Общероссийский математический портал

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев, Задача Коши для нелинейных систем уравнений в критическом случае, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 11, 31–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm858>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:33:00

УДК 517.9+535.5

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв

Задача Коши для нелинейных систем уравнений в критическом случае

Изучено асимптотическое поведение при больших временах решений задачи Коши для системы нелинейных эволюционных уравнений с диссипацией

$$\begin{aligned} u_t + \mathcal{N}(u, u) + \mathcal{L}u &= 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= \tilde{u}(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

где $\mathcal{L}$ – линейный псевдодифференциальный оператор $\mathcal{L}u = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}(L(\xi)\hat{u}(\xi))$, а нелинейность $\mathcal{N}$ – квадратичный псевдодифференциальный оператор

$$\mathcal{N}(u, u) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A^{kl}(t, \xi, y) \hat{u}_k(t, \xi - y) \hat{u}_l(t, y) dy,$$

$\hat{u} \equiv \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u$ – образ Фурье. В предположении, что начальные данные $\tilde{u} \in \mathbf{H}^{\beta,0} \cap \mathbf{H}^{0,\beta}$, $\beta > n/2$, являются достаточно малыми и имеют ненулевой вектор общей массы $M = \int \tilde{u}(x) dx \neq 0$, где

$$\mathbf{H}^{n,m} = \{\phi \in \mathbf{L}^2 : \|\langle x \rangle^m \langle i\partial_x \rangle^n \phi(x)\|_{\mathbf{L}^2} < \infty\}, \quad \langle x \rangle = \sqrt{1 + x^2},$$

– весовое пространство Соболева, доказано, что главный член асимптотики решений при больших временах в критическом случае дается автомодельным решением, определяемым единственным образом вектором общей массы M начальных данных.

Библиография: 31 название.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения при больших временах решений задачи Коши для системы нелинейных нелокальных эволюционных уравнений

$$u_t + \mathcal{N}(u, u) + \mathcal{L}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{1}$$

с начальными данными $u(0, x) = \tilde{u}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, где $u(t, x)$ – вектор $u = \{u_j\}_{j=1, \dots, m}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00324) и Программы “Университеты России – фундаментальные исследования”.

Линейная часть системы (1) – это псевдодифференциальный оператор, определенный через преобразование Фурье следующим образом:

$$\mathcal{L}u = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} L(\xi) \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u,$$

где символ $L(\xi)$ является матрицей $L = \{L_{jk}\}_{j,k=1,\dots,m}$, $L_{jk} \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Нелинейность $\mathcal{N}(u, u)$ – это квадратичный псевдодифференциальный оператор

$$\mathcal{N}(u, u) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A^{kl}(t, \xi, y) \widehat{u}_k(t, \xi - y) \widehat{u}_l(t, y) dy,$$

где символы $A^{kl}(t, \xi, y)$ – векторы $A^{kl} = \{A_j^{kl}\}_{j=1,\dots,m}$. Определим прямое преобразование Фурье $\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}$

$$\widehat{u}(\xi) \equiv \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx$$

и обратное преобразование Фурье $\overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}$

$$\check{u}(x) \equiv \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} u(\xi) d\xi.$$

Предположим, что символы $A^{kl}(t, \xi, y) \in \mathbf{C}^0((0, \infty); \mathbf{L}_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^n))$ и операторы $\mathcal{N}$ и $\mathcal{L}$ имеют конечный порядок, т.е. символы $A^{kl}(t, \xi, y)$ и $L(\xi)$ растут по y и ξ не быстрее некоторой степени

$$|A^{kl}(t, \xi, y)| \leq C(\langle \xi \rangle^\kappa + \langle y \rangle^\kappa), \quad |L(\xi)| \leq C\langle \xi \rangle^\kappa,$$

через C здесь и ниже обозначаем различные положительные константы, $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + \xi^2}$, абсолютное значение векторов $|A^{kl}|$ и матрицы $|L|$ понимаем как максимум модуля их компонент: $|A^{kl}| = \max_{j=1,\dots,m} |A_j^{kl}|$, $|L| = \max_{j,k=1,\dots,m} |L_{jk}|$. Модельная система (1) объединяет в себе многие известные системы уравнений современной математической физики и описывает различные волновые процессы в диссипативных и дисперсивных средах. Так, если ограничиться рассмотрением простейшей дисперсии и диссипации, то система (1) приводит нас к известной системе уравнений Буссинеска с затуханием (см. [1])

$$\begin{cases} \eta_t + (\nabla \cdot v\eta) - \mu\Delta\eta + \frac{1}{3}\Delta(\nabla \cdot v) = 0, \\ v_t + (v \cdot \nabla)v + \nabla\eta - \mu\Delta v = 0. \end{cases}$$

Система (1) переходит в систему Доброхотова [2] в первом приближении по нелинейности

$$\begin{cases} \eta_t + (\nabla \cdot v\eta) + \mathcal{B}v = 0, \\ v_t + (v \cdot \nabla)v + \nabla\eta = 0, \end{cases}$$

где оператор $\mathcal{B}v = \sum_{j=1}^n \mathcal{B}_j v_j$ имеет символы $B_j(\xi) = \frac{i\xi_j}{|\xi|} \operatorname{th} |\xi|$ и отвечает точной потенциальной теории волн на воде. Другим частным случаем системы (1) является одномерная по пространственной переменной x система уравнений, предложенная Броером [3] и Каупом [4]

$$\begin{cases} \eta_t + (\eta v)_x - \beta \eta_{xx} - \alpha v_{xxx} = 0, \\ v_t + vv_x + \eta_x + \beta v_{xx} = 0, \end{cases}$$

а также ряд других систем (см. [5]).

Весьма значительный прогресс в изучении асимптотики решений консервативных уравнений при больших временах был достигнут благодаря методу обратной задачи рассеяния (см. [6], [7] и цитированную там литературу). В суперкритическом случае асимптотическое поведение решений при больших временах решения подобно линейному (см. [8], [9]). Ряд других результатов для критических и субкритических диссипативных уравнений с нелинейностями неконвективного типа были получены в работах [10]–[25].

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения решений задачи Коши для нелинейной эволюционной системы уравнений (1) в критическом случае, т.е. когда скорости убывания линейной и нелинейной частей уравнения сбалансированы. Ниже мы опишем более детально наши предположения.

Предположим, что собственные значения $\lambda_j(\xi)$ матрицы $L(\xi)$ различны для всех $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и занумеруем их в порядке возрастания их вещественной части. Пусть $(m \times m)$ -матрица $Q(\xi) = \|Q_{jk}(\xi)\|_{j,k=1,\dots,m}$ диагонализует матрицу $L(\xi)$, т.е. $Q^{-1}(\xi)L(\xi)Q(\xi) = \|\lambda_j(\xi)\delta_{jk}\|_{j,k=1,\dots,m}$, где $\delta_{jk} = 1$, если $j = k$, и $\delta_{jk} = 0$ в противном случае. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящую от $\xi \in \mathbb{R}^n$ как от параметра

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(t, \xi) + L(\xi)\hat{u}(t, \xi) = 0. \quad (2)$$

Умножив систему (2) слева на $Q^{-1}(\xi)$ и заменив $\hat{u}(t, \xi) = Q(\xi)v(t, \xi)$, мы диагонализуем систему (2)

$$\frac{d}{dt}v_j(t, \xi) = -\lambda_j(\xi)v_j(t, \xi),$$

откуда, интегрируя по времени $t \geq 0$, найдем $v_j(t, \xi) = e^{-t\lambda_j(\xi)}v_j(0, \xi)$. Возвращаясь к решению $\hat{u}(t, \xi)$, получаем

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-tL(\xi)}\hat{u}(0, \xi),$$

где фундаментальная матрица Коши (см. [26]) имеет вид

$$e^{-tL(\xi)} = \sum_{j=1}^m e^{-t\lambda_j(\xi)} P^{(j)}(\xi)$$

с матрицами $P^{(j)}(\xi) = \|Q_{kj}(\xi)(Q^{-1}(\xi))_{jl}\|_{k,l=1,\dots,m}$. Перепишем задачу Коши (1) в виде интегрального уравнения

$$u(t) = \mathcal{G}(t)\tilde{u} - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u, u)(\tau) d\tau, \quad (3)$$

где оператор Грина $\mathcal{G}(t)\psi = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}(e^{-tL(\xi)}\widehat{\psi}(\xi))$. Под решением задачи Коши (1) мы будем понимать решение $u(t, x)$ соответствующего интегрального уравнения (3), принадлежащее $\mathbf{C}^0([0, \infty); \mathbf{V})$ при подходящем выборе функционального пространства $\mathbf{V}$.

Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию диссипации, которое в терминах собственных значений матрицы $L(\xi)$ записывается в виде

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) \geq \mu \{\xi\}^\delta \langle \xi \rangle^\nu \quad (4)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $\mu > 0$, $\nu > 0$, $\delta > 0$. Также мы будем предполагать, что

$$|\partial_\xi^r P^{(j)}(\xi)| \leq C \quad (5)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|r| = 0, 1$. Пусть символ нелинейного оператора $\mathcal{N}$ удовлетворяет оценкам

$$|A^{k,l}(t, \xi, y)| \leq C \langle \xi \rangle^\theta \{\xi\}^\omega (\langle \xi - y \rangle^\sigma \{\xi - y\}^\alpha + \langle y \rangle^\sigma \{y\}^\alpha) \quad (6)$$

для всех $\xi, y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $k, l = 1, \dots, m$, где $\theta, \sigma, \alpha \geq 0$. Здесь и ниже мы обозначаем $\{\xi\} = |\xi|/\langle \xi \rangle$, $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + \xi^2}$. Рассмотрим случай, когда нелинейность имеет вид полной производной, т.е. предположим, что $\omega > 0$. Систему (1) с таким типом нелинейности мы будем называть системой диффузионно-конвективного типа. Мы будем интересоваться случаем ненулевой общей массы начальных данных $\int \tilde{u}(x) dx \equiv M \neq 0$. Теперь с помощью соотношения

$$\delta = n + \alpha + \omega$$

мы определим критический в отношении глобального существования решений случай. Пространство Лебега, как обычно, будем обозначать

$$\mathbf{L}^p = \{\varphi \in \mathcal{S}' : \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} < \infty\},$$

где норма

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|, \quad p = \infty. \end{aligned}$$

Через $\mathbf{C}(\mathbf{I}; \mathbf{V})$ обозначим пространство непрерывных функций, отображающих интервал времени $\mathbf{I}$ в некоторое банахово пространство $\mathbf{V}$. Различные положительные константы будем обозначать одной и той же буквой C .

Определим пространство $\mathbf{X} = \{\phi \in \mathbf{C}^0([0, \infty); \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)) : \|\phi\|_{\mathbf{X}} < \infty\}$ с нормой

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{\mathbf{X}} = & \sup_{\rho \in [0, \alpha + \gamma]} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \langle t \rangle^{\frac{\rho}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\ & + \sup_{s \in [0, \sigma]} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \{t\}^{\frac{s}{\nu}} \langle t \rangle^{\frac{n + \alpha + \gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{B}^{s, p}}, \end{aligned}$$

где $\gamma \in (0, \frac{1}{\delta}(\min(1, \omega))^2)$ и нормы

$$\|\varphi(t)\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} = \left\| |\xi|^\rho \widehat{\varphi}(t, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)}, \quad \|\varphi(t)\|_{\mathbf{B}^{s, p}} = \left\| |\xi|^s \widehat{\varphi}(t, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \geq 1)}.$$

Обозначим также через $\mathbf{X}_\varepsilon$ малый шар в пространстве $\mathbf{X}$. Отметим, что норма $\mathbf{A}^{\rho, p}$ отвечает за асимптотические свойства решений при больших временах, а норма $\mathbf{B}^{s, p}$ описывает регулярность решения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям (4) с $\delta = n + \alpha + \omega$, $\alpha \geq 0$, $\omega > 0$. Предположим, что нелинейный оператор $\mathcal{N}$ подчиняется оценке (6) с $\theta + \sigma < \nu$, $\nu > 0$. Пусть начальные данные $\tilde{u}$ таковы, что

$$\|\tilde{u}\|_{\mathbf{A}^{0, \infty}} + \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}} + \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}^{0, 1}} \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда существует единственное решение $u(t, x) \in \mathbf{X}_\varepsilon$ задачи Коши (1). Более того, решение $u(t, x)$ имеет оценку убывания по времени

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{\delta}}$$

для всех $t > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае нулевой общей массы начальных данных

$$M = \int \tilde{u}(x) dx = 0$$

решение задачи Коши для системы уравнений (1) обретает более быстрое временное убывание

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C t^{-\frac{n + \min(1, \omega)}{\delta}}.$$

Так что в этом случае критическое значение $\delta_c = n + \alpha + \omega + \min(1, \omega)$ оказывается сдвинутым на величину $\min(1, \omega)$.

Чтобы найти асимптотическое представление для решения, предположим, что собственные значения символа $L(\xi)$ имеют следующее асимптотическое поведение в нуле:

$$\lambda_j(\xi) = i\xi b^{(j)} + \mu_j |\xi|^\delta + O(|\xi|^{\delta + \gamma}) \quad (7)$$

для всех $|\xi| \leq 1$, где $\mu_j > 0$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$, $b^{(j)} \in \mathbb{R}^n$. Пусть нелинейность $\mathcal{N}_0$ имеет символ $A_0(\xi, y) \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, однородный по ξ и y порядка $\omega + \alpha$, т.е. $A_0(t\xi, ty) = t^{\alpha+\omega} A_0(\xi, y)$ для всех $\xi, y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Предположим, что соотношение

$$|A(t, \xi, y) - A_0(\xi, y)| \leq C \langle \xi \rangle^\theta \{ \xi \}^\omega (\langle \xi - y \rangle^\sigma \{ \xi - y \}^{\alpha+\gamma} + \langle y \rangle^\sigma \{ y \}^{\alpha+\gamma}) + C \langle t \rangle^{-\frac{\gamma}{\delta}} \langle \xi \rangle^\theta \{ \xi \}^\omega (\langle \xi - y \rangle^\sigma \{ \xi - y \}^\alpha + \langle y \rangle^\sigma \{ y \}^\alpha) \quad (8)$$

справедливо для всех $\xi, y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, где $\theta, \sigma, \alpha \geq 0$, $\omega, \gamma > 0$. Отметим, что символ $A_0(\xi, y)$ также удовлетворяет оценке (6) с $\theta = \omega$ и $\sigma = \alpha$:

$$|A_0^{k,l}(\xi, y)| \leq C |\xi|^\omega (|\xi - y|^\alpha + |y|^\alpha) \quad (9)$$

для всех $\xi, y \in \mathbb{R}^n$, $k, l = 1, \dots, m$. Рассмотрим следующее интегральное уравнение

$$w(t) = \mathcal{G}^{(j)}(t) M \delta_0(x) - \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t - \tau) \mathcal{N}_0(w, w)(\tau) d\tau, \quad (10)$$

где операторы Грина

$$\mathcal{G}^{(j)}(t)\phi = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}(e^{-it\xi b^{(j)} - t\mu_j |\xi|^\delta} P^{(j)}(0)\widehat{\phi}(\xi))$$

и нелинейность

$$\mathcal{N}_0(w, w) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A_0^{kl}(\xi, y) \widehat{w}_k(t, \xi - y) \widehat{w}_l(t, y) dy.$$

Ниже в §4 мы докажем существование единственного автомодельного решения уравнения (10), имеющего вид

$$w(t, x) = t^{-\frac{n}{\delta}} f((x - b^{(j)}t)t^{-\frac{1}{\delta}}).$$

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что нелинейный оператор $\mathcal{N}$ удовлетворяет оценке (6) с $\omega > 0$, $\theta + \sigma \in [0, \nu)$ и соотношению (8). Пусть для символа линейного оператора $\mathcal{L}$ выполнены условия (4), (7) с $\delta = n + \alpha + \omega$, $\alpha \geq 0$. Пусть начальные данные $\tilde{u}$ таковы, что*

$$\|\tilde{u}\|_{\mathbf{A}^{0,\infty}} + \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}^{0,\infty}} + \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}^{0,1}} \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Также мы предположим, что

$$\|\tilde{u} - M\delta_0\|_{\mathbf{A}^{-\gamma,\infty}} \leq \varepsilon,$$

где $\delta_0(x)$ — дельта-функция Дирака, $\gamma \in (0, \frac{1}{\delta}(\min(1, \omega))^2)$. Тогда решение $u(t, x)$ задачи Коши (1), построенное в теореме 1, стремится при больших временах к суперпозиции автомодельных решений $t^{-\frac{n}{\delta}} f^{(j)}((x - b^{(j)}t)t^{-\frac{1}{\delta}})$ для уравнений (10), т.е.

$$\left\| u(t, x) - t^{-\frac{n}{\delta}} \sum_{j=1}^m f^{(j)}((x - b^{(j)}t)t^{-\frac{1}{\delta}}) \right\|_{\mathbf{L}_x^\infty} \leq C t^{-\frac{n+\gamma}{\delta}}$$

для всех $t \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие теоремы на начальные данные $\tilde{u}$ может быть так же выражено в терминах обычного весового пространства Соболева следующим образом:

$$\|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^{\beta,0}} + \|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^{0,\beta+2\gamma}} \leq \varepsilon,$$

где $\beta > \frac{n}{2}$ и $\mathbf{H}^{k,m} = \{\phi \in \mathbf{L}^2 : \|\phi\|_{\mathbf{H}^{k,m}} \equiv \|\langle x \rangle^m \langle i\partial_x \rangle^k \phi\|_{\mathbf{L}^2} < \infty\}$ – весовое пространство Соболева [27]. Однако условия на начальные данные $\tilde{u}$ записываются более точно в нормах $\mathbf{A}^{0,p}$ и $\mathbf{B}^{0,p}$.

В качестве примера применим теорему 2 к известной системе Буссинеска с вязкостью

$$\begin{cases} \eta_t + (\eta v)_x - \mu \eta_{xx} + \beta^2 v_x + \vartheta^2 v_{xxx} = 0, \\ v_t + vv_x + \eta_x - \mu v_{xx} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

а также к системе, описывающей поверхностные волны с учетом вязкости и поверхностного натяжения

$$\begin{cases} \eta_t + (\eta v)_x - \mu \eta_{xx} + \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}(L_{12}(\xi) \widehat{v}(t, \xi)) = 0, \\ v_t + vv_x + \eta_x - \mu v_{xx} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

для чего мы выберем в системе (1) нелинейность

$$A^{1,1} = 0, \quad A^{1,2} = A^{2,1} = \begin{pmatrix} \frac{i\xi}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\xi}{2} \end{pmatrix},$$

а линейный оператор

$$L_{11}(\xi) = L_{22}(\xi) = \mu \xi^2, \quad L_{12}(\xi) = i\beta^2 \xi(1 + \vartheta^2 \xi^2), \quad L_{21}(\xi) = i\xi$$

в случае системы (11) и соответственно

$$L_{11}(\xi) = L_{22}(\xi) = \mu \xi^2, \quad L_{12}(\xi) = i\beta^2 (1 + \kappa \xi^2) \frac{\operatorname{th} \varrho \xi}{\varrho \xi}, \quad L_{21}(\xi) = i\xi$$

для системы (12). Собственные значения $\lambda_j(\xi)$ даются формулами

$$\lambda_j(\xi) = \mu \xi^2 + i(-1)^j \beta \xi \sqrt{1 + \vartheta^2 \xi^2}$$

и

$$\lambda_j(\xi) = \mu \xi^2 + i\beta \xi (-1)^j \sqrt{(1 + \kappa \xi^2) \frac{\operatorname{th} \varrho \xi}{\varrho \xi}}$$

для $j = 1, 2$. Так что имеем $n = 1$, $\delta = 2$, $\nu = 2$, $\theta = 1$, $\omega = 1$, $\sigma = 0$, $\alpha = 0$, $A_0(\xi, y) = A(\xi, y)$, $b^{(j)} = (-1)^j \beta$. Следовательно, условия (4)–(8) выполнены. Заметим, что решения $w^{(j)}(t, x)$ интегрального уравнения (10) также удовлетворяют уравнению Бюргерса с переносом [28]

$$\partial_t w^{(j)} + (-1)^j \frac{3}{4} \partial_x (w^{(j)})^2 + (-1)^j \beta \partial_x w^{(j)} - \mu \partial_x^2 w^{(j)} = 0. \quad (13)$$

Применение подстановки Хопфа–Коула [29] дает асимптотику для $w^{(j)}(t, x)$:

$$w^{(j)}(t, x) = (\mu t)^{-\frac{1}{2}} A_j(\chi_j) + O(t^{-\frac{1}{2}-\gamma}), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} A_j(z) &= -\frac{4}{3} \mu (-1)^j \frac{\partial}{\partial z} \log H_j(z), \\ H_j(z) &= e^{-M_j/2} \left(\operatorname{ch} \frac{M_j}{2} - \operatorname{sh} \frac{M_j}{2} \operatorname{Erf} \left(\frac{z}{2} \right) \right), \\ \chi_j &= \frac{x - (-1)^j \beta t}{\sqrt{\mu t}}, \end{aligned}$$

$\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$ – функция ошибок, $M_j \equiv \frac{1}{2b} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\eta}(x) dx + \frac{(-1)^j}{2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{v}(x) dx$ – общая масса начальных данных. Тогда решения (η, v) задач Коши (11) и (12) имеют следующее асимптотическое представление при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \eta(t, x) &= \beta w^{(1)}(t, x) + \beta w^{(2)}(t, x) + O(t^{-\frac{1}{2}-\gamma}), \\ v(t, x) &= w^{(2)}(t, x) - w^{(1)}(t, x) + O(t^{-\frac{1}{2}-\gamma}), \end{aligned}$$

где $\gamma > 0$, а функции $w^{(j)}(t, x)$ являются решениями задачи Коши для уравнения Бюргерса (13); их асимптотика дается формулой (14). Этот результат был получен впервые в работе [30] при несколько более жестких ограничениях на начальные данные. Подобный результат имеет место для уравнения Буссинеска с диссипацией (см. [31])

$$u_{tt} - \vartheta \Delta u_t + \varrho \Delta^2 u - \Delta u + \Delta(u^2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

в случае $\varrho > \frac{\vartheta^2}{4}$.

Кратко опишем содержание работы. Ниже в §2 будет получен ряд предварительных оценок для оператора Грина линейной задачи Коши, соответствующей (1). Параграф 3 посвящен доказательству теоремы 1. В §4 мы докажем существование автомодельного решения для уравнения (10). Наконец, доказательство теоремы 2 дано в §5.

§2. Две леммы

Решение линейной задачи Коши

$$\begin{aligned} u_t + \mathcal{L}u &= f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= \tilde{u}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (15)$$

запишем следующим образом:

$$u(t) = \mathcal{G}(t) \tilde{u} + \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

где оператор Грина $\mathcal{G}$ равен

$$\mathcal{G}(t)\phi = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}(e^{-L(\xi)t}\widehat{\phi}(\xi)), \quad e^{-tL(\xi)} = \sum_{j=1}^m e^{-t\lambda_j(\xi)}P^{(j)}(\xi).$$

Обозначим $\langle \partial_x \rangle^\alpha \phi = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}(\langle \xi \rangle^\alpha \widehat{\phi}(\xi))$ и $\{\partial_x\}^\alpha \phi = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}(\{\xi\}^\alpha \widehat{\phi}(\xi))$ для $\alpha \in \mathbb{R}$. В следующей лемме мы оценим оператор Грина $\mathcal{G}(t)$ в нормах

$$\|\varphi(t)\|_{\mathbf{A}^{\rho,p}} = \|\langle \xi \rangle^\rho \widehat{\varphi}(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)}, \quad \|\varphi(t)\|_{\mathbf{B}^{s,p}} = \|\langle \xi \rangle^s \widehat{\varphi}(t, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \geq 1)},$$

где $s, \rho \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$.

ЛЕММА 2.1. Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию диссипации (4) с $\delta > 0$. Тогда имеют место следующие неравенства (при условии, что правые части в них ограничены) для всех $t > 0$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$:

$$\|\mathcal{G}(t)\psi\|_{\mathbf{A}^{\rho,p}} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta} - \frac{n}{\delta}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|\psi\|_{\mathbf{A}^{0,q}},$$

где $\rho \geq 0$;

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho,p}} \\ & \leq C \langle t \rangle^{1-\lambda - \frac{\rho+\omega}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^\varkappa \langle \tau \rangle^{\lambda + \frac{n}{\delta q}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega,q}}), \end{aligned}$$

где $\varkappa \in [0, 1)$, $\lambda \in [0, 1)$, $0 \leq \rho + \omega < \delta$;

$$\|\mathcal{G}(t)\psi\|_{\mathbf{B}^{s,p}} \leq C e^{-\frac{\mu}{2}t} \{t\}^{-\frac{s}{\nu} - \frac{n}{\nu}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|\psi\|_{\mathbf{B}^{0,q}},$$

где $s \geq 0$, u

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{B}^{s,p}} \leq C \{t\}^{1-\varkappa - \frac{s+\theta}{\nu} - \frac{n}{\nu}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \langle t \rangle^{-\tilde{\lambda}} \\ & \times \left(\sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^\varkappa \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}^{-\theta,q}}) + \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^{\varkappa + \frac{n}{\nu}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}^{-\theta,p}}) \right), \end{aligned}$$

где $\varkappa \in [0, 1)$, $\tilde{\lambda} \geq 0$, $s \geq 0$, $\theta \geq 0$ таковы, что $s + \theta < \nu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря условию диссипации (4) имеем

$$\left\| |\xi|^\rho e^{-t\lambda_j(\xi)} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^q(|\xi| \leq 1)} \leq C \left\| |\xi|^\rho e^{-t\mu\{\xi\}^\delta} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^q(|\xi| \leq 1)} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta} - \frac{n}{\delta q}}$$

для всех $t > 0$, где $1 \leq q \leq \infty$, $\rho \geq 0$. Таким образом, с помощью неравенства Гёльдера получаем первую оценку леммы

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{\rho,p}} &= \left\| |\xi|^\rho e^{-tL(\xi)} \widehat{\psi}(\tau, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} \\ &\leq C \sum_{j=1}^m \left\| |\xi|^\rho e^{-t\lambda_j(\xi)} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^{\frac{pq}{q-p}}(|\xi| \leq 1)} \|P^{(j)} \widehat{\psi}(\tau, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^q(|\xi| \leq 1)} \\ &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho}{\delta} - \frac{n}{\delta} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{0,q}} \end{aligned}$$

для $\rho \geq 0$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Взяв в этой оценке $q = \infty$ и $q = p$, найдем

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho,p}} &\leq \left\| |\xi|^{\rho+\omega} \{\xi\}^{-\omega} \int_0^t e^{-L(\xi)(t-\tau)} \widehat{\psi}(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} \\ &= \left\| \{\partial_x\}^{-\omega} \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho+\omega,p}} \\ &\leq C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho+\omega}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \|\{\partial_x\}^{-\omega} \psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{0,\infty}} d\tau \\ &\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho+\omega}{\delta}} \|\{\partial_x\}^{-\omega} \psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{0,p}} d\tau, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho,p}} &\leq C \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^\varkappa \langle \tau \rangle^{\lambda + \frac{n}{\delta q}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega,q}}) \\ &\quad \times \left(\int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho+\omega}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \{\tau\}^{-\varkappa} \langle \tau \rangle^{-\lambda} d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{\rho+\omega}{\delta}} \{\tau\}^{-\varkappa} \langle \tau \rangle^{-\lambda - \frac{n}{\delta p}} d\tau \right) \\ &\leq C \langle t \rangle^{1-\lambda - \frac{\rho+\omega}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^\varkappa \langle \tau \rangle^{\lambda + \frac{n}{\delta q}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega,q}}) \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, поскольку $\varkappa \in [0, 1)$, $\lambda \in [0, 1)$, $0 \leq \rho + \omega < \delta$. Итак, вторая оценка леммы установлена. Точно так же из условия (4) найдем

$$\left\| |\xi|^s e^{-t\lambda_j(\xi)} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty(|\xi| \geq 1)} \leq C \left\| |\xi|^s e^{-t\mu|\xi|^\nu} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty(|\xi| \geq 1)} \leq C e^{-\frac{\mu}{2}t} \{t\}^{-\frac{s}{\nu}} \quad (16)$$

для всех $t > 0$, где $s \geq 0$. Применение неравенства (16) приводит к третьей оценке леммы

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(t)\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}^{s,p}} &= \sum_{j=1}^m \left\| |\xi|^s e^{-t\lambda_j(\xi)} P^{(j)} \widehat{\psi}(\tau, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \geq 1)} \\ &\leq C \sum_{j=1}^m \left\| |\xi|^s e^{-t\lambda_j(\xi)} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^{\frac{pq}{q-p}}(|\xi| \geq 1)} \|P^{(j)} \widehat{\psi}(\tau, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^q(|\xi| \geq 1)} \\ &\leq C e^{-\frac{\mu}{2}t} \{t\}^{-\frac{s}{\nu} - \frac{n}{\nu} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}^{0,q}}, \end{aligned}$$

где $s \geq 0$, $p \leq q \leq \infty$. Наконец, имеем

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{B}^{s,p}} \leq C \left\| \langle \partial_x \rangle^{-\theta} \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{B}^{s+\theta,p}} \\
& \leq C \int_0^{\frac{t}{2}} e^{-\frac{\mu}{2}(t-\tau)} \{t-\tau\}^{-\frac{s+\theta}{\nu} - \frac{n}{\nu}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\langle \partial_x \rangle^{-\theta} \psi(\tau)\|_{\mathbf{B}^{0,q}} d\tau \\
& \quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-\frac{\mu}{2}(t-\tau)} \{t-\tau\}^{-\frac{s+\theta}{\nu}} \|\langle \partial_x \rangle^{-\theta} \psi(\tau)\|_{\mathbf{B}^{0,p}} d\tau \\
& \leq C \int_0^{\frac{t}{2}} e^{-\frac{\mu}{2}(t-\tau)} \{t-\tau\}^{-\frac{s+\theta}{\nu} - \frac{n}{\nu}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \{\tau\}^{-\varkappa} d\tau \sup_{\tau>0} (\{\tau\}^{\varkappa} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}^{-\theta,q}}) \\
& \quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-\frac{\mu}{2}(t-\tau)} \{t-\tau\}^{-\frac{s+\theta}{\nu}} \{\tau\}^{-\varkappa - \frac{n}{\nu}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \langle \tau \rangle^{-\tilde{\lambda}} d\tau \\
& \quad \times \sup_{\tau>0} (\{\tau\}^{\varkappa + \frac{n}{\nu}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}^{-\theta,p}}) \\
& \leq C \{t\}^{1-\varkappa - \frac{s+\theta}{\nu} - \frac{n}{\nu}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \langle t \rangle^{-\tilde{\lambda}} \\
& \quad \times \left(\sup_{\tau>0} (\{\tau\}^{\varkappa} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}^{-\theta,q}}) + \sup_{\tau>0} (\{\tau\}^{\varkappa + \frac{n}{\nu}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{B}^{-\theta,p}}) \right)
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$, так как $\frac{s+\theta}{\nu} < 1$, $\varkappa \in [0, 1)$, $\tilde{\lambda} \geq 0$, откуда следует последняя оценка леммы. Лемма 2.1 доказана.

Теперь оценим нелинейность

$$\mathcal{N}(\varphi, \phi) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A^{k,l}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y) dy$$

в нормах $\|\cdot\|_{\mathbf{A}^{-\omega,p}}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{B}^{-\theta,p}}$.

ЛЕММА 2.2. Пусть нелинейный оператор $\mathcal{N}$ удовлетворяет условию (6). Тогда справедливы неравенства (при условии, что правые части в них ограничены)

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}^{-\omega,p}} & \leq C(\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{\alpha,1}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\sigma,1}})(\|\phi\|_{\mathbf{A}^{0,p}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{0,\infty}}) \\
& \quad + C(\|\phi\|_{\mathbf{A}^{\alpha,1}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{\sigma,1}})(\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{0,p}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0,\infty}}), \\
\|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{B}^{-\theta,p}} & \leq C(\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{\alpha+\gamma,1}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\sigma,1}})(\|\phi\|_{\mathbf{A}^{0,p}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{0,p}}) \\
& \quad + C(\|\phi\|_{\mathbf{A}^{\alpha+\gamma,1}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{\sigma,1}})(\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{0,p}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0,p}})
\end{aligned}$$

для $1 \leq p \leq \infty$, где $\gamma > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя условие (6), с помощью неравенства Минковского найдем

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, p}} &\leq \sum_{k, l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-\omega} |A^{k, l}(t, \xi, y)| |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} \\
&\leq C \sum_{k, l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (\langle \xi - y \rangle^\sigma \{\xi - y\}^\alpha + \langle y \rangle^\sigma \{y\}^\alpha) |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} \\
&\leq C \|\langle \xi \rangle^\sigma \{\xi\}^\alpha \widehat{\varphi}\|_{\mathbf{L}_\xi^1} (\|\widehat{\phi}\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} + \|\widehat{\phi}\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty(|\xi| > 1)}) \\
&\quad + C \|\langle \xi \rangle^\sigma \{\xi\}^\alpha \widehat{\phi}\|_{\mathbf{L}_\xi^1} (\|\widehat{\varphi}\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} + \|\widehat{\varphi}\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty(|\xi| > 1)}) \\
&\leq C (\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}}) (\|\phi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
&\quad + C (\|\phi\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}}) (\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}})
\end{aligned}$$

и введем множитель $\{\xi\}^\gamma$ для того, чтобы устанавливаемая оценка была в норме $\mathbf{A}^{\alpha+\gamma, 1}$, что обеспечивает лучшее убывание решения при больших t

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{B}^{-\theta, p}} &\leq C \sum_{k, l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-\theta} |A^{k, l}(t, \xi, y)| |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \geq 1)} \\
&\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (\langle \xi - y \rangle^\sigma \{\xi - y\}^{\alpha+\gamma} + \langle y \rangle^\sigma \{y\}^{\alpha+\gamma}) |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \geq 1)} \\
&\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (\langle \xi - y \rangle^\sigma \{\xi - y\}^\alpha + \langle y \rangle^\sigma \{y\}^\alpha) |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \geq 1)} \\
&\leq C \|\langle \xi \rangle^\sigma \{\xi\}^{\alpha+\gamma} \widehat{\varphi}\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \|\widehat{\phi}\|_{\mathbf{L}_\xi^p} + C \|\widehat{\varphi}\|_{\mathbf{L}_\xi^p} \|\langle \xi \rangle^\sigma \{\xi\}^{\alpha+\gamma} \widehat{\phi}\|_{\mathbf{L}_\xi^1} \\
&\leq C (\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{\alpha+\gamma, 1}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}}) (\|\phi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{0, p}}) \\
&\quad + C (\|\phi\|_{\mathbf{A}^{\alpha+\gamma, 1}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}}) (\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0, p}}),
\end{aligned}$$

откуда следуют оценки леммы. Лемма 2.2 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

С помощью оператора Грина $\mathcal{G}(t)$ линейной задачи Коши (15) запишем нелинейную задачу Коши (1) в виде интегрального уравнения

$$u(t) = \mathcal{G}(t) \widetilde{u} - \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{N}(u, u)(\tau) d\tau. \quad (17)$$

Обозначим шар $\mathbf{X}(\varepsilon) = \{\phi : \|\phi\|_{\mathbf{X}} \leq \varepsilon\}$, где норма

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{\mathbf{X}} &= \sup_{\rho \in [0, \alpha+\gamma]} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \langle t \rangle^{\frac{\rho}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\
&\quad + \sup_{s \in [0, \sigma]} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \{t\}^{\frac{s}{\nu}} \langle t \rangle^{\frac{n+\alpha+\gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{B}^{s, p}},
\end{aligned}$$

где $\nu \geq n + \sigma + \theta$, $\gamma \in (0, \frac{1}{\delta}(\min(1, \omega))^2)$, здесь и всюду далее мы берем критическое значение $\delta = n + \alpha + \omega$. Введем отображение

$$\mathcal{A}(v) = \mathcal{G}(t)\tilde{u} - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v, v)(\tau) d\tau \quad (18)$$

для $v \in \mathbf{X}(\varepsilon)$ и докажем, что $\mathcal{A}$ является сжимающим отображением в $\mathbf{X}(\varepsilon)$. Используя первую и третью оценки леммы 2.1 с $q = \infty$ и $q = p$ соответственно, получаем

$$\langle t \rangle^{\frac{\rho}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|\mathcal{G}(t)\tilde{u}\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \leq C \|\tilde{u}\|_{\mathbf{A}^{0, \infty}}, \quad \{t\}^{\frac{s}{\nu} \langle t \rangle^{\frac{n+\alpha+\gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}}} \|\mathcal{G}(t)\tilde{u}\|_{\mathbf{B}^{s, p}} \leq C \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}^{0, p}},$$

таким образом,

$$\|\mathcal{G}(t)\tilde{u}\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\tilde{u}\|_{\mathbf{A}^{0, \infty}} + C \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}} + C \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}^{0, 1}}.$$

Обозначим также

$$\|\psi\|_{\mathbf{Y}} = \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} (\{t\}^{\varkappa} \langle t \rangle^{\lambda + \frac{n}{\delta p}} \|\psi(t)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, p}} + \{t\}^{\varkappa} \langle t \rangle^{\tilde{\lambda} + \frac{n}{\delta p}} \|\psi(t)\|_{\mathbf{B}^{-\theta, p}}),$$

где $\varkappa = \sigma/\nu$, $\lambda = 1 - \omega/\delta$, $\tilde{\lambda} = \lambda + \gamma/\delta$. Тогда с помощью второй и четвертой оценок леммы 2.1 с $q = p$ имеем

$$\begin{aligned} & \langle t \rangle^{\frac{\rho}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v, v)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\ & \leq C \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^{\varkappa} \langle \tau \rangle^{\lambda + \frac{n}{\delta q}} \|\mathcal{N}(v, v)(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, q}}) \leq C \|\mathcal{N}(v, v)\|_{\mathbf{Y}}, \\ & \{t\}^{\frac{s}{\nu} \langle t \rangle^{\frac{n+\alpha+\gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}}} \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v, v)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{B}^{s, p}} \\ & \leq C \{t\}^{1-\varkappa - \frac{\rho}{\nu}} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^{\varkappa} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda} + \frac{n}{\delta p}} \|\mathcal{N}(v, v)(\tau)\|_{\mathbf{B}^{-\theta, p}}) \leq C \|\mathcal{N}(v, v)\|_{\mathbf{Y}} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, где $\rho \in [0, \alpha + \gamma]$, $s \in [0, \sigma]$, $1 \leq p \leq \infty$, поскольку $1 - \varkappa - \frac{\rho}{\nu} \geq 0$. Таким образом,

$$\left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v, v)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\mathcal{N}(v, v)\|_{\mathbf{Y}}.$$

Теперь, пользуясь леммой 2.2, найдем

$$\begin{aligned}
& \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \{t\}^{\lambda + \frac{n}{\delta p}} \|\mathcal{N}(v, v)(t)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, p}} \\
& \leq C \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \{t\}^{\lambda} (\|v(t)\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \|v(t)\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}}) \\
& \quad \times \langle t \rangle^{\frac{n}{\delta p}} (\|v(t)\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|v(t)\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
& \leq C \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} (\langle t \rangle^{\frac{n+\alpha}{\delta}} \|v(t)\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \{t\}^{\frac{\sigma}{p}} \langle t \rangle^{\frac{2n+\alpha+\gamma}{\delta}} \|v(t)\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}}) \\
& \quad \times (\langle t \rangle^{\frac{n}{\delta p}} \|v(t)\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \langle t \rangle^{\frac{n+\alpha+\gamma}{\delta}} \|v(t)\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \leq C \|v\|_{\mathbf{X}}^2, \\
& \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \{t\}^{\tilde{\lambda} + \frac{n}{\delta p}} \|\mathcal{N}(v, v)(t)\|_{\mathbf{B}^{-\theta, p}} \\
& \leq C \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \{t\}^{\tilde{\lambda}} (\|v(t)\|_{\mathbf{A}^{\alpha+\gamma, 1}} + \|v(t)\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}}) \\
& \quad \times \langle t \rangle^{\frac{n}{\delta p}} (\|v(t)\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|v(t)\|_{\mathbf{B}^{0, p}}) \\
& \leq C \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} (\langle t \rangle^{\frac{n+\alpha+\gamma}{\delta}} \|v(t)\|_{\mathbf{A}^{\alpha+\gamma, 1}} + \{t\}^{\frac{\sigma}{p}} \langle t \rangle^{\frac{2n+\alpha+\gamma}{\delta}} \|v(t)\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}}) \\
& \quad \times (\langle t \rangle^{\frac{n}{\delta p}} \|v(t)\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \langle t \rangle^{\frac{n+\alpha+\gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|v(t)\|_{\mathbf{B}^{0, p}}) \leq C \|v\|_{\mathbf{X}}^2,
\end{aligned}$$

откуда получим

$$\|\mathcal{N}(v, v)\|_{\mathbf{Y}} \leq C \|v\|_{\mathbf{X}}^2.$$

Итак, имеем

$$\|\mathcal{A}(v)\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\tilde{u}\|_{\mathbf{A}^{0, \infty}} + C \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}} + C \|\tilde{u}\|_{\mathbf{B}^{0, 1}} + C \|v\|_{\mathbf{X}}^2.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{A}$ отображает $\mathbf{X}(\varepsilon)$ в себя. Аналогично доказывается неравенство

$$\|\mathcal{A}(v_1) - \mathcal{A}(v_2)\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{X}},$$

показывающее, что преобразование $\mathcal{A}$ является сжимающим отображением в шаре $\mathbf{X}(\varepsilon)$. Значит, существует единственное глобальное решение $u(t, x) \in \mathbf{X}(\varepsilon)$ задачи Коши (1). Поскольку $u(t, x) \in \mathbf{X}(\varepsilon)$, имеем оценку

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|u(t)\|_{\mathbf{A}^{0, 1}} + \|u(t)\|_{\mathbf{B}^{0, 1}} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{\delta}}$$

для всех $t > 0$. Теорема 1 доказана.

§ 4. Автономные решения

В этом параграфе мы построим автономные решения, которые дадут описание асимптотического поведения решений задачи Коши (1) при больших временах. Рассмотрим интегральное уравнение (10), где символ $A_0(\xi, y) \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ является однородным по ξ и y порядка $\omega + \alpha$, т.е. $A_0(t\xi, ty) = t^{\omega+\alpha} A_0(\xi, y)$ для всех $\xi, y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, и удовлетворяет соотношению (8). Вследствие этого символ $A_0(\xi, y)$ также удовлетворяет оценке (6) с $\theta = \omega$ и $\sigma = \alpha$:

$$|A_0^{k,l}(\xi, y)| \leq C|\xi|^\omega (|\xi - y|^\alpha + |y|^\alpha) \quad (19)$$

для всех $\xi, y \in \mathbb{R}^n$, $k, l = 1, \dots, m$. Из-за однородности символа $A_0(\xi, y)$ оценка (19) справедлива также для производных

$$|((\xi \nabla_\xi) + (y \nabla_y)) A_0^{k,l}(\xi, y)| \leq C|\xi|^\omega (|\xi - y|^\alpha + |y|^\alpha) \quad (20)$$

для всех $\xi, y \in \mathbb{R}^n$, $k, l = 1, \dots, m$. Делая замену переменной интегрирования $\xi t^{\frac{1}{\delta}} = \eta$, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(j)}(t) M \delta_0(x) &= P^{(j)}(0) M (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi(x - tb^{(j)}) - t\mu_j |\xi|^\delta} d\xi \\ &= t^{-\frac{n}{\delta}} G^{(j)}((x - b^{(j)}t)t^{-\frac{1}{\delta}}) P^{(j)}(0) M, \end{aligned}$$

где

$$G^{(j)}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta x - \mu_j |\eta|^\delta} d\eta.$$

Будем искать автономное решение уравнения (10) в виде

$$w(t, x) = t^{-\frac{n}{\delta}} f((x - b^{(j)}t)t^{-\frac{1}{\delta}}).$$

Применив преобразование Фурье к интегральному уравнению (10), найдем

$$\begin{aligned} \widehat{w}(t, \xi) &= e^{-it\xi b^{(j)} - t\mu_j |\xi|^\delta} P^{(j)}(0) M - \int_0^t d\tau e^{-i(t-\tau)\xi b^{(j)} - (t-\tau)\mu_j |\xi|^\delta} P^{(j)}(0) \\ &\quad \times \sum_{k,l=1}^m \int A_0^{k,l}(\xi, y) \widehat{w}_k(\tau, \xi - y) \widehat{w}_l(\tau, y) dy. \end{aligned} \quad (21)$$

После замены $y = (x - b^{(j)}t)t^{-\frac{1}{\delta}}$ образ Фурье функции $w(t, x) = t^{-\frac{n}{\delta}} f((x - b^{(j)}t)t^{-\frac{1}{\delta}})$ равен

$$\begin{aligned} \widehat{w}(t, \xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} t^{-\frac{n}{\delta}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} f((x - b^{(j)}t)t^{-\frac{1}{\delta}}) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\xi b^{(j)} - i\xi t^{\frac{1}{\delta}} y} f(y) dy = e^{-it\xi b^{(j)}} \widehat{f}(\xi t^{\frac{1}{\delta}}). \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, получаем из (21)

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi t^{\frac{1}{\delta}}) &= e^{-t\mu_j|\xi|^\delta} P^{(j)}(0)M - \int_0^t d\tau e^{-(t-\tau)\mu_j|\xi|^\delta} P^{(j)}(0) \\ &\quad \times \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A_0^{k,l}(\xi, y) \widehat{f}_k((\xi - y)\tau^{\frac{1}{\delta}}) \widehat{f}_l(y\tau^{\frac{1}{\delta}}) dy, \end{aligned}$$

откуда, делая замену $\eta = \xi t^{\frac{1}{\delta}}$, $\eta' = y t^{\frac{1}{\delta}}$, $\tau = tz$ и принимая во внимание, что символы $A_0^{k,l}(\eta, \eta')$ являются однородными порядка $\omega + \alpha$, т.е. $A_0^{k,l}(\eta t^{-\frac{1}{\delta}}, \eta' t^{-\frac{1}{\delta}}) = t^{-\frac{\omega+\alpha}{\delta}} A_0^{k,l}(\eta, \eta')$ и $\delta = \omega + \alpha + n$ критическое, находим

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\eta) &= e^{-\mu_j|\eta|^\delta} P^{(j)}(0)M - \int_0^1 dz e^{-(1-z)\mu_j|\eta|^\delta} P^{(j)}(0) \\ &\quad \times \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A_0^{k,l}(\eta, \eta') \widehat{f}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}}) \widehat{f}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}}) d\eta'. \end{aligned} \quad (23)$$

Докажем существование решения уравнения (23) с помощью принципа сжимающих отображений. Определим преобразование

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\widehat{g}) &= e^{-\mu_j|\eta|^\delta} P^{(j)}(0)M - \int_0^1 dz e^{-(1-z)\mu_j|\eta|^\delta} P^{(j)}(0) \\ &\quad \times \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A_0^{k,l}(\eta, \eta') \widehat{g}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}}) \widehat{g}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}}) d\eta' \end{aligned}$$

для $\widehat{g} \in \mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z} = \{\phi \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty : \|\phi\|_{\mathbf{Z}} < \infty\}$ с нормой

$$\|\phi\|_{\mathbf{Z}} = \sup_{1 \leq p \leq \infty} \|\langle \eta \rangle^{2\delta} \phi(\eta)\|_{\mathbf{L}^p} + \sup_{1 \leq p \leq \infty} \|\langle \eta \rangle^{2\delta} (\eta \nabla_\eta) \phi(\eta)\|_{\mathbf{L}^p}.$$

По неравенству Юнга для свертки $\|\phi * \psi\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{L}^q} \|\psi\|_{\mathbf{L}^r}$, где $1 \leq p, q, r \leq \infty$ такие, что $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$, имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \langle \eta \rangle^{\rho-\omega} P^{(j)}(0) \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A_0^{k,l}(\eta, \eta') \widehat{g}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}}) \widehat{g}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}}) d\eta' \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C \left\| \sum_{k,l=1}^m \int (\langle \eta' \rangle^{\rho+\alpha} + \langle \eta - \eta' \rangle^{\rho+\alpha}) |\widehat{g}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}})| |\widehat{g}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}})| d\eta' \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C \|\langle \eta \rangle^{\rho+\alpha} \widehat{g}(\eta z^{\frac{1}{\delta}})\|_{\mathbf{L}^1} \|\widehat{g}(\eta z^{\frac{1}{\delta}})\|_{\mathbf{L}^p} \leq C z^{-\frac{n+\rho+\alpha}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \|\widehat{g}\|_{\mathbf{Z}}^2 \end{aligned} \quad (24)$$

для всех $z \in (0, 1)$, где $1 \leq p \leq \infty$, $\rho \in [0, 2\delta - \alpha]$. Полагая $p = \infty$ и $\rho = 0$ в (24), с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \langle \eta \rangle^{2\delta} \int_0^{\frac{1}{2}} dz e^{-(1-z)\mu_j|\eta|^\delta} P^{(j)}(0) \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A_0^{k,l}(\eta, \eta') \widehat{g}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}}) \widehat{g}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}}) d\eta' \right\|_{\mathbf{L}^q} \\ &\leq C \|\widehat{g}\|_{\mathbf{Z}}^2 \left\| \int_0^{\frac{1}{2}} \langle \eta \rangle^{2\delta+\omega} e^{-(1-z)\mu_j|\eta|^\delta} z^{-\frac{n+\alpha}{\delta}} dz \right\|_{\mathbf{L}^q} \\ &\leq C \|\widehat{g}\|_{\mathbf{Z}}^2 \int_0^{\frac{1}{2}} (1-z)^{-\frac{2\delta+\omega}{\delta} - \frac{n}{\delta q}} z^{-\frac{n+\alpha}{\delta}} dz \leq C \|\widehat{g}\|_{\mathbf{Z}}^2, \end{aligned}$$

поскольку $\frac{n+\alpha}{\delta} < 1$. Аналогично с помощью (24) с $\rho = 2\delta - \alpha$ найдем

$$\begin{aligned} & \left\| \langle \eta \rangle^{2\delta} \int_{\frac{1}{2}}^1 dz e^{-(1-z)\mu_j|\eta|^\delta} P^{(j)}(0) \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A_0^{k,l}(\eta, \eta') \widehat{g}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}}) \widehat{g}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}}) d\eta' \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ & \leq C \|\widehat{g}\|_{\mathbf{Z}}^2 \left\| \int_{\frac{1}{2}}^1 \langle \eta \rangle^{\alpha+\omega} e^{-(1-z)\mu_j|\eta|^\delta} z^{-\frac{n+2\delta}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} dz \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C \|\widehat{g}\|_{\mathbf{Z}}^2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z)^{-\frac{\alpha+\omega}{\delta}} z^{-\frac{n+2\delta}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} dz \leq C \|\widehat{g}\|_{\mathbf{Z}}^2. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (\eta' \nabla_{\eta'}) (A_0^{k,l}(\eta, \eta') \widehat{g}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}}) \widehat{g}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}})) d\eta' \\ & = -n \int_{\mathbb{R}^n} A_0^{k,l}(\eta, \eta') \widehat{g}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}}) \widehat{g}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}}) d\eta'. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} (\eta \nabla_\eta) \mathcal{A}(\widehat{g}) &= (\eta \nabla_\eta) e^{-\mu_j|\eta|^\delta} P^{(j)}(0) M - (\eta \nabla_\eta) \int_0^1 dz e^{-(1-z)\mu_j|\eta|^\delta} P^{(j)}(0) \\ & \quad \times \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A_0^{k,l}(\eta, \eta') \widehat{g}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}}) \widehat{g}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}}) d\eta' \\ &= -n \delta \mu_j |\eta|^\delta e^{-\mu_j|\eta|^\delta} P^{(j)}(0) M \\ & \quad + n \int_0^1 dz ((1-z)\delta \mu_j |\eta|^\delta - 1) e^{-(1-z)\mu_j|\eta|^\delta} P^{(j)}(0) \\ & \quad \times \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} A_0^{k,l}(\eta, \eta') \widehat{g}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}}) \widehat{g}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}}) d\eta' \\ & \quad - \int_0^1 dz e^{-(1-z)\mu_j|\eta|^\delta} P^{(j)}(0) \\ & \quad \times \sum_{k,l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} d\eta' (((\eta \nabla_\eta) + (\eta' \nabla_{\eta'})) A_0^{k,l}(\eta, \eta')) \widehat{g}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}}) \widehat{g}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}}) \\ & \quad + A_0^{k,l}(\eta, \eta') (((\eta - \eta') \nabla_\eta) \widehat{g}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}})) \widehat{g}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}}) \\ & \quad + A_0^{k,l}(\eta, \eta') \widehat{g}_k((\eta - \eta')z^{\frac{1}{\delta}}) (\eta' \nabla_{\eta'}) \widehat{g}_l(\eta' z^{\frac{1}{\delta}}). \end{aligned}$$

Следовательно, норма $\|\langle \eta \rangle^{2\delta} (\eta \nabla_\eta) \widehat{f}(\eta)\|_{\mathbf{L}_\eta^p}$ оценивается так же, как и выше. Итак,

$$\|\mathcal{A}(\widehat{g})\|_{\mathbf{Z}} \leq C|M| + C\|\widehat{g}\|_{\mathbf{Z}}^2.$$

Значит, преобразование $\mathcal{A}$ отображает $\mathbf{Z}_\varepsilon$ в себя при условии, что $|M| \neq 0$ достаточно мало. Подобным образом доказывается оценка

$$\|\mathcal{A}(\widehat{g}) - \mathcal{A}(\widehat{h})\|_{\mathbf{Z}} \leq \frac{1}{2} \|\widehat{g} - \widehat{h}\|_{\mathbf{Z}},$$

которая показывает, что преобразование $\mathcal{A}$ является сжимающим отображением в $\mathbf{Z}_\varepsilon$. Значит, существует единственное автомодельное решение $w(t, x) = t^{-\frac{n}{\delta}} \times f((x - b^{(j)}t)t^{-\frac{1}{\delta}})$ для уравнения (10) такое, что $\widehat{f} \in \mathbf{Z}_\varepsilon$.

§ 5. Доказательство теоремы 2

Прежде чем доказывать теорему 2, мы установим ряд вспомогательных оценок в следующих трех леммах. Сначала мы оценим разность $\mathcal{G}(t) - \mathcal{G}_0(t)$, где

$$\mathcal{G}_0(t)\phi = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}(e^{-tL_0(\xi)}\widehat{\phi}(\xi)), \quad e^{-tL_0(\xi)} = \sum_{j=1}^m e^{-it\xi b^{(j)} - t\mu_j|\xi|^\delta} P^{(j)}(0)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

ЛЕММА 5.1. Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям диссипации (4), (5) и асимптотическому представлению (7). Тогда справедливы следующие оценки для всех $t > 0$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$:

$$\|(\mathcal{G}(t) - \mathcal{G}_0(t))\phi\|_{\mathbf{A}^{\rho,p}} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta} - \frac{n}{\delta}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|\phi\|_{\mathbf{A}^{0,q}},$$

где $\rho + \gamma \geq 0$, и

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t (\mathcal{G}(t-\tau) - \mathcal{G}_0(t-\tau))\psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho,p}} \\ & \leq C \langle t \rangle^{1-\lambda - \frac{\rho+\omega+\gamma}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^\varkappa \langle \tau \rangle^{\lambda + \frac{n}{\delta q}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega,q}}), \end{aligned}$$

где $\varkappa \in [0, 1)$, $\lambda \in [0, 1)$, $0 \leq \rho + \omega + \gamma < \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу асимптотики (7) имеем

$$\begin{aligned} & \left\| |\xi|^\rho (e^{-t\lambda_j(\xi)} - e^{-it\xi b^{(j)} - t\mu_j|\xi|^\delta}) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^q(|\xi| \leq 1)} \\ & \leq Ct \left\| |\xi|^{\rho+\delta+\gamma} e^{-Ct|\xi|^\delta} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^q(|\xi| \leq 1)} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta} - \frac{n}{\delta q}} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, где $1 \leq q \leq \infty$, $\rho + \gamma \geq 0$. Таким образом, с помощью неравенства Гёльдера получаем

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{G}(t) - \mathcal{G}_0(t))\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{\rho,p}} = \left\| |\xi|^\rho (e^{-tL(\xi)} - e^{-tL_0(\xi)})\widehat{\psi}(\tau, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} \\ & \leq C \sum_{j=1}^m \left\| |\xi|^\rho (e^{-t\lambda_j(\xi)} - e^{-it\xi b^{(j)} - t\mu_j|\xi|^\delta}) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^{\frac{pq}{q-p}}(|\xi| \leq 1)} \|P^{(j)}(0)\widehat{\psi}(\tau, \xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^q(|\xi| \leq 1)} \\ & \quad + C \sum_{j=1}^m \left\| |\xi|^{\rho+\gamma} e^{-Ct|\xi|^\delta} \right\|_{\mathbf{L}_\xi^{\frac{pq}{q-p}}(|\xi| \leq 1)} \left\| |\xi|^{-\gamma} (P^{(j)}(\xi) - P^{(j)}(0))\widehat{\psi}(\tau, \xi) \right\|_{\mathbf{L}_\xi^q(|\xi| \leq 1)} \\ & \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta} - \frac{n}{\delta}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{0,q}} \end{aligned} \tag{25}$$

для $\rho + \gamma \geq 0$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Итак, первая оценка леммы справедлива. Ввиду (25) с $q = \infty$ и $q = p$ найдем (как при доказательстве леммы 2.1)

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t (\mathcal{G}(t - \tau) - \mathcal{G}_0(t - \tau)) \psi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\
& \leq C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t - \tau \rangle^{-\frac{\rho + \gamma + \omega}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \|\{\partial_x\}^{-\omega} \psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{0, \infty}} d\tau \\
& \quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t - \tau \rangle^{-\frac{\rho + \gamma + \omega}{\delta}} \|\{\partial_x\}^{-\omega} \psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{0, p}} d\tau \\
& \leq C \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^{\varkappa} \langle \tau \rangle^{\lambda + \frac{n}{\delta q}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, q}}) \\
& \quad \times \left(\int_0^{\frac{t}{2}} \langle t - \tau \rangle^{-\frac{\rho + \gamma + \omega}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \{\tau\}^{-\varkappa} \langle \tau \rangle^{-\lambda} d\tau \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t - \tau \rangle^{-\frac{\rho + \gamma + \omega}{\delta}} \{\tau\}^{-\varkappa} \langle \tau \rangle^{-\lambda - \frac{n}{\delta p}} d\tau \right) \\
& \leq C \langle t \rangle^{1 - \lambda - \frac{\rho + \gamma + \omega}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^{\varkappa} \langle \tau \rangle^{\lambda + \frac{n}{\delta q}} \|\psi(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, q}})
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$, так как $\varkappa \in [0, 1)$, $\lambda \in [0, 1)$, $0 \leq \rho + \gamma + \omega < \delta$. Следовательно, вторая оценка леммы имеет место. Лемма 5.1 доказана.

Теперь оценим нелинейности

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^{(1)}(\varphi, \phi) &= \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \sum_{k, l=1}^m \int_{|y| \leq 2} A^{k, l}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_k(\xi - y) \widehat{\phi}_l(y) dy, \\
\mathcal{N}^{(2)}(\varphi, \phi) &= \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \sum_{k, l=1}^m \int_{|y| \geq 2} A^{k, l}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_k(\xi - y) \widehat{\phi}_l(y) dy
\end{aligned}$$

в нормах $\mathbf{A}^{-\omega, p}$.

ЛЕММА 5.2. Пусть символы $A^{k, l}(t, \xi, y)$ нелинейных операторов $\mathcal{N}^{(1)}(\varphi, \phi)$ и $\mathcal{N}^{(2)}(\varphi, \phi)$ удовлетворяют условию (6). Тогда имеют место неравенства

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{N}^{(1)}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, p}} &\leq C(\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}})(\|\phi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
&\quad + C(\|\phi\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}})(\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}), \\
\|\mathcal{N}^{(2)}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, p}} &\leq C\|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}}\|\phi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}} + C\|\phi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}}\|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}
\end{aligned}$$

для $1 \leq p \leq \infty$ при условии, что правые части ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря условию (6) с помощью неравенства Минковского найдем (как при доказательстве леммы 2.2)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}^{(1)}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, p}} &\leq C \sum_{k, l=1}^m \left\| \int_{|y| \leq 2} (\{\xi - y\}^\alpha + \{y\}^\alpha) |\widehat{\varphi}_k(\xi - y) \widehat{\phi}_l(y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} \\ &\leq C (\|\xi|^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1(|\xi| \leq 1)} + \|\widehat{\varphi}(\xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty(|\xi| \geq 1)}) \\ &\quad \times (\|\widehat{\phi}(\xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} + \|\widehat{\phi}(\xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty(|\xi| \geq 1)}) \\ &\quad + C (\|\xi|^\alpha \widehat{\phi}(\xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^1(|\xi| \leq 1)} + \|\widehat{\phi}(\xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty(|\xi| \geq 1)}) \\ &\quad \times (\|\widehat{\varphi}(\xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} + \|\widehat{\varphi}(\xi)\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty(|\xi| \geq 1)}), \end{aligned}$$

откуда следует первая оценка леммы. Точно так же

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}^{(2)}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, p}} &\leq C \sum_{k, l=1}^m \left\| \int_{|y| \geq 2} (|\xi - y|^\sigma + |y|^\sigma) |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y)| dy \right\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty(|\xi| \leq 1)} \\ &\leq C \|\xi|^\sigma \widehat{\varphi}\|_{\mathbf{L}_\xi^1(|\xi| \geq 1)} \|\widehat{\phi}\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty(|\xi| \geq 1)} + C \|\xi|^\sigma \widehat{\phi}\|_{\mathbf{L}_\xi^1(|\xi| \geq 1)} \|\widehat{\varphi}\|_{\mathbf{L}_\xi^\infty(|\xi| \geq 1)} \\ &\leq C \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}} \|\phi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}} + C \|\phi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}} \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}. \end{aligned}$$

Итак, вторая оценка леммы справедлива. Лемма 5.2 доказана.

Оценим нелинейность вида

$$\widetilde{\mathcal{N}}(\varphi, \phi) = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \sum_{k, l=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} B^{k, l}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_k(\xi - y) \widehat{\phi}_l(y) dy.$$

Обозначим $(\rho)_+ = \max(0, \rho)$.

ЛЕММА 5.3. Пусть символы $B^{k, l}(t, \xi, y)$ нелинейного оператора $\widetilde{\mathcal{N}}(\varphi, \phi)$ удовлетворяют условию

$$|B^{kl}(t, \xi, y)| \leq C t \langle \xi \rangle^\theta \{\xi\}^\omega (\langle \xi - y \rangle^\sigma \{\xi - y\}^\alpha + \langle y \rangle^\sigma \{y\}^\alpha) (\langle t\xi \rangle^{-1} + \langle t(y - a\xi) \rangle^{-1}) \quad (26)$$

для всех $\xi, y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, где a — некоторый постоянный вектор. Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathcal{N}}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}^{\rho-\omega, p}} &\leq C \{t\} \langle t \rangle^{(1-\rho)_+} (\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{\alpha+(\rho-1)_+, 1}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}}) (\|\phi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\ &\quad + C \{t\} \langle t \rangle^{(1-\rho)_+} (\|\phi\|_{\mathbf{A}^{\alpha+(\rho-1)_+, 1}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}}) (\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\ &\quad + C \{t\} \langle t \rangle^{\frac{1}{q}} (\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{\rho+\alpha, q}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, q}}) (\|\phi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\ &\quad + C \{t\} \langle t \rangle^{\frac{1}{q}} (\|\phi\|_{\mathbf{A}^{\rho+\alpha, q}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, q}}) (\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, где $1 \leq p \leq \infty$, $\rho \geq 0$, $1 \leq q < \infty$, в предположении, что правая часть ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $t \in (0, 1)$, как в лемме 2.2, найдем

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathcal{N}}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}^{\rho-\omega, p}} &\leq Ct(\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{\rho+\alpha, 1}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}})(\|\phi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\ &\quad + C(\|\phi\|_{\mathbf{A}^{\rho+\alpha, 1}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}})(\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}). \end{aligned}$$

При всех $t \geq 1$ с помощью условия (26), применяя неравенства Юнга и Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathcal{N}}(\varphi, \phi)\|_{\mathbf{A}^{\rho-\omega, p}} &\leq Ct \sum_{k, l=1}^m \left\| |\xi|^\rho \int_{\mathbb{R}^n} (\langle \xi - y \rangle^\sigma \{\xi - y\}^\alpha + \langle y \rangle^\sigma \{y\}^\alpha) \right. \\ &\quad \times (\langle t\xi \rangle^{-1} + \langle t(y - a\xi) \rangle^{-1}) |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y)| dy \left. \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} \\ &\leq Ct^{(1-\rho)+} \sum_{k, l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (\langle \xi - y \rangle^\sigma \{\xi - y\}^{\alpha+(\rho-1)+} + \langle y \rangle^\sigma \{y\}^{\alpha+(\rho-1)+}) \right. \\ &\quad \times |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y)| dy \left. \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} \\ &\quad + Ct \sum_{k, l=1}^m \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle \xi - y \rangle^\sigma \{\xi - y\}^{\rho+\alpha} + \langle y \rangle^\sigma \{y\}^{\rho+\alpha}}{\langle t(y - a\xi) \rangle} \right. \\ &\quad \times |\widehat{\varphi}_k(t, \xi - y) \widehat{\phi}_l(t, y)| dy \left. \right\|_{\mathbf{L}_\xi^p(|\xi| \leq 1)} \\ &\leq Ct^{(1-\rho)+} (\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{\alpha+(\rho-1)+, 1}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}})(\|\phi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\ &\quad + Ct^{(1-\rho)+} (\|\phi\|_{\mathbf{A}^{\alpha+(\rho-1)+, 1}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}})(\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\ &\quad + Ct^{\frac{1}{q}} (\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{\rho+\alpha, q}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, q}})(\|\phi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\ &\quad + Ct^{\frac{1}{q}} (\|\phi\|_{\mathbf{A}^{\rho+\alpha, q}} + \|\phi\|_{\mathbf{B}^{\sigma, q}})(\|\varphi\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|\varphi\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}). \end{aligned}$$

Лемма 5.3 доказана.

Обратимся к доказательству теоремы 2. Вместе с интегральным уравнением (17) рассмотрим также следующее интегральное уравнение:

$$w(t) = \mathcal{G}_0(t) \widetilde{u} - \int_0^t \mathcal{G}_0(t - \tau) \mathcal{N}_0(w, w)(\tau) d\tau. \quad (27)$$

Заметим, что теорема 1 применима также к уравнению (27), если мы возьмем $\sigma = \alpha$, $\nu = \delta$, $\theta = \omega$. Следовательно, имеем

$$\|w\|_{\mathbf{X}_0} \leq C\varepsilon,$$

где мы ввели норму

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{\mathbf{X}_0} &= \sup_{\rho \in [0, \alpha + \gamma]} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \langle t \rangle^{\frac{\rho}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\ &\quad + \sup_{s \in [0, \alpha]} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \{t\}^{\frac{s}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \langle t \rangle^{\frac{n + \alpha + \gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{B}^{s, p}}. \end{aligned}$$

Для решения $u(t, x)$ интегрального уравнения (17), полученного в теореме 1, справедлива оценка $\|u\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon$. Таким образом, в частности, имеем оценки для всех $t > 0$:

$$\|u(t)\|_{\mathbf{B}^{s,p}} \leq C\varepsilon \{t\}^{-\frac{s}{p}} \langle t \rangle^{-\frac{n+\alpha+\gamma}{\delta} - \frac{n}{\delta p}},$$

где $s \in [0, \sigma]$, $1 \leq p \leq \infty$, и

$$\|w(t)\|_{\mathbf{B}^{s,p}} \leq C\varepsilon \{t\}^{-\frac{s}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \langle t \rangle^{-\frac{n+\alpha+\gamma}{\delta} - \frac{n}{\delta p}},$$

где $s \in [0, \alpha]$, $1 \leq p \leq \infty$. Эти оценки дают достаточное временное убывание для остатка $v(t) = u(t) - w(t)$ в $\mathbf{B}$ -нормах

$$\|v(t)\|_{\mathbf{B}^{0,1}} \leq \|u(t)\|_{\mathbf{B}^{0,1}} + \|w(t)\|_{\mathbf{B}^{0,1}} \leq C\varepsilon (1 + \{t\}^{-\frac{n}{\delta}}) \langle t \rangle^{-\frac{2n+\alpha+\gamma}{\delta}} \quad (28)$$

для всех $t > 0$. Оценим разность $v(t) = u(t) - w(t)$ в $\mathbf{A}^{\rho,p}$ -нормах и покажем, что

$$\|v(t)\|_{\mathbf{A}^{\rho,p}} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \quad (29)$$

для всех $t > 0$, где $\rho \in [0, \alpha]$, $1 \leq p \leq \infty$. Представим $\mathcal{N}(u, u) = \mathcal{N}^{(1)}(u, u) + \mathcal{N}^{(2)}(u, u)$ и $\mathcal{N}_0(w, w) = \mathcal{N}_0^{(1)}(w, w) + \mathcal{N}_0^{(2)}(w, w)$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{(1)}(u, u) &= \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \sum_{k,l=1}^m \int_{|y| \leq 2} A^{k,l}(t, \xi, y) \widehat{u}_k(t, \xi - y) \widehat{u}_l(t, y) dy, \\ \mathcal{N}^{(2)}(u, u) &= \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \sum_{k,l=1}^m \int_{|y| \geq 2} A^{k,l}(t, \xi, y) \widehat{u}_k(t, \xi - y) \widehat{u}_l(t, y) dy, \end{aligned}$$

нелинейности $\mathcal{N}_0^{(1)}(w, w)$, $\mathcal{N}_0^{(2)}(w, w)$ определяются аналогично. Тогда для разности $v(t) = u(t) - w(t)$ получим из (17) и (27)

$$\begin{aligned} v(t) &= (\mathcal{G}(t) - \mathcal{G}_0(t))\widetilde{u} - \int_0^t (\mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}^{(2)}(u, u) - \mathcal{G}_0(t-\tau)\mathcal{N}_0^{(2)}(w, w)) d\tau \\ &\quad - \int_0^t (\mathcal{G}(t-\tau) - \mathcal{G}_0(t-\tau))\mathcal{N}^{(1)}(u, u)(\tau) d\tau \\ &\quad - \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau)(\mathcal{N}^{(1)}(u, u)(\tau) - \mathcal{N}_0^{(1)}(u, u)(\tau)) d\tau \\ &\quad - \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau)(\mathcal{N}_0^{(1)}(u, u)(\tau) - \mathcal{N}_0^{(1)}(w, w)(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (30)$$

Благодаря первой оценке леммы 5.1 имеем

$$\|(\mathcal{G}(t) - \mathcal{G}_0(t))\widetilde{u}\|_{\mathbf{A}^{\rho,p}} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \|\widetilde{u}\|_{\mathbf{A}^{0,\infty}}. \quad (31)$$

Второе слагаемое в (30) оценим с помощью лемм 2.1 и 5.2 следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{N}^{(2)}(u, u) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\
& \leq C \langle t \rangle^{1-\tilde{\lambda}-\frac{\rho+\omega}{\delta}-\frac{n}{\delta p}} \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^{\varkappa} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda}+\frac{n}{\delta q}} \|\mathcal{N}^{(2)}(u, u)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, q}}) \\
& \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta}-\frac{n}{\delta p}} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^{\varkappa} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda}+\frac{n}{\delta}} \|u\|_{\mathbf{B}^{\sigma, 1}} \|u\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
& \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta}-\frac{n}{\delta p}} \|u\|_{\mathbf{X}}^2 \leq C \varepsilon^2 \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta}-\frac{n}{\delta p}}, \tag{32}
\end{aligned}$$

где $\varkappa = \frac{\sigma}{\nu}$, $\tilde{\lambda} = \lambda + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{n+\alpha+\gamma}{\delta}$, $\omega > \gamma > 0$. Аналогично имеем

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau) \mathcal{N}_0^{(2)}(w, w) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\
& \leq C \langle t \rangle^{1-\tilde{\lambda}-\frac{\rho+\omega}{\delta}-\frac{n}{\delta p}} \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^{\varkappa_0} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda}+\frac{n}{\delta q}} \|\mathcal{N}_0^{(2)}(w, w)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, q}}) \\
& \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta}-\frac{n}{\delta p}} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^{\varkappa_0} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda}+\frac{n}{\delta}} \|w\|_{\mathbf{B}^{\alpha, 1}} \|w\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
& \leq C \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta}-\frac{n}{\delta p}} \|w\|_{\mathbf{X}_0}^2 \leq C \varepsilon^2 \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta}-\frac{n}{\delta p}}, \tag{33}
\end{aligned}$$

где $\varkappa_0 = \frac{\alpha+n}{\delta}$. Применяя лемму 5.1, находим (взяв $\lambda = 1 - \frac{\omega}{\delta}$)

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t (\mathcal{G}(t-\tau) - \mathcal{G}_0(t-\tau)) \mathcal{N}^{(1)}(u, u)(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\
& \leq C \langle t \rangle^{1-\lambda-\frac{\rho+\omega+\gamma}{\delta}-\frac{n}{\delta p}} \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\langle \tau \rangle^{\lambda+\frac{n}{\delta q}} \|\mathcal{N}^{(1)}(u, u)(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, q}}) \\
& \leq C \varepsilon^2 \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta}-\frac{n}{\delta p}}, \tag{34}
\end{aligned}$$

поскольку в силу леммы 5.2 имеем

$$\begin{aligned}
& \langle \tau \rangle^{\lambda+\frac{n}{\delta p}} \|\mathcal{N}^{(1)}(u, u)(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, p}} \\
& \leq C \langle \tau \rangle^{\frac{n+\alpha}{\delta}} (\|u(\tau)\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \|u(\tau)\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \langle \tau \rangle^{\frac{n}{\delta p}} (\|u(\tau)\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|u(\tau)\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
& \leq C \|u\|_{\mathbf{X}}^2 \leq C \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Подобным образом, применяя лемму 2.1, получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau) (\mathcal{N}^{(1)}(u, u)(\tau) - \mathcal{N}_0^{(1)}(u, u)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\
& \leq C \langle t \rangle^{1-\tilde{\lambda}-\frac{\rho+\omega}{\delta}-\frac{n}{\delta p}} \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda}+\frac{n}{\delta q}} \|\mathcal{N}^{(1)}(u, u)(\tau) - \mathcal{N}_0^{(1)}(u, u)(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, q}}) \\
& \leq C \varepsilon^2 \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta}-\frac{n}{\delta p}}, \tag{35}
\end{aligned}$$

поскольку, действуя по аналогии с доказательством леммы 2.2 и леммы 5.2 и заменяя в них (6) на условие (8), имеем

$$\begin{aligned}
& \langle t \rangle^{\tilde{\lambda} + \frac{n}{\delta p}} \|\mathcal{N}^{(1)}(u, u)(t) - \mathcal{N}_0^{(1)}(u, u)(t)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, p}} \\
& \leq C \langle t \rangle^{\frac{\alpha + \gamma + n}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} (\|u(t)\|_{\mathbf{A}^{\alpha + \gamma, 1}} + \|u(t)\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) (\|u(t)\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|u(t)\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
& \quad + C \langle t \rangle^{\frac{\alpha + n}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} (\|u(t)\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \|u(t)\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) (\|u(t)\|_{\mathbf{A}^{0, p}} + \|u(t)\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
& \leq C \|u\|_{\mathbf{X}}^2.
\end{aligned}$$

Наконец, с помощью леммы 2.1 найдем для $\rho \in [0, \alpha]$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\begin{aligned}
& \langle t \rangle^{\frac{\rho + \gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t - \tau) (\mathcal{N}_0^{(1)}(u, u)(\tau) - \mathcal{N}_0^{(1)}(w, w)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\
& \leq C \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda} + \frac{n}{\delta q}} \|\mathcal{N}_0^{(1)}(u, u)(\tau) - \mathcal{N}_0^{(1)}(w, w)(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, q}}) \\
& \leq C \varepsilon^2 + C \varepsilon \sup_{\rho \in [0, \alpha]} \sup_{1 \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} \langle \tau \rangle^{\frac{\rho + \gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta q}} \|v(\tau)\|_{\mathbf{A}^{\rho, q}}, \tag{36}
\end{aligned}$$

поскольку, используя лемму 5.2, получаем

$$\begin{aligned}
& \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda} + \frac{n}{\delta q}} \|\mathcal{N}_0^{(1)}(u, u)(\tau) - \mathcal{N}_0^{(1)}(w, w)(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, q}} \\
& \leq C \langle \tau \rangle^{\frac{n + \alpha + \gamma}{\delta}} (\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \|u\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}} + \|w\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
& \quad \times \langle \tau \rangle^{\frac{n}{\delta q}} (\|u\|_{\mathbf{A}^{0, q}} + \|w\|_{\mathbf{A}^{0, q}} + \|u\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}} + \|w\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
& \quad + C \langle \tau \rangle^{\frac{\alpha + n}{\delta}} (\|u\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \|w\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \|u\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}} + \|w\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
& \quad \times \langle \tau \rangle^{\frac{\gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta q}} (\|v(\tau)\|_{\mathbf{A}^{0, q}} + \|u\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}} + \|w\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
& \leq (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}_0})^2 + C \sup_{\rho \in [0, \alpha]} \sup_{1 \leq p \leq q} \langle \tau \rangle^{\frac{\rho + \gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|v(\tau)\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} (\|u\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}_0}) \\
& \leq C \varepsilon^2 + C \varepsilon \sup_{\rho \in [0, \alpha]} \sup_{1 \leq p \leq q} \langle \tau \rangle^{\frac{\rho + \gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|v(\tau)\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, собирая вместе неравенства (31)–(36) и подставляя их в представление (30), получаем

$$\begin{aligned}
& \sup_{\rho \in [0, \alpha]} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \langle t \rangle^{\frac{\rho + \gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|v(t)\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\
& \leq C \varepsilon^2 + C \varepsilon \sup_{\rho \in [0, \alpha]} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \langle t \rangle^{\frac{\rho + \gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|v(t)\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}},
\end{aligned}$$

откуда следует оценка (29). Будем искать главный член асимптотики при больших временах в виде суперпозиции автомодельных решений

$$h(t, x) = \sum_{j=1}^m h^{(j)}(t, x) = t^{-\frac{n}{\delta}} \sum_{j=1}^m f^{(j)}((x - b^{(j)}t)t^{-\frac{1}{\delta}}),$$

где автомодельные решения $h^{(j)}$, построенные в § 4, удовлетворяют уравнениям

$$h^{(j)}(t) = \mathcal{G}^{(j)}(t) M \delta_0(x) - \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t - \tau) \mathcal{N}_0(h^{(j)}, h^{(j)})(\tau) d\tau$$

при $j = 1, \dots, m$, а операторы Грина

$$\mathcal{G}^{(j)}(t)\phi = \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x}(e^{-it\xi b^{(j)} - t\mu_j|\xi|^\delta} P^{(j)}(0)\widehat{\phi}(\xi)),$$

так что

$$\mathcal{G}_0(t) = \sum_{j=1}^m \mathcal{G}^{(j)}(t).$$

Аналогично доказательству теоремы 1 легко получаем оценку

$$\|h\|_{\mathbf{X}_0} \leq C\varepsilon.$$

Тогда для разности $h(t) - w(t)$ получим из (27)

$$\begin{aligned} h(t) - w(t) &= \mathcal{G}_0(t) \overset{\circ}{u} - \int_0^t \mathcal{G}_0(t - \tau) (\mathcal{N}_0(h, h)(\tau) - \mathcal{N}_0(w, w)(\tau)) d\tau \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t - \tau) (\mathcal{N}_0(h^{(j)}, h^{(j)})(\tau) - \mathcal{N}_0(h, h)(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (37)$$

где начальное условие $\overset{\circ}{u}(x) = \widetilde{u}(x) - M\delta_0(x)$. Ввиду условия теоремы 2 имеем оценку

$$\|\overset{\circ}{u}\|_{\mathbf{A}^{-\gamma, \infty}} + \|\overset{\circ}{u}\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}} \leq \varepsilon,$$

которая означает, что начальные данные $\widetilde{u}(x)$ имеют асимптотическое представление $\widehat{\widetilde{u}}(\xi) = M + O(|\xi|^\gamma)$ при $\xi \rightarrow 0$. Используя первую и третью оценки леммы 2.1, находим

$$\|\mathcal{G}_0(t) \overset{\circ}{u}\|_{\mathbf{X}_\gamma} \leq C(\|\overset{\circ}{u}\|_{\mathbf{A}^{-\gamma, \infty}} + \|\overset{\circ}{u}\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}), \quad (38)$$

где мы ввели норму

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{\mathbf{X}_\gamma} &= \sup_{\rho \in [0, \alpha]} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \langle t \rangle^{\frac{\rho + \gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\ &\quad + \sup_{s \in [0, \alpha]} \sup_{1 \leq p \leq \infty} \sup_{t > 0} \{t\}^{\frac{s}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \langle t \rangle^{\frac{n + \alpha + \gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{B}^{s, p}}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в уравнении (37) оценим с помощью леммы 2.1, взяв $q = \infty$:

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t - \tau) (\mathcal{N}_0(h, h)(\tau) - \mathcal{N}_0(w, w)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \leq C \langle t \rangle^{1 - \widetilde{\lambda} - \frac{\rho + \omega}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \\ &\quad \times \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} (\{\tau\}^{\omega} \langle \tau \rangle^{\widetilde{\lambda} + \frac{n}{\delta q}} \|\mathcal{N}_0(h, h)(\tau) - \mathcal{N}_0(w, w)(\tau)\|_{\mathbf{A}^{-\omega, q}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau) (\mathcal{N}_0(h, h)(\tau) - \mathcal{N}_0(w, w)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{B}^{s,p}} \leq C \{t\}^{1-\varkappa_0 - \frac{s+\omega}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \langle t \rangle^{-\tilde{\lambda} - \frac{n}{\delta p}} \\
& \quad \times \left(\sup_{\tau > 0} \{ \tau \}^{\varkappa_0} \| \mathcal{N}_0(h, h)(\tau) - \mathcal{N}_0(w, w)(\tau) \|_{\mathbf{B}^{-\omega, \infty}} \right. \\
& \quad \left. + \sup_{\tau > 0} \{ \tau \}^{\varkappa_0 + \frac{n}{\delta p}} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda} + \frac{n}{\delta p}} \| \mathcal{N}_0(h, h)(\tau) - \mathcal{N}_0(w, w)(\tau) \|_{\mathbf{B}^{-\omega, p}} \right)
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$, $s, \rho \in [0, \alpha]$, $1 \leq p \leq \infty$, где $\varkappa_0 = 1 - \frac{\omega}{\delta}$, $\tilde{\lambda} = \lambda + \frac{\gamma}{\delta}$, $\lambda = 1 - \frac{\omega}{\delta}$.
Поскольку

$$\mathcal{N}_0(h, h) - \mathcal{N}_0(w, w) = \frac{1}{2} \mathcal{N}_0(h - w, h + w) + \frac{1}{2} \mathcal{N}_0(h + w, h - w),$$

применяя лемму 2.2, имеем

$$\begin{aligned}
& \{ \tau \}^{\varkappa_0} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda} + \frac{n}{\delta q}} \| \mathcal{N}_0(h, h)(\tau) - \mathcal{N}_0(w, w)(\tau) \|_{\mathbf{A}^{-\omega, q}} \\
& \leq C \{ \tau \}^{\frac{n+\alpha}{\delta}} \langle \tau \rangle^{\frac{n+\alpha+\gamma}{\delta}} (\|h - w\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \|h - w\|_{\mathbf{B}^{\alpha, 1}}) \\
& \quad \times \langle \tau \rangle^{\frac{n}{\delta q}} (\|h + w\|_{\mathbf{A}^{0, q}} + \|h + w\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
& \quad + C \{ \tau \}^{\frac{n+\alpha}{\delta}} \langle \tau \rangle^{\frac{n+\alpha}{\delta}} (\|h + w\|_{\mathbf{A}^{\alpha, 1}} + \|h + w\|_{\mathbf{B}^{\alpha, 1}}) \\
& \quad \times \langle \tau \rangle^{\frac{\gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta q}} (\|h - w\|_{\mathbf{A}^{0, q}} + \|h - w\|_{\mathbf{B}^{0, \infty}}) \\
& \leq C \|h - w\|_{\mathbf{X}_\gamma} (\|h\|_{\mathbf{X}_0} + \|w\|_{\mathbf{X}_0}) + C (\|h\|_{\mathbf{X}_0} + \|w\|_{\mathbf{X}_0})^2, \\
& \{ \tau \}^{\varkappa_0 + \frac{n}{\delta q}} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda} + \frac{n}{\delta q}} \| \mathcal{N}_0(h, h)(\tau) - \mathcal{N}_0(w, w)(\tau) \|_{\mathbf{B}^{-\omega, q}} \\
& \leq C \{ \tau \}^{\frac{n+\alpha}{\delta}} \langle \tau \rangle^{\frac{n+\alpha+\gamma}{\delta}} (\|h\|_{\mathbf{A}^{\alpha+\gamma, 1}} + \|w\|_{\mathbf{A}^{\alpha+\gamma, 1}} + \|h\|_{\mathbf{B}^{\alpha, 1}} + \|w\|_{\mathbf{B}^{\alpha, 1}}) \\
& \quad \times \{ \tau \}^{\frac{n}{\delta q}} \langle \tau \rangle^{\frac{n}{\delta q}} (\|h\|_{\mathbf{A}^{0, q}} + \|w\|_{\mathbf{A}^{0, q}} + \|h\|_{\mathbf{B}^{0, q}} + \|w\|_{\mathbf{B}^{0, q}}) \\
& \leq C (\|h\|_{\mathbf{X}_0} + \|w\|_{\mathbf{X}_0})^2.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau) (\mathcal{N}_0(h, h)(\tau) - \mathcal{N}_0(w, w)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_\gamma} \leq C\varepsilon^2 + C\varepsilon \|h - w\|_{\mathbf{X}_\gamma}. \quad (39)$$

Для последнего слагаемого в (37) запишем

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t-\tau) (\mathcal{N}_0(h^{(j)}, h^{(j)})(\tau) - \mathcal{N}_0(h, h)(\tau)) d\tau \\
& = \sum_{k, l=1, l \neq j}^m \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t-\tau) \mathcal{N}_0(h^{(k)}, h^{(l)})(\tau) d\tau \\
& \quad + \sum_{k=1, k \neq j}^m \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t-\tau) \mathcal{N}_0(h^{(k)}, h^{(j)})(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Применение преобразования Фурье дает

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t-\tau) \mathcal{N}_0(h^{(k)}, h^{(l)})(\tau) d\tau &= \int_0^t d\tau e^{-i(t-\tau)\xi b^{(j)} - (t-\tau)\mu_j |\xi|^\delta} P^{(j)}(0) \\ &\times \sum_{k', l'=1}^m \int A_0^{k', l'}(\xi, y) \widehat{f_{k'}^{(k)}}(\tau^{\frac{1}{\delta}}(\xi - y)) \widehat{f_{l'}^{(l)}}(\tau^{\frac{1}{\delta}} y) e^{-i\tau(\xi - y)b^{(k)} - i\tau y b^{(l)}} dy, \end{aligned}$$

поскольку в силу (22) имеем

$$\mathcal{F} h^{(k)} = e^{-it\xi b^{(k)}} \widehat{f^{(k)}}(t^{\frac{1}{\delta}} \xi).$$

Чтобы оценить убывание по времени при $t \geq 1$, проинтегрируем по частям, пользуясь тождеством

$$e^{\tau S_{j,k,l}} = (1 + \tau S_{j,k,l})^{-1} \frac{d}{d\tau} (\tau e^{\tau S_{j,k,l}}),$$

где

$$S_{j,k,l} = i(b^{(j)} - b^{(k)})\xi + i(b^{(k)} - b^{(l)})y + \mu_j |\xi|^\delta,$$

причем $(b^{(j)} - b^{(k)})^2 + (b^{(k)} - b^{(l)})^2 \neq 0$. Получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t-\tau) \mathcal{N}_0(h^{(k)}, h^{(l)})(\tau) d\tau &= e^{-it\xi b^{(j)} - t\mu_j |\xi|^\delta} P^{(j)}(0) \\ &\times \sum_{k', l'=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} e^{tS_{j,k,l}} \frac{tA_0^{k', l'}(\xi, y)}{1 + tS_{j,k,l}} \widehat{f_{k'}^{(k)}}(t^{\frac{1}{\delta}}(\xi - y)) \widehat{f_{l'}^{(l)}}(t^{\frac{1}{\delta}} y) dy \\ &- e^{-it\xi b^{(j)} - t\mu_j |\xi|^\delta} P^{(j)}(0) \int_0^t d\tau \sum_{k', l'=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \tau e^{\tau S_{j,k,l}} A_0^{k', l'}(\xi, y) \\ &\times \frac{d}{d\tau} ((1 + \tau S_{j,k,l})^{-1} \widehat{f_{k'}^{(k)}}(\tau^{\frac{1}{\delta}}(\xi - y)) \widehat{f_{l'}^{(l)}}(\tau^{\frac{1}{\delta}} y)) dy, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t-\tau) \mathcal{N}_0(h^{(k)}, h^{(l)})(\tau) d\tau &= \overline{\mathcal{F}} P^{(j)}(0) \sum_{k', l'=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \frac{tA_0^{k', l'}(\xi, y)}{1 + tS_{j,k,l}} e^{it(\xi - y)b^{(k)} + ityb^{(l)}} \\ &\times \widehat{f_{k'}^{(k)}}(t^{\frac{1}{\delta}}(\xi - y)) \widehat{f_{l'}^{(l)}}(t^{\frac{1}{\delta}} y) dy \\ &+ \overline{\mathcal{F}} \sum_{k', l'=1}^m \int_0^t d\tau e^{-i(t-\tau)\xi b^{(j)} - (t-\tau)\mu_j |\xi|^\delta} P^{(j)}(0) \\ &\times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\tau A_0^{k', l'}(\xi, y) S_{j,k,l}(\xi, y)}{(1 + \tau S_{j,k,l}(\xi, y))^2} e^{it(\xi - y)b^{(k)} + ityb^{(l)}} \\ &\times \widehat{f_{k'}^{(k)}}(\tau^{\frac{1}{\delta}}(\xi - y)) \widehat{f_{l'}^{(l)}}(\tau^{\frac{1}{\delta}} y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{\mathcal{F}} \sum_{k', l'=1}^m \int_0^t d\tau e^{-i(t-\tau)\xi b^{(j)} - (t-\tau)\mu_j |\xi|^\delta} P^{(j)}(0) \\
& \times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\tau A_0^{k', l'}(\xi, y)}{1 + \tau S_{j, k, l}(\xi, y)} e^{it(\xi-y)b^{(k)} + ityb^{(l)}} \partial_\tau \left(\widehat{f_{k'}^{(k)}}(\tau^{\frac{1}{\delta}}(\xi-y)) \widehat{f_{l'}^{(l)}}(\tau^{\frac{1}{\delta}}y) \right) dy.
\end{aligned}$$

Введем оператор $\mathcal{D}_k = \partial_\tau + b^{(k)} \nabla_x$, тогда из (22) найдем

$$\partial_\tau \widehat{f^{(k)}}(\tau^{\frac{1}{\delta}} \xi) = \partial_\tau (e^{i\tau \xi b^{(k)}} \mathcal{F} h^{(k)}) = e^{i\tau \xi b^{(k)}} (i \xi b^{(k)} + \partial_\tau) \mathcal{F} h^{(k)} = e^{i\tau \xi b^{(k)}} \mathcal{F} \mathcal{D}_k h^{(k)}.$$

Обозначив нелинейности

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{j, k, l}(\varphi, \phi) &= \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \sum_{k', l'=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} B_{j, k, l}^{k', l'}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_{k'}(t, \xi - y) \widehat{\phi}_{l'}(t, y) dy, \\
\widetilde{\mathcal{N}}_{j, k, l}(\varphi, \phi) &= \overline{\mathcal{F}}_{\xi \rightarrow x} \sum_{k', l'=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{B}_{j, k, l}^{k', l'}(t, \xi, y) \widehat{\varphi}_{k'}(t, \xi - y) \widehat{\phi}_{l'}(t, y) dy
\end{aligned}$$

с символами

$$B_{j, k, l}^{k', l'}(t, \xi, y) = \frac{t A_0^{k', l'}(\xi, y)}{1 + t S_{j, k, l}(\xi, y)}, \quad \widetilde{B}_{j, k, l}^{k', l'}(t, \xi, y) = \frac{t A_0^{k', l'}(\xi, y) S_{j, k, l}(\xi, y)}{(1 + t S_{j, k, l}(\xi, y))^2},$$

получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t - \tau) \mathcal{N}_0(h^{(k)}, h^{(l)})(\tau) d\tau = \mathcal{G}^{(j)}(0) \widetilde{\mathcal{N}}_{j, k, l}(h^{(k)}, h^{(l)}) \\
& + \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t - \tau) \widetilde{\mathcal{N}}_{j, k, l}(h^{(k)}, h^{(l)})(\tau) d\tau \\
& + \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t - \tau) \mathcal{N}_{j, k, l}(\mathcal{D}_k h^{(k)}, h^{(l)})(\tau) d\tau \\
& + \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t - \tau) \mathcal{N}_{j, k, l}(h^{(k)}, \mathcal{D}_l h^{(l)})(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Применяя вторую оценку леммы 2.1 с $\lambda_1 = 1 - \frac{\omega - \beta - \gamma}{\delta}$, $\beta + \gamma < \min(1, \omega)$, $\varkappa_1 \in (0, 1)$, находим

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t - \tau) \mathcal{N}_0(h^{(k)}, h^{(l)})(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \leq \| \mathcal{N}_{j, k, l}(h^{(k)}, h^{(l)}) \|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \\
& + \langle t \rangle^{1 - \lambda_1 - \frac{\rho + \omega - \beta}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} \{ \tau \}^{\varkappa_1} \langle \tau \rangle^{\lambda_1 + \frac{n}{\delta q}} (\| \widetilde{\mathcal{N}}_{j, k, l}(h^{(k)}, h^{(l)})(\tau) \|_{\mathbf{A}^{\beta - \omega, q}} \\
& + \| \mathcal{N}_{j, k, l}(\mathcal{D}_k h^{(k)}, h^{(l)})(\tau) \|_{\mathbf{A}^{\beta - \omega, q}} + \| \mathcal{N}_{j, k, l}(h^{(k)}, \mathcal{D}_l h^{(l)})(\tau) \|_{\mathbf{A}^{\beta - \omega, q}})
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$, $\rho \in [0, \alpha]$, $1 \leq p \leq \infty$. Заметим, что ввиду (22) имеем

$$\tau \mathcal{F} \mathcal{D}_k h^{(k)}(\tau) = e^{-i\tau \xi b^{(k)}} \tau \partial_\tau \widehat{f^{(k)}}(\tau^{\frac{1}{\delta}} \xi) = \delta e^{-i\tau \xi b^{(k)}} (\xi \nabla_\xi) \widehat{f^{(k)}}(\xi \tau^{\frac{1}{\delta}}),$$

следовательно, пользуясь результатом § 4, получаем оценки норм

$$\begin{aligned}
& \langle \tau \rangle^{\frac{\rho}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} (\| h^{(k)}(\tau) \|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} + \tau \| \mathcal{D}_k h^{(k)}(\tau) \|_{\mathbf{A}^{\rho, p}}) \\
& + \{ \tau \}^{\frac{s}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} \langle \tau \rangle^{\frac{n + \alpha + \gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta p}} (\| h^{(k)}(\tau) \|_{\mathbf{B}^{s, p}} + \tau \| \mathcal{D}_k h^{(k)}(\tau) \|_{\mathbf{B}^{s, p}}) \leq C \| \widehat{f^{(k)}} \|_{\mathbf{Z}} \leq C \varepsilon
\end{aligned}$$

для всех $\tau > 0$, $\rho \in [0, 2\delta]$, $1 \leq p \leq \infty$. Так как символы $B_{j,k,l}^{k',l'}(t, \xi, y)$, $\tilde{B}_{j,k,l}^{k',l'}(t, \xi, y)$ удовлетворяют условиям (26), с помощью леммы 5.3 находим

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{N}_{j,k,l}(h^{(k)}, h^{(l)})(t)\|_{\mathbf{A}^{\rho,p}} \\ & \leq C t^{(1-\rho-\omega)_+} (\|h\|_{\mathbf{A}^{\alpha+(\rho+\omega-1)_+,1}} + \|h\|_{\mathbf{B}^{\sigma,1}}) (\|h\|_{\mathbf{A}^{0,p}} + \|h\|_{\mathbf{B}^{0,\infty}}) \\ & \quad + C t^{\frac{1}{q}} (\|h\|_{\mathbf{A}^{\rho+\omega+\alpha,q}} + \|h\|_{\mathbf{B}^{\sigma,q}}) (\|h\|_{\mathbf{A}^{0,p}} + \|h\|_{\mathbf{B}^{0,\infty}}) \\ & \leq C \varepsilon^2 t^{(1-\rho-\omega)_+ - \frac{\alpha+(\rho+\omega-1)_+}{\delta} - \frac{n}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} + C \varepsilon^2 t^{\frac{1}{q} - \frac{\rho+\omega+\alpha}{\delta} - \frac{n}{\delta q} - \frac{n}{\delta p}} \leq C \varepsilon^2 t^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \end{aligned}$$

для всех $t \geq 1$, поскольку

$$(1 - \rho - \omega)_+ - \frac{\alpha + (\rho + \omega - 1)_+}{\delta} - \frac{n}{\delta} < -\frac{\rho + \gamma}{\delta}$$

и

$$\frac{1}{q} - \frac{\rho + \omega + \alpha}{\delta} - \frac{n}{\delta q} < -\frac{\rho + \gamma}{\delta}$$

для всех $\rho \geq 0$, если выбрать $0 < \gamma \leq (\delta - 1) \min(1, \omega)$ и $\gamma \leq (\omega + \alpha)(1 - \frac{1}{q})$. Итак, мы предположим, что $0 < \gamma < \frac{1}{\delta}(\min(1, \omega))^2$. Также с помощью леммы 5.3 с $\lambda_1 = 1 - \frac{\omega - \beta - \gamma}{\delta}$, $\beta + \gamma < \min(1, \omega)$, $\varkappa_1 = \frac{n + \alpha}{\delta} + \beta$, $\beta \in (0, \frac{\omega}{\delta})$, имеем

$$\begin{aligned} & \{\tau\}^{\varkappa_1} \langle \tau \rangle^{\lambda_1 + \frac{n}{\delta p}} \|\widetilde{\mathcal{N}}_{j,k,l}(h^{(k)}, h^{(l)})(\tau)\|_{\mathbf{A}^{\beta-\omega,p}} \\ & \leq C \langle \tau \rangle^{-\beta} \{\tau\}^{\varkappa_1} \langle \tau \rangle^{\lambda_1 + \frac{n}{\delta p}} (\|h^{(k)}\|_{\mathbf{A}^{\alpha,1}} + \|h^{(k)}\|_{\mathbf{B}^{\alpha,1}}) (\|h^{(l)}\|_{\mathbf{A}^{0,p}} + \|h^{(l)}\|_{\mathbf{B}^{0,\infty}}) \\ & \quad + C \langle \tau \rangle^{\frac{1}{q}-1} \{\tau\}^{\varkappa_1} \langle \tau \rangle^{\lambda_1 + \frac{n}{\delta p}} (\|h^{(k)}\|_{\mathbf{A}^{\beta+\alpha,q}} + \|h^{(k)}\|_{\mathbf{B}^{\alpha,q}}) (\|h^{(l)}\|_{\mathbf{A}^{0,p}} + \|h^{(l)}\|_{\mathbf{B}^{0,\infty}}) \\ & \leq C \varepsilon^2 \langle \tau \rangle^{-\beta + \lambda_1 - \frac{n + \alpha}{\delta}} + C \varepsilon^2 \langle \tau \rangle^{\frac{1}{q}-1 + \lambda_1 - \frac{\beta + \alpha}{\delta} - \frac{n}{\delta q}} \leq C \varepsilon^2, \end{aligned}$$

поскольку

$$1 - \beta - \frac{\omega - \beta - \gamma}{\delta} - \frac{\alpha + n}{\delta} \leq 0$$

и

$$\frac{1}{q} - \frac{\omega - \beta - \gamma}{\delta} - \frac{\beta + \alpha}{\delta} - \frac{n}{\delta q} \leq 0,$$

если выбрать $0 < \gamma \leq \beta(\delta - 1)$ и $\gamma \leq (\omega + \alpha)(1 - \frac{1}{q})$. Аналогично, применяя лемму 5.3 с $\varkappa_1 = \frac{n + \alpha}{\delta} + \beta < 1$, $\beta \in (0, \frac{\omega}{\delta})$, получаем

$$\begin{aligned} & \{\tau\}^{\varkappa_1} \langle \tau \rangle^{\lambda_1 + \frac{n}{\delta p}} \|\mathcal{N}_{j,k,l}(\mathcal{D}_k h^{(k)}, h^{(l)})(\tau) + \mathcal{N}_{j,k,l}(h^{(k)}, \mathcal{D}_l h^{(l)})(\tau)\|_{\mathbf{A}^{\beta-\omega,p}} \\ & \leq C \tau \langle \tau \rangle^{-\beta} \{\tau\}^{\varkappa_1} \langle \tau \rangle^{1 - \frac{\omega - \beta - \gamma}{\delta}} (\|\mathcal{D}_k h^{(k)}\|_{\mathbf{A}^{\alpha,1}} + \|\mathcal{D}_k h^{(k)}\|_{\mathbf{B}^{\sigma,1}}) \\ & \quad \times \langle \tau \rangle^{\frac{n}{\delta p}} (\|h^{(l)}\|_{\mathbf{A}^{0,p}} + \|h^{(l)}\|_{\mathbf{B}^{0,\infty}}) \\ & \quad + C \tau \langle \tau \rangle^{\frac{1}{q}} \{\tau\}^{\varkappa_1} \langle \tau \rangle^{-\frac{\omega - \beta - \gamma}{\delta}} (\|\mathcal{D}_k h^{(k)}\|_{\mathbf{A}^{\alpha+\beta,q}} + \|\mathcal{D}_k h^{(k)}\|_{\mathbf{B}^{\alpha,q}}) \\ & \quad \times \langle \tau \rangle^{\frac{n}{\delta p}} (\|h^{(l)}\|_{\mathbf{A}^{0,p}} + \|h^{(l)}\|_{\mathbf{B}^{0,\infty}}) \\ & \leq C \varepsilon^2 \langle \tau \rangle^{-\beta + \lambda_1 - \frac{n + \alpha}{\delta}} + C \varepsilon^2 \langle \tau \rangle^{\frac{1}{q}-1 + \lambda_1 - \frac{\beta + \alpha}{\delta} - \frac{n}{\delta q}} \leq C \varepsilon^2 \end{aligned}$$

для всех $\tau > 0$, поскольку

$$1 - \beta - \frac{\omega - \beta - \gamma}{\delta} - \frac{\alpha + n}{\delta} \leq 0$$

и

$$\frac{1}{q} - \frac{\omega - \beta - \gamma}{\delta} - \frac{\beta + \alpha}{\delta} - \frac{n}{\delta q} \leq 0,$$

если взять $0 < \gamma \leq \beta(\delta - 1)$ и $\gamma \leq (\omega + \alpha)(1 - \frac{1}{q})$. Все эти условия на γ выполнены, если мы потребуем, чтобы $0 < \gamma < \frac{1}{\delta}(\min(1, \omega))^2$ и $\beta < \frac{\omega}{\delta}$. Итак, получаем

$$\left\| \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t - \tau) \mathcal{N}_0(h^{(k)}, h^{(l)})(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{A}^{\rho, p}} \leq C\varepsilon^2 \langle t \rangle^{-\frac{\rho+\gamma}{\delta} - \frac{n}{\delta p}}.$$

Как и выше, с помощью леммы 2.1 с $q = \infty$, $\varkappa_2 = \tilde{\lambda} = 1 - \frac{\omega - \gamma}{\delta}$ находим

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t - \tau) (\mathcal{N}_0(h^{(j)}, h^{(j)})(\tau) - \mathcal{N}_0(h, h)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{B}^{s, p}} \\ & \leq C \{t\}^{1 - \varkappa_2 - \frac{s+\omega}{\delta} - \frac{n}{\delta p}} \langle t \rangle^{-\tilde{\lambda} - \frac{n}{\delta p}} \\ & \quad \times \sup_{p \leq q \leq \infty} \sup_{\tau > 0} \left(\{ \tau \}^{\varkappa_2 + \frac{n}{\delta q}} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda} + \frac{n}{\delta q}} \|\mathcal{N}_0(h^{(j)}, h^{(j)})(\tau) - \mathcal{N}_0(h, h)(\tau)\|_{\mathbf{B}^{-\omega, q}} \right) \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, $s \in [0, \alpha]$, $1 \leq p \leq \infty$. Ввиду леммы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} & \{ \tau \}^{\varkappa_2 + \frac{n}{\delta q}} \langle \tau \rangle^{\tilde{\lambda} + \frac{n}{\delta q}} \|\mathcal{N}_0(h^{(j)}, h^{(j)})(\tau) - \mathcal{N}_0(h, h)(\tau)\|_{\mathbf{B}^{-\omega, q}} \\ & \leq C \tau^{\frac{n+\alpha+\gamma}{\delta} + \frac{n}{\delta q}} (\|h^{(j)}\|_{\mathbf{A}^{\alpha+\gamma, 1}} + \|h\|_{\mathbf{A}^{\alpha+\gamma, 1}} + \|h^{(j)}\|_{\mathbf{B}^{\alpha, 1}} + \|h\|_{\mathbf{B}^{\alpha, 1}}) \\ & \quad \times (\|h\|_{\mathbf{A}^{0, q}} + \|h^{(j)}\|_{\mathbf{A}^{0, q}} + \|h\|_{\mathbf{B}^{0, q}} + \|h^{(j)}\|_{\mathbf{B}^{0, q}}) \\ & \leq C \|h\|_{\mathbf{X}_0}^2 + C \|h^{(j)}\|_{\mathbf{X}_0}^2 \leq C\varepsilon^2 \end{aligned}$$

для всех $\tau > 0$, $1 \leq q \leq \infty$. Итак, в силу неравенств

$$1 - \varkappa_2 - \frac{s + \omega}{\delta} - \frac{n}{\delta p} \leq 0 \quad \text{и} \quad -\tilde{\lambda} - \frac{n}{\delta p} \leq 0$$

получаем

$$\left\| \int_0^t \mathcal{G}^{(j)}(t - \tau) (\mathcal{N}_0(h^{(j)}, h^{(j)})(\tau) - \mathcal{N}_0(h, h)(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_\gamma} \leq C\varepsilon^2. \quad (40)$$

Собирая вместе оценки (38), (39) и (40), получаем из (37)

$$\|h - w\|_{\mathbf{X}_\gamma} \leq C\varepsilon. \quad (41)$$

Ввиду (28), (29) и (41) имеем оценку

$$\|u(t) - h(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|u(t) - h(t)\|_{\mathbf{A}^{0, 1}} + \|u(t) - h(t)\|_{\mathbf{B}^{0, 1}} \leq C\varepsilon t^{-\frac{n+\gamma}{\delta}}$$

для всех $t > 0$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
2. Доброхотов С. Ю. Нелокальные аналоги нелинейного уравнения Буссинеска для поверхностных волн над неровным дном и их асимптотические решения // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. №1. С. 63–67.
3. Broer L. J. F. Approximate equations for long water waves // Appl. Sci. 1975. V. 31. P. 377–395.
4. Kaup D. J. A higher-order water-wave equation and the method for solving it // Progr. Theoret. Phys. 1975. V. 54. P. 396–408.
5. Naumkin P. I., Shishmarev I. A. Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves. Amer. Math. Soc., 1994. (Transl. Math. Monogr. V. 133.)
6. Абловитц М., Ситуп Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
7. Deift P. A., Venakides S., Zhou X. The collisionless shock region for the long-time behavior of solutions of the KdV equation // Comm. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. №2. P. 199–206.
8. Dix D. B. Large-time behavior of solutions of linear dispersive equations. Berlin: Springer-Verlag, 1997. (Lecture Notes in Math. V. 1668.)
9. Кайкина Е. И., Наумкин П. И., Шишмарёв И. А. Асимптотика решений нелинейных диссипативных систем уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. 2004. Т. 68. №3. С. 29–62.
10. Amick C. J., Bona J. L., Schonbek M. E. Decay of solutions of some nonlinear wave equations // J. Differential Equations. 1989. V. 81. P. 1–49.
11. Biler P., Karch G., Woźczynski W. A. Critical nonlinearity exponent and self-similar asymptotics for Lévy conservation laws // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2001. V. 18. №5. P. 613–637.
12. Carpio A. Large time behavior in some convection-diffusion equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1996. V. 23. №4. P. 551–574.
13. Dix D. B. Temporal asymptotic behavior of solutions of the Benjamin-Ono-Burgers equation // J. Differential Equations. 1991. V. 90. P. 238–287.
14. Escobedo M., Vazquez J. L., Zuazua E. A diffusion-convection equation in several space dimensions // Indiana Univ. Math. J. 1993. V. 42. №4. P. 1413–1440.
15. Escobedo M., Kaviani O., Matano H. Large time behavior of solutions of a dissipative nonlinear heat equation // Comm. Partial Differential Equations. 1994. V. 20. P. 1427–1452.
16. Escobedo M., Zuazua E. Long-time behavior for a convection-diffusion equation in higher dimensions // SIAM J. Math. Anal. 1994. V. 28. №3. P. 570–594.
17. Galaktionov V. A., Vazquez J. L. Asymptotic behavior of nonlinear parabolic equations with critical exponents. A dynamical systems approach // J. Funct. Anal. 1991. V. 100. №2. P. 435–462.
18. Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Асимптотические собственные функции задачи Коши для нелинейных параболических уравнений // Матем. сб. 1985. Т. 126. №4. С. 435–472.
19. Giga Y., Kambe T. Large time behavior of vorticity two-dimensional viscous flow and its application to vortex formation // Comm. Math. Phys. 1988. V. 117. P. 549–568.
20. Gmira A., Veron L. Large time behavior of the solutions of a semilinear parabolic equation in $\mathbb{R}^n$ // J. Differential Equations. 1984. V. 53. P. 258–276.
21. Ильин А. М., Олейник О. А. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени // Матем. сб. 1960. Т. 51 (93). С. 191–216.
22. Karch G. Self-similar large time behavior of solutions to the Korteweg-de Vries-Burgers equation // Nonlinear Anal. 1999. V. 35A. №2. P. 199–219.
23. Liu T. P., Pierre M. Source solutions and asymptotic behavior in conservation laws // J. Differential Equations. 1984. V. 51. P. 419–441.

24. *Zuazua E.* A dynamical system approach to the self similar large time behavior in scalar convection-diffusion equations // J. Differential Equations. 1994. V. 108. P. 1–35.
25. *Zuazua E.* Some recent results on the large time behavior for scalar parabolic conservation laws // Elliptic and parabolic problems. Proceedings of the 2nd European conference, Pont-a-Mousson, June 1994 / ed. C. Bandle et al. Harlow: Longman, 1995. P. 251–263. (Pitman Res. Notes Math. Ser. V. 325.)
26. *Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е.* Обобщенные функции. Теория дифференциальных уравнений. Т. 3. М.: Наука, 1967.
27. *Бессов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1978.
28. *Burgers J. M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Mech. 1948. V. 1. P. 171–199.
29. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. 1950. V. 3. P. 201–230.
30. *Наумкин П. И., Шишмарёв И. А.* Асимптотическое представление поверхностных волн в виде двух бегущих волн Бюргерса // Функци. анализ и его прилож. 1995. Т. 29, № 3. С. 25–40.
31. *Varlamov V. V.* On the Cauchy problem for the damped Boussinesq equation // Differential Integral Equations. 1996. V. 9. № 3. P. 619–634.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: shish@voxnet.ru
pavelni@matmor.unam.mx

Поступила в редакцию
05.06.2003 и 31.05.2004