x_1 x_1} & u_{x_2 x_2} \\ v_{x_1 x_1} & v_{x_2 x_2} \end{vmatrix} = u_{x_1 x_1} v_{x_2 x_2} - u_{x_2 x_2} v_{x_1 x_1}, \\ (2212) &= \begin{vmatrix} u_{x_2 x_1} & u_{x_2 x_2} \\ v_{x_2 x_1} & v_{x_2 x_2} \end{vmatrix} = u_{x_1 x_2} v_{x_2 x_2} - u_{x_2 x_2} v_{x_1 x_2}. \end{aligned}$$

Следовательно, кручение Гаусса равно

$$\varkappa_G = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (h^{11} (1112) q^{12} + h^{12} (1212) q^{12} + h^{22} (2212) q^{12}),$$

где

$$\begin{aligned} q^{12} &= \varepsilon^{1234} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \Phi_{x_3}^1 & \Phi_{x_4}^1 \\ \Phi_{x_3}^2 & \Phi_{x_4}^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}, \\ \Delta &= (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + 1)(v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + 1) - (u_{x_1} v_{x_1} + u_{x_2} v_{x_2})^2 \\ &= (u_{x_1} v_{x_2} - u_{x_2} v_{x_1})^2 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + 1, \\ h^{11} &= \delta^{11} - \frac{1}{\Delta} (\Phi_{x_1}^1 \operatorname{grad} \Phi^2 - \Phi_{x_1}^2 \operatorname{grad} \Phi^1)^2 = \frac{1}{\Delta} (u_{x_2}^2 + v_{x_2}^2 + 1), \\ h^{12} &= \delta^{12} - \frac{1}{\Delta} (\Phi_{x_1}^1 \operatorname{grad} \Phi^2 - \Phi_{x_1}^2 \operatorname{grad} \Phi^1) (\Phi_{x_2}^1 \operatorname{grad} \Phi^2 - \Phi_{x_2}^2 \operatorname{grad} \Phi^1) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} (u_{x_1} u_{x_2} + v_{x_2} v_{x_1}), \\ h^{22} &= \delta^{22} - \frac{1}{\Delta} (\Phi_{x_2}^1 \operatorname{grad} \Phi^2 - \Phi_{x_2}^2 \operatorname{grad} \Phi^1)^2 = \frac{1}{\Delta} (u_{x_1}^2 + v_{x_1}^2 + 1). \end{aligned}$$

Подставляя в формулу для кручения Гаусса, получаем

$$\begin{aligned} \varkappa_G &= \frac{1}{\Delta^2} [(u_{x_1 x_1} v_{x_1 x_2} - u_{x_1 x_2} v_{x_1 x_1})(u_{x_2}^2 + v_{x_2}^2 + 1) \\ &\quad - (u_{x_1 x_1} v_{x_2 x_2} - u_{x_2 x_2} v_{x_1 x_1})(u_{x_1} u_{x_2} + v_{x_2} v_{x_1}) \\ &\quad + (u_{x_1 x_2} v_{x_2 x_2} - u_{x_2 x_2} v_{x_1 x_2})(u_{x_1}^2 + v_{x_1}^2 + 1)], \end{aligned}$$

что совпадает с известным выражением $\varkappa_G$ в книге [1; гл. 6, п. 7, задачи].

ПРИМЕР 2. Имеем два уравнения, определяющие поверхность $F^2 \subset E^4$ – пересечение двух квадрик, что является обобщением на двумерный случай кривой Вивиани:

$$\begin{aligned}\Phi^1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 a_i x_i^2 - d_1 = 0, \\ \Phi^2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 b_i x_i^2 - d_2 = 0.\end{aligned}\tag{14}$$

Этому классу поверхностей принадлежит и тор Клиффорда, кручение Гаусса которого, как известно, равно нулю.

В работе [2] найдено в компактной форме выражение для кривизны Гаусса поверхностей вида (14). Сейчас мы вычислим их кручение Гаусса.

Введем следующие обозначения: $\gamma_i = 2(d_1 b_i - d_2 a_i)$ и $c_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$. Из уравнений (14) имеем

$$c_{1i} x_1^2 + c_{2i} x_2^2 + c_{3i} x_3^2 + c_{4i} x_4^2 = \gamma_i.\tag{15}$$

Вычисляем производные:

$$\begin{aligned}\Phi_{x_i}^1 &= a_i x_i \quad \text{для } i = 1, 2, 3, 4, \\ \Phi_{x_i}^2 &= b_i x_i \quad \text{для } i = 1, 2, 3, 4, \\ \Phi_{x_i x_i}^1 &= a_i \quad \text{для } i = 1, 2, 3, 4, \quad \Phi_{x_i x_j}^1 = 0 \quad \text{для } i \neq j, \\ \Phi_{x_i x_i}^2 &= b_i \quad \text{для } i = 1, 2, 3, 4, \quad \Phi_{x_i x_j}^2 = 0 \quad \text{для } i \neq j, \\ \text{grad } \Phi^1 &= (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, a_4 x_4), \quad \text{grad } \Phi^2 = (b_1 x_1, b_2 x_2, b_3 x_3, b_4 x_4).\end{aligned}$$

Так как вторые смешанные производные функций Φ^α равны нулю, то $(ijkl)$ с различными индексами равны нулю, следовательно, останутся только матрицы вида $(ijij)$. Таким образом, матрица B имеет вид

$$B = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1212) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1313) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1414) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2323) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (2424) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (3434) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$(ijij) = \begin{vmatrix} a_i & 0 \\ 0 & b_j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_j \\ b_i & 0 \end{vmatrix} = a_i b_j - a_j b_i \quad \text{для } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Кручение Гаусса равно

$$\kappa_G = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (h^{12} c_{12} q^{12} + h^{13} c_{13} q^{13} + h^{14} c_{14} q^{14} + h^{23} c_{23} q^{23} + h^{24} c_{24} q^{24} + h^{34} c_{34} q^{34}),$$

где

$$\begin{aligned}
q^{12} &= \varepsilon^{1234} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \Phi_{x_3}^1 & \Phi_{x_4}^1 \\ \Phi_{x_3}^2 & \Phi_{x_4}^2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (a_3 x_3 b_4 x_4 - b_3 x_3 a_4 x_4) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} x_3 x_4 (a_3 b_4 - b_3 a_4), \\
h^{12} &= -\frac{1}{\Delta} x_1 x_2 \left[x_3^2 (a_1 a_2 b_3^2 - a_1 a_3 b_2 b_3 - a_2 a_3 b_1 b_3 + a_3^2 b_1 b_2) \right. \\
&\quad \left. + x_4^2 (a_1 a_2 b_4^2 - a_1 a_4 b_2 b_4 - a_2 a_4 b_1 b_4 + a_4^2 b_1 b_2) \right] \\
&= -\frac{1}{\Delta} x_1 x_2 (x_3^2 c_{13} c_{23} + x_4^2 c_{14} c_{24}).
\end{aligned}$$

В общем случае можно записать

$$\begin{aligned}
q^{ij} &= \varepsilon^{ijkl} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} x_k x_l c_{kl}, \\
h^{ij} &= -\frac{1}{\Delta} x_i x_j (x_k^2 c_{ik} c_{jk} + x_l^2 c_{il} c_{jl}).
\end{aligned}$$

Запишем выражение кручения Гаусса:

$$\begin{aligned}
\kappa_G &= -\frac{1}{\Delta^2} x_1 x_2 x_3 x_4 \left[\varepsilon^{1234} c_{12} c_{34} (x_3^2 c_{13} c_{23} + x_4^2 c_{14} c_{24}) \right. \\
&\quad + \varepsilon^{1324} c_{13} c_{24} (x_2^2 c_{12} c_{32} + x_4^2 c_{14} c_{34}) \\
&\quad + \varepsilon^{1423} c_{14} c_{23} (x_2^2 c_{12} c_{42} + x_3^2 c_{13} c_{43}) + \varepsilon^{2314} c_{23} c_{14} (x_1^2 c_{21} c_{31} + x_4^2 c_{24} c_{34}) \\
&\quad \left. + \varepsilon^{2413} c_{24} c_{13} (x_1^2 c_{21} c_{41} + x_3^2 c_{23} c_{43}) + \varepsilon^{3412} c_{34} c_{12} (x_1^2 c_{31} c_{41} + x_2^2 c_{32} c_{42}) \right].
\end{aligned}$$

Соберем все коэффициенты при x_i^2 . Получим

$$\begin{aligned}
\kappa_G &= -\frac{1}{\Delta^2} x_1 x_2 x_3 x_4 \left[x_1^2 (c_{21} c_{31} c_{14} c_{23} - c_{24} c_{13} c_{21} c_{41} + c_{34} c_{12} c_{31} c_{41}) \right. \\
&\quad + x_2^2 (-c_{13} c_{24} c_{12} c_{32} + c_{14} c_{23} c_{12} c_{42} + c_{34} c_{12} c_{32} c_{42}) \\
&\quad + x_3^2 (c_{12} c_{34} c_{13} c_{23} + c_{14} c_{23} c_{12} c_{42} - c_{24} c_{13} c_{23} c_{43}) \\
&\quad \left. + x_4^2 (c_{12} c_{34} c_{14} c_{24} - c_{24} c_{13} c_{14} c_{34} + c_{23} c_{14} c_{24} c_{34}) \right].
\end{aligned}$$

Далее преобразуем выражение к виду:

$$\begin{aligned}
\kappa_G &= -\frac{1}{\Delta^2} x_1 x_2 x_3 x_4 \left[c_{21} c_{31} c_{23} (c_{14} x_1^2 + c_{24} x_2^2 + c_{34} x_3^2) \right. \\
&\quad - c_{24} c_{21} c_{41} (c_{13} x_1^2 + c_{23} x_2^2 + c_{34} x_4^2) \\
&\quad + c_{31} c_{41} c_{34} (c_{12} x_1^2 + c_{32} x_3^2 + c_{42} x_4^2) \\
&\quad \left. - c_{32} c_{42} c_{34} (c_{21} x_2^2 + c_{31} x_3^2 + c_{41} x_4^2) \right].
\end{aligned}$$

Выражения в круглых скобках можно заменить на постоянные. Используя (15), получаем:

$$\kappa_G = \frac{1}{\Delta^2} x_1 x_2 x_3 x_4 (c_{23} c_{24} c_{34} \gamma_1 - c_{13} c_{14} c_{34} \gamma_2 + c_{12} c_{14} c_{24} \gamma_3 - c_{12} c_{13} c_{23} \gamma_4).$$

Вычислим теперь Δ :

$$\Delta = (\text{grad } \Phi^1)^2 (\text{grad } \Phi^2)^2 - (\text{grad } \Phi^1 \text{ grad } \Phi^2)^2 = \sum_{i < j} c_{ij}^2 x_i^2 x_j^2.$$

ТЕОРЕМА 2. *Кручение Гаусса поверхности, заданной системой уравнений (14), вычисляется по формуле*

$$\kappa_G = \frac{x_1 x_2 x_3 x_4 A}{(\sum_{i < j} c_{ij}^2 x_i^2 x_j^2)^2},$$

где A – постоянная:

$$A = c_{23}c_{24}c_{34}\gamma_1 - c_{13}c_{14}c_{34}\gamma_2 + c_{12}c_{14}c_{24}\gamma_3 - c_{12}c_{13}c_{23}\gamma_4.$$

Рассмотрим сейчас вопрос существования поверхности с заданными числами a_i и b_i и с кручением Гаусса равным нулю. Согласно теореме 2 на такой поверхности $A = A_1 d_1 + A_2 d_2 = 0$, где постоянные A_k выражаются только через a_i и b_i . Заметим, что такие поверхности существуют не всегда. Например, если $a_i > 0$ и $b_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$, то $A > 0$.

Введем векторы $a = \{a_i\}$, $b = \{b_i\}$. Линейная комбинация уравнений (14) является уравнением того же вида, поэтому можно предполагать, что $|a| = |b| = 1$ и скалярное произведение $(ab) = 0$. Обозначим $x_i^2 = y_i$ и вектор $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$. Тогда уравнения (14) можно записать в виде уравнений 2-мерной плоскости в E^4

$$(ay) = d_1, \quad (by) = d_2.$$

Векторы a и b являются нормальными этой плоскости. Когда $d_1 = d_2 = 0$, эта плоскость идет через начало координат O . Обозначим эту плоскость через $T^2(O)$. Смена постоянных d_i приводит к параллельному переносу $T^2(O)$ на вектор $d = d_1 a + d_2 b$. Плоскость, полученную параллельным переносом, обозначим как $T^2(d)$.

Нас интересуют точки, для которых $y_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$. Пусть D – 4-мерное тело, определенное неравенствами $y_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 4$.

Если $T^2(O)$ пересекает тело D , тогда, передвигаясь в направлении, перпендикулярном к вектору $l = A_1 a + A_2 b$, получим семейство поверхностей вида (14) с $\kappa_G = 0$.

Если $T^2(O)$ не пересекает D кроме как в точке O , тогда для того, чтобы $T^2(d)$ пересекала D , условием необходимым и достаточным является условие, чтобы прямая с направляющим вектором l не пересекала D . Действительно, в этом случае вектор d направлен внутрь тела D . Изменяя d вдоль вектора, ортогонального к l , получаем семейство поверхностей вида (14) с $\kappa_G = 0$.

Условие на l означает, что между числами $A_1 a_i + A_2 b_i$, $i = 1, \dots, 4$, существуют числа разных знаков.

Список литературы

1. Аминов Ю. А. Геометрия подмногообразий. Киев: Наукова думка, 2002.
2. Аминов Ю. А. Выражение тензора Римана подмногообразия евклидова пространства, заданного системой уравнений // Матем. заметки. 1999. Т. 66. №1. С. 3–7.
3. Аминов Ю. А. Выражение тензора Римана подмногообразия риманова пространства, заданного системой уравнений // Матем. заметки. 2002. Т. 72. №5. С. 643–648.
4. Аминов Ю. А. Письмо в редакцию // Матем. заметки. 2003. Т. 74. №5. С. 800.

Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины,
Институт математики Белостокского университета, Польша
E-mail: aminov@ilt.kharkov.ua, aminov@math.uwb.edu.pl
marymar@math.uwb.edu.pl

Поступила в редакцию
30.11.2003