Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, О функциях, связанных с представлением группы, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 12, 70–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8576>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 11:46:40

УДК 517.986.4

Р. С. Исмагилов

О функциях, связанных с представлением группы

Обычно, имея линейное представление группы, рассматривают связанные с ним числовые функции (возможно, обобщенные) на группе. Простейшие функции – это матричные элементы. Они задаются парой векторов, выбор которых произволен и случаен. Однако нас интересуют функции, лишенные этого элемента произвола (и тем самым естественным образом связанные с представлением); мы называем их модифицированными следами представления. Примерами таких функций являются обычный след представления (если он существует, возможно, как обобщенная функция), а также сферические функции, порожденные неподвижным вектором некоторой подгруппы. Может случиться, однако, что для данного представления не удастся определить ни след, ни сферические функции. Хотелось бы и в этих случаях ввести функции на группе, естественным образом связанные с представлением. Мы решаем эту задачу для групп диффеоморфизмов и некоторых их представлений.

Библиография: 4 названия.

Ключевые слова: представления групп, модифицированный след, сферическая функция, тензорное произведение.

DOI: 10.4213/sm8576

1. Постановка задачи. Эта работа посвящена следующему простому наблюдению. Пусть G – топологическая группа, $g \rightarrow T(g)$ – ее унитарное представление в гильбертовом пространстве H . Обычно с представлением связывают числовые функции (возможно, обобщенные), определенные на группе. Простейший пример – это матричные элементы $g \rightarrow (T(g)\xi_1, \xi_2)$. Эти функции определяются заданием пары векторов ξ_1, ξ_2 из пространства представления. Выбор такой пары произволен и не связан с природой рассматриваемого представления. В настоящей работе мы склонны считать последнее обстоятельство нежелательным. Хотелось бы выделить функции, лишенные этого недостатка; именно такие функции можно считать функциями, естественным (внутренним) образом связанными с рассматриваемым представлением. Примерами таких функций являются след $g \rightarrow \text{tr } T(g)$ (если, разумеется, он существует, возможно, как обобщенная функция), а также сферическая функция относительно некоторой подгруппы в предположении, что для этой подгруппы имеется единственный (с точностью до множителя) неподвижный вектор. Однако, как увидим ниже, имеются весьма простые случаи, когда не определен ни след (даже при некотором обобщении понятия следа, которое будет описано), ни сферическая функция. Примеры таких функций связаны с группой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00952).

диффеоморфизмов компактного многообразия (и некоторыми ее представлениями), хотя можно привести и другие примеры такого рода. Хотелось бы и в этих случаях ввести функции на группе, естественным образом связанные с представлением. Для краткости назовем их *модифицированными следами* представления.

Разумеется, приведенное вольное описание модифицированного следа нельзя считать строгим определением. Точные определения будут даны в п. 4. Добавим, что возможны разные варианты определения модифицированного следа; мы выберем то, которое хорошо приспособлено к упомянутой группе диффеоморфизмов. На этом пути будут получены модифицированные следы некоторых представлений этой группы.

План дальнейшего изложения таков. В п. 2 мы несколько обобщим общеизвестное понятие следа представления группы Ли (возможно, бесконечномерной) и в качестве примера запишем этот след для простейшего представления группы $D(X)$, где $D(X)$ означает связную компоненту единицы в группе диффеоморфизмов компактного многообразия X . По существу здесь нет новизны – в нашем изложении мы следуем книге [1; гл. VI].

В п. 3 мы рассмотрим тензорное произведение упомянутых простейших представлений группы $D(X)$ и покажем, что для них не определен след (даже в упомянутом обобщенном смысле). Добавим, что в этом случае нет также какой-либо сферической функции.

В п. 4 будет определено понятие модифицированного следа, о котором упоминалось выше. В п. 5 вычисляется модифицированный след для указанных выше тензорных произведений (как уже сказано, обычный след не существует даже при упомянутом обобщении этого понятия).

Наконец, в п. 6 рассматривается представление группы $D(X, \tau)$ в пространстве Фока (в предположении, что пространство когомологий $H^1(X, \mathbf{R})$ – ненулевое). Здесь также можно найти модифицированный след. Однако мы не будем его рассматривать, ибо в этом случае естественным образом определена сферическая функция относительно подгруппы диффеоморфизмов, сосредоточенных в максимальной односвязной области многообразия X . Мы воспроизводим вид этой функции из работы автора [2].

2. О следах представлений; пример: группа диффеоморфизмов $D(X)$. Вернемся к представлению $g \rightarrow T(g)$, $g \in G$, считая, что G – бесконечномерная группа Ли; не будем вдаваться в определение этого класса групп, ибо для наших целей достаточно иметь в виду группы, упомянутые выше. Общеупотребительное понятие следа можно обобщить следующим естественным (тривиальным) способом. Фиксируем некоторое семейство L счетно-аддитивных комплекснозначных мер G с конечной вариацией. Пусть для любой меры $\mu \in L$ оператор $A_\mu = \int_G T(g)\mu(dg)$ оказался ядерным. Тогда возникает функционал $\mu \mapsto \text{tr} A_\mu$, $\mu \in L$; его можно назвать следом представления (по отношению к семейству мер L).

Рассмотрим следующий пример. Возьмем компактное многообразие X класса C^∞ с формой объема τ ; соответствующую меру на X будем обозначать через $\tau(dx)$. Связную компоненту единицы в группе диффеоморфизмов обозначим

через $D(X)$. Наиболее простое представление этой группы задается вещественным числом λ и действует в пространстве $L_2(X, \tau)$ по формуле

$$T_\lambda f(x) = \left(\frac{\tau(d(xg))}{\tau(dx)} \right)^{1/2+i\lambda} f(xg), \quad x \in X.$$

Опишем его след, следуя книге [1; гл. VI]. Обозначим через D' множество диффеоморфизмов $g \in D(X)$ таких, что g имеет конечное число неподвижных точек, причем в каждой точке x число 1 не входит в спектр дифференциала $dg(x)$. Возьмем пространство $\mathbf{R}^N$, $N > n = \dim X$, с гладкой комплекснозначной мерой β , имеющей компактный носитель, и гладкое отображение “общего положения” $\mathbf{R}^N \rightarrow D'$, $t \mapsto g_t$; “общность положения” означает, что для любой точки $x \in X$ отображение $t = (t_1, \dots, t_N) \mapsto xg_t$ имеет ранг n . Пусть σ – образ меры β при указанном отображении. Легко показать, что для этой меры оператор A_σ – ядерный; таким образом, представление обладает следом (в описанном выше смысле). Это есть обычная функция на $g \mapsto t_\sigma(g)$, $g \in D(X)$, сосредоточенная на множестве D' и заданная формулой

$$t_\sigma(g) = \sum_{xg=x} \left(\frac{\tau(d(xg))}{\tau(dx)} \right)^{1/2+i\lambda} \det(dg(x) - id)^{-1}.$$

3. Тензорное произведение. Представления без следа. В этом пункте приведем обещанный выше пример представления, для которого не существует след (в описанном выше смысле). Рассмотрим представления T_{λ_k} , $k = 1, \dots, m$, и их тензорное произведение $T = T_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes T_{\lambda_m}$. Оно действует в пространстве $L_2(X^m)$ (построенном по мере $\tau(d\omega) = \prod_j \tau(dx_j)$) по формуле

$$T(g)f(\omega) = A(g, \omega)f(\omega g), \quad \omega = (x_1, \dots, x_m),$$

где использовано обозначение

$$A(g, \omega) = \prod_j \left(\frac{\tau(d(x_j g))}{\tau(dx_j)} \right)^{1/2+i\lambda_j}.$$

Возьмем комплекснозначную борелевскую меру σ на G с компактным носителем, обладающую конечной вариацией. Возникает оператор

$$A_\sigma = \int_G T(g)\sigma(dg).$$

Нам понадобится одно ограничение, которое можно назвать условием “общности положения” для меры σ и набора чисел $\{\lambda_k\}$. Чтобы записать это ограничение, введем число $\gamma = \sum_j (1/2 + i\lambda_j)$ и наложим следующее ограничение: функция

$$x \mapsto R(x) = \int_G \left(\frac{\tau(d(xg))}{\tau(dx)} \right)^\gamma \sigma(dg), \quad x \in X, \quad (1)$$

не является тождественно нулевой. (Это условие нарушается, если мера σ сосредоточена на множестве диффеоморфизмов, сохраняющих меру τ , а интеграл меры σ по G равен нулю. Автору не известны другие случаи, когда это условие нарушается.) Следующая теорема показывает, что в этом случае след (в описанном выше смысле) не существует.

ТЕОРЕМА 1. Для набора $(\sigma; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, удовлетворяющего условию (1), оператор A_σ не является компактным.

Переходя к доказательству, введем на X риманову метрику; через $\rho(x_1, x_2)$ обозначим расстояние между точками x_1 и x_2 . Определена функция $x \mapsto \psi(x)$ такая, что объем шара $B(x, r) = \{y : \rho(x, y) < r\}$ удовлетворяет условию $\text{vol } B(x, r) \simeq \psi(x)r^n$ при $r \rightarrow +0$. Для любой точки $\omega = (x_1, \dots, x_m) \in X^m$ введем обозначение $\delta(\omega) = \max \rho(x_1, x_j)$, $2 \leq j \leq m$.

ЛЕММА 1. Для любой непрерывной функции $\omega \mapsto h(\omega)$, $\omega \in X^m$, справедливо соотношение

$$\int_{\delta(\omega) < r} h(\omega) d\omega = (H + o(1))r^{(m-1)n},$$

$$H = \int_X h(x, \dots, x)(\psi(x))^{m-1} dx, \quad r \rightarrow +0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем пользоваться обозначением

$$\tau(dx') = \prod_{2 \leq j \leq m} \tau(dx_j).$$

Тогда рассматриваемый интеграл можно переписать в виде

$$\int_X \left(\int_{X^{m-1}} f(\omega) \tau(dx') \right) \tau(dx_1).$$

Для оценки интеграла по dx' (при фиксированном x_1) переходим к локальным координатам в окрестности точки x_1 . Этот интеграл есть произведение величины $h(x_1, \dots, x_1) + o(1)$ на объем множества, заданного в X^{m-1} условием $\rho(x_1, x_j) < r$, $2 \leq j \leq m$. Но этот объем есть v^{m-1} , где v – объем шара $\{x, \rho(x, x_1) < r\}$. Отсюда получается утверждение леммы.

Теперь докажем теорему. Пусть S – носитель меры σ . Так как множество S компактно, то существуют числа M_0 и M_1 такие, что

$$M_0 < \frac{\rho(x_1 g, x_2 g)}{\rho(x_1, x_2)} < M_1, \quad x_1 \neq x_2, \quad g \in S.$$

Зафиксируем число $c \in (0, M_0/M_1)$ и введем множества F_k и E_k , заданные неравенствами

$$c^k < \delta(\omega) < c^{k-1}, \quad \frac{c^k}{M_0} < \delta(\omega) < \frac{c^{k-1}}{M_1}.$$

Пусть f_k – индикатор множества F_k . Оценим (снизу) норму функции $h_k = A_\sigma f_k$. Для этого рассмотрим эту функцию на множестве E_k . Если $\omega \in E_k$, то $c^k/M_0 < \delta(\omega) < c^{k-1}/M_1$, откуда $c^k < \delta(\omega g) < c^{k-1}$, т.е. $\omega g \in F_k$. Отсюда $f_k(\omega g) = 1$, а потому при $\omega \in E_k$ справедливо равенство

$$h_k(\omega) = \int_G \prod_j \left(\frac{\tau(d(x_j g))}{\tau(dx_j)} \right)^{1/2 + i\lambda_j} \sigma(dg).$$

Далее,

$$\frac{\tau(d(x_j g))}{\tau(dx_j)} = \frac{\tau(d(x_1 g))}{\tau(dx_1)} + o(1)$$

при $\omega = (x_1, \dots, x_n) \in E_k$, $k \rightarrow \infty$, ибо $\rho(x_1, x_k) < c^k$, $k = 2, \dots, m$, и, следовательно, $\rho(x_j, x_1) \rightarrow 0$. Это позволяет оценить функцию, стоящую под знаком интеграла, через функцию $R(x)$, указанную в формуле (1). В итоге получаем равенство

$$h_k(\omega) = R(x_1) + o(1), \quad \omega = (x_1, \dots, x_m) \in E_k.$$

Теперь лемма 1 приводит к неравенству

$$\|h_k\|^2 \geq A c^{kn(m-1)} \int_X |R(x_1)|^2 (\psi(x_1))^{m-1} \tau(dx_1) \geq A_1 c^{kn(m-1)},$$

$$A_1 = \text{const}, \quad A_1 > 0.$$

С другой стороны,

$$\|f_k\|^2 = \int_{F_k} \tau(d\omega) \leq B c^{kn(m-1)}, \quad B = \text{const}, \quad B > 0.$$

Таким образом,

$$\|h_k\| > N_3 \|f_k\|, \quad N_3 > 0.$$

Заметим, что функции f_k сосредоточены на непересекающихся множествах F_k , а потому взаимно ортогональны. Из двух последних утверждений вытекает некомпактность оператора A_σ . Теорема 1 доказана.

4. Модифицированный след. Возьмем произвольную топологическую группу G , ее представлению $g \rightarrow T(g)$, $g \in G$, и изложим одну из возможных конструкций модифицированного следа; выбор этой конструкции оправдывается лишь тем, что она успешно применяется к группе диффеоморфизмов $D(X)$.

Зафиксируем набор подгрупп G_k , $k = 1, \dots, m$, и некоторый “некоммутативный” многочлен $p(\xi_1, \dots, \xi_m)$ (т.е. элемент универсальной ассоциативной $\mathbf{C}$ -алгебры с образующими $\xi_1, \dots, \xi_m$). По этим данным мы построим функцию на группе, что удастся сделать при некотором дополнительном ограничении, которое скоро опишем. С целью построения функции для каждой из подгрупп G_k рассмотрим оператор P_k – ортогональный проектор на подпространство векторов, инвариантных относительно операторов $T(g)$, $g \in G_k$. Подстановка $\xi_k \mapsto P_k$ приводит к оператору $R = p(P_1, \dots, P_m)$. Повторим теперь определение следа представления, заменив $T(g)$ на $RT(g)R$. Другими словами, допустим, что найдено семейство L мер с конечной вариацией на G , для которых оператор

$$T^\circ(\alpha) = \int_G RT(g)R\alpha(dg), \quad \alpha \in L,$$

является ядерным (это и есть упомянутое выше дополнительное ограничение на выбранный набор $\{G_k, k = 1, \dots, m\}$ и многочлен $p(\xi_1, \dots, \xi_m)$). Получаем функционал

$$\mu \mapsto \text{tr} \int_G RT(g)R\alpha(dg), \quad \alpha \in L.$$

Этот функционал и был нашей целью. Назовем его модифицированным следом представления. Мы видим, что модифицированный след определяется фиксацией семейства подгрупп $\{G_k, k = 1, \dots, m, \}$ нашей группы и многочлена $p(\xi_1, \dots, \xi_m)$; векторы пространства представления не участвуют в конструкции.

В том случае, когда проекторы P_k перестановочны, в качестве $p(\xi_1, \dots, \xi_m)$ можно взять обычный многочлен от коммутирующих переменных.

Желая упростить изложение (и, в частности, избежать языка обобщенных функций на бесконечномерной группе), примем следующее ограничение: дана такая непрерывная функция $g \mapsto r(g)$, $g \in G'$, что

$$\mathrm{tr} \int_G RT(g)R\alpha(dg) = \int_{G'} r(g)\alpha(dg), \quad \alpha \in L.$$

В неформальных обозначениях условимся записывать модифицированный след в виде

$$\mathrm{tr} RT(g)R = r(g).$$

Подчеркнем, что эта формула означает равенство интегралов правой и левой частей по любой мере, взятой из L .

5. Пример: модифицированный след для группы $D(X)$. Вернемся к группе $D(X)$ и ее представлению $T = T_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes T_{\lambda_m}$, рассмотренному в п. 3. Это представление действует в пространстве $L_2(X^m)$, построенном по мере $\tau(d\omega) = \prod_j \tau(dx_j)$. В дальнейших вычислениях заменим X^m на подмножество $\Omega^m = \{(x_1, \dots, x_m)\}$, выделенное условием $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. n -форма τ , заданная на X , порождает mn -форму на Ω^m ; обозначим ее также через τ . Цель этого пункта – написать для этого представления модифицированный след, введенный в п. 4; будем считать, что $m > 1$.

Возьмем непересекающиеся замкнутые области $Y_k \subset X$, $k = 1, \dots, m$, с гладкими границами и подгруппы $D(Y_k)$ – связные компоненты групп диффеоморфизмов, сосредоточенных в Y_k . Пусть P_k – ортогональный проектор на подпространство векторов, инвариантных относительно $D(Y_k)$, и $R = \prod_{1 \leq k \leq n} (I - P_k)$. (Заметим, что проекторы P_k перестановочны, а потому написанное произведение определено.)

По аналогии с п. 3 обозначим через D' множество диффеоморфизмов $g \in D(X)$ со следующими свойствами: действие преобразования g на Ω^m имеет конечное число неподвижных точек, причем число 1 не входит в спектр дифференциала в каждой такой точке ω . При этом условии действие элемента g на Ω^m имеет лишь конечное множество неподвижных точек. Возьмем пространство $\mathbf{R}^N$, $N > mn$, гладкое отображение “общего положения” $\mathbf{R}^N \rightarrow D'$, $t \mapsto g_t$; в этом месте “общность положения” означает, что для любой точки $\omega \in \Omega^m$ отображение $t = (t_1, \dots, t_N) \mapsto \omega g_t$ имеет максимальный ранг mn . Возьмем, далее, функцию $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ и зададим на $\mathbf{R}^N$ меру равенством $\beta(dt) = h(t)dt$. Пусть α – образ меры β при указанном отображении. Получили семейство мер L (здесь мы повторили общую конструкцию из п. 2). Положим

$$T^0(\alpha) = \int_{D^0(X)} RT(g)R\alpha(dg), \quad \alpha \in L.$$

ТЕОРЕМА 2. Если $\alpha \in L$, то оператор $T^\circ(\alpha)$ – ядерный. Справедливо равенство

$$\operatorname{tr} RT(g)R = \sum_{\omega} \prod_{x_k} \left(\frac{\tau(d(x_k g))}{\tau(dx_k)} \right)^{1/2 + i\lambda_k} \det(I - dg(\omega))^{-1}. \quad (2)$$

(Смысл этого равенства мы пояснили выше, в конце п. 4.) Произведение берется по всем $x_k \in \omega$, а сумма распространяется на все конфигурации $\omega \in \Omega^m$, которые инвариантны относительно g и содержат ровно по одной точке из каждой из областей $Y_k \subset X$, $k = 1, \dots, m$.

В этой теореме существенно только первое утверждение (ядерность оператора); что касается равенства (2), метод вывода подобных “формул следа” хорошо известен (см. [2; гл. VI]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Предварительно приведем одну формулу из теории интеграла. Пусть даны многообразия A, B , $\dim A = p$, $\dim B = q$, $p > q$, и гладкое отображение $\psi: A \rightarrow B$, имеющее ранг q . Пусть τ^p и ν^q – формы объема на A и B . Тогда на A можно задать такую $(p - q)$ -форму σ^{p-q} , что

$$\psi^*(\nu^q) \wedge \sigma^{p-q} = \tau^p.$$

В этих обозначениях для любых функций $f \in C_0^\infty(B)$ и $h \in C_0^\infty(A)$ справедливо равенство

$$\int_A f(\psi(a))h(a)\tau^p = \int_B f(b)l(b)\nu^q, \quad l(b) = \int_{\psi^{-1}(b)} h(a)\sigma^{p-q}. \quad (3)$$

При этом, если отображение ψ зависит гладко еще от $z \in \mathbf{R}^N$, то упомянутую форму σ^{p-q} также можно выбрать гладко зависящей от z . (Для доказательства равенства (3) надо сначала рассмотреть окрестность, в которой локально τ выражается как $u(a)da_1 \wedge \dots \wedge da_p$, а отображение ψ в виде $(a_1, \dots, a_p) \rightarrow (a_1, \dots, a_q)$. Затем использовать разложение единицы на A .) Равенство (3) распространяется и на вектор-функции.

Вернемся к обозначениям, введенным перед теоремой 2, и рассмотрим оператор

$$T_\alpha = \int_{\mathbf{R}^N} h(t)T(g_t)dt.$$

Итак,

$$T_\alpha f(\omega) = \int_{\mathbf{R}^N} h(t)A(g_t, \omega)f(\omega g_t)dt.$$

Преобразуем последний интеграл при помощи формулы (3), взяв в качестве ψ отображение $\psi_\omega: \mathbf{R}^N \rightarrow X^m$, $t \mapsto \omega g_t$ (для каждого фиксированного ω). В итоге получаем равенство

$$T_\alpha f(\omega) = \int_{\Omega^m} B(\omega, \omega')f(\omega')\tau(d\omega').$$

Существенно то, что ядро $B(\omega, \omega')$ – бесконечно гладкое.

Обратимся к оператору $RT_\alpha R$. Ясно, что если $f \in L_2(\Omega^m)$, то функция $P_k f$ сосредоточена на множестве конфигураций $\omega \in \Omega^n$, не пересекающихся с Y_k , а функция $(I - P_k)f$ – на множестве конфигураций $E_k = \{\omega : \omega \cap Y_k \neq \emptyset\}$. Отсюда следует, что функция Rf сосредоточена на множестве конфигураций $E = \bigcap_k E_k$, имеющих общую точку с каждой областью Y_k . (Разумеется, упомянутые множества определены с точностью до множеств нулевой меры.) Но так как любая точка ω состоит ровно из m точек, то E состоит из конфигураций, содержащих ровно одну точку из каждой области Y_k . Таким образом, множество E отождествляется с компактом $Y_1 \times \cdots \times Y_m$. Ясно, что оператор $RT_\alpha R$ – также интегральный с ядром $r(\omega)r(\omega')B(\omega, \omega')$, где функция $r(\omega)$ есть индикатор множества E . Итак, имеем гладкое ядро, сосредоточенное на компакте (заметим, что все пространство Ω^m не компактно). Отсюда следует, что $RT_\alpha R$ – ядерный оператор. (Нужные нам признаки ядерности интегральных операторов, действующих в пространствах функций на компактах, содержатся в [3; гл. III, § 10], где рассмотрен случай отрезка и даны дальнейшие литературные ссылки.) Этим доказано первое утверждение теоремы 2.

Мы не останавливаемся на доказательстве второго утверждения теоремы, ибо вычисления, необходимые для вывода формулы (2) (как и формулы следа из п. 2), хорошо известны [1; гл. VI].

Завершая этот пункт, заметим, что изложенное в нем переносится (с необходимыми изменениями) на группу $D(X, \tau)$ – так мы обозначаем связную компоненту единицы в группе диффеоморфизмов, сохраняющих форму объема τ . В следующем пункте мы рассмотрим представление группы $D(X, \tau)$, имеющую иное происхождение.

6. Группа $D(X, \tau)$; представления в пространстве Фока. До сих пор мы говорили только о следах (в частности, модифицированных); между тем, в п. 1 упоминались также сферические функции. Ради полноты изложения мы кратко воспроизведем (не в полной общности) результат из работы автора [2], связанный с этим предметом.

Положим

$$L_2^0(X, \tau) = \left\{ f : f \in L_2(X, v), \int_X f(x) \tau(dx) = 0 \right\}.$$

Будем считать, что пространство когомологий $H^1(X, \mathbf{R})$ ненулевое. Таким образом, на X существует замкнутая неточная форма γ^1 . Определим гладкие функции ψ_g формулой

$$d\psi_g = g\gamma^1 - \gamma^1, \quad \int_X \psi_g(x) \tau(dx) = 0.$$

Выполнено уравнение коцикла $\psi_{hg} = \psi_h + g\psi_h$. Возникает унитарное представление

$$g \mapsto V(g), \quad g \in D^0(X, v^m),$$

действующее в пространстве Фока $\text{EXP}(L_2^0(X, \tau))$ по формуле

$$V(g) \text{EXP } f = \exp\left(-\frac{1}{2}\|\psi_g\|^2 + (f, \psi_{g^{-1}})\right) \text{EXP}(gf + \psi_g).$$

О пространстве Фока см. [4; приложение F].

Здесь также можно было бы рассмотреть модифицированные следы. Но вместо этого мы займемся возникающей здесь естественным образом сферической функцией.

Фиксируем односвязную область $Y \subset X$, $Y \simeq \mathbf{R}^n$, $n = \dim X$, такую что ее дополнение $X \setminus Y$ покрывается многообразиями размерности меньше n . Форма γ^1 точна в Y ; таким образом, $\gamma^1 = du$, где u — гладкая функция в Y и

$$\int_X u(x) \tau(dx) = 0.$$

Рассмотрим подгруппу $D(Y, \tau)$ — связную компоненту единицы в группе диффеоморфизмов, сосредоточенных в Y . Легко показать, что подпространство векторов, инвариантных относительно $D(Y, \tau)$, одномерно и задается вектором $\text{EXP } u$. Соответствующий матричный элемент (сферическая функция) имеет вид

$$g \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2}\|\psi_g + u - gu\|^2\right).$$

Список литературы

- [1] В. Гийемин, С. Стернберг, *Геометрические асимптотики*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: V. Guillemin, Sh. Sternberg, *Geometric asymptotics*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.
- [2] Р. С. Исмагилов, “Сферические функции на группе диффеоморфизмов, сохраняющих объем”, *Функц. анализ и его прил.*, **25:2** (1991), 80–82; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Spherical functions on the group of diffeomorphisms preserving the volume”, *Funct. Anal. Appl.*, **25:2** (1991), 150–152.
- [3] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопрояженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [4] А. Гишарде, *Когомологии топологических групп и алгебр Ли*, Мир, М., 1984; пер. с фр.: A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, Textes Math., **2**, CEDIC, Paris, 1980.

Раис Сальманович Исмагилов
(Rais S. Ismagilov)

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана
E-mail: ismagil@bmstu.ru

Поступила в редакцию
24.07.2015 и 30.08.2015