Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Бизяев, В. В. Козлов, Однородные системы с квадратичными интегралами, квазискобки Ли–Пуассона и метод Ковалевской, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 12, 29–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8564>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:04:22

УДК 517.925

И. А. Бизяев, В. В. Козлов

Однородные системы с квадратичными интегралами, квазискобки Ли–Пуассона и метод Ковалевской

Рассматриваются дифференциальные уравнения с квадратичными правыми частями, допускающие два квадратичных первых интеграла, один из которых – положительно определенная квадратичная форма. Указаны условия общего характера, при которых линейной заменой переменных эта система приводится к некоторому “каноническому” виду. При этих условиях система оказывается бездивергентной и приводится к гамильтоновой форме, однако соответствующая линейная скобка Ли–Пуассона не всегда удовлетворяет тождеству Якоби. В трехмерном случае уравнения приводятся к классическим уравнениям волчка Эйлера, а в четырехмерном пространстве система оказывается суперинтегрируемой и совпадает с уравнениями Эйлера–Пуанкаре на некоторой алгебре Ли. В пятимерном случае найден приводящий множитель, после умножения на который скобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби. В общем случае при $n > 5$ доказано отсутствие приводящего множителя. В качестве примера рассмотрена система типа Лотки–Вольтерра с квадратичными правыми частями, изучавшаяся еще Ковалевской с точки зрения условий однозначности ее решений как функций комплексного времени.

Библиография: 38 названий.

Ключевые слова: первые интегралы, конформно-гамильтонова система, скобка Пуассона, система Ковалевской, динамические системы с квадратичными правыми частями.

DOI: 10.4213/sm8564

§ 1. Линейные системы

Начнем с рассмотрения линейной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

допускающей первый интеграл в виде невырожденной квадратичной формы,

$$H = \frac{1}{2}(Bx, x), \quad \det B \neq 0. \quad (1.2)$$

Наше наблюдение состоит в том, что фазовый поток системы (1.1) сохраняет стандартную меру в $\mathbb{R}^n$. Другими словами,

$$\operatorname{tr} A = 0. \quad (1.3)$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Доказательство совсем простое. Функция (1.2) – первый интеграл линейной системы (1.1) тогда и только тогда, когда

$$BA + A^T B = 0.$$

Следовательно,

$$A = -B^{-1}A^T B.$$

Но тогда $\operatorname{tr} A = -\operatorname{tr}(B^{-1}A^T B) = -\operatorname{tr} A$, откуда следует (1.3).

Можно действовать иначе. Приведем квадратичную форму (1.2) к “каноническому” виду

$$2H = \pm x_1^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

В этих координатах условие $\dot{H} = 0$ означает, в частности, что все диагональные элементы матрицы A равны нулю. Следовательно, выполнено (1.3).

Таким образом, если линейная система имеет всего один невырожденный квадратичный интеграл, то она допускает также дополнительный тензорный инвариант – n -форму объема

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Менее очевиден следующий результат. Если дополнительно потребовать выполнения условия невырожденности $\det A \neq 0$, то система (1.1) оказывается гамильтоновой относительно некоторой симплектической структуры в $\mathbb{R}^n$, причем интеграл (1.2) будет функцией Гамильтона (см. [1]). В частности, в этом случае n чётно.

С другой стороны, если система (1.1) вырождена, то она допускает линейный интеграл. На самом деле количество таких независимых интегралов равно размерности ядра оператора A .

Наконец, если система (1.1) невырождена и квадратичная форма (1.2) положительно определена, то эта гамильтонова система допускает $n/2$ независимых квадратичных интегралов. Таким образом, при $n > 2$ наличие только одного положительно определенного первого интеграла невырожденной системы автоматически влечет существование других независимых квадратичных интегралов.

Эти наблюдения можно распространить (с соответствующими изменениями) на динамические системы с квадратичными правыми частями:

$$\dot{x}_k = \sum a_{ij}^k x_i x_j, \quad a_{ij}^k = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (1.4)$$

В отличие от линейных систем эти нелинейные уравнения в общем случае уже неинтегрируемые.

§ 2. Однородные системы

Уравнения (1.4) допускают группу растяжений:

$$x \mapsto \alpha x, \quad t \mapsto \frac{t}{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Это свойство позволяет применить к системе (1.4) метод Ковалевской и найти необходимые условия однозначности ее решений в плоскости комплексного времени, а также условия существования нетривиальных тензорных законов сохранения (см. [2], [3]).

Один из важных примеров уравнений вида (1.4) – это уравнение Эйлера–Пуанкаре на алгебре Ли:

$$\dot{m}_k = \sum c_{jk}^i m_i \omega_j, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Здесь $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ – скорость системы (элемент алгебры g), а $m = (m_1, \dots, m_n)$ – ее импульс (элемент из дуальной алгебры g^*); они связаны линейными соотношениями:

$$m_p = \sum I_{pq} \omega_q.$$

В этой формуле $\|I_{pq}\| = I$ – положительно определенная матрица (тензор инерции системы). Представленные в переменных $\{\omega_j\}$ уравнения (2.1) – это уравнения на алгебре g , а в переменных $\{m_k\}$ – уравнения на коалгебре g^* . Постоянные $c_{jk}^i = -c_{kj}^i$ суть структурные постоянные алгебры Ли; они удовлетворяют тождеству Якоби.

Уравнения (2.1) допускают интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(I\omega, \omega) = \frac{1}{2}(I^{-1}m, m).$$

Эти уравнения можно представить в виде уравнений Гамильтона

$$\dot{m}_k = \{m_k, H\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Скобка $\{\cdot, \cdot\}$ называется скобкой Ли–Пуассона; она определяется соотношениями

$$\{m_i, m_j\} = \sum c_{ij}^p m_p.$$

Для алгебры $\mathfrak{so}(3)$ уравнения (2.1) совпадают с динамическими уравнениями Эйлера, описывающими свободное вращение волчка вокруг неподвижной точки. Подробности можно найти, например, в [4], [5].

Еще один класс систем дифференциальных уравнений вида (1.4) составляют так называемые системы гидродинамического типа (см. [6] и имеющиеся в этой работе ссылки). Они возникают после применения метода Галёркина к уравнениям движения идеальной однородной жидкости.

Другие примеры систем с квадратичными правыми частями (системы типа Лотки–Вольтерра и Дарбу–Альфана) можно найти в [5] и [7].

§ 3. Однородные системы с квадратичными интегралами

Предположим, что система (1.4) имеет два квадратичных первых интеграла

$$F = \frac{1}{2}(Ax, x), \quad H = \frac{1}{2}(Bx, x), \quad (3.1)$$

причем квадратичная форма F положительно определена. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – корни характеристического многочлена

$$\det(B - \lambda A) = 0.$$

Конечно, все они вещественны.

В гамильтоновой механике естественными примерами систем с двумя невырожденными квадратичными интегралами являются обобщения волчка Эйлера на алгебры $\mathfrak{so}(n)$ (см. [8]) и $\mathfrak{e}(n)$ (см. [9]).

ТЕОРЕМА 1. *Если среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ нет равных, то линейной заменой переменных система дифференциальных уравнений (1.4) приводится к виду*

$$\dot{x}_k = \sum_{i < j}'' c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) x_i x_j, \quad (3.2)$$

где

$$c_{ki}^j = c_{jk}^i = c_{ij}^k = -c_{ik}^j = -c_{kj}^i = -c_{ji}^k, \quad (3.3)$$

остальные c_{ij}^k равны нулю, а символ $\sum''$ означает, что в сумме пропущены слагаемые с номерами $i = k$ или $j = k$.

Доказательство основано на приведении пары квадратичных форм (3.1) к каноническому виду:

$$F = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2), \quad H = \frac{1}{2}(\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2).$$

После этого проверяется, что при условии $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$) в “канонических” координатах система дифференциальных уравнений (1.4) принимает вид (3.2). Мы опускаем элементарные, но несколько утомительные вычисления.

Разумеется, коэффициенты (3.3) могут быть произвольными.

Теорема 1 принадлежит В. Вольтерра. В его работе [10] уравнения (3.2) представлены с помощью якобианов первых интегралов:

$$\dot{x}_k = \sum c_{ij}^k \frac{\partial(H, F)}{\partial(x_i, x_j)}.$$

Теорема Вольтерра повторена в [6; добавление 1].

ТЕОРЕМА 2. *Система (3.2) имеет гамильтонов вид*

$$\dot{x}_k = \{x_k, H\}, \quad (3.4)$$

где “скобка Ли–Пуассона” $\{\cdot, \cdot\}$ определяется следующими соотношениями:

$$\{x_i, x_j\} = \sum'' c_{ij}^k x_k. \quad (3.5)$$

Как и в (3.2), здесь суммирование проводится по всем $1 \leq k \leq n$, кроме $k = i$ и $k = j$. Теорема 2 также доказывается непосредственным вычислением с учетом очевидного равенства

$$\{x_k, H\} = \sum_{p=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_p} \{x_k, x_p\}.$$

Из свойства кососимметричности коэффициентов c_{ij}^k вытекает, что функция H – первый интеграл системы вида (3.4). Однако скобка (3.5) не является “настоящей” скобкой Ли–Пуассона, поскольку в общем случае она не подчиняется тождеству Якоби. Такого рода квазискобки Ли–Пуассона естественным образом возникают во многих задачах механики и математической физики (см., например, [11]). Квазискобки Ли–Пуассона также часто называют почти пуассоновой структурой.

Пусть $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция. Тогда

$$\dot{\Phi} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_p} \{x_p, H\} = \{\Phi, H\}.$$

Следовательно, эта функция будет первым интегралом тогда и только тогда, когда она коммутирует с гамильтонианом. Однако в общем случае скобка двух первых интегралов уже не будет интегралом системы (3.4) (ввиду отсутствия тождества Якоби).

Оказывается, скобка (3.5) всегда вырождена: первый интеграл F коммутирует со всеми гладкими функциями на $\mathbb{R}^n$. Действительно,

$$\{x_j, F\} = \sum x_k \{x_j, x_k\} = \sum c_{jk}^p x_k x_p = 0,$$

так как $c_{jk}^p = -c_{jp}^k$ согласно (3.3).

ТЕОРЕМА 3. *Если среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ нет равных, то фазовый поток системы (1.4) сохраняет n -форму объема*

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Действительно, правая часть уравнения (3.2) не содержит переменной x_k . Следовательно, дивергенция векторного поля, задаваемого системой дифференциальных уравнений (3.2), равна нулю. Очевидно, свойство бездивергентности сохраняется при всех линейных преобразованиях. Но тогда (по известной теореме Лиувилля) поток этой системы сохраняет обычную меру Лебега в $\mathbb{R}^n = \{x\}$.

Теорема 3 также была известна Вольтерра. Правда, он ее связывал с теорией интегрирующего множителя Эйлера–Якоби. Отметим, что класс систем гидродинамического типа, введенный А.М. Обуховым [12], составляют системы вида (1.4), допускающие положительно определенный первый интеграл и удовлетворяющие условию бездивергентности:

$$\sum_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial x_k} = 0.$$

Теорема 3 неверна, если в спектре $\{\lambda\}$ есть равные числа. Вот простой пример системы в трехмерном пространстве

$$\dot{x}_1 = x_2(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3), \quad \dot{x}_2 = -x_1(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3), \quad \dot{x}_3 = 0, \quad (3.6)$$

допускающей два независимых квадратичных интеграла

$$F = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), \quad H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

но поток которой не сохраняет объем фазового пространства. Здесь $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$, а дивергенция $\alpha x_2 - \beta x_1$ не обращается в тождественный нуль, если $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Фазовый портрет системы на инвариантной сфере (3.6)

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : F(x) = \text{const} > 0\}$$

изображен на рис. 1. Плоскость $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$ пересекает эту сферу по большому кругу, сплошь заполненному положениями равновесия. Все решения двоякоасимптотические: они стремятся к положениям равновесия при $t \rightarrow \pm\infty$. Система (3.6) имеет инвариантную меру с сингулярной плотностью

$$|\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3|^{-1},$$

но не допускает инвариантных мер, непрерывных относительно стандартной меры Лебега.

Рис. 1

Из теоремы 3 выводится важное следствие: если $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то почти все фазовые траектории системы (1.4) обладают свойством возвращаемости (при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ траектория подходит сколь угодно близко к каждой фиксированной своей точке). Действительно, система (1.4) допускает инвариантную меру

$$d\mu = e^{-\beta G} d^n x, \quad \beta = \text{const} > 0,$$

причем $\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Остается применить теорему Пуанкаре о возвращении.

Можно уточнить это наблюдение, применив результаты эргодической теории к ограничению динамической системы (1.4) на инвариантные компактные регулярные многообразия

$$\{x \in \mathbb{R}^n : H(x) = h, G(x) = g\}$$

коразмерности два. Для регулярности необходимо, чтобы выполнялось следующее: $g > 0$ и $h \neq \lambda_i g$, $1 \leq i \leq n$.

Таким образом, в условиях теоремы 1 система (1.4) демонстрирует “консервативное” поведение. Наоборот, система (3.6) не является консервативной, хотя и допускает два независимых первых интеграла.

§ 4. Метод Ковалевской

Подставляя в уравнения (1.4) мероморфные функции

$$x_k = \frac{c_k}{t}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

получим алгебраическую систему из n уравнений для нахождения вычетов:

$$\sum a_{ij}^k c_i c_j = -c_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Пусть $c_1, \dots, c_n$ – ненулевое решение этой системы (вообще говоря, комплексное). Полагая

$$v_k = \sum a_{ij}^k x_i x_j,$$

введем матрицу Ковалевской

$$K = \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(c) + \delta_{ij} \right\|,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Собственные значения этой матрицы $\rho_1, \dots, \rho_n$ называются *показателями Ковалевской*. Их целочисленность – необходимое условие однозначности решений системы (1.4) как функций комплексного времени.

ТЕОРЕМА 4. *Среди показателей Ковалевской системы дифференциальных уравнений (3.2) есть числа $-1, 2$ (кратности два), а также выполнено равенство*

$$\rho_1 + \dots + \rho_n = n. \quad (4.1)$$

Это утверждение – следствие общих результатов о связи показателей Ковалевской с тензорными инвариантами однородных систем дифференциальных уравнений. Показатель $\rho = -1$ отвечает тривиальному полю симметрий $v = (v_1, \dots, v_n)$ с учетом условия $v(c) \neq 0$. Наличие показателя $\rho = 2$ связано с существованием двух инвариантных дифференциальных 1-форм dH и dG с учетом их линейной независимости в точке $x = c$ (см. [2], [3]). Наконец, равенство (4.1) – следствие существования стандартной инвариантной меры в $\mathbb{R}^n$ (см. [3]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Равенство (4.1) справедливо и для системы (3.6), хотя эта система и не допускает инвариантной меры с гладкой положительной плотностью. Но, конечно, не следует думать, что равенство (4.1) для показателей Ковалевской справедливо в самом общем случае. Точно так же, если среди показателей Ковалевской есть натуральное число m , то это еще не означает наличия однородного полиномиального первого интеграла степени m . Обсуждение этого круга вопросов см. в [2], [3].

§ 5. Случай $n = 3$

Условия теоремы 1, очевидно, могут выполняться только если $n \geq 3$. Согласно теореме 1 при $n = 3$ система (1.4) принимает следующий вид:

$$\dot{x}_1 = \mu(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3, \quad \dot{x}_2 = \mu(\lambda_3 - \lambda_1)x_1x_3, \quad \dot{x}_3 = \mu(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2. \quad (5.1)$$

Здесь

$$\mu = c_{23}^1 = -c_{13}^2 = c_{12}^3$$

(мы учли соотношения (3.3)). Пусть $\mu \neq 0$; в противном случае исходная система (1.4) вырождается в тривиальную $\dot{x} = 0$. Линейной подстановкой

$$x_k \mapsto -\frac{x_k}{\mu}$$

мы добиваемся равенства $\mu = -1$ в уравнениях (5.1). Эти уравнения (с учетом $\mu = -1$) совпадают с классическими уравнениями Эйлера на коалгебре $(\mathfrak{so}(3))^*$, причем $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ играют роль обратных главных моментов инерции вращающегося волчка.

При $n = 3$ скобка (3.5)

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \rho x_3, & \{x_2, x_3\} &= \rho x_1, & \{x_3, x_1\} &= \rho x_2, \\ \rho &= c_{12}^3 = c_{23}^1 = c_{31}^2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

совпадает со скобкой Ли–Пуассона алгебры группы вращений $\mathrm{SO}(3)$. Подходящим растяжением $x \mapsto \alpha x$ можно сделать параметр ρ в (5.2) равным единице.

Эти наблюдения следует отличать от известного результата о приведении любой системы гидродинамического типа при $n = 3$ к эйлеровым уравнениям вращающегося волчка. Как показывает пример уравнений (3.6), при совпадающих собственных числах этого сделать нельзя.

В качестве примера рассмотрим плоско-параллельное движение по инерции твердого тела в идеальной жидкости (см., например, [4]). Считается, что однородная жидкость совершает безвихревое движение и покоится на бесконечности. Динамические уравнения имеют вид уравнений Эйлера–Пуанкаре на алгебре $\mathfrak{e}(2)$ (это алгебра группы движений двумерной плоскости):

$$\dot{m}_i = \{m_i, H\}, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (5.3)$$

Здесь m_1, m_2 – проекции импульса системы “тело + жидкость” на связанные с телом ортогональные оси, m_3 – кинетический момент, а H – энергия этой системы (положительно определенная квадратичная форма от m_1, m_2, m_3). Скобка Ли–Пуассона определяется соотношениями

$$\{m_1, m_2\} = 0, \quad \{m_1, m_3\} = -m_2, \quad \{m_2, m_3\} = m_1. \quad (5.4)$$

Эта скобка, конечно, отличается от скобки (5.2). Функция

$$G = m_1^2 + m_2^2$$

будет функцией Казимира.

В подходящим образом выбранной неподвижной системе отсчета кинетическая энергия приводится к диагональному виду

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1^2}{\rho_1} + \frac{m_2^2}{\rho_2} + \frac{m_3^2}{\rho_3} \right). \quad (5.5)$$

Положительные числа ρ_1 и ρ_2 – это суммы массы твердого тела и присоединенной массы жидкости вдоль “собственного” направления. В общем случае $\rho_1 \neq \rho_2$.

С учетом (5.4) и (5.5) уравнения (5.3) принимают следующий явный вид:

$$\dot{m}_1 = \frac{m_2 m_3}{\rho_3}, \quad \dot{m}_2 = -\frac{m_1 m_3}{\rho_3}, \quad \dot{m}_3 = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) m_1 m_2. \quad (5.6)$$

Поскольку сумма коэффициентов в этих уравнениях отлична от нуля, то они не совпадают с классическими уравнениями Эйлера (5.1).

Здесь можно поступить по-другому, поменяв ролями функции G и H . Положительно определенную квадратичную форму (5.5) приведем к сумме квадратов $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2$, полагая $m_j = \sqrt{\rho_j} x_j$. При этом бывшая функция Казимира G будет равна

$$\frac{1}{2} (\rho_1 x_1^2 + \rho_2 x_2^2).$$

В новых переменных уравнения (5.6) принимают вид уравнений Эйлера (5.1), где $\lambda_1 = \rho_1$, $\lambda_2 = \rho_2$, $\lambda_3 = 0$, а $\mu = (\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{-1/2}$.

§ 6. Случай $n = 4$

При $n = 4$ система дифференциальных уравнений (3.2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu_2(\lambda_3 - \lambda_4)x_3x_4 + \mu_3(\lambda_2 - \lambda_4)x_2x_4 + \mu_4(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= \mu_1(\lambda_3 - \lambda_4)x_3x_4 + \mu_3(\lambda_4 - \lambda_1)x_4x_1 + \mu_4(\lambda_3 - \lambda_1)x_3x_1, \\ \dot{x}_3 &= \mu_1(\lambda_4 - \lambda_2)x_4x_2 + \mu_2(\lambda_4 - \lambda_1)x_4x_1 + \mu_4(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2, \\ \dot{x}_4 &= \mu_1(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3 + \mu_2(\lambda_1 - \lambda_3)x_1x_3 + \mu_3(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь (для удобства восприятия) μ_1 , μ_2 , μ_3 и μ_4 обозначают коэффициенты c_{ij}^k с учетом равенств (3.3).

Система (6.1) допускает два независимых квадратичных интеграла и ее фазовый поток сохраняет обычную меру в $\mathbb{R}^4$. Поэтому согласно теореме Эйлера–Якоби эта система интегрируется в квадратурах. Кроме того, четырехмерное фазовое пространство расслаивается на двумерные инвариантные торы, на которых первые интегралы F и H постоянны. На самом же деле система (6.1) суперинтегрируемая.

ТЕОРЕМА 5. *Имеют место следующие утверждения:*

1) уравнения (6.1) допускают дополнительный линейный интеграл

$$G = \mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 - \mu_4 x_4;$$

2) уравнения (6.1) допускают представление

$$\dot{x}_j = \frac{\partial(x_j, G, F, H)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}, \quad 1 \leq j \leq 4; \quad (6.2)$$

3) скобка (3.5) является скобкой Ли–Пуассона алгебры Ли $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(3)$ с функциями Казимира G и F ;

4) решения системы (6.1) – эллиптические функции от t .

Существование дополнительного линейного интеграла предсказывается теоремой 4: при $n = 4$ показатели Ковалевской суть $-1, 2, 2$ и 1 . Линейный интеграл G найден С. М. Вишиком [6; добавление 1].

Представление уравнений (6.1) с помощью якобианов (6.2) проверяется непосредственно. Представление суперинтегрируемых дифференциальных уравнений в виде (6.2) изучалось Ш.-Ж. Валле-Пуссеном (см. [13]). Локально в окрестности неособой точки к такому виду приводится любая система дифференциальных уравнений (в подходящих координатах), что является простым следствием теоремы о выпрямлении траекторий. В нашем случае представление Валле-Пуссена имеет место во всем фазовом пространстве.

Дифференциальные уравнения вида (6.2) в трехмерном пространстве еще раньше рассматривал В. Вольтерра в связи с исследованием динамики полюсов Земли [14]. Системы на многомерных торах с “полным” набором многозначных интегралов рассматривались в работе [15]. В физической литературе уравнения вида (6.2) обычно связываются с механикой Намбу [16].

Для уравнений (6.1) скобка (3.5) определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \mu_4 x_3 + \mu_3 x_4, & \{x_1, x_3\} &= -\mu_4 x_2 + \mu_2 x_4, \\ \{x_1, x_4\} &= -\mu_3 x_2 - \mu_2 x_3, & \{x_2, x_3\} &= \mu_4 x_1 + \mu_1 x_4, \\ \{x_2, x_4\} &= \mu_3 x_1 - \mu_1 x_3, & \{x_3, x_4\} &= \mu_2 x_1 + \mu_1 x_2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Эта скобка вырождена: ранг кососимметрической матрицы $\|\{x_i, x_j\}\|$ падает на два. Причина кроется в наличии двух функций Казимира G и F .

Скобка (6.3) удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\{x_i, \{x_j, x_k\}\} + \{x_j, \{x_k, x_i\}\} + \{x_k, \{x_i, x_j\}\} = 0$$

для всех i, j, k . Следовательно, она будет скобкой Ли–Пуассона некоторой четырехмерной алгебры Ли. Чтобы выяснить структуру этой алгебры, перейдем к новым координатам m_1, m_2, m_3, m_4 с помощью линейного преобразования

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\mu_4 x_1 + \mu_1 x_4}{ac}, & m_2 &= \frac{\mu_2(\mu_3 x_3 + \mu_1 x_1 - \mu_4 x_4)}{bc^2} + \frac{b}{c^2} x_2, \\ m_3 &= \frac{\mu_3(\mu_4 x_4 - \mu_1 x_1)}{abc} + \frac{a}{bc} x_3, & m_4 &= G, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$a^2 = \mu_1^2 + \mu_4^2, \quad b^2 = \mu_1^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2, \quad c^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2.$$

Можно проверить, что в новых координатах

$$\begin{aligned}\{m_1, m_2\} &= m_3, & \{m_2, m_3\} &= m_1, & \{m_3, m_1\} &= m_2, \\ \{m_i, m_4\} &= 0, & i &= 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Таким образом, наша алгебра Ли раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}$.

Формулы (6.4) корректно определены, если $a^2 = \mu_1^2 + \mu_4^2 \neq 0$ (тогда, очевидно, $b \neq 0$ и $c \neq 0$). Легко проверить, что в этом случае определитель линейного преобразования (6.4) также отличен от нуля. Если $a = 0$, то формулы (6.4) следует модифицировать, поменяв местами x_1, x_4 (μ_1, μ_4) и x_2, x_3 (μ_2, μ_3). Если снова $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 0$, то все коэффициенты μ будут равны нулю и мы получим случай, тривиальный во всех отношениях.

Нам осталось показать, что решения системы (6.1) выражаются через эллиптические функции времени. Для этого запишем уравнения (6.1) в новых переменных m_j , $1 \leq j \leq 4$. Они снова будут иметь гамильтонов вид

$$\dot{m}_j = \{m_j, H\}, \quad (6.5)$$

причем гамильтониан H — это функция $\sum \lambda_i x_i^2/2$, представленная в переменных m_1, m_2, m_3, m_4 . Функциями Казимира служат

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \quad m_4.$$

Представим квадратичную форму H в виде суммы

$$T + m_4(a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3) + \frac{a_4}{2} m_4^2, \quad (6.6)$$

где T — квадратичная форма от m_1, m_2, m_3 , а a_j , $1 \leq j \leq 4$, — некоторые константы. Снабдим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3 = \{m\}$ стандартной евклидовой структурой; это позволит нам, в частности, определить векторное умножение “ $\times$ ”. Три первых уравнения системы (6.5) представим в векторном виде

$$\dot{m} = \omega \times m, \quad \omega = \frac{\partial H}{\partial m}. \quad (6.7)$$

Так как $m_4 = \text{const}$, то можно положить

$$H = \frac{1}{2}(I^{-1}m, m) + (\lambda, m) + \text{const}.$$

Согласно (6.6) λ — постоянный вектор с компонентами $m_4 a_1, m_4 a_2, m_4 a_3$. Следовательно,

$$\omega = I^{-1}m + \lambda.$$

Подставляя $m = I\omega + \Lambda$, $\Lambda = -I\lambda = \text{const}$ в (6.7), получаем дифференциальное уравнение в $\mathbb{R}^3 = \{\omega\}$:

$$I\dot{\omega} = \omega \times (I\omega + \Lambda). \quad (6.8)$$

Уравнение (6.8) описывает вращение твердого тела вокруг неподвижной точки с постоянным “гиростатическим моментом” Λ . Эта система, называемая гиро-статом, впервые рассмотрена В. Вольтерра в работе [14]. Там же показано, что

уравнения (6.8) интегрируются в эллиптических функциях времени. Следовательно, и решения исходной системы (6.1) выражаются через эллиптические функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В динамике твердого тела скобки Ли–Пуассона обычно вводятся с помощью равенств $\{m_1, m_2\} = -m_3, \dots$. Поэтому первое слагаемое в правой части (6.8) принимает вид $(I\omega) \times \omega$. Однако это обстоятельство не имеет существенного значения, поскольку подстановка $m_j \mapsto -m_j$ переводит нашу скобку Ли–Пуассона на алгебре $\mathfrak{so}(3)$ в стандартную.

§ 7. Случай $n = 5$

Скобка (3.5) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \mu_1 x_3 + \mu_2 x_4 + \mu_3 x_5, & \{x_1, x_5\} &= -\mu_1 x_2 + \mu_4 x_4 + \mu_5 x_5, \\ \{x_1, x_4\} &= -\mu_2 x_2 - \mu_4 x_3 + \mu_6 x_5, & \{x_1, x_5\} &= -\mu_3 x_2 - \mu_5 x_3 - \mu_6 x_4, \\ \{x_2, x_3\} &= \mu_1 x_1 + \mu_7 x_4 + \mu_8 x_5, & \{x_2, x_4\} &= \mu_2 x_1 - \mu_7 x_3 + \mu_9 x_5, \\ \{x_2, x_5\} &= \mu_3 x_1 - \mu_8 x_3 - \mu_9 x_4, & \{x_3, x_4\} &= \mu_4 x_1 + \mu_7 x_2 + \mu_{10} x_5, \\ \{x_3, x_5\} &= \mu_5 x_1 + \mu_8 x_2 - \mu_{10} x_4, & \{x_4, x_5\} &= \mu_6 x_1 + \mu_9 x_2 + \mu_{10} x_3. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь, как и ранее, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{10}$ обозначают коэффициенты c_{ij}^k с учетом равенств (3.3).

Любопытно отметить, что для любых трех различных координат x_i, x_j и x_k сумма

$$\{\{x_i, x_j\}, x_k\} + \{\{x_j, x_k\}, x_i\} + \{\{x_k, x_i\}, x_j\}$$

линейно выражается через остальные две координаты.

Скобка (7.1) всегда вырождена, т.е. ранг кососимметрической матрицы

$$\mathbf{J} = \|\{x_i, x_j\}\|, \quad i, j = 1, \dots, 5, \quad (7.2)$$

п.в. равен четырем, а функцией Казимира является F .

Более того, при определенном выборе коэффициентов μ_i есть случаи, когда ранг $\mathbf{J}$ падает еще на два.

ТЕОРЕМА 6. Если для (7.1) справедливы равенства

$$\mu_1 \mu_{10} - \mu_4 \mu_8 + \mu_5 \mu_7 = 0, \quad \mu_2 \mu_{10} - \mu_4 \mu_9 + \mu_6 \mu_7 = 0, \quad \mu_3 \mu_{10} - \mu_5 \mu_9 + \mu_6 \mu_8 = 0, \quad (7.3)$$

то

- 1) ранг $\mathbf{J}$ равен двум, причем линейные функции

$$\begin{aligned} G_1 &= \mu_{10} x_1 - \mu_6 x_3 + \mu_5 x_4 - \mu_4 x_5, \\ G_2 &= \mu_{10} x_2 - \mu_9 x_3 - \mu_8 x_4 - \mu_7 x_5 \end{aligned}$$

будут функциями Казимира;

- 2) в этом случае скобка (7.1) является скобкой Ли–Пуассона алгебры Ли $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^2$.

Для определенности разрешим соотношения (7.3) относительно μ_1, μ_2, μ_3 . Тогда прямыми вычислениями можно убедиться в наличии функций Казимира G_1 и G_2 .

Чтобы показать, что алгебра Ли (которую образует полученная скобка Ли–Пуассона) раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathbb{R}^2$, достаточно перейти к новым координатам $m_1, \dots, m_5$ с помощью линейного преобразования вида

$$\begin{aligned} m_1 &= \sum_{i=1}^5 a_i x_i, & m_2 &= \sum_{i=1}^4 b_i x_i, \\ m_3 &= \sum_{i=1}^3 c_i x_i, & m_4 &= G_1, & m_5 &= G_2, \end{aligned}$$

где коэффициенты a_i, b_i, c_i зависят от μ_i . Явные формулы здесь не приведены, так как определяются довольно громоздкими соотношениями. Тем не менее их можно определить из условия, что в новых координатах

$$\begin{aligned} \{m_1, m_2\} &= m_3, & \{m_2, m_3\} &= m_1, & \{m_3, m_1\} &= m_2, \\ \{m_i, m_4\} &= 0, & \{m_i, m_5\} &= 0, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

В общем случае (7.1) не удовлетворяет тождеству Якоби.

Таким образом, в типичном случае при $n = 5$ уравнения (3.2) не будут уравнениями Эйлера–Пуанкаре ни на какой пятимерной алгебре Ли. По всей видимости, этот вывод справедлив для всех $n \geq 5$. Однако в случае $n = 5$ справедлива следующая

ТЕОРЕМА 7. Пусть нарушается хотя бы одно из равенств (7.3). Если скобку (7.1) умножить на (приводящий) множитель

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + c_5 x_5)^{-1}, \\ c_1 &= \mu_1 \mu_6 - \mu_2 \mu_5 + \mu_3 \mu_4, & c_2 &= \mu_1 \mu_9 - \mu_2 \mu_8 + \mu_3 \mu_7, \\ c_3 &= \mu_1 \mu_{10} - \mu_4 \mu_8 + \mu_5 \mu_7, \\ c_4 &= \mu_2 \mu_{10} - \mu_4 \mu_9 + \mu_6 \mu_7, & c_5 &= \mu_3 \mu_{10} - \mu_5 \mu_9 + \mu_6 \mu_8, \end{aligned}$$

то новая скобка $\mathcal{N}\{\cdot, \cdot\}$ удовлетворяет тождеству Якоби.

При выполнении (7.3) все c_i равны нулю и приводящий множитель $\mathcal{N}$ не определен. Теорема (7) доказывается прямым вычислением.

Отметим, что если в исходных уравнениях (3.4) выполнить замену времени $dt = \mathcal{N} d\tau$, то эти уравнения можно представить в “настоящей” гамильтоновой форме

$$\frac{dx_k}{d\tau} = \mathcal{N}\{x_k, H\}, \quad k = 1, \dots, 5. \quad (7.4)$$

Отметим, что в неголономной механике системы, которые можно представить в гамильтоновой форме после замены времени, называются конформно-гамильтоновыми.

Для интегрируемости уравнений (7.4) не хватает одного интеграла, независимого от функций F и H (теорема Эйлера–Якоби). По-видимому, в общем

случае такого интеграла нет в классе однородных полиномов от $x_1, \dots, x_5$. Проведенные численные расчеты подтверждают это предположение, которое пока строго не доказано.

В заключение этого пункта рассмотрим “каскадную” систему гидродинамического типа, предложенную Е. Б. Гледзером [17] (см. также [6]). В наших обозначениях эту систему можно представить в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \mu_1(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= \mu_1(\lambda_3 - \lambda_1)x_3x_1 + \mu_2(\lambda_3 - \lambda_4)x_3x_4, \\ \dot{x}_3 &= \mu_1(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_3 + \mu_2(\lambda_4 - \lambda_2)x_2x_4 + \mu_3(\lambda_4 - \lambda_5)x_4x_5, \\ \dot{x}_4 &= \mu_2(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3 + \mu_3(\lambda_5 - \lambda_3)x_3x_5, \\ \dot{x}_5 &= \mu_3(\lambda_3 - \lambda_4)x_3x_4.\end{aligned}\tag{7.5}$$

Система обладает стандартной инвариантной мерой и двумя квадратичными интегралами

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 x_i^2, \quad H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \lambda_i x_i^2.\tag{7.6}$$

Будем рассматривать общий невырожденный случай, когда $\mu_1 \neq 0$ и $\mu_{10} \neq 0$ (в противном случае система (7.5) допускает линейный интеграл). Тогда

$$c_3 = \mu_1\mu_{10} \neq 0$$

и по теореме 7 имеется приводящий множитель $\mathcal{N} = x_3^{-1}$.

После замены $d\tau = x_3 dt$ в системе (7.5) отделяется замкнутая линейная система дифференциальных уравнений относительно $(x_1, x_2, x_4, x_5)^T = y$:

$$\begin{aligned}y' &= \mathbf{A}y, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)\mu_1 & 0 & 0 \\ (\lambda_3 - \lambda_1)\mu_1 & 0 & (\lambda_3 - \lambda_4)\mu_2 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_3)\mu_2 & 0 & (\lambda_5 - \lambda_3)\mu_3 \\ 0 & 0 & (\lambda_3 - \lambda_4)\mu_3 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{7.7}$$

Эта система допускает квадратичный интеграл

$$\Phi = \lambda_3 F - H.$$

Ввиду предположения о несовпадении чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_5$ имеем, что Φ – невырожденная квадратичная форма. Так как

$$\det(\mathbf{A}) = \mu_1^2 \mu_3^2 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_5) \neq 0,$$

то согласно [1; п. 1.1] линейная система (7.7) – гамильтонова с функцией Гамильтона Φ .

Линейная система (7.7) устойчива, поскольку все координаты $x_1, \dots, x_5$ ограничены. Следовательно, должен существовать еще один квадратичный интеграл системы (7.7), независимый от Φ (см. [1]).

Квадратичная форма

$$\begin{aligned}
 \Psi &= d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + d_3 x_3^2 + d_4 x_1 x_4 + d_5 x_2 x_5, \\
 d_1 &= \mu_7^2 (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)^2 (\lambda_1 - \lambda_5) \\
 &\quad + (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_4) (\mu_1^2 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) + \mu_{10}^2 (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)), \\
 d_2 &= \mu_7^2 (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_5) \\
 &\quad + (\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_3) (\mu_1^2 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) + \mu_{10}^2 (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)), \\
 d_3 &= \mu_7^2 (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)^2 (\lambda_3 - \lambda_5), \\
 d_4 &= 2\mu_1 \mu_7 (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_4 - \lambda_5), \\
 d_5 &= 2\mu_7 \mu_{10} (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_5 - \lambda_4)
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

будет первым интегралом исходной нелинейной системы Гледзера (7.5), а $\Psi - 2d_3 F$ – первый интеграл линейной системы (7.7).

Таким образом, квадратичная система (7.5) интегрируема по Эйлеру–Якоби, а с учетом теоремы 7 она будет интегрируемой и по теореме Лиувилля (конечно, при этом мы учитываем вырождение новой скобки Пуассона).

Отметим, что система (7.5) обладает множеством неподвижных точек, которое задается с помощью соотношений

$$x_3 = 0, \quad \mu_1(\lambda_1 - \lambda_2)x_1 x_3 + \mu_2(\lambda_4 - \lambda_2)x_2 x_4 + \mu_3(\lambda_4 - \lambda_5)x_4 x_5 = 0.$$

Поэтому открытым остается вопрос о типах интегральных многообразий и классификации траекторий на них. По-видимому, здесь ситуация схожа с неголономной системой, подробно рассмотренной в работе [18].

Явное интегрирование системы (7.5) проводится по той же схеме, что и интегрирование динамических уравнений многомерной неголономной задачи Суслова (см. [19]), которая также дает нам содержательный пример дифференциальных уравнений с квадратичными правыми частями. Еще один пример квадратичной системы с тремя квадратичными интегралами рассмотрен в работе [20].

§ 8. Случай $n = 6$

В этом случае ранг скобки (3.5) равен четырем. При этом F по-прежнему определяет функцию Казимира. Однако еще одной функции Казимира найти не удастся, поскольку она вообще не существует (даже локально).

Чтобы это доказать, рассмотрим линейное отображение

$$T_x \mathbb{R}^n \rightarrow T_x \mathbb{R}^n, \tag{8.1}$$

задаваемое матрицей квазискбок Ли–Пуассона

$$\mathbf{J} = \|\{x_i, x_j\}\|. \tag{8.2}$$

Пусть $\Pi_x \subset T_x \mathbb{R}^n$ – образ n -мерного касательного пространства $T_x \mathbb{R}^n$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ при отображении (8.1). Ясно, что Π_x , $x \in \mathbb{R}^n$, задает распределение

касательных к $\mathbb{R}^n$ векторов, причем $\dim \Pi = \text{rank } \mathbf{J}$. Следовательно, п.в. размерность Π_x равна максимальному значению ранга кососимметрической матрицы (8.2); это число, конечно, четно.

Пусть $\Phi: \mathbb{R}^n = \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция Казимира квазискочки Ли–Пуассона. Тогда

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \xi \right) = 0 \quad (8.3)$$

для всех $\xi \in \Pi_x$. Действительно, $\xi = \mathbf{J}\eta$ для некоторого $\eta \in T_x \mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \xi \right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \mathbf{J}\eta \right) = - \left(\mathbf{J} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \eta \right) = 0,$$

так как

$$\mathbf{J} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

в силу определения функций Казимира.

Если распределение Π интегрируемо, то согласно (8.3) каждая функция Казимира постоянна на интегральных многообразиях этого распределения. Обратно, если имеются $n - \dim \Pi$ независимых функций Казимира (с учетом функции F), то распределение Π интегрируемо: интегральные многообразия распределения Π будут совпадать с совместными поверхностями уровня функции Казимира.

Снова вернемся к анализу случая $n = 6$.

ТЕОРЕМА 8. *В общем случае (при типичных значениях констант c_{ij}^k) при $n = 6$ распределение Π неинтегрируемо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно рассмотреть частный случай, когда

$$c_{23}^1 = 1, \quad c_{45}^1 = 1, \quad c_{56}^2 = -1, \quad c_{46}^3 = -1,$$

а остальные $c_{ij}^k = 0$. Тогда скобку (3.5) можно определить с помощью кососимметричной матрицы

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 & x_5 & -x_4 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_1 & 0 & -x_6 & x_5 \\ x_2 & -x_1 & 0 & -x_6 & 0 & x_4 \\ -x_5 & 0 & x_6 & 0 & x_1 & -x_3 \\ x_4 & x_6 & 0 & -x_1 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_5 & -x_4 & x_3 & x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\text{rank } \mathbf{J} = 4$, то образ $\mathbf{J}$ определяется четырьмя векторами, в качестве которых можно взять векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (0, -x_3, x_2, -x_5, x_4, 0)^T, & \mathbf{u}_2 &= (x_3, 0, -x_1, 0, x_6, -x_5)^T, \\ \mathbf{u}_3 &= (-x_2, x_1, 0, x_6, 0, -x_4)^T, & \mathbf{u}_4 &= (x_5, 0, -x_6, 0, -x_1, x_3)^T. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Далее покажем, что размерность линейной оболочки векторов (8.4) и их коммутаторов больше размерности образа $\mathbf{J}$ (т.е. больше четырех).

Действительно, вычислим коммутатор

$$\mathbf{u}_5 = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = (x_2, -x_1, 0, x_6, 0, -x_4)^T.$$

Несложно проверить, что ранг матрицы, по столбцам которой стоят координаты векторов $\mathbf{u}_i$, $i = 1, \dots, 5$, равен пяти.

Таким образом, из теоремы Фробениуса следует, что векторы (8.4) (а следовательно, и образ $\mathbf{J}$) задают неинтегрируемое распределение.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что в рассмотренном примере ядро $\mathbf{J}$ задает интегрируемое распределение:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_2 = (x_6, -x_4, x_5, x_2, -x_3, -x_1)^T, \quad [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = 0.$$

Из теоремы 8 вытекают важные следствия.

1. При $n = 6$ в общем случае нет функции Казимира, независимой от функции F .
2. Квазискобка Ли–Пуассона (3.5) в общем случае не допускает приводящего множителя (как при $n = 5$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть уравнения (3.2) допускают формально-аналитический первый интеграл в виде суммы

$$\sum \Phi_p(x),$$

где $p \in \mathbb{N}$ – степень однородного полинома Φ_p , независимого от квадратичных форм F и H . Тогда, очевидно, одна из однородных форм Φ_p будет новым первым интегралом системы (3.2). Более содержательной и трудной является задача о существовании непостоянного аналитического первого интеграла ограничения системы (3.2) на интегральные многообразия

$$\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = f, H(x) = h\}, \quad f, h = \text{const} > 0.$$

Согласно теореме Эйлера–Якоби для точного интегрирования системы дифференциальных уравнений (3.2) при $n = 6$ недостает двух интегралов. Можно указать примеры, когда система (3.2) при $n = 6$ допускает всего один дополнительный интеграл (и поэтому не может быть отнесена к числу интегрируемых). Наверное, самый простой пример – это уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебре $\mathfrak{e}(3)$ – алгебре Ли группы движений трехмерного евклидова пространства, описывающие движение по инерции твердого тела в идеальной жидкости (с учетом эффекта присоединенных масс). Эти уравнения, конечно, имеют вид (3.2), причем c_{ij}^k имеют смысл структурных постоянных алгебры $\mathfrak{e}(3)$. Уравнения допускают интеграл энергии H (в виде положительно определенной квадратичной формы) и еще два квадратичных интеграла – функции Казимира скобки Ли–Пуассона на $\mathfrak{e}(3)$. Обе функции Казимира не являются положительно определенными квадратичными формами (одна из них нейтральная форма). Однако мы можем составить из них две невырожденные квадратичные формы, одна из которых (энергия H) положительно определена, и применить теорему 1. Параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ будут выражаться через присоединенные массы и присоединенные моменты инерции твердого тела. Как показано в [21],

при типичных значениях присоединенных масс и моментов инерции уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебре $e(3)$ не допускают непостоянного аналитического первого интеграла на трехмерных регулярных интегральных многообразиях этой системы. Поэтому при $n = 6$ общую систему дифференциальных уравнений (3.2) следует считать неинтегрируемой.

§ 9. Случай, когда функция Казимира не является положительно определенной

Рассмотрим более общий случай, когда система дифференциальных уравнений (1.4) снова допускает два первых интеграла в виде квадратичных форм, одна из которых невырождена. Эту форму можно привести к диагональному виду

$$F = \frac{x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2}{2}. \quad (9.1)$$

Если $0 < p < n$, то вторую квадратичную форму, вообще говоря, нельзя привести к диагональному виду одновременно с первой (обсуждение этого круга вопросов см., например, в [22]). Однако мы будем предполагать, что в тех же координатах другой первый интеграл имеет вид

$$H = \frac{\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2}{2}. \quad (9.2)$$

ТЕОРЕМА 9. Если $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i < j \leq p$ и $p < i < j$, а также $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ при $i \leq p < j$, то линейной заменой переменных система дифференциальных уравнений (1.4) приводится к следующему виду:

$$\dot{x}_k = \sum_{i < j \leq p} c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) x_i x_j + \sum_{i \leq p < j} c_{ij}^k (\lambda_i + \lambda_j) x_i x_j + \sum_{p < i < j} c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) x_i x_j, \quad (9.3)$$

если $k \leq p$,

$$\dot{x}_k = - \sum_{i < j \leq p} c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) x_i x_j + \sum_{i \leq p < j} c_{ij}^k (\lambda_i + \lambda_j) x_i x_j - \sum_{p < i < j} c_{ij}^k (\lambda_i - \lambda_j) x_i x_j, \quad (9.4)$$

если $k > p$. Коэффициенты c_{ij}^k удовлетворяют равенствам (3.3).

При $p = 0$ и $p = n$ теорема 9 переходит в теорему 1. Смысл теоремы 9 состоит в следующем: если линейной подстановкой нам удалось привести первые интегралы к виду (9.1) и (9.2), то при отсутствии резонансов второго порядка в тех же “канонических” координатах исходные уравнения (1.4) принимают вид (9.3), (9.4).

В частности, при выполнении условий теоремы 9 система (1.4) бездивергентная: ее фазовый поток сохраняет обычную меру в $\mathbb{R}^n$. Если совместные уровни интегралов (9.1) и (9.2) некомпактны, то почти все решения системы (9.3), (9.4) либо обладают свойством возвращаемости (устойчивы по Пуассону), либо уходят в бесконечность при возрастании и убывании времени (теорема Хопфа).

Пусть $n = 3$ и $p = 3$ (или $p = 0$). Тогда ввиду теоремы 9 система (1.4) приводится к виду (5.1). Это уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебре $so(3)$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда при $n = 3$ имеются два квадратичных первых интеграла

$$2F = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad 2H = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2. \quad (9.5)$$

Случай сигнатуры $+-$, очевидно, сводится к этому случаю заменой F на $-F$. Если

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_2 \neq -\lambda_3, \quad \lambda_3 \neq -\lambda_1, \quad (9.6)$$

то уравнения (1.4) приводятся к следующему виду:

$$\dot{x}_1 = \mu(\lambda_2 + \lambda_3)x_2x_3, \quad \dot{x}_2 = -\mu(\lambda_3 + \lambda_1)x_3x_1, \quad \dot{x}_3 = -\mu(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2. \quad (9.7)$$

Это – уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебре $\mathfrak{so}(2, 1)$ (см. [5]). Как и классические уравнения Эйлера для волчка в трехмерном евклидовом пространстве, уравнения (9.7) интегрируются в эллиптических функциях времени. Функцией Казимира снова будет квадратичная форма F .

В качестве примера рассмотрим систему типа Лотки–Вольтерра

$$\dot{y}_1 = y_1(-y_1 + y_2 + y_3), \quad \dot{y}_2 = y_2(-y_2 + y_3 + y_1), \quad \dot{y}_3 = y_3(-y_3 + y_1 + y_2), \quad (9.8)$$

которую обсуждала С.В. Ковалевская в письме к Г. Миттаг-Леффлеру [23; письмо 57]. Ковалевская показала, что эта система обладает двумя независимыми квадратичными интегралами вида

$$\sum_{i \neq j} \alpha_k y_i y_j, \quad \sum \alpha_k = 0.$$

Возьмем два таких квадратичных интеграла

$$2F = y_1y_3 + y_2y_3 - 2y_1y_2, \quad 2H = y_2y_3 - y_1y_2.$$

Линейной подстановкой

$$y_1 = x_2 + \frac{x_3}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \frac{x_3}{\sqrt{2}} + x_1, \quad y_3 = x_1 + x_2$$

эти интегралы одновременно приводятся к виду (9.5), причем

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}.$$

Поскольку выполнены условия (9.6), то в новых координатах система (9.8) принимает форму уравнений (9.7):

$$\dot{x}_1 = -\frac{\mu}{2}x_2x_3, \quad \dot{x}_2 = -\frac{\mu}{2}x_3x_1, \quad \dot{x}_3 = -\mu x_1x_2. \quad (9.9)$$

Значение константы μ для нас несущественно; важно только, что $\mu \neq 0$ (поскольку правые части исходной системы (9.8) не нули). Линейная подстановка

$$x_1 \mapsto \frac{\sqrt{2}x_1}{\mu}, \quad x_2 \mapsto \frac{\sqrt{2}x_2}{\mu}, \quad x_3 \mapsto -\frac{2x_3}{\mu}$$

приводит систему (9.9) к симметричному виду

$$\dot{x}_1 = x_2 x_3, \quad \dot{x}_2 = x_3 x_1, \quad \dot{x}_3 = x_1 x_2. \quad (9.10)$$

Этот результат отмечен в работе [24]. Однако ее авторы неправильно связывают уравнения (9.10) с волчком Эйлера. Уравнения представляют собой уравнения Эйлера–Пуанкаре на алгебре $\mathfrak{so}(2, 1)$, а не на $\mathfrak{so}(3)$.

Пусть теперь $n = 4$, а квадратичная форма (9.1) имеет сигнатуру $+++ -$ ($p = 3$). В этом случае уравнения (9.3), (9.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu_2(\lambda_3 + \lambda_4)x_3x_4 + \mu_3(\lambda_2 + \lambda_4)x_2x_4 + \mu_4(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= \mu_1(\lambda_3 + \lambda_4)x_3x_4 - \mu_3(\lambda_4 + \lambda_1)x_4x_1 + \mu_4(\lambda_3 - \lambda_1)x_3x_1, \\ \dot{x}_3 &= -\mu_1(\lambda_4 + \lambda_2)x_4x_2 - \mu_2(\lambda_4 + \lambda_1)x_4x_1 + \mu_4(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2, \\ \dot{x}_4 &= -\mu_1(\lambda_2 - \lambda_3)x_2x_3 - \mu_2(\lambda_1 - \lambda_3)x_1x_3 - \mu_3(\lambda_1 - \lambda_2)x_1x_2. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Коэффициенты $\mu_1, \dots, \mu_4$ обозначают постоянные c_{ij}^k с учетом равенств (3.3).

Система (9.11), конечно, отличается от (6.1), но она также суперинтегрируемая: кроме интегралов F и H она допускает линейный интеграл

$$\mu_1 x_1 - \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \mu_4 x_4.$$

Уравнения (9.11) представляются в гамильтоновом виде

$$\dot{x}_s = \{x_s, H\},$$

а скобка определяется следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= \mu_4 x_3 + \mu_3 x_4, & \{x_1, x_3\} &= -\mu_4 x_2 + \mu_2 x_4, \\ \{x_1, x_4\} &= \mu_3 x_2 + \mu_2 x_3, & \{x_2, x_3\} &= \mu_4 x_1 + \mu_1 x_4, \\ \{x_2, x_4\} &= -\mu_3 x_1 + \mu_1 x_3, & \{x_3, x_4\} &= -\mu_2 x_1 - \mu_1 x_2. \end{aligned}$$

Как и скобка (6.3), она удовлетворяет тождеству Якоби.

Уравнения (9.11) также допускают представление Валле-Пуссена (6.2) и их решения также будут эллиптическими функциями времени.

Аналогично рассматривается оставшийся случай, когда квадратичная форма (9.1) имеет сигнатуру $++--$ ($p = 2$).

В заключение этого пункта обсудим условия существования инвариантной меры при условии, что система (1.4) допускает два независимых квадратичных интеграла (3.1), но они не приводятся одновременно к диагональному виду с помощью вещественного линейного преобразования. Пусть одна из этих квадратичных форм (скажем, F) невырождена ($\det \mathbf{A} \neq 0$). Тогда степень характеристического многочлена $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{A})$ будет равна n . Через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ снова обозначим корни этого многочлена (в общем случае комплексные).

ТЕОРЕМА 10. *Если среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ нет равных, то фазовый поток системы (1.4) сохраняет обычную меру Лебега $\mathbb{R}^n = \{x\}$.*

Это утверждение обобщает теорему 3, а также содержит как частный случай утверждение о сохранении стандартной меры при условиях теоремы 9.

Условие бездивергентности системы (1.4) – чисто алгебраический факт, инвариантный относительно невырожденных линейных преобразований. Если $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то невырожденным линейным преобразованием (вообще говоря, комплексным) обе квадратичные формы (3.1) приводятся к диагональному виду (причем первая из них – к сумме квадратов). Тогда ввиду теоремы 1 в новых переменных система (1.4) принимает вид (3.2). Следовательно, дивергенция правой части равна нулю. Совершая обратное линейное преобразование, получаем нулевую дивергенцию системы (1.4) в исходных переменных, что и требовалось.

§ 10. Обобщенные системы Ковалевской

Рассмотрим следующую систему в n -мерном пространстве с квадратичными правыми частями:

$$\dot{x}_i = x_i \left(\sum_1^n x_s - kx_i \right), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (10.1)$$

Это – система типа Лотки–Вольтерра; k – вещественный параметр. При $n = 3$ и $k = 2$ получаем систему Ковалевской (9.8).

При $k = 2$ эта система изучалась в [5], [24]. Если $n = 4$ (и $k = 2$), то уравнения (10.1) допускают два независимых квадратичных первых интеграла

$$F_1 = (x_1 - x_3)(x_2 - x_4), \quad F_2 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3),$$

а третий может быть представлен в форме

$$F_3 = (x_1 - x_2)^2 \frac{x_3 x_4}{x_1 x_2}.$$

Отметим, что в [5] приведены три квадратичных интеграла, но, как правильно отмечено в [24], они оказываются зависимыми между собой.

Плотность инвариантной меры в этом случае также известна и имеет вид $(x_1 x_2 x_3 x_4)^{-1/2}$.

Скобка Пуассона для рассматриваемого случая может быть представлена в форме

$$\{x_i, x_j\} = x_i x_j (x_i - x_j), \quad i, j = 1, \dots, 4.$$

Причем ранг ее равен двум и функции Казимира представляются в виде

$$G_1 = \frac{x_2(x_1 - x_4)}{x_4(x_1 - x_2)}, \quad G_2 = \frac{x_2(x_1 - x_3)}{x_3(x_1 - x_2)},$$

а гамильтониан равен

$$E = \ln \left(\frac{x_1}{x_3(x_1 - x_4)(x_1 - x_2)} \right).$$

Несложно убедиться, что функции G_1 , G_2 и E являются зависимыми с интегралами F_1 , F_2 , F_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Отметим работу [25], в которой найдена скобка Ли–Пуассона для системы Лотки–Вольтерра при $n = 3$.

Для рассмотренного случая нельзя скомбинировать два квадратичных первых интеграла, удовлетворяющих условиям теоремы 9, поскольку дивергенция правой части (10.1) отлична от нуля. В связи с этим остается открытым вопрос об аналитической природе решений системы. Как показано в [24], система (10.1) при $k = 2$ остается суперинтегрируемой и для значений $n > 5$, но только “полный” набор независимых интегралов составляют рациональные функции.

Относительно обобщенной системы Ковалевской (10.1) можно высказать два утверждения:

- поток системы (10.1) допускает инвариантную меру с гладкой положительной плотностью тогда и только тогда, когда $k = (n + 1)/2$;
- если $k = n - 1$, то система (10.1) допускает полиномиальные интегралы степени $n - 1$

$$\Phi = \sum_{s=1}^n a_s x_1 \cdots \widehat{x}_s \cdots x_n, \quad \sum_{s=1}^n a_s = 0. \quad (10.2)$$

Символ “ $\wedge$ ” над переменной означает ее пропуск.

Эти два свойства выполняются одновременно только при $n = 3$. Первое утверждение – следствие равенства нулю дивергенции правой части (10.1) только при $k = (n + 1)/2$ и общих результатов из [26]. При $k = 2$ и $n \geq 4$ плотности сингулярных мер указаны в статье [24].

Наличие полиномиальных интегралов вида (10.2) (как и в системе Ковалевской) проверяется простым вычислением. Очевидно, что можно указать $n - 1$ независимых первых интегралов вида (10.2). Следовательно, при $k = n - 1$ система дифференциальных уравнений (10.1) будет суперинтегрируемой.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В качестве интересного курьеза отметим недавние работы [27], [28]. Так, в [28] авторы получают снова систему Ковалевской, но указывают два интеграла четвертой степени. В работе [27] было отмечено, что они сводятся к квадратичным, но не получено представление на алгебре $\mathfrak{so}(2, 1)$, а указано лишь вложение в $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

§ 11. Задача гамильтонизации в неголономной механике

Рассмотренные в работе системы иллюстрируют задачу гамильтонизации, которая активно обсуждается в неголономной механике.

Как известно, общие уравнения движения в неголономной механике могут быть представлены в кососимметричной форме (см. [11]). Причем в отличие от рассмотренных примеров возникшая квазискоскобка Пуассона уже не является линейной. Более того, тождество Якоби для нее выполняется только в случае, когда связи становятся голономными. В этом смысле такая кососимметричная запись оказывается бесполезной для гамильтонизации вообще.

Для реальных задач, как правило, имеются группы симметрий, после редукции по которым получается приведенная система. Полученная система уже может быть представлена в конформно-гамильтоновой форме.

Для гамильтонизации неголономных систем, сводящихся к изучению систем с двумя степенями свободы, Чаплыгиным (см. [29]) была разработана теория приводящего множителя. Дальнейшее существенное обобщение этой теории содержится в работах [30], [31].

С помощью метода приводящего множителя было найдено конформно-гамильтоново представление для шара Чаплыгина, системы Веселовой и ряда других систем. Отметим, что в теории Чаплыгина приводящий множитель связан с плотностью инвариантной меры, что не является справедливым для рассмотренной задачи (см. теорему 7).

В заключение приведем еще пример квадратичной системы, не удовлетворяющей предположениям теоремы 1, но часто возникающей в различных физических приложениях (см., например, [32; § 3, гл. 3]). Эту систему можно еще рассматривать как обобщение уравнения Эйлера

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \mathbf{A}\mathbf{M}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{B}\mathbf{M}, \quad (11.1)$$

где $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$ и “ $\times$ ” – векторное произведение.

В неголономной механике система (11.1) возникает в недавно рассмотренной задаче о движении по инерции платформы с омниколесами на сфере [33]. При этом в этом случае $\boldsymbol{\gamma}$ представляет собой орт неподвижной системы координат, а $\mathbf{M}$ – некоторый угловой момент.

Система (11.1) обладает инвариантной мерой с постоянной плотностью и тремя квадратичными интегралами

$$F_1 = (\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}), \quad F_2 = (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad F_3 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}),$$

причем значение последнего можно считать фиксированным: $F_3 = 1$.

В [34] для (11.1) были вычислены показатели Ковалевской:

$$\begin{aligned} \rho_1 = -1, \quad \rho_2 = \rho_3 = 2, \quad \rho_4 = 1, \quad \rho_{5,6} = 1 \pm n, \\ n = \frac{a_{32}b_1^2 + a_{13}b_2^2 + a_{21}b_3^2}{a_{23}a_{21}a_{13}}, \quad a_{ij} = a_i - a_j. \end{aligned} \quad (11.2)$$

В той же работе при $n = 2k + 1$ и $k \in \mathbb{Z}$ был найден дополнительный интеграл, который оказался линейным по $\boldsymbol{\gamma}$ и полиномиальным степени k по $\mathbf{M}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что это не единственный пример квадратичной системы, в которой появляются полиномиальные интегралы, сколь угодно высокой степени по моментам. В работе [35] найден подобный интеграл в задаче Суслова, когда рассматривается полная пятимерная система для угловой скорости и одного из ортов неподвижной системы координат. Более подробно с задачей Суслова можно ознакомиться в недавней работе [36].

В частном случае $\mathbf{B} = k\mathbf{A}$ система (11.1) была проинтегрирована в эллиптических сигма-функциях в работе [37].

Тем не менее, несмотря на отсутствие известных препятствий для гамильтонизации [38], она до сих пор не выполнена.

Авторы дружески благодарят А. В. Борисова за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] В. В. Козлов, “Линейные системы с квадратичным интегралом”, *ПММ*, **56:6** (1992), 900–906; англ. пер.: V. V. Kozlov, *J. Appl. Math. Mech.*, **56:6** (1992), 803–809.
- [2] Н. Yoshida, “Necessary condition for the existence of algebraic first integrals”, I. Kowalevski’s exponents, *Celestial Mech.*, **31:4** (1983), 363–379; II. Condition for algebraic integrability, 381–399.
- [3] В. В. Козлов, “Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и асимптотический метод Ковалевской–Ляпунова”, *Матем. заметки*, **51:2** (1992), 46–52; англ. пер.: V. V. Kozlov, “Tensor invariants of quasihomogeneous systems of differential equations, and the Kovalevskaya–Lyapunov asymptotic method”, *Math. Notes*, **51:2** (1992), 138–142.
- [4] В. В. Козлов, *Общая теория вихрей*, 2-е изд., НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2013, 324 с.
- [5] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Современные методы теории интегрируемых систем*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2003, 294 с.
- [6] Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский, А. М. Обухов, *Системы гидродинамического типа и их применение*, Наука, М., 1981, 367 с.
- [7] Л. А. Тахтаджян, “Простой пример модулярных форм как τ -функций интегрируемых уравнений”, *ТМФ*, **93:2** (1992), 330–341; англ. пер.: L. A. Takhtajan, “A simple example of modular forms as tau-functions for integrable equations”, *Theoret. and Math. Phys.*, **93:2** (1992), 1308–1317.
- [8] С. В. Манаков, “Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела”, *Функц. анализ и его прил.*, **10:4** (1976), 93–94; англ. пер.: S. V. Manakov, “Note on the integration of Euler’s equations of the dynamics of an n -dimensional rigid body”, *Funct. Anal. Appl.*, **10:4** (1976), 328–329.
- [9] А. М. Переломов, “Несколько замечаний об интегрируемости уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости”, *Функц. анализ и его прил.*, **15:2** (1981), 83–85; англ. пер.: A. M. Perelomov, “Some remarks on the integrability of the equations of motion of a rigid body in an ideal fluid”, *Funct. Anal. Appl.*, **15:2** (1981), 144–146.
- [10] В. Вольтерра, “Об одном классе уравнений динамики”, *Система Клебша. Разделение переменных, явное интегрирование*, ред. А. В. Борисов, А. В. Цыганов, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2009, 166–192; пер. с итал.: V. Volterra, “Sopra una classe di equazioni dinamiche”, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, **33** (1897–98), 451–475.
- [11] A. J. Van Der Schaft, B. M. Maschke, “On the Hamiltonian formulation of nonholonomic mechanical systems”, *Rep. Math. Phys.*, **34:2** (1994), 225–233.
- [12] А. М. Обухов, “Об интегральных характеристиках в системах гидродинамического типа”, *Докл. АН СССР*, **184:2** (1969), 309–312; англ. пер.: A. M. Obukhov, “Integral invariants in hydrodynamic systems”, *Soviet Phys. Dokl.*, **14** (1969), 32–35.
- [13] Ш.-Ж. де ла Валле-Пуссен, *Курс анализа бесконечно малых*, т. 2, ГТТИ, Л.–М., 1933, 469 с.; пер. с фр.: Ch. J. de la Vallée-Poussin, *Cours d’analyse infinitésimale*, v. II, Seconde édition considérablement remaniée, Uyspruyt, Louvain; Gauthier-Villars, Paris, 1912, ix+464 pp.
- [14] V. Volterra, “Sur la théorie des variations des latitudes”, *Acta Math.*, **22:1** (1899), 201–357.

- [15] В. В. Козлов, “Динамические системы на торе с многозначными интегралами”, *Динамические системы и оптимизация*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **256**, Наука, М., 2007, 201–218; англ. пер.: V. V. Kozlov, “Dynamical systems with multivalued integrals on a torus”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **256** (2007), 188–205.
- [16] Y. Nambu, “Generalized Hamiltonian dynamics”, *Phys. Rev. D* (3), **7**:8 (1973), 2405–2412.
- [17] Е. Б. Гледзер, “Система гидродинамического типа, допускающая два квадратичных интеграла движения”, *Докл. АН СССР*, **209**:5 (1973), 1046–1048; англ. пер.: E. B. Gledzer, “System of hydrodynamic type admitting two quadratic integrals of motion”, *Soviet Phys. Dokl.*, **18** (1973), 216–217.
- [18] I. A. Bizyaev, A. V. Bolsinov, A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Topology and bifurcations in nonholonomic mechanics”, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **25**:10 (2015), 1530028, 21 с.
- [19] Yu. N. Fedorov, V. V. Kozlov, “Various aspects of n -dimensional rigid body dynamics”, *Dynamical systems in classical mechanics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **168**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 141–171.
- [20] M. Petrera, A. Pfadler, Yu. B. Suris, “On integrability of Hirota–Kimura type discretizations”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **16**:3-4 (2011), 245–289.
- [21] В. В. Козлов, Д. А. Онищенко, “Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа”, *Докл. АН СССР*, **266**:6 (1982), 1298–1300; англ. пер.: V. V. Kozlov, D. A. Onishchenko, “Nonintegrability of Kirchhoff’s equations”, *Soviet Math. Dokl.*, **26** (1982), 495–498.
- [22] М. Берже, *Геометрия*, т. 2, Части 4, 5, Мир, М., 1984, 368 с.; пер. с фр.: M. Berger, *Géométrie*, v. 4, 5, CEDIC, Paris; Nathan Information, Paris, 1977, 218 pp., 189 pp.
- [23] *Переписка С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера*, Научное наследство, **7**, ред. А. П. Юшкевич, Наука, М., 1984, 312 с.
- [24] M. Petrera, Yu. B. Suris, “S. V. Kovalevskaya system, its generalization and discretization”, *Front. Math. China*, **8**:5 (2013), 1047–1065.
- [25] C. Lăzureanu, T. Bînzar, “Symplectic realizations and symmetries of a Lotka–Volterra type system”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **18**:3 (2013), 203–213.
- [26] В. В. Козлов, “Об инвариантных мерах уравнений Эйлера–Пуанкаре на алгебрах Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:1 (1988), 69–70; англ. пер.: V. V. Kozlov, “Invariant measures of Euler–Poincaré equations on Lie algebras”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:1 (1988), 58–59.
- [27] R. M. Tudoran, A. Gîrban, “On a Hamiltonian version of a three-dimensional Lotka–Volterra system”, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **13**:5 (2012), 2304–2312.
- [28] J. Llibre, C. Valls, “Polynomial, rational and analytic first integrals for a family of 3-dimensional Lotka–Volterra systems”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **62**:5 (2011), 761–777.
- [29] С. А. Чаплыгинъ, “Къ теоріи движенія неголономныхъ системъ. Теорема о приводящемъ множительъ”, *Матем. сб.*, **28**:2 (1912), 303–314; *Собрание сочинений*, т. 1, Гостехиздат, М.–Л., 1948, 15–25; S. A. Chaplygin, “On the theory of motion of nonholonomic systems. The reducing-multiplier theorem”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **13**:4 (2008), 369–376.
- [30] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **13**:5 (2008), 443–490.
- [31] А. В. Болсинов, А. В. Борисов, И. С. Мамаев, “Геометризация теоремы Чаплыгина о приводящем множителе”, *Нелинейная динам.*, **9**:4 (2013), 627–640.
- [32] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», М.–Ижевск, 2001, 384 с.
- [33] A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, “Dynamics and control of an omniwheel vehicle”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **20**:2 (2015), 153–172.

- [34] А. В. Борисов, А. В. Цыгвинцев, “Метод Ковалевской в динамике твердого тела”, *ПММ*, **61**:1 (1997), 30–36; англ. пер.: A. V. Borisov, A. V. Tsygvintsev, “Kovalevskaya’s method in the dynamics of a rigid body”, *J. Appl. Math. Mech.*, **61**:1 (1997), 27–32.
- [35] А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев, “Гамильтоновость и интегрируемость задачи Суслова”, *Нелинейная динам.*, **6**:1 (2010), 127–142; A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev, “Hamiltonicity and integrability of the Suslov problem”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **16**:1-2 (2011), 104–116.
- [36] O. E. Fernandez, A. M. Bloch, D. V. Zenkov, “The geometry and integrability of the Suslov problem”, *J. Math. Phys.*, **55**:11 (2014), 112704, 14 pp.
- [37] Yu. N. Fedorov, A. J. Maciejewski, M. Przybylska, “The generalized Euler–Poinsot rigid body equations: explicit elliptic solutions”, *J. Phys. A*, **46**:41 (2013), 415201, 26 pp.
- [38] A. V. Bolsinov, A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Hamiltonization of non-holonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **16**:5 (2011), 443–464.

Иван Алексеевич Бизяев
(Ivan A. Bizyaev)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: bizaev_90@mail.ru

Поступила в редакцию
30.06.2015

Валерий Васильевич Козлов
(Valery V. Kozlov)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: kozlov@pran.ru