Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, Аналог теоремы Вагнера о разложениях алгебры матриц, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 11, 13–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm857>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:51:07

УДК 512.55

Д. Н. Иванов

Аналог теоремы Вагнера о разложениях алгебры матриц

Знаменитая теорема Вагнера утверждает, что конечная аффинная плоскость, обладающая 2-транзитивной на прямых группой коллинеаций, является плоскостью трансляций. Понятие ортогонального разложения (ОР) классически полупростой ассоциативной алгебры, введенное автором, позволяет провести аналогию между конечными аффинными плоскостями порядка n и ОР алгебры матриц $M_n(\mathbb{C})$ в сумму подалгебр, сопряженных диагональной. Эти ОР называются WP-разложениями и эквивалентны известному понятию ОР простых алгебр Ли типа A_{n-1} в сумму картановских подалгебр. В статье приводится подробное и улучшенное доказательство аналога теоремы Вагнера для WP-разложений алгебры матриц нечетного неквадратного порядка, схема которого была ранее опубликована в краткой заметке в журнале “Успехи математических наук” в 1994 г. Кроме того, в рамках теории ОР ассоциативных алгебр на основе метода идемпотентных базисов получено элементарное доказательство известной теоремы Кострикина–Тьепа о неприводимых ОР алгебры Ли типа A_{n-1} в случае примарного n .

Библиография: 18 названий.

§ 1. Введение

Знаменитая теорема Вагнера [1], [2] утверждает, что конечная аффинная плоскость, обладающая 2-транзитивной на прямых группой коллинеаций, является плоскостью трансляций. Понятие ортогонального разложения (ОР) классически полупростой ассоциативной алгебры, введенное автором в [3], позволяет провести аналогию между конечными аффинными плоскостями порядка n и ОР алгебры матриц $M_n(\mathbb{C})$ в сумму подалгебр, сопряженных диагональной. Эти ОР называются WP-разложениями и эквивалентны известному понятию ОР простых алгебр Ли типа A_{n-1} в сумму картановских подалгебр [4]. В статье приводится подробное и улучшенное доказательство аналога теоремы Вагнера для WP-разложений алгебры матриц нечетного неквадратного порядка, схема которого была ранее опубликована в [5]. Кроме того, в рамках теории ОР ассоциативных алгебр на основе метода идемпотентных базисов получено элементарное доказательство известной теоремы Кострикина–Тьепа о неприводимых ОР алгебры Ли типа A_{n-1} в случае примарного n .

Напомним основные определения. Пусть $\mathbf{A}$ – ассоциативная конечномерная над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебра, через Tg_A обозначим след правого регулярно-го представления $\mathbf{A}$. Тогда $\text{Tg}_A xy$ является симметричной инвариантной формой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00219).

на $\mathbf{A}$, которую мы будем называть *формой следа*. Известно, что алгебра $\mathbf{A}$ полупроста тогда и только тогда, когда форма следа невырождена на $\mathbf{A}$. Далее термин “алгебра”, если не оговорено противное, будет обозначать ассоциативную конечномерную над $\mathbb{C}$ полупростую алгебру. Таким образом, по теореме Веддербарна алгебра $\mathbf{A}$ изоморфна конечной прямой сумме матричных алгебр $M_n(\mathbb{C}) = M_n$. Такие алгебры называют также *классически полупростыми*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство неединичных собственных подалгебр $\mathcal{D} = \{\mathbf{B}_i, i = 1, \dots, r\}$ образует *ортогональное разложение* (ОР) алгебры $\mathbf{A}$, если

- (1) все подалгебры $\mathbf{B}_i$ полупросты и содержат единичный элемент $\mathbf{1}_A$ алгебры $\mathbf{A}$;
- (2) (условие ортогональности) алгебра $\mathbf{A}$ является прямой суммой попарно ортогональных подпространств

$$\mathbf{A} = \langle \mathbf{1}_A \rangle \oplus \mathbf{B}_1^\circ \oplus \dots \oplus \mathbf{B}_r^\circ,$$

$$\text{где } \mathbf{B}_i^\circ = \{x \in \mathbf{B}_i \mid \text{Tr}_A x = 0\}.$$

Если все подалгебры ОР $\mathcal{D}$ коммутативны, то $\mathcal{D}$ называется *коммутативным*. Если все подалгебры в $\mathcal{D}$ изоморфны алгебре $\mathbf{B}$, то $\mathcal{D}$ называется *однородным ОР типа $\mathbf{B}$* (или просто *ОР типа $\mathbf{B}$*).

Введем обозначения:

- через kM_n будем обозначать прямую сумму k экземпляров алгебры матриц M_n ;
- $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$ обозначает множество примитивных идемпотентов¹ подалгебры $\mathbf{B}_i$,

$$\text{Pr}(\mathcal{D}) = \text{Pr}(\mathbf{B}_1) \cup \dots \cup \text{Pr}(\mathbf{B}_{n+1}).$$

Однородное ОР типа nM_1 алгебры матриц M_n называется *WP-разложением* (“WP” происходит от “Winnie-the Pooh”). Изучение WP-разложений было начато А. И. Кострикиным, И. А. Кострикиным и В. А. Уфнаровским в рамках теории алгебр Ли как ортогональных разложений простых алгебр Ли типа A_{n-1} в сумму картановских подалгебр [4]. Связь между двумя понятиями устанавливается следующим образом. Рассмотрим реализацию простой алгебры Ли L типа A_{n-1} в виде $(n \times n)$ -матриц с нулевым следом. Пусть $L = H_1 \oplus \dots \oplus H_{n+1}$ – ортогональная прямая сумма картановских подалгебр. Тогда ассоциативные подалгебры $\{\mathbf{B}_i = \langle H_i, E_n \rangle_{\mathbb{C}}, i = 1, \dots, n+1\}$ образуют WP-разложение алгебры матриц M_n (E_n – единичная матрица порядка n).

Идея рассматривать WP-разложения как конфигурации идемпотентов в контексте понятия коммутативных ОР принадлежит автору. Эта идея позволила связать WP-разложения с теорией конечных аффинных плоскостей. Напомним, см. [3], что аффинная плоскость порядка n соответствует однородному ОР типа nM_1 алгебры n^2M_1 . Так что по существу разница между двумя понятиями заключается

¹Идемпотент e называется примитивным, если не существует ненулевых идемпотентов e_1, e_2 таких, что $e = e_1 + e_2$ и $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$.

только в замене простой алгебры M_n на коммутативную алгебру $n^2 M_1$ той же самой размерности. Как будет видно далее, такой подход оказался весьма продуктивным.

Соответствие между аффинными плоскостями порядка n и однородными ОР типа nM_1 алгебры $n^2 M_1$ устанавливается следующим образом: идемпотенты $\text{Pr}(n^2 M_1)$ рассматриваются как точки, а идемпотенты $\text{Pr}(\mathcal{D})$ как прямые, где $\mathcal{D}$ – ОР типа nM_1 . В этой ситуации подалгебрам из $\mathcal{D}$ соответствуют классы параллельности.

Теперь мы можем переформулировать теорему Вагнера в терминах теории ОР. Напомним, что *элементарной абелевой группой* (*p-группой*) называется группа экспоненты p , где p простое.

ТЕОРЕМА ВАГНЕРА. Пусть $\mathcal{D}$ – однородное ОР типа nM_1 алгебры $n^2 M_1$. Если $\text{Aut } \mathcal{D}$ действует транзитивно на $\text{Pr}(\mathcal{D})$, то $\text{Aut } \mathcal{D}$ содержит нормальную элементарную абелеву подгруппу порядка n^2 , регулярную на $\text{Pr}(n^2 M_1)$ и тождественную на $\mathcal{D}$ (другими словами, $\mathcal{D}$ соответствует плоскости трансляций).

Аналогом плоскостей трансляций среди WP-разложений служат так называемые J-разложения, которые конструируются из неприводимых представлений экстраспециальных групп. В рамках теории ОР ассоциативных алгебр мы можем сформулировать аналог теоремы Вагнера для WP-разложений.

ГИПОТЕЗА 1 (аналог теоремы Вагнера). Если WP-разложение $\mathcal{D}$ алгебры M_n допускает группу автоморфизмов, транзитивную на $\text{Pr}(\mathcal{D})$, то $\mathcal{D}$ сопряжено J-разложению и, в частности, $\text{Aut } \mathcal{D}$ содержит неприводимую нормальную элементарную абелеву подгруппу порядка $n^2 = p^{2m}$, p простое, действующую тождественно на $\mathcal{D}$.

Гипотеза 1 будет доказана далее для нечетных n , не являющихся квадратами.

В направлении гипотезы 1 есть важный результат, установленный А. И. Кострикиным и Фам Хыу Тьемом в [6] в рамках теории алгебр Ли. Мы переформулируем его в терминах ассоциативных алгебр:

(*) Пусть $\mathcal{D}$ – WP-разложение алгебры M_n . Если $\text{Aut } \mathcal{D}$ действует неприводимо на пространстве матриц с нулевым следом, то $\mathcal{D}$ сопряжено J-разложению.

WP-разложения, которые рассматриваются в (*), называются *неприводимыми WP-разложениями*, и утверждение (*) является решающим шагом в их классификации. Проблема переводится в рамки теории плоскостей трансляций – остается только классифицировать симплектические расслоения с группой коллинеаций, транзитивной на ненулевых векторах. Это уже не так сложно сделать, учитывая результаты Хуперта и Геринга о транзитивных линейных группах. Классификация неприводимых WP-разложений была начата в [7] и закончена в [6]. Это один из центральных результатов о WP-разложениях. Его подробное изложение и много другой информации о WP-разложениях и ортогональных разложениях простых алгебр Ли можно найти в книге [8].

Утверждение (*) значительно слабее гипотезы 1. Например, из неприводимости $\text{Aut } \mathcal{D}$ на пространстве матриц со следом нуль немедленно вытекает 2-транзитивность действия нормализатора в $\text{Aut } \mathcal{D}$ подалгебры $B_i \in \mathcal{D}$ на множестве ее

примитивных идемпотентов $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$. Тогда как транзитивность $\text{Aut } \mathcal{D}$ на $\text{Pr}(\mathcal{D})$ влечет лишь транзитивность нормализатора $\mathbf{B}_i$ на $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$.

Доказательство утверждения (*), приведенное в [6], существенно использует классификацию 2-транзитивных групп и, следовательно, классификацию конечных простых групп. В заключительном разделе статьи приводится “элементарное” доказательство (*) для примарных n , не использующее классификацию 2-транзитивных групп.

Отметим, что кроме аналога теоремы Вагнера в теории WP-разложений остается открытой известная проблема (“проблема Винни-Пуха” [4]) о существовании WP-разложений в алгебрах матриц непримарного порядка. Более того, пока неизвестны примеры WP-разложений, не сопряженных J-разложениям.

Также отметим, что WP-разложения интенсивно изучаются. Им посвящена значительная часть монографии [8], где изложение ведется в терминах алгебр Ли. Связи WP-разложений с градуировками на алгебре матриц исследуются в [9]. В [10] установлено соответствие между WP-разложениями алгебры матриц M_n и сбалансированными базисами алгебры $(n+1)M_1 \oplus M_n$.

§ 2. J-разложения и симплектические расслоения

Напомним конструкцию так называемых J-разложений алгебры матриц M_{p^n} . Определим $(p \times p)$ -матрицы D , P и $J_{a,b}$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \varepsilon & & & \\ & & \varepsilon^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varepsilon^{p-1} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{a,b} = D^a P^b,$$

где ε – примитивный корень степени p из 1. Удобно рассматривать a, b как элементы поля вычетов $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. С каждым вектором $u = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n) \in V = \mathbb{F}_p^{2n}$ свяжем матрицу

$$J_u = J_{a_1, b_1} \otimes \dots \otimes J_{a_n, b_n}.$$

Так как $D^a P^b = \varepsilon^{ab} P^b D^a$, то

$$J_u J_{u'} J_u^{-1} = \varepsilon^{\langle u | u' \rangle} J_{u'},$$

где для $u = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$ и $u' = (a'_1, \dots, a'_n; b'_1, \dots, b'_n)$ $\langle u | u' \rangle = \sum_{i=1}^n (a_i b'_i - a'_i b_i)$ определяет невырожденную кососимметрическую билинейную форму на V .

WP-разложение $\mathcal{D} = \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{p^n+1}\}$ называется *J-разложением*, если каждая подалгебра B_i содержит базис из некоторых матриц J_u . В этом случае положим $V_i = \{u \mid J_u \in \mathbf{B}_i\}$. Тогда

- (1) каждое V_i является $\mathbb{F}_p$ -подпространством размерности $n = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{F}_p} V$;
- (2) $V = \bigcup_i V_i$ и $V_i \cap V_j = 0$ для $i \neq j$;
- (3) $\langle V_i | V_j \rangle = 0$.

Условия (1) и (2) означают, что подпространства V_i образуют *расслоение* Σ в V . Добавляя условие (3), мы получаем *симплектическое расслоение* Σ .

Обратно, по указанной схеме каждому симплектическому расслоению в V соответствует J -разложение.

В статье [4] были построены так называемые *стандартные J -разложения*, для которых $V = \mathbb{F}_{p^n}^2$, V_i — одномерные $\mathbb{F}_{p^n}$ -подпространства и $\langle u | v \rangle = \text{Tr}_{\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p}(ab' - a'b)$ для $u = (a; b)$, $v = (a'; b')$, где $\text{Tr}_{\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p}$ обозначает функцию следа расширения поля $\mathbb{F}_{p^n}$ над $\mathbb{F}_p$.

Отметим, что термин “ J -разложение” и приведенная выше конструкция впервые появились в статье [11]. Там же впервые были построены J -разложения, не сопряженные стандартным. До сих пор не известно примеров WP -разложений, не сопряженных J -разложениям.

Понятие симплектического расслоения было впервые введено Кантором [12], [13]. Автор пришел к нему независимо, рассматривая WP -разложения. Кантор [12]–[14] построил множество примеров симплектических расслоений и сделал их предметом всестороннего изучения.

§3. Автоморфизмы WP -разложений

В этом параграфе мы докажем ряд технических лемм, которые затем будут использоваться при рассмотрении аналога теоремы Вагнера.

Пусть семейство подалгебр $\mathcal{D} = \{\mathbf{B}_i, i = 1, \dots, n+1\}$ образует WP -разложение алгебры $M_n(\mathbb{C}) = M_n$. Положим

$$\begin{aligned} G &= \text{Aut } \mathcal{D}; \\ N &= \{\sigma \in G \mid \mathbf{B}_i^\sigma = \mathbf{B}_i, i = 1, \dots, n+1\}; \\ N_i &= \{\sigma \in N \mid x^\sigma = x \text{ для всех } x \in \mathbf{B}_i\}; \\ T &= N_1 \cup \dots \cup N_{n+1}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Автоморфизмы из T будем называть *WP -трансляциями* разложения $\mathcal{D}$.

Если $H \subseteq \text{Aut } M_n$, $X \subseteq M_n$, то

$$\begin{aligned} \text{St}_H(X) &= \{\sigma \in H \mid x^\sigma = x \text{ для всех } x \in X\}, \\ X^H &= \{x^\sigma \mid x \in X, \sigma \in H\}. \end{aligned}$$

Как обычно, tr обозначает след матрицы или линейного оператора; $\text{Tr} = n \cdot \text{tr}$ — след матрицы в регулярном представлении; $E_n = E$ — единичная матрица; 1 также будет обозначать единичный элемент группы; $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$ — множество примитивных идемпотентов подалгебры $\mathbf{B}_i$;

$$\text{Pr}(\mathcal{D}) = \text{Pr}(\mathbf{B}_1) \cup \dots \cup \text{Pr}(\mathbf{B}_{n+1}).$$

Обозначим через χ, b, s характеры действий группы G соответственно на M_n , $\mathcal{D}$, $\text{Pr}(\mathcal{D})$; 1_G — единичный характер группы G .

$\text{Conj}(X)$ обозначает сопряжение матрицей X . Положим

$$G(J(p^n)) = \{\text{Conj}(J_u), u \in \mathbb{F}_p^{2n}\}.$$

ЛЕММА 1. *Группа G конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество примитивных идемпотентов коммутативной полупростой алгебры линейно порождает ее. Следовательно, идемпотенты из $\text{Pr}(\mathcal{D})$ линейно порождают алгебру M_n . Отсюда вытекает, что действие группы G на $\text{Pr}(\mathcal{D})$ точное и, значит, G конечна. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Справедливо соотношение $\chi = s - b + 1_G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b(\sigma) = b$, $s(\sigma) = s$. Пусть σ нормализует подалгебры $\mathbf{B}_{i_1}, \dots, \mathbf{B}_{i_b}$. В силу условия ортогональности имеем разложение в прямую сумму

$$M_n = \langle E \rangle \oplus \mathbf{B}_1^\circ \oplus \dots \oplus \mathbf{B}_{n+1}^\circ,$$

где $\mathbf{B}_i^\circ = \{X \in \mathbf{B}_i \mid \text{tr } X = 0\}$. Положим

$$V = \mathbf{B}_{i_1} + \dots + \mathbf{B}_{i_b}, \quad I = \{i_1, \dots, i_b\}.$$

Тогда

$$M_n = V \oplus W, \quad \text{где } W = \bigoplus_{j \notin I} \mathbf{B}_j^\circ.$$

Так как σ переставляет подпространства $\mathbf{B}_j^\circ$, $j \notin I$, то $\text{tr } \sigma|_W = 0$. Далее

$$V = \langle E \rangle \oplus \mathbf{B}_{i_1}^\circ \oplus \dots \oplus \mathbf{B}_{i_b}^\circ.$$

Поэтому

$$\chi(\sigma) = \text{tr } \sigma = \text{tr } \sigma|_V = \sum_{i \in I} \text{tr } \sigma|_{\mathbf{B}_i} - (b-1) \text{tr } \sigma|_{\langle E \rangle}.$$

Остается заметить, что $\sum_{i \in I} \text{tr } \sigma|_{\mathbf{B}_i} = s$ и $\text{tr } \sigma|_{\langle E \rangle} = 1$. Лемма доказана.

В следующей лемме приводятся очень полезные конструкции базисов алгебры матриц M_n , использующие примитивные идемпотенты подалгебр WP-разложения.

ЛЕММА 3. *Пусть $\mathbf{B}, \mathbf{B}' \in \mathcal{D}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}'$; $\text{Pr}(\mathbf{B}) = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\text{Pr}(\mathbf{B}') = \{f_1, \dots, f_n\}$. Тогда*

- (1) $\text{Tr } e_i f_j = 1$ для всех i, j ;
- (2) матрицы $\text{Pr}(\mathbf{B}) \cdot \text{Pr}(\mathbf{B}') = \{e_i f_j \mid i, j = 1, \dots, n\}$ образуют базис в M_n ;
- (3) матрицы $\text{Pr}(\mathbf{B}) \cdot f \cdot \text{Pr}(\mathbf{B}') = \{e_i f e_j \mid i, j = 1, \dots, n\}$ образуют базис в M_n для любого $f \in \text{Pr}(\mathbf{B}')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) В силу условия ортогональности имеем

$$\text{Tr}(e_i - e_j)(f_k - f_l) = 0$$

при $i \neq j$, $k \neq l$. Значит, $\text{Tr}(e_i - e_j)f_k = \text{Tr}(e_i - e_j)f_l$. Отсюда и из равенств $f_1 + \dots + f_n = E$, $\text{Tr}(e_i - e_j) = 0$ получаем

$$\text{Tr}(e_i - e_j)f_k = 0$$

для всех k . Значит, $\text{Tr } e_i f_k = \text{Tr } e_j f_k$. Теперь, используя равенства $e_1 + \dots + e_n = E$, $\text{Tr } f_k = n$, получаем требуемое.

(2) Пусть

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} e_i f_j = 0$$

для некоторых коэффициентов α_{ij} . Домножим это равенство справа на e_k , слева на f_l и рассмотрим значение функции следа от обеих частей полученного равенства:

$$0 = \text{Tr} \left(e_k \left(\sum_{i,j} \alpha_{ij} e_i f_j \right) f_l \right) = \text{Tr } \alpha_{kl} e_k f_l = \alpha_{kl}.$$

Отсюда следует, что $\{e_i f_j\}$ – линейно независимая система из n^2 элементов. Значит, $\{e_i f_j\}$ – базис в M_n .

(3) Заметим, что для любых примитивных идемпотентов a и b алгебры матриц M_n справедливо равенство

$$\dim_{\mathbb{C}} a M_n b = 1.$$

Отсюда вытекает, в частности, что $\forall x \in M_n \exists \alpha \in \mathbb{C}: axa = \alpha a$. Отметим, что α может быть найдено из условия $\text{Tr } axa = \text{Tr } \alpha a$, если $\text{Tr } a \neq 0$.

Используя это замечание, п. (1) и равенство $f^2 = f$ для любого $f \in \text{Pr}(\mathbf{B}')$, получаем

$$1 = \text{Tr } e_i f = \text{Tr } e_i f^2 = \text{Tr } f e_i f \Rightarrow f e_i f = \frac{1}{n} f$$

для любого $e_i \in \text{Pr}(\mathbf{B})$. Отсюда следует

$$\text{Tr } e_i f e_j f e_i = \frac{1}{n} \text{Tr } e_i f e_i = \frac{1}{n} \text{Tr } e_i^2 f = \frac{1}{n} \text{Tr } e_i f = \frac{1}{n}.$$

Из последнего равенства вытекает $e_i f e_j \neq 0$ и, значит,

$$\forall x \in M_n \exists \alpha_{ij} \in \mathbb{C}: e_i x e_j = \alpha_{ij} e_i f e_j$$

для любых $e_i, e_j \in \text{Pr}(\mathbf{B})$, $f \in \text{Pr}(\mathbf{B}')$. Отсюда следует, что для любого $x \in M_n$ мы имеем представление

$$x = (e_1 + \dots + e_n) \cdot x \cdot (e_1 + \dots + e_n) = \sum_{i,j} e_i x e_j = \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_i f e_j.$$

Это доказывает, что матрицы $\{e_i f e_j \mid i, j = 1, \dots, n+1\}$ образуют базис в M_n . Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\sigma \in N \setminus T$. Тогда σ оставляет неподвижным в каждой подалгебре из $\mathcal{D}$ ровно по одному примитивному идемпотенту.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k_i – число неподвижных идемпотентов относительно σ в $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$. Тогда возможны два случая.

Случай 1: не более чем одно число $k_i \neq 0$. Тогда по лемме 2

$$\chi(\sigma) = 1 + s(\sigma) - b(\sigma) = 1 + k_i - (n + 1) = k_i - n.$$

С другой стороны, вычисляя $\chi(\sigma)$ в базисе $\text{Pr}(\mathbf{B}_i) \cdot \text{Pr}(\mathbf{B}_j)$, $i \neq j$, получаем, что

$$\chi(\sigma) = k_i k_j = 0.$$

Значит, $k_i = n$ и, следовательно, $\sigma \in N_i \leq T$. Противоречие.

Случай 2: существуют i, j , $i \neq j$, такие, что $k_i, k_j \neq 0$. Тогда для любого $s \neq i, j$ имеем

$$k_i k_s = k_i k_j = \chi(\sigma)$$

и, следовательно, $k_s = k_j$. Аналогично получаем $k_s = k_i$. Положим $k = k_s = k_i = k_j$. По лемме 2

$$k^2 = \chi(\sigma) = 1 + k(n + 1) - (n + 1).$$

Отсюда $k = 1$ или $k = n$. Если $k = n$, то $\sigma = 1$. Остается единственная возможность $k = 1$. Лемма доказана.

Напомним, что группа действует на множестве *полурегулярно*, если каждый неединичный элемент не имеет неподвижных точек.

ЛЕММА 5. (1) Если σ оставляет неподвижными подалгебру $\mathbf{B}_i$ (т.е. $\sigma \in N_i$) и идемпотент $f \in \text{Pr}(\mathbf{B}_j)$, $i \neq j$, то $\sigma = 1$;

(2) централизатор подалгебры $\mathbf{B}_i$ в группе $\text{Aut } M_n$ абелев, и, в частности, подгруппа N_i абелева;

(3) $N_i \cap N_j = 1 = [N_i, N_j]$ при $i \neq j$;

(4) T – нормальная подгруппа в G ;

(5) если при $i \neq j$ $|N_i| > 1$, $|N_j| > 1$, то N_i и N_j – элементарные абелевы p -группы;

(6) N_i действует полурегулярно на $\text{Pr}(\mathbf{B}_j)$ для любого $j \neq i$;

(7) $|N_i| \leq n$ для всех i и $|T| \leq n^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) В силу леммы 3 $\text{Pr}(\mathbf{B}_i) \cdot f \cdot \text{Pr}(\mathbf{B}_i)$ – базис в M_n . Так как по условию σ оставляет неподвижными элементы этого базиса, то $\sigma = 1$.

(2) В базисе $\text{Pr}(\mathbf{B}_i) \cdot f \cdot \text{Pr}(\mathbf{B}_i)$ централизатор подалгебры $\mathbf{B}_i$ представляется диагональными матрицами, поэтому он абелев.

(3) В силу п. (1) $N_i \cap N_j = 1$. Пусть теперь $\sigma \in N_i$, $\tau \in N_j$, тогда, рассматривая действие $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$ на базисе $\text{Pr}(\mathbf{B}_i) \cdot \text{Pr}(\mathbf{B}_j) = \{e_k f_l \mid e_k \in \text{Pr}(\mathbf{B}_i), f_l \in \text{Pr}(\mathbf{B}_j)\}$, получаем

$$(e_k f_l)^{\sigma\tau} = e_k^\tau f_l^\sigma = (e_k f_l)^{\tau\sigma}.$$

Значит, $[N_i, N_j] = 1$.

(4) Очевидно, что N – нормальная подгруппа в G . Так как сопряженные в G автоморфизмы имеют одинаковое количество неподвижных примитивных идемпотентов в $\text{Pr}(\mathcal{D})$ (и одинаковое значение характера χ), то по лемме 4 множество $T = N_1 \cup \dots \cup N_{n+1}$ нормально в G . Покажем, что T – подгруппа. Пусть $\sigma \in N_i$,

$\tau \in N_j$. Тогда автоморфизм $\sigma\tau$ не имеет неподвижных точек как в $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$, так и в $\text{Pr}(\mathbf{B}_j)$. Поэтому в силу леммы 4 $\sigma\tau \notin N \setminus T$, т.е. $\sigma\tau \in T$.

(5) Пусть $\sigma \in N_i$, $\tau \in N_j$, $\text{ord } \sigma = n_1 > 1$, $\text{ord } \tau = n_2 > 1$. Тогда $\sigma\tau$ действует без неподвижных точек на $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$ и на $\text{Pr}(\mathbf{B}_j)$. Значит, в силу леммы 4 $\sigma\tau \in N_s$ для некоторого $s \neq i, j$. В силу п. (3) $\sigma\tau = \tau\sigma$, поэтому

$$(\sigma\tau)^{n_1} = \tau^{n_1} = 1,$$

где последнее равенство вытекает из того, что τ^{n_1} действует тождественно на $\text{Pr}(\mathbf{B}_s)$ и на $\text{Pr}(\mathbf{B}_j)$. Аналогично получаем

$$(\sigma\tau)^{n_2} = \sigma^{n_2} = 1.$$

Далее выводим, что

$$\tau^{n_1} = 1, \quad \text{ord } \tau = n_2 \Rightarrow n_2 \text{ делит } n_1$$

и, аналогично,

$$\sigma^{n_2} = 1, \quad \text{ord } \sigma = n_1 \Rightarrow n_1 \text{ делит } n_2.$$

Таким образом, n_1 и n_2 делят друг друга, т.е. $n_1 = n_2$. Отсюда следует, что порядки всех неединичных элементов в N_i и N_j равны. Так как в каждой конечной группе есть элемент простого порядка, то N_i и N_j — элементарные абелевы (в силу п. (2)) p -группы для некоторого простого p .

Пункт (6) следует из п. (1).

(7) В силу п. (6) $|N_i| \leq n$. Поэтому

$$|T| = |N_1 \cup \dots \cup N_{n+1}| \leq (n-1)(n+1) + 1 = n^2.$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группу T будем называть *группой WP-трансляций* разложения $\mathcal{D}$.

ЛЕММА 6. Пусть для некоторой подалгебры $\mathbf{B}_i \in \mathcal{D}$ множество ее примитивных идемпотентов $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$ лежит в G -орбите. Тогда если $|N| > 1$, то $|T| > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T = 1$, тогда $N_i = 1$ и N действует на $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$ точно с характером θ степени $n = |\text{Pr}(\mathbf{B}_i)|$. В силу леммы 4 $\theta(x) = 1$ для всех $x \in N \setminus \{1\}$. Отсюда следует, что характер θ можно представить в виде

$$\theta = 1_N + a\rho_N,$$

где ρ_N — регулярный характер группы N и коэффициент $a = (n-1)/|N|$ находится из рассмотрения степеней характеров. Так как $\theta - 1_N$ является обобщенным характером группы N , то a должно быть целым, ибо ρ_N содержит единичный характер 1_N с кратностью 1. Поэтому $|N|$ делит $n-1$.

С другой стороны, так как подгруппа N нормальна в G , то N действует полутранзитивно на $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$, т.е. все N -орбиты имеют одинаковую длину. Значит, $|N|$ делит n . Отсюда $|N| = 1$. Противоречие доказывает лемму.

Следующая лемма близка по духу к теореме 4.26 из работы [2] и следствию 1 из нее, принадлежащему Глисон, см. также [15; теорема 20.9.6] и [16].

ЛЕММА 7. Пусть $|N_i| = k > 1$ для всех i . Тогда $|N_i| = n$ для любого i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e \in \text{Pr}(\mathbf{B}_i)$. В силу леммы 5, п. (1) $\text{St}_T(e) = N_i$. Кроме того,

$$|T| = |\text{St}_T(e)| \cdot |e^T|.$$

Отсюда $|e^T| = |f^T| = s$ для любого $f \in \text{Pr}(\mathbf{B}_i)$. Значит, длина любой T -орбиты s делит n и, следовательно, $|T| = ks$ делит kn .

С другой стороны, по условию

$$|T| = 1 + (n+1)(k-1) = kn + k - n.$$

Отсюда $kn + k - n$ делит kn . Следовательно, $k - n = 0$ или $n - k \geq kn/2$. Но $k > 1$, значит, $k - n = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $|T| = n^2$, тогда неподвижными относительно T будут только скалярные матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{Pr} \mathbf{B}_i = \{e_{i1}, \dots, e_{in}\}$, $i = 1, \dots, n+1$. Тогда каждая матрица X однозначно записывается в виде

$$X = \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_{ij}, \quad \text{где } \alpha_{1i} + \dots + \alpha_{ni} = \text{const}$$

для всех $i = 1, \dots, n+1$. Так как T транзитивна на каждом множестве $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$, то неподвижность X относительно T влечет равенство коэффициентов $\alpha_{ij} = \alpha_{kl}$ для любых i, j, k, l . Это означает, что $X = \lambda E$. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $\mathcal{D}$ — J -разложение алгебры M_{p^n} , тогда группа $\text{Aut } \mathcal{D}$ содержит нормальную элементарную абелеву p -подгруппу

$$G(J(p^n)) = \{\text{Conj}(J_u) \mid u \in \mathbb{F}_p^{2n}\}$$

порядка $p^{2n} = \dim M_{p^n}$. При этом $G(J(p^n))$ действует тождественно на $\mathcal{D}$ (т.е. переводит в себя каждую подалгебру из $\mathcal{D}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $J_u J_v J_u^{-1} = \varepsilon^{\langle u|v \rangle} J_v$, то сопряжения матрицами J_u являются автоморфизмами J -разложения $\mathcal{D}$, при этом они оставляют инвариантными каждую подалгебру из $\mathcal{D}$, т.е. группа $G(J(p^n))$ действует тривиально на множестве подалгебр $\mathcal{D}$. Значит, $G(J(p^n))$ нормальна в $\text{Aut } \mathcal{D}$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Позже (см. следствие 1) мы докажем, что $G(J(n))$ является группой WP -трансляций любого J -разложения алгебры M_n .

ЛЕММА 10. Пусть группа WP -трансляций $T = N_1 \cup \dots \cup N_{p^n+1}$ WP -разложения $\mathcal{D} = \{B_i\}$ алгебры матриц M_{p^n} совпадает с группой $G(J(p^n))$. Тогда $\mathcal{D}$ является J -разложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N_i = \{\text{Conj}(J_u) \mid u \in V_i\}$. Так как подалгебра $\mathbf{B}_i$ совпадает со своим централизатором в алгебре M_n , то $N_i \subset \mathbf{B}_i$. Следовательно, $\mathbf{B}_i = \langle J_u \mid u \in V_i \rangle_{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{D}$ является J -разложением. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть $|T| = n^2$, тогда $n = p^m$, где p простое, и T – элементарная абелева p -группа, сопряженная в $\text{Aut } M_{p^m}$ с группой $G(J(p^m))$. При этом WP -разложение $\mathcal{D}$ сопряжено J -разложению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как N_i в силу леммы 5, п. (1) действует на примитивных идемпотентах подалгебры $\mathbf{B}_j$ полурегулярно при $i \neq j$, то $|N_i| \leq n$. Поэтому в T существуют две неединичные подгруппы N_i и N_j . В силу леммы 5, п. (5) любая подгруппа N_s является элементарной абелевой p -группой для некоторого простого p . Следовательно, группа $T = N_1 \cup \dots \cup N_{n+1}$ – элементарная абелева p -группа и $n = p^m$.

Как установлено в [17], конечные неприводимые абелевы подгруппы в $\text{Aut } M_n$ сопряжены в $\text{Aut } M_n$ тогда и только тогда, когда они изоморфны. Значит, T сопряжена в $\text{Aut } M_{p^m}$ с группой $G(J(p^m))$. Следовательно, $\mathcal{D}$ сопряжено с WP -разложением $\mathcal{D}'$, группа автоморфизмов которого содержит $G(J(p^m))$. В силу леммы 10 $\mathcal{D}'$ является J -разложением. Лемма доказана.

§ 4. Аналог теоремы Вагнера

Каждое расслоение $\Sigma = \{V_i\}$ (см. §2) $\mathbb{F}_q$ -пространства V определяет *аффинную плоскость* $\mathcal{A}(\Sigma)$ специального вида – так называемую плоскость трансляций, точками которой являются векторы пространства V , а прямыми – смежные классы подпространств V_i . При этом выполняются следующие аксиомы, определяющие аффинную плоскость:

- (1) каждая прямая содержит по крайней мере две точки;
- (2) через любые две точки проходит единственная прямая;
- (3) для любой прямой L и точки $v \notin L$ существует единственная прямая, содержащая v и не пересекающая L ;
- (4) существуют три неколлинеарные точки.

Для любого вектора $u \in V$ отображение $v \mapsto v + u$ является *коллинеацией* (т.е. сохраняет отношение инцидентности точка–прямая) плоскости $\mathcal{A}(\Sigma)$, при этом каждый класс параллельных прямых переходит в себя. Коллинеация α аффинной плоскости $\mathcal{A}$ называется *трансляцией*, если α действует тривиально на множестве классов параллельных прямых и действует “без неподвижных точек” на множестве точек плоскости $\mathcal{A}$. Хорошо известно (см. [2]), что трансляции могут быть охарактеризованы следующим условием:

- (★) если коллинеация α действует тривиально на множестве классов параллельных прямых и для каждого класса параллельности α действует на множестве его прямых либо “без неподвижных точек”, либо тождественно, то α является трансляцией.

Множество всех трансляций образует группу T , которая действует полурегулярно на множестве точек и которая нормальна в полной группе коллинеаций плоскости $\mathcal{A}$ [2]. Если T регулярна на множестве точек, то $\mathcal{A}$ называется *плоскостью трансляций*, а T при этом называется *группой трансляций* плоскости $\mathcal{A}$. Этому условию удовлетворяет плоскость $\mathcal{A}(\Sigma)$.

Каждая прямая аффинной плоскости $\mathcal{A}$ содержит одинаковое число точек, которое называется *порядком* плоскости $\mathcal{A}$. Плоскость порядка n содержит n^2 точек.

Следовательно, если $\mathcal{A}$ – плоскость трансляций порядка n , то ее группа трансляций T содержит n^2 элементов.

Нам понадобится следующая хорошо известная (см. [2]) характеристика плоскостей трансляций:

- ($\star\star$) аффинная плоскость $\mathcal{A}$ является плоскостью трансляций, если ее группа трансляций действует транзитивно на множестве прямых каждого класса параллельности.

Плоскости трансляций представляют для нас особый интерес. Знаменитая теорема Вагнера утверждает, что конечная аффинная плоскость, обладающая транзитивной на прямых группой коллинеаций, является плоскостью трансляций [1].

Напомним соответствие между аффинными плоскостями порядка n и однородными ОР типа nM_1 алгебры n^2M_1 : идемпотенты $\text{Pr}(n^2M_1)$ рассматриваются как точки, а идемпотенты $\text{Pr}(\mathcal{D})$ – как прямые, где $\mathcal{D}$ – ОР типа nM_1 . В этой ситуации подалгебрам из $\mathcal{D}$ соответствуют классы параллельности.

Теперь мы можем переформулировать теорему Вагнера в терминах теории ОР:

ТЕОРЕМА ВАГНЕРА. Пусть $\mathcal{D}$ – однородное ОР типа nM_1 алгебры n^2M_1 . Если $\text{Aut } \mathcal{D}$ действует транзитивно на $\text{Pr}(\mathcal{D})$, то $\text{Aut } \mathcal{D}$ содержит нормальную элементарную абелеву подгруппу, регулярную на $\text{Pr}(n^2M_1)$ и тождественную на $\mathcal{D}$ (другими словами, $\mathcal{D}$ соответствует плоскости трансляций).

Вернемся к WP-разложениям и обсудим более подробно их связь с аффинными плоскостями. Следуя указанному выше соответствию между аффинными плоскостями порядка n и однородными ОР типа nM_1 алгебры n^2M_1 , мы видим, что прямым на плоскости соответствуют примитивные идемпотенты подалгебр ортогонального разложения, причем классы параллельности отвечают самим подалгебрам.

Следующая лемма ввиду характеристики ($\star$) оправдывает термин “WP-трансляция”.

ЛЕММА 12. Пусть автоморфизм α является WP-трансляцией WP-разложения $\mathcal{D}$. Тогда

- (1) α действует тождественно на $\mathcal{D}$;
- (2) для любой подалгебры $\mathbf{B} \in \mathcal{D}$ α действует на $\text{Pr}(\mathbf{B})$ либо тождественно, либо “без неподвижных точек”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (1) вытекает из определений.

(2) Пусть $\alpha \in N_i$, т.е. α действует на $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$ тождественно. Тогда в силу леммы 5, п. (1) на множестве примитивных идемпотентов любой другой подалгебры из $\mathcal{D}$ α действует “без неподвижных точек”. Лемма доказана.

ЛЕММА 13. Пусть автоморфизм $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{D}$ действует тривиально на $\mathcal{D}$. Тогда α является WP-трансляцией тогда и только тогда, когда α есть сопряжение матрицей с нулевым следом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения §3. В силу леммы 2 имеем соотношение для характеров группы $G = \text{Aut } \mathcal{D}$:

$$\chi = s - b + 1_G.$$

Пусть α является сопряжением матрицей X . В силу конечности группы G (по лемме 1) автоморфизм α имеет конечный порядок. Поэтому мы можем предполагать, что матрица X также имеет конечный порядок. В этом случае $\text{tr } X^{-1} = \overline{\text{tr } X}$.

$\Leftarrow$. Пусть $\text{tr } X = 0$. Тогда

$$\chi(\alpha) = \text{tr } X \cdot \text{tr } X^{-1} = 0. \quad (1)$$

Так как α действует тождественно на $\mathcal{D}$, то $b(\alpha) = n + 1$. Следовательно, $s(\alpha) = n$. Это означает, что α имеет n неподвижных примитивных идемпотентов в $\text{Pr}(\mathcal{D})$. Если любые два из этих идемпотентов принадлежат различным подалгебрам $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j \in \mathcal{D}$, то, рассматривая базис $\text{Pr}(\mathbf{B}_i) \cdot \text{Pr}(\mathbf{B}_j)$ в M_n , мы получаем $\chi(\alpha) \neq 0$. Это противоречит формуле (1). Значит, все неподвижные идемпотенты автоморфизма α лежат в одной подалгебре и, следовательно, α является WP-трансляцией.

$\Rightarrow$. Пусть α является WP-трансляцией. Рассматривая действие α на базисе $\text{Pr}(\mathbf{B}_i) \cdot \text{Pr}(\mathbf{B}_j)$ для любых двух различных подалгебр, мы получаем $\chi(\alpha) = 0$. Теперь из формулы (1) следует

$$\text{tr } X \cdot \text{tr } X^{-1} = \text{tr } X \cdot \overline{\text{tr } X} = |\text{tr } X|^2 = 0.$$

Значит, $\text{tr } X = 0$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. (1) *Сопряжение матрицей J_u является WP-трансляцией любого J -разложения.*

(2) *Группа $G(J(n))$ является группой WP-трансляций любого J -разложения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как $\text{tr } J_u = 0$, если $u \neq 0$, то с учетом леммы 9 из леммы 13 следует, что $\text{Conj}(J_u)$ является WP-трансляцией.

(2) Пусть T — группа WP-трансляций J -разложения $\mathcal{D}$ алгебры M_n . В силу леммы 5, п. (7) $|T| \leq n^2$. Так как $|G(J(n))| = n^2$, то в силу п. (1) $G(J(n)) = T$. Следствие доказано.

Осталось определить аналог плоскостей трансляций. Так как для WP-разложений нет подходящего аналога множества точек аффинной плоскости, то мы будем опираться на характеризацию $(\star\star)$ аффинных плоскостей.

ЛЕММА 14. *Пусть T — группа WP-трансляций WP-разложения $\mathcal{D} = \{\mathbf{B}_i\}$ алгебры матриц M_n . Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (1) *для каждой подалгебры $\mathbf{B}_i$ T действует транзитивно на множестве ее примитивных идемпотентов $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$;*
- (2) *T является элементарной абелевой p -группой порядка n^2 ;*
- (3) *T сопряжено $G(J(n))$;*
- (4) *$\mathcal{D}$ сопряжено J -разложению.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть

$$|N_i| = k = \max\{|N_j|, j = 1, \dots, n+1\}.$$

Тогда

$$|T| = |N_1 \cup \dots \cup N_{n+1}| \leq (k-1)(n+1) + 1.$$

Подгруппа N_i является ядром действия группы T на множестве примитивных идемпотентов $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$. Так как T действует на $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$ транзитивно, то

$$|T : N_i| \geq n.$$

Таким образом, мы имеем неравенство

$$n \leq |T| : k \leq \frac{(k-1)(n+1)+1}{k}.$$

Отсюда получаем $k \geq n$ и, значит, $k = n$. Следовательно,

$$|T| \geq kn \geq n^2.$$

В силу леммы 5, п. (7) $|T| \leq n^2$. Значит, $|T| = n^2$. В силу леммы 11 $n = p^m$, где p простое.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) вытекает из леммы 11.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) вытекает из леммы 10.

(4) $\Rightarrow$ (1). В силу следствия 1, п. (2) группа $G(J(n))$ является группой трансляций J -разложения $\mathcal{D}$. Имеем, что $|N_i| = n$ и в силу леммы 5, п. (6) N_i действует полурегулярно на множестве $\text{Pr}(\mathbf{B}_j)$ при $j \neq i$. Значит, N_i действует на $\text{Pr}(\mathbf{B}_j)$ регулярно для любых i, j , $i \neq j$. Следовательно, T действует на каждом множестве $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$ транзитивно. Лемма доказана.

Таким образом, группа $G(J(n))$ является естественным аналогом группы трансляций. Следовательно, плоскостям трансляций отвечают J -разложения. Суммируем полученные выводы в таблице:

аффинная плоскость $\mathcal{A}$ порядка n	WP-разложение $\mathcal{D}$ алгебры M_n
количество точек в $\mathcal{A}$	размерность алгебры M_n
множество прямых в $\mathcal{A}$	$\text{Pr}(\mathcal{D})$
класс параллельности	$\text{Pr}(\mathbf{B})$ для $\mathbf{B} \in \mathcal{D}$
трансляция	WP-трансляция
плоскость трансляций	J -разложение

Установленное соответствие позволяет сформулировать аналог теоремы Вагнера для WP-разложений.

ГИПОТЕЗА 1 (аналог теоремы Вагнера). *Если WP-разложение $\mathcal{D}$ алгебры M_n допускает группу автоморфизмов, транзитивную на $\text{Pr}(\mathcal{D})$, то $\mathcal{D}$ сопряжено J -разложению и, в частности, $\text{Aut } \mathcal{D}$ содержит неприводимую нормальную элементарную абелеву подгруппу порядка $n^2 = p^{2m}$, p простое, действующую тождественно на $\mathcal{D}$.*

Следующая теорема – центральная в статье. Она является аналогом теоремы Глисона (см. следствие 1 к теореме 4.26 из [2] и теорему 20.9.6 из [15], а также [16]).

ТЕОРЕМА 1 [5]. Пусть $\mathcal{D}$ – WP-разложение и $\text{Aut } \mathcal{D}$ действует транзитивно на $\text{Pr}(\mathcal{D})$. Если $\text{Aut } \mathcal{D}$ содержит неединичный автоморфизм, действующий тождественно на $\mathcal{D}$, то $\mathcal{D}$ сопряжено J-разложению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию группа $N = \{\sigma \in \text{Aut } \mathcal{D} \mid \mathbf{B}^\sigma = \mathbf{B} \text{ для всех } \sigma \in \mathcal{D}\}$ нетривиальная. Значит, в силу леммы 6 группа трансляций T также нетривиальная.

Очевидно, что $\text{Aut } \mathcal{D}$ действует транзитивно на множестве подалгебр WP-разложения $\mathcal{D}$. Отсюда следует, что все подгруппы $N_i = \{\sigma \in N \mid x^\sigma = x \text{ для всех } x \in \mathbf{B}_i\}$ имеют одинаковый порядок k . Так как $|T| = |N_1 \cup \dots \cup N_{n+1}| > 1$, то $k > 1$. Из леммы 7 следует, что $k = n$ и, значит, $|T| = n^2$. Теперь в силу леммы 14 получаем, что $\mathcal{D}$ сопряжено J-разложению. Теорема доказана.

Следующая, вторая по важности теорема этого параграфа подтверждает гипотезу 1 для алгебр матриц M_n , когда n нечетно и не является квадратом.

ТЕОРЕМА 2 [5]. Пусть $\mathcal{D}$ – WP-разложение алгебры M_n , n – нечетный неквадрат. Если $\text{Aut } \mathcal{D}$ действует транзитивно на $\text{Pr}(\mathcal{D})$, то $\mathcal{D}$ сопряжено J-разложению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $G = \text{Aut } \mathcal{D}$. Из транзитивности G на множестве примитивных идемпотентов $\text{Pr}(\mathcal{D})$ следует, что порядок G делится на $n(n+1) = |\text{Pr}(\mathcal{D})|$. Значит, порядок группы G четен. Пусть $1 \neq \sigma \in G$ и $\sigma^2 = 1$. Если $\mathbf{B}_i^\sigma = \mathbf{B}_j$, $i \neq j$, то $\sigma = \text{Conj}(A)$ для некоторой инволютивной подходящей матрицы $A = (a_{ij})$:

$$(a_{ij}) \cdot (b_{ij}) = nE, \quad b_{ij} = a_{ji}^{-1}, \quad A^2 = E.$$

Отсюда $a_{ij} \cdot a_{ji} = \frac{1}{n}$ для любых i, j . В частности,

$$a_{ii}^2 = \frac{1}{n} \quad \text{и, значит,} \quad a_{ii} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Так как след инволютивной матрицы всегда целое число и n не является квадратом, то

$$\text{tr } A = \sum_i a_{ii} = 0.$$

Но последнее равенство невозможно ввиду нечетности n . Таким образом, мы получили $\mathbf{B}^\sigma = \mathbf{B}$ для всех $\mathbf{B} \in \mathcal{D}$. Значит, $|N| > 1$. Далее применяем теорему 1. Теорема доказана.

§ 5. Неприводимые WP-разложения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. WP-разложение $\mathcal{D}$ называется *неприводимым*, если $\text{Aut } \mathcal{D}$ действует неприводимо на линейном пространстве матриц с нулевым следом.

Пусть $\mathcal{D} = \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n+1}\}$ – WP-разложение алгебры матриц M_n , $\text{Pr}(\mathbf{B}_i) = \{e_{i1}, \dots, e_{in}\}$, $i = \overline{1, n+1}$. Положим $G = \text{Aut } \mathcal{D}$; G_i – нормализатор подалгебры $\mathbf{B}_i$ в G ; $G_{i,j} = G_i \cap G_j$; G_{is} – стабилизатор в G идемпотента e_{is} ; $G_{is,j} = G_{is} \cap G_j$. Положим $\tau = \chi - 1_G$. В силу леммы 2 имеем

$$s = \tau + b. \quad (2)$$

Неприводимость WP-разложения $\mathcal{D}$ означает неприводимость характера τ .

ЛЕММА 15. Пусть $\mathcal{D}$ – неприводимое WP -разложение алгебры M_n . Тогда для всех $s = \overline{1, n}$, $i, j = \overline{1, n+1}$, $i \neq j$:

- (1) G_i действует 2-транзитивно на $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$;
- (2) $G_{is,j}$ действует транзитивно на $\text{Pr}(\mathbf{B}_j)$;
- (3) $G_{i,j}$ действует транзитивно на множестве упорядоченных пар $\text{Pr}(\mathbf{B}_i) \times \text{Pr}(\mathbf{B}_j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неприводимость группы G на пространстве матриц с нулевым следом влечет транзитивность G на множестве примитивных идемпотентов $\text{Pr}(\mathcal{D})$. Поэтому характер подстановочного представления группы G на множестве $\text{Pr}(\mathcal{D})$ индуцируется единичным характером стабилизатора примитивного идемпотента: $(1_{G_{is}})^G = s$.

Так как для $n = 2$ WP -разложение единственно с точностью до сопряженности [4] и для него утверждения леммы 15 легко проверяются непосредственно, то далее будем считать $n > 2$.

Орбиты действия группы G_{is} на множестве подалгебр $\mathcal{D} = \{\mathbf{B}_i\}$ будем называть b -орбитами, а орбиты действия G_{is} на множестве примитивных идемпотентов $\text{Pr}(\mathcal{D})$ будем называть s -орбитами.

(1), (2) Так как $(1_{G_{is}})^G = s$, то в силу формулы (2) и формулы взаимности Фробениуса [18]

$$[s_{G_{is}}, 1_{G_{is}}] - [b_{G_{is}}, 1_{G_{is}}] = [\tau_{G_{is}}, 1_{G_{is}}] = [\tau, (1_{G_{is}})^G] = [\tau, s].$$

Так как $\tau(1) = n^2 - 1 > n + 1 = b(1)$ при $n > 2$, то в силу неприводимости τ имеем $[\tau, b] = 0$. Значит, $[\tau, s] = [\tau, \tau] = 1$. Отсюда получаем $[s_{G_{is}}, 1_{G_{is}}] - [b_{G_{is}}, 1_{G_{is}}] = 1$, т.е. число s -орбит на 1 больше числа b -орбит. Ясно, что каждая s -орбита содержится в семействе подалгебр, лежащих в одной b -орбите. Так как подалгебра $\mathbf{B}_i$, являющаяся b -орбитой, содержит по крайней мере две s -орбиты, одна из которых состоит из неподвижного примитивного идемпотента e_{is} , то подалгебры каждой из оставшихся b -орбит содержат ровно по одной s -орбите и $\mathbf{B}_i$ содержит ровно две s -орбиты. Следовательно, G_i действует 2-транзитивно на $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$ и $G_{is,j}$ действует транзитивно на $\text{Pr}(\mathbf{B}_j)$ для всех $j, i \neq j$.

(3) Из п. (2) следует, что $G_{i,j}$ действует транзитивно на $\text{Pr}(\mathbf{B}_j)$ и в силу произвольности выбора i, j – на $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$. Еще раз применяя п. (2), получаем транзитивность $G_{i,j}$ на множестве упорядоченных пар $\text{Pr}(\mathbf{B}_i) \times \text{Pr}(\mathbf{B}_j)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 16. Пусть группа H действует транзитивно на множестве Ω , $|\Omega| = p^n$, p простое. Тогда каждая силовская p -подгруппа группы H также действует на Ω транзитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – силовская p -подгруппа группы H , $|P| = p^{n+k}$. Пусть H_α, P_α – стабилизаторы точки $\alpha \in \Omega$ соответственно в H и в P , α^P – P -орбита. Тогда в силу транзитивности H $|H| = p^n \cdot |H_\alpha|$. Следовательно, порядок силовской p -подгруппы стабилизатора H_α равен p^k . Далее

$$|P| = |P_\alpha| \cdot |\alpha^P|, \quad |\alpha^P| \leq |\Omega| = p^n \Rightarrow |P_\alpha| = |P|/|\alpha^P| \geq p^k.$$

Но P_α содержится в некоторой силовской p -подгруппе стабилизатора H_α . Значит, $|P_\alpha| = p^k$ и $|\alpha^P| = p^n$, т.е. P действует на Ω транзитивно. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{D} = \{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n+1}\}$ – неприводимое WP -разложение алгебры M_n , $n = p^m$, p простое. Тогда $\mathcal{D}$ сопряжено J -разложению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можем считать, что силовская p -подгруппа P группы $G_{1,2}$ имеет максимальный порядок среди силовских p -подгрупп групп $G_{i,j}$, $i \neq j$. В силу лемм 15, 16 P действует транзитивно на $\text{Pr}(\mathbf{B}_1) \times \text{Pr}(\mathbf{B}_2)$.

Рассмотрим центральный автоморфизм $z \in Z(P)$, $z \neq 1$. Множество I_z неподвижных относительно z примитивных идемпотентов в $\text{Pr}(\mathcal{D})$ P -инвариантно. Возможны следующие случаи.

Случай 1: $I_z \cap \text{Pr}(\mathbf{B}_1) \neq \emptyset$. В силу транзитивности P на $\text{Pr}(\mathbf{B}_1)$ имеем $\text{Pr}(\mathbf{B}_1) \subseteq I_z$. Так как $z \neq 1$, то в силу леммы 5, п. (1) $I_z = \text{Pr}(\mathbf{B}_1)$ и, в частности, $I_z \cap \text{Pr}(\mathbf{B}_2) = \emptyset$. Рассматривая действие z на базисе $\text{Pr}(\mathbf{B}_1) \cdot \text{Pr}(\mathbf{B}_2)$, получаем $\chi(z) = 0$. Значит, в силу леммы 2 $b(z) = s(z) + 1 - \chi(z) = n + 1$, т.е. z – WP -трансляция.

Случай 2: $I_z \cap \text{Pr}(\mathbf{B}_2) \neq \emptyset$. Рассматривается аналогично случаю 1.

Случай 3: $I_z \cap (\text{Pr}(\mathbf{B}_1) \cup \text{Pr}(\mathbf{B}_2)) = \emptyset$. Рассматривая действие z на базисе $\text{Pr}(\mathbf{B}_1) \cdot \text{Pr}(\mathbf{B}_2)$, получаем $\chi(z) = 0$. Далее имеем

$$b(z) \geq 2 \Rightarrow s(z) = \chi(z) + b(z) - 1 = b(z) - 1 \geq 1.$$

Пусть неподвижный относительно z примитивный идемпотент $e \in \text{Pr}(\mathcal{D})$ принадлежит подалгебре $\mathbf{B}_i$, $i \neq 1, 2$. Тогда в силу максимальности порядка P является силовской p -подгруппой группы $G_{1,i}$. В силу леммы 16 P действует транзитивно на $\text{Pr}(\mathbf{B}_i)$. Следовательно, $\text{Pr}(\mathbf{B}_i) \subseteq I_z$ и аналогично случаю 1 получаем, что z является WP -трансляцией.

Итак, во всех случаях группа $G = \text{Aut } \mathcal{D}$ содержит нетривиальную WP -трансляцию. Из неприводимости G на пространстве матриц с нулевым следом вытекает транзитивность G на $\text{Pr}(\mathcal{D})$. Следовательно, по теореме 1 $\mathcal{D}$ сопряжено J -разложению. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Wagner A.* On finite affine line transitive planes // *Math. Z.* 1965. V. 87. P. 1–11.
2. *Hughes D. R., Piper F. C.* Projective planes. Berlin: Springer, 1982.
3. *Иванов Д. Н.* Ортогональные разложения полупростых ассоциативных алгебр // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1988. Т. 43. № 1. С. 10–15.
4. *Кострикин А. И., Кострикин И. А., Уфнаровский В. А.* Ортогональные разложения простых алгебр Ли типа A_n // *Труды МИАН.* 1981. Т. 158. С. 113–129.
5. *Иванов Д. Н.* Аналог теоремы Вагнера для ортогональных разложений алгебры матриц $M_n(\mathbb{C})$ // *УМН.* 1994. Т. 49. № 1. С. 215–216.
6. *Кострикин А. И., Фам Хыу Тьеп.* Классификация неприводимых разложений простых алгебр Ли типа A_n // *Алгебра и анализ.* 1992. № 3. С. 571–593.
7. *Иванов Д. Н.* Ортогональные разложения простых алгебр Ли типа A_{p^n-1} и D_n с конечным числом классов подобных инвариантных подрешеток // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1989. Т. 44. № 2. С. 40–43.
8. *Kostrikin A. I., Pham Huu Tiep.* Orthogonal decompositions and integral lattices. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
9. *Bahturin Yu. A., Sehgal S. K., Zaicev M. V.* Groups gradings on associative algebras // *J. Algebra.* 2001. V. 241. P. 677–698.

10. *Иванов Д. Н.* Ортогональные разложения ассоциативных алгебр и сбалансированные системы идемпотентов // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 12. С. 83–102.
11. *Иванов Д. Н.* Ортогональные разложения простых алгебр Ли типа A_{p^n-1} и изотропные расслоения // УМН. 1987. Т. 42. № 4. С. 141–142.
12. *Kantor W. M.* Spreads, translation planes and Kerdock sets. I // SIAM J. Algebra Disc. Methods. 1982. № 2. P. 151–165.
13. *Kantor W. M.* Spreads, translation planes and Kerdock sets. II // SIAM J. Algebra Disc. Methods. 1982. № 3. P. 308–318.
14. *Kantor W. M.* Expanded, sliced and spread spreads // Finite geometries. Proc. Conf. Washington State Univ., Pullman, 1981. New York: Marcel Dekker, Inc., 1983. P. 251–261. (Lecture Notes in Pure and Appl. Math. V. 82.)
15. *Холл М.* Теория групп. М.: ИЛ, 1962.
16. *Gleason A. M.* Finite Fano planes // Amer. J. Math. 1956. V. 78. P. 797–807.
17. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. М.: Наука, 1979.
18. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups. New York: Academic Press, 1976.

Тверской государственный университет
E-mail: dni@tvcom.ru

Поступила в редакцию
28.10.2003