Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Сидоров, Определяемость полуполей непрерывных положительных функций решетками их подалгебр, *Матем. сб.*, 2016, том 207, номер 9, 91–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8609>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 18:30:45

УДК 512.556

В. В. Сидоров

Определяемость полуполей непрерывных положительных функций решетками их подалгебр

Рассматривается решетка $\mathbb{A}(U(X))$ подалгебр полуполя $U(X)$ непрерывных положительных функций на произвольном топологическом пространстве X и ее подрешетка $\mathbb{A}_1(U(X))$ подалгебр с единицей. Основным результатом работы является доказательство определяемости любого полуполя $U(X)$ как решеткой $\mathbb{A}(U(X))$, так и ее подрешеткой $\mathbb{A}_1(U(X))$.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: полуполе непрерывных функций, подалгебра, решетка подалгебр, изоморфизм, хьюиттовское пространство.

DOI: 10.4213/sm8609

§ 1. Введение

Настоящая работа относится к тому направлению математики, в котором изучаются взаимосвязи между топологическими пространствами и ассоциированными с ними алгебраическими системами непрерывных функций.

Используемые нами понятия теории полуколец, теории решеток и общей топологии можно найти в книгах [1]–[3] соответственно. Некоторые из этих понятий будут вводиться по ходу изложения.

Под *полукольцом* будем понимать алгебраическую систему $\langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, в которой $\langle S, +, 0 \rangle$ – коммутативный моноид с нейтральным элементом 0, $\langle S, \cdot, 1 \rangle$ – моноид с нейтральным элементом 1, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$ для всех $s \in S$. Коммутативное полукольцо, отличное от кольца, каждый ненулевой элемент которого обратим, называется *полуполем с нулем*. Легко показать, что в любом полуполе S с нулем сумма ненулевых элементов отлична от нуля. Поэтому множество $S \setminus \{0\}$ с теми же операциями сложения и умножения образует алгебраическую систему, которую будем называть *полуполем*.

Пусть S – это поле $\mathbb{R}$ действительных чисел, полуполе с нулем $\mathbb{R}_+$ всех неотрицательных действительных чисел или полуполе $\mathbb{P}$ всех положительных действительных чисел (с интервальной топологией). Обозначим через $C(X, S)$ множество всех непрерывных S -значных функций с поточечными операциями сложения и умножения функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X . Тогда $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ – кольцо, $C^+(X) = C(X, \mathbb{R}_+)$ – полукольцо, $U(X) = C(X, \mathbb{P})$ – полуполе.

Кольцо $C(X)$ является алгеброй над $\mathbb{R}$. Подалгеброй в $C(X)$ будет любое его подмножество, замкнутое относительно сложения и умножения функций и

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 1.1375.2014/К).

выдерживающее умножение на константы из $\mathbb{R}$. По аналогии назовем подмножество $A \subseteq C(X, S)$ *подалгеброй*, если $A + A \subseteq A$, $A \cdot A \subseteq A$ и $S \cdot A \subseteq A$. Таким образом, мы будем употреблять термин “подалгебра” в более широком смысле, нежели кольцо, одновременно являющееся векторным пространством.

Обозначим через $\mathbb{A}(C(X, S))$ решетку всех подалгебр в $C(X, S)$ относительно включения $\subseteq$ (строгое включение будем обозначать символом $\subset$), а через $\mathbb{A}_1(C(X, S))$ обозначим ее подрешетку всех подалгебр с единицей.

Точная нижняя грань $A \wedge B$ подалгебр A и B есть их пересечение $A \cap B$, а точная верхняя грань $A \vee B$ состоит из функций, равных конечным суммам произведений вида $f_1 \cdots f_n$, где $f_1, \dots, f_n \in A \cup B$, $n \in \mathbb{N}$.

В случае кольца $C(X)$ или полукольца $C^+(X)$ пересечение подалгебр всегда непусто, так как каждая подалгебра содержит нулевую функцию. Для полукольца $U(X)$ пересечение подалгебр может оказаться пустым. Поэтому будем считать пустое множество $\emptyset$ элементом решетки $\mathbb{A}(U(X))$ – ее нулем.

Хаусдорфово пространство X называется *тихоновским*, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $x \in X \setminus F$ найдется функция $\lambda \in C(X)$ (или, что равносильно, $\lambda \in U(X)$) такая, что $\lambda(F) = \{a\}$ и $\lambda(x) = b$, где $a \neq b$. Тихоновские пространства – это с точностью до гомеоморфизма подпространства тихоновских степеней пространства $\mathbb{R}$. Топологическое пространство X называется *хьюиттовским* (или *вещественно полным*, или *функционально замкнутым*), если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени пространства $\mathbb{R}$.

В теории колец $C(X)$ интересен вопрос о том, насколько топологическое пространство X или отдельные его свойства определяются теми или иными алгебраическими свойствами кольца $C(X)$ и других связанных с ним алгебраических систем непрерывных функций. Сюда же относится задача определяемости топологических пространств.

Пусть каждому топологическому пространству X каким-либо образом поставлена в соответствие алгебраическая структура $A(X)$. Это соответствие подразумевается инвариантным, т.е. гомеоморфным пространствам соответствуют изоморфные структуры. Ситуацию, когда верно обратное, описывает следующее определение. Говорят, что *топологическое пространство $X \in K$ определяется* (однозначно с точностью до гомеоморфизма) в классе K топологических пространств алгебраической структурой $A(X)$, если для произвольного топологического пространства $Y \in K$ изоморфизм $A(Y) \cong A(X)$ влечет гомеоморфизм $Y \approx X$. Понятие *определяемости алгебраической структуры $A(X)$* в классе K топологических пространств производной алгебраической структурой $A'(X)$ вводится аналогичным образом.

В 1939 г. И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров доказали (см. [4; теорема 2]) одну из первых теорем определяемости топологических пространств: произвольный компакт X определяется кольцом $C(X)$. Этот результат послужил образцом для различных обобщений и углублений как в сторону расширения класса определяемых пространств с класса компактов, так и в сторону ослабления структуры $C(X)$ и привлечения новых объектов $A(X)$ (см. обзоры [5], [6]). Так, в 1948 г. Э. Хьюитт установил (см. [7; теорема 57]) определяемость произвольного хьюиттовского пространства X кольцом $C(X)$, а в 1997 г. Е. М. Вечтомов

доказал (см. [8; теорема 1]) определяемость X решеткой $\mathbb{A}(C(X))$ всех подалгебр кольца $C(X)$ и тем самым усилил результат Хьюитта, так как изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$ влечет изоморфизм решеток $\mathbb{A}(C(X))$ и $\mathbb{A}(C(Y))$. Отсюда следует (см. [8; теорема 2]), что для любого топологического пространства X кольцо $C(X)$ определяется решеткой $\mathbb{A}(C(X))$ всех его подалгебр.

Систематическое изучение полуколец и полуполей непрерывных функций началось в 1998 г. (см. [9]). При их исследовании большое внимание уделяется методам и результатам, которые удастся перенести из теории колец непрерывных функций, в том числе связанным с определяемостью. Рассматриваемые при этом пространства естественно считать хьюиттовскими, так как для любого топологического пространства X найдутся (см. [10; теоремы 3.9 и 8.7]) тихоновское пространство τX и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$, для которых канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а значит, и соответствующие им полукольца и полуполя непрерывных функций.

Легко видеть, что кольцо $C(X)$ есть кольцо разностей полукольца $C^+(X)$, а элементы полукольца $C^+(X)$ являются квадратами элементов кольца $C(X)$. Поэтому произвольный изоморфизм полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ однозначно продолжается до изоморфизма колец $C(X)$ и $C(Y)$ и, наоборот, любой изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$ является продолжением некоторого единственного изоморфизма – его ограничения на $C^+(X)$ – полукольца $C^+(X)$ и $C^+(Y)$. Это верно и для полуполей $U(X)$ с той лишь разницей, что элементы полуполя $U(X)$ суть квадраты обратимых элементов кольца $C(X)$. Значит, определяемость любого хьюиттовского пространства X как полукольцом $C^+(X)$, так и полуполем $U(X)$ вытекает из его определяемости кольцом $C(X)$. Для решеток подалгебр подобных связей уже нет.

В 2010 г. Е. М. Вечтомов и В. В. Сидоров доказали (см. [11; теоремы 3.5 и 3.6]) определяемость всякого хьюиттовского пространства X каждой из решеток $\mathbb{A}(C^+(X))$ и $\mathbb{A}_1(C^+(X))$, а также показали, что для любого топологического пространства X эти решетки определяют полукольцо $C^+(X)$. Справедливость аналогичных результатов для полуполя $U(X)$ была под вопросом. Уверенности в их справедливости добавила работа [12], где доказано, что любое хьюиттовское пространство X определяется решеткой $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ подалгебр полуполя $U^\vee(X)$, которое получается из полуполя $U(X)$ заменой обычного сложения функций на тах-сложение: $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ для всех $x \in X$. Случай полуполя $U(X)$ оказался сложнее.

Следующие две теоремы являются основными в настоящей работе.

ТЕОРЕМА 1. *Любое хьюиттовское пространство X определяется каждой из решеток $\mathbb{A}(U(X))$ и $\mathbb{A}_1(U(X))$.*

ТЕОРЕМА 2. *Для любого топологического пространства X полуполе $U(X)$ определяется каждой из решеток $\mathbb{A}(U(X))$ и $\mathbb{A}_1(U(X))$.*

Теорема 2 вытекает из теоремы 1. В самом деле, любой изоморфизм решеток $\mathbb{A}(U(X))$ и $\mathbb{A}(U(Y))$, как будет показано далее (см. следствие 1), влечет изоморфизм решеток $\mathbb{A}_1(U(X))$ и $\mathbb{A}_1(U(Y))$, а значит, и канонически изоморфных им решеток $\mathbb{A}_1(U(\nu\tau X))$ и $\mathbb{A}_1(U(\nu\tau Y))$. Отсюда $\nu\tau X \approx \nu\tau Y$ по теореме 1. Стало быть, $U(X) \cong U(\nu\tau X) \cong U(\nu\tau Y) \cong U(Y)$.

Приступим к доказательству теоремы 1. Вначале разберем случай компактов, после чего сведем к нему общий случай хьюиттовских пространств. Ключевую роль в рассуждениях будут играть однопорожденные подалгебры.

Все рассматриваемые далее пространства считаем тихоновскими.

§ 2. Однопорожденные подалгебры

Наименьшую подалгебру A полуполя $U(X)$, содержащую функцию f , назовем *однопорожденной* и обозначим через $\langle f \rangle$. Она состоит из всевозможных ненулевых многочленов из $\mathbb{R}_+[f]$ без свободного члена. Через $[f]$ обозначим наименьшую подалгебру полуполя $U(X)$, которая содержит функции f и 1. Ясно, что подалгебра $[f]$ совпадает с подалгеброй $\langle f \rangle \vee \mathbb{P}$ и образована ненулевыми многочленами из $\mathbb{R}_+[f]$.

Через a, b, c и r (часто с индексами) будем обозначать числа из $\mathbb{R}_+$.

Для оценки мощности образа функций $f \in U(X)$ удобно *правило знаков Декарта*: если мономы многочлена от одной переменной с действительными коэффициентами упорядочены по убыванию или возрастанию показателей степеней, то число положительных корней многочлена равно числу перемен знака между последовательными ненулевыми коэффициентами или на четное число меньше этого числа (корни считаются с учетом кратности).

Например, функциональное равенство

$$a_0 + a_1 f = b_0 + b_1 f + \dots + b_n f^n$$

влечет алгебраическое равенство или неравенство $|\operatorname{Im} f| \leq 2$, так как если многочлен

$$(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)f + b_2 f^2 + \dots + b_n f^n \in \mathbb{R}[f]$$

будет ненулевым, то в последовательности его коэффициентов не более двух перемен знака, а значит, $|\operatorname{Im} f| \leq 2$ по правилу знаков Декарта.

Будем говорить, что в решетке имеется *решеточная характеристика* некоторого свойства, если данное свойство можно описать в терминах этой решетки. Важно, что такие свойства сохраняются при изоморфизмах решеток.

Дадим решеточные характеристики подалгебры $\mathbb{P}$ в $\mathbb{A}(U(X))$ и $\mathbb{A}_1(U(X))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Подалгебра $\mathbb{P}$ служит единственным атомом решетки $\mathbb{A}(U(X))$ и нулем решетки $\mathbb{A}_1(U(X))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, в подалгебре $\mathbb{P}$ нет собственных подалгебр. Поэтому она будет минимальной подалгеброй, т.е. атомом решетки $\mathbb{A}(U(X))$. Докажем единственность.

Пусть A – минимальная подалгебра и $f \in A$. Тогда $\langle f \rangle = A = \langle f^2 \rangle$. Поэтому функция f имеет вид

$$f = a_2 f^2 + \dots + a_{2n} f^{2n}, \quad a_{2n} > 0.$$

Отсюда получаем $|\operatorname{Im} f| \leq 1$ по правилу знаков Декарта, т.е. $f \in \mathbb{P}$. Значит, $A = \mathbb{P}$.

Наконец, подалгебра $\mathbb{P}$ будет нулем решетки $\mathbb{A}_1(U(X))$, так как $\mathbb{P} \subseteq A$ для любой подалгебры A с единицей. Предложение доказано.

Для произвольной подалгебры A условия $1 \in A$ и $\mathbb{P} \subseteq A$ равносильны. Поэтому из предложения 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Ограничение изоморфизма решеток $\mathbb{A}(U(X))$ и $\mathbb{A}(U(Y))$ на решетку $\mathbb{A}_1(U(X))$ будет изоморфизмом решеток $\mathbb{A}_1(U(X))$ и $\mathbb{A}_1(U(Y))$.

Итак, в теореме 1 можно ограничиться случаем решеток подалгебр $\mathbb{A}_1(U(X))$. Поэтому далее под однопорожденными подалгебрами будем понимать однопорожжденные подалгебры с единицей.

Решим вопрос о равенстве однопорожжденных подалгебр.

ЛЕММА 1. Для любых подалгебр $[f]$, $|\operatorname{Im} f| \geq 3$, и $[g]$, $|\operatorname{Im} g| \geq 3$, имеем

$$[f] = [g] \iff \text{функции } f \text{ и } g \text{ пропорциональны.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[f] = [g]$. Тогда $f = Q(g)$ и $g = P(f)$ для некоторых многочленов $Q \in \mathbb{R}_+[g]$ и $P \in \mathbb{R}_+[f]$. Отсюда получаем $f = (Q \circ P)(f)$. Если многочлены Q или P не являются одночленами первой степени, то многочлен $Q \circ P$ также не является одночленом первой степени. Следовательно, $|\operatorname{Im} f| \leq 2$ по правилу знаков Декарта, хотя $|\operatorname{Im} f| \geq 3$. Значит, Q и P — одночлены первой степени, т.е. функции f и g пропорциональны.

Обратное очевидно.

Лемма доказана.

Функцию $f \in U(X)$ будем называть *нормированной*, если $\sup f = 1$. Обозначим через $\mathbb{A}_1([f])$ решетку всех подалгебр с единицей, включенных в $[f]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любой подалгебры $[f]$ имеем:

1) $|\operatorname{Im} f| = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}_1([f])$ — одноэлементная решетка, содержащая лишь $\mathbb{P}$;

2) $|\operatorname{Im} f| = 2$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}_1([f])$ — двухэлементная решетка $\mathbb{P} \subset [f]$;

3) $|\operatorname{Im} f| \geq 3$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A}_1([f])$ — бесконечная решетка.

В частности, $|\operatorname{Im} f| = 2$ тогда и только тогда, когда $[f]$ — атом решетки $\mathbb{A}_1(U(X))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|\operatorname{Im} f| = 1$, то согласно предложению 1 подалгебра $[f]$ является нулем решетки $\mathbb{A}_1(U(X))$, а потому подалгебра $\mathbb{P} = [f]$ служит единственным элементом решетки $\mathbb{A}_1([f])$.

Пусть $|\operatorname{Im} f| = 2$. Докажем, что $[f] = [g]$ для произвольной подалгебры $[g] \subseteq [f]$, $[g] \neq \mathbb{P}$, или, что равносильно, $[f] \subseteq [g]$. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{Im} f = \{1, a\}$ и $\operatorname{Im} g = \{1, b\}$, где $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$.

Если $a = b$, то $[f] = [g]$.

Пусть $a < b$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, что $b^n \leq a$. Тогда $[f] \subseteq [g]$, так как

$$f = \frac{(a - b^n)g + (b - a)g^n}{b - b^n} \in [g].$$

Случай $a > b$ сведем к предыдущему: выберем $r > 0$ так, чтобы наименьшее значение нормированной функции $(g + r)/(1 + r)$ было больше a . Тогда по доказанному выше $[f] \subseteq [g + r]$. С другой стороны, $[g + r] \subseteq [g]$. Значит, $[f] \subseteq [g]$.

Итак, если $|\operatorname{Im} f| = 2$, то решетка $\mathbb{A}_1([f])$ – двухэлементная цепь $\mathbb{P} \subset [f]$.

Наконец, если $|\operatorname{Im} f| \geq 3$, то $[f^{2n}] \neq [f^n]$ для всех $n \in \mathbb{N}$ по лемме 1. Кроме того, $[f^{2n}] \subseteq [f^n]$. Значит, решетка $\mathbb{A}_1([f])$ бесконечна, так как содержит бесконечную цепь $[f] \supset [f^2] \supset [f^4] \supset \dots$. Предложение доказано.

Для произвольной функции $f \in U(X)$ через $\operatorname{Max} f$ и $\operatorname{Min} f$ обозначим множества точек пространства X , в которых f принимает свое наибольшее значение $\max f$ и наименьшее значение $\min f$ соответственно.

В случае компакта X множества $\operatorname{Max} f$ и $\operatorname{Min} f$ будут непустыми, причем если функции f и $g \in [f]$ не являются константами, то $\operatorname{Max} f = \operatorname{Max} g$ и $\operatorname{Min} f = \operatorname{Min} g$.

ЛЕММА 2. Для любых атомов $[f]$ и $[g]$ решетки $\mathbb{A}_1(U(X))$ имеем

$$[f] = [g] \iff \operatorname{Max} f = \operatorname{Max} g.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $\implies$ очевидна.

Обратно, поскольку $[f], [g]$ – атомы, $|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 2$ по предложению 2. Поэтому если $\operatorname{Max} f = \operatorname{Max} g$, то равенство $[f] = [g]$ фактически было получено при доказательстве утверждения 2) предложения 2.

Лемма доказана.

Элемент A решетки называется $\vee$ -неразложимым, если из того, что $A = B \vee C$ для некоторых элементов B и C решетки, следует $A = B$ или $A = C$. Решетка называется *полной*, если любое непустое подмножество ее элементов имеет точные верхнюю и нижнюю грани. Элемент A полной решетки называется *компактным*, если для любого непустого семейства $\{A_j\}_{j \in J}$ ее элементов $A \leq \bigvee_{j \in J} A_j$ влечет $A \leq \bigvee_{j \in I} A_j$ для некоторого конечного подмножества $I \subseteq J$.

Решетка $\mathbb{A}_1(U(X))$ будет полной, так как всякое непустое семейство $\{A_j\}_{j \in J}$ ее элементов имеет точную нижнюю грань – пересечение подалгебр семейства – и точную верхнюю грань – подалгебру, состоящую из всевозможных конечных сумм функций вида $f_1 \cdots f_n$, где $f_1, \dots, f_n \in \bigcup_{j \in J} A_j$, $n \in \mathbb{N}$.

Дадим решеточную характеристику однопорожденных подалгебр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Однопорожденные подалгебры – это $\vee$ -неразложимые компактные элементы решетки $\mathbb{A}_1(U(X))$ и только они.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая однопорожденная подалгебра $[f]$ компактна, так как если $[f] \subseteq \bigvee_{j \in J} A_j$ для некоторого семейства подалгебр $\{A_j\}_{j \in J}$, то f выражается через конечное число функций, принадлежащих конечному множеству подалгебр $\{A_j\}_{j \in I}$, $I \subseteq J$. Тогда $[f] \subseteq \bigvee_{j \in I} A_j$.

Докажем $\vee$ -неразложимость любой подалгебры $[f]$.

Предположим обратное, т.е. $[f] = A \vee B$ для некоторых подалгебр $A, B \subset [f]$. Ясно, что подалгебры A и B различны и не совпадают с $\mathbb{P}$, так как в противном случае $A = [f]$ или $B = [f]$. Тогда $|\mathbb{A}_1([f])| \geq 4$, а значит, $|\operatorname{Im} f| \geq 3$ согласно предложению 2. Функция f как элемент подалгебры $A \vee B$ имеет вид

$$f = P_0(f) + Q_0(f) + P_1(f)Q_1(f) + \cdots + P_n(f)Q_n(f),$$

где $P_i \in A$ и $Q_i \in B$ – многочлены от f , отличные от f , так как в противном случае $A = [f]$ или $B = [f]$. Следовательно, f можно записать как

$$f = a_0 + a_1 f + \dots + a_m f^m,$$

где не все $a_0, a_2, \dots, a_m$ равны нулю. Тогда $|\operatorname{Im} f| \leq 2$ по правилу знаков Декарта, что противоречит $|\operatorname{Im} f| \geq 3$. Значит, подалгебра $[f]$ $\vee$ -неразложима.

Обратно, пусть подалгебра A – это $\vee$ -неразложимый компактный элемент решетки $\mathbb{A}_1(U(X))$. Очевидно, $A = \bigvee_{f \in A} [f]$. Поэтому $A = [f_1] \vee \dots \vee [f_n]$ для некоторых $f_1, \dots, f_n \in A$ в силу компактности A . Без ограничения общности можно считать, что n принимает наименьшее возможное значение.

Если $n \geq 2$, то $A = [f_1] \vee ([f_2] \vee \dots \vee [f_n])$, что в силу $\vee$ -неразложимости A означает $A = [f_1]$ или $A = [f_2] \vee \dots \vee [f_n]$; противоречие с выбором n . Значит, $n = 1$, т.е. подалгебра A однопорожденная. Предложение доказано.

Для произвольной подалгебры $[f]$ дадим решеточную характеристику подалгебр $[f + r]$, $r > 0$, и $[f - r]$, $0 < r < \inf f$.

Подалгебру $[g] \subset [f]$ назовем $\vee$ -включенной в $[f]$, если найдутся подалгебры $[u]$ и $[v]$, включенные в $[f]$ и отличные от $[g]$ и $[f]$, такие, что $[g] \subseteq [u] \vee [v]$. В противном случае подалгебру $[g]$ назовем $\vee$ -невключенной в $[f]$.

ЛЕММА 3. Для любой подалгебры $[f]$, $|\operatorname{Im} f| \geq 3$, подалгебры $[f^2]$ и $[f^3]$ – единственные $\vee$ -невключенные в $[f]$ подалгебры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $[f^2]$ – это $\vee$ -невключенная в $[f]$ подалгебра. Отметим, что $[f^2] \subset [f]$, так как $[f^2] \subseteq [f]$ и $[f^2] \neq [f]$ по лемме 1.

Допустим, что $[f^2] \subseteq [u] \vee [v]$ для некоторых подалгебр $[u]$ и $[v]$, включенных в $[f]$ и отличных от $[f]$ и $[f^2]$. Тогда функции u и v представимы многочленами от f , которые алгебраически отличны от одночленов первой и второй степени. Отсюда получаем, что функция f^2 , будучи многочленом от u и v , представима многочленом от f , который алгебраически отличен от f^2 . Следовательно, $|\operatorname{Im} f| \leq 2$ по правилу знаков Декарта, что противоречит $|\operatorname{Im} f| \geq 3$. Значит, таких подалгебр $[u]$ и $[v]$ не найдется, т.е. $[f^2]$ – это $\vee$ -невключенная в $[f]$ подалгебра.

$\vee$ -невключенность подалгебры $[f^3]$ в $[f]$ доказывается аналогично.

Докажем, что произвольная подалгебра $[g] \subset [f]$, отличная от $[f^2]$ и $[f^3]$, $\vee$ -включена в $[f]$.

Если $g = a_n f^n$, $a_n > 0$, $n \geq 4$, то $[g]$ $\vee$ -включена в $[f]$, так как $[g] \subseteq [f^{n-2}] \vee [f^2]$ и подалгебры $[f^{n-2}]$ и $[f^2]$ отличны от $[f]$ и $[f^n]$ по лемме 1.

Наконец, если

$$g = a_m f^m + \dots + a_{n-1} f^{n-1} + a_n f^n, \quad a_m > 0, \quad a_n > 0, \quad n > m,$$

то положим

$$u = \frac{a_m f^m + \dots + a_{n-1} f^{n-1}}{2} + \frac{2a_n f^n}{3}, \quad v = g - u.$$

Тогда $[g] \subseteq [u] \vee [v]$, так как $g = u + v$.

Допустим, $[u] = [f]$. Тогда по лемме 1 функции u и f пропорциональны. Отсюда получаем $|\operatorname{Im} f| \leq 2$ по правилу знаков Декарта, хотя $|\operatorname{Im} f| \geq 3$. Значит, $[u] \neq [f]$.

Допустим, что $[u] = [g]$. Тогда по лемме 1 $u = kg$ для некоторого $k \in \mathbb{P}$. В последовательности $(k-1/2)a_m, \dots, (k-1/2)a_{n-1}, (k-2/3)a_n$ крайние члены не равны нулю одновременно и не более одной перемены знака. Отсюда по правилу знаков Декарта получаем $|\operatorname{Im} f| \leq 1$, хотя $|\operatorname{Im} f| \geq 3$. Значит, $[u] \neq [g]$.

Аналогично доказывается, что подалгебра $[v]$ отлична от $[f]$ и $[g]$. Таким образом, подалгебра $[g] \vee$ -включена в $[f]$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Для любых подалгебр $[f]$, $|\operatorname{Im} f| \geq 3$, и $[g]$, где $[g] \subseteq [f]$ и $[g] \neq \mathbb{P}$, равносильны следующие условия:*

- 1) $[g] = [f + r]$ для некоторого $r > 0$;
- 2) $[g] \neq [f]$ и $[g] \not\subseteq [h]$ для любой подалгебры $[h] \subset [f]$ такой, что

$$[h^2] \subseteq [f^2] \vee [f^3], \quad [h^3] \subseteq [f^2] \vee [f^3]. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2). Пусть $[g] = [f + r]$ для некоторого $r > 0$. Поскольку $|\operatorname{Im} f| \geq 3$, функции $f + r$ и f не пропорциональны, а значит, $[f + r] \neq [f]$ по лемме 1.

Допустим, что существует подалгебра $[h] \subset [f]$ такая, что $[f + r] \subseteq [h]$ и верны включения (2.1). Заметим, что любое функциональное равенство

$$f + r = a_0 + a_1 f + \dots + a_n f^n$$

влечет алгебраическое, так как в противном случае $|\operatorname{Im} f| \leq 2$ по правилу знаков Декарта, хотя $|\operatorname{Im} f| \geq 3$. Кроме того, функция $f + r \in [h]$ представима многочленом от $h \in [f]$. Следовательно, функция h имеет вид $b_0 + b_1 f$, где $b_0 > 0$ и $b_1 > 0$ ($b_0 > 0$, так как $[h] \neq [f]$). Поскольку $[h^2] \subseteq [f^2] \vee [f^3]$, функция $h^2 = b_0^2 + 2b_0 b_1 f + b_1^2 f^2$ имеет вид $c_0 + c_2 f^2 + c_3 f^3 + \dots + c_m f^m$, т.е. $|\operatorname{Im} f| \leq 2$ по правилу знаков Декарта; противоречие с $|\operatorname{Im} f| \geq 3$. Значит, такой подалгебры $[h]$ не существует, т.е. условие 2) выполняется.

2) $\implies$ 1). Пусть условие 2) выполняется. Поскольку $[g] \subseteq [f]$ и $[g] \neq \mathbb{P}$, функция g имеет вид

$$g = a_0 + a_1 f + \dots + a_n f^n, \quad a_n > 0, \quad n \geq 1.$$

Если $n \geq 2$, то положим $h = a_1 f + \dots + a_n f^n$. Очевидно, что $[g] \subseteq [h]$ и для подалгебры $[h]$ верны включения (2.1). Кроме того, $[h] \neq [f]$, так как в противном случае по лемме 1 функции h и f пропорциональны, что в силу правила знаков Декарта означает $|\operatorname{Im} f| \leq 2$, хотя $|\operatorname{Im} f| \geq 3$. Аналогично, $[g] \neq [f]$. Пришли к противоречию с условием 2). Значит, $n = 1$, т.е. $[g] = [f + r]$, причем $r > 0$, так как $[g] \neq [f]$.

Лемма доказана.

Отметим, что по лемме 3 условие (2.1) чисто решеточное, а значит, и все условие 2) леммы 4 чисто решеточное. Таким образом, лемма 4 содержит решеточную характеристику подалгебр $[f + r]$, $r > 0$, для произвольной подалгебры $[f]$, $|\operatorname{Im} f| \geq 3$. Конечно, здесь существенным образом используется наличие решеточной характеристики подалгебры $\mathbb{P}$ и однопорожжденных подалгебр. Вообще, ситуация, когда для решеточной характеристики некоторого свойства используются свойства, решеточная характеристика которых была получена ранее, будет встречаться неоднократно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для произвольной подалгебры $[f]$ имеется решеточная характеристика подалгебр $[f + r]$, $r > 0$, и $[f - r]$, $0 < r < \inf f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|\operatorname{Im} f| \leq 2$, то согласно предложению 2 подалгебры $[f + r]$, $r > 0$, и $[f - r]$, $0 < r < \inf f$, совпадают с подалгеброй $[f]$.

Пусть $|\operatorname{Im} f| \geq 3$. Решеточная характеристика подалгебр $[f + r]$, $r > 0$, получена в лемме 4. Разберем случай подалгебр $[f - r]$, $0 < r < \inf f$.

Применим лемму 4 и рассмотрим множество подалгебр $[g]$, $|\operatorname{Im} g| \geq 3$, таких, что $[g + r'] = [f]$ для некоторого $r' > 0$. По лемме 1 данное равенство равносильно пропорциональности функций $g + r'$ и f , т.е. равенству $[g] = [f - r]$ для некоторого r , где $0 < r < \inf f$. Таким образом, множества подалгебр $[g]$ и $[f - r]$, $0 < r < \inf f$, совпадают. Предложение доказано.

§ 3. Случай компактов

Докажем, что для произвольного тихоновского пространства X равенство $|X| = n$ имеет решеточную характеристику.

ЛЕММА 5. Для любой подалгебры $[f]$, отличной от $\mathbb{P}$, имеем:

- 1) если $|\operatorname{Im} f| < \infty$, то $[f] \subseteq [f_1] \vee \dots \vee [f_n]$ для некоторых атомов $[f_1], \dots, [f_n]$;
- 2) если $[f] \subseteq [f_1] \vee \dots \vee [f_n]$, где $[f_1], \dots, [f_n]$ – атомы, то $|\operatorname{Im} f| \leq 2^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\operatorname{Im} f = \{r_1, \dots, r_n\}$, где $n \geq 2$. Без ограничения общности можно считать, что $f > 1$. Тогда подалгебры $[f_i]$, $i = 1, \dots, n$, где $f_i = r_i$ на $f^{-1}(r_i)$ и $f_i = 1$ на $X \setminus f^{-1}(r_i)$, будут атомами в силу предложения 2. Кроме того, $[f] \subseteq [f_1] \vee \dots \vee [f_n]$, так как $f = f_1 \dots f_n$.

2) Пусть $f \in [f_1] \vee \dots \vee [f_n]$ для некоторых атомов $[f_1], \dots, [f_n]$. Тогда 2^n множеств $\bigcap_{i=1}^n X_i$, где X_i – это $\operatorname{Min} f_i$ или $\operatorname{Max} f_i$, покрывают X , и на каждом из них функция f постоянна. Значит, $|\operatorname{Im} f| \leq 2^n$.

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Верны следующие утверждения:

- 1) $|X| = 1$ тогда и только тогда, когда $A_1(U(X))$ – одноэлементная решетка, содержащая лишь $\mathbb{P}$;
- 2) $|X| = n$, $n \geq 2$ тогда и только тогда, когда $A_1(U(X))$ содержит ровно $2^n - 2$, $n \geq 2$, атомов, причем их верхняя грань равна $U(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) очевидно. Докажем 2).

Пусть $|X| = n$, $n \geq 2$. Каждому собственному подмножеству $X' \subset X$ поставим в соответствие атом $[f]$ такой, что $\operatorname{Max} f = X'$. Тогда по лемме 2 данное соответствие будет биекцией между множеством собственных подмножеств X и множеством атомов. Значит, последних $2^n - 2$. По лемме 5 их верхняя грань равна $U(X)$.

Обратно, пусть имеется $2^n - 2$ атомов, верхняя грань которых равна $U(X)$. Тогда по лемме 5 имеем $|\operatorname{Im} f| \leq 2^{2^n - 2}$ для всех $f \in U(X)$. Следовательно, пространство X конечно. Поскольку всего атомов $2^n - 2$, то $|X| = n$ по доказанному выше.

Предложение доказано.

Приступим к доказательству теоремы 1 в классе компактов. В силу предложения 5 остается лишь разобрать случай бесконечных компактов. Поэтому до конца параграфа все рассматриваемые пространства будем считать бесконечными компактами. В частности, для любой функции $f \in U(X)$ множества $\text{Min } f$ и $\text{Max } f$ будут непустыми.

Докажем, что для любых подалгебр $[f]$ и $[g]$ равенство $\text{Min } f \cup \text{Min } g = X$ имеет решеточную характеристику. Предварительно докажем леммы 6 и 7. При работе с подалгебрами вида $[f - r]$ будем считать, что $0 \leq r < \min f$.

ЛЕММА 6. *Для произвольных подалгебр $[f]$ и $[g]$ рассмотрим следующие условия:*

- 1) *существует подалгебра $[h] \subseteq [f] \vee [g]$ такая, что $[h - r_h] \not\subseteq [f - r_f] \vee [g - r_g]$ для некоторого r_h и любых r_f и r_g ;*
- 2) $\text{Min } f \cap \text{Min } g = \emptyset$;
- 3) *на некотором подмножестве $X' \subseteq X$ имеем $f = a_0 + a_1 g$, $a_1 > 0$, и $|\text{Im } g| \geq 3$.*

Тогда верны импликации 1) $\implies$ 2) и 2), 3) $\implies$ 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2). Докажем, что если $\text{Min } f \cap \text{Min } g \neq \emptyset$, то для любой подалгебры $[h - r_h]$, где $[h] \subseteq [f] \vee [g]$, имеем $[h - r_h] \subseteq [f - r_f] \vee [g - r_g]$ для некоторых r_f и r_g .

Случай $[h] = \mathbb{P}$ очевиден.

Пусть $[h] \neq \mathbb{P}$. Поскольку $h \in [f] \vee [g]$, функция h имеет вид

$$h = a_{00} + a_{10}f + a_{01}g + \dots + a_{mn}f^m g^n, \quad a_{mn} > 0, \quad m + n \geq 1,$$

причем $\text{Min } f \cap \text{Min } g \subseteq \text{Min } h$, так как $\text{Min } f \cap \text{Min } g \neq \emptyset$. Отсюда получаем

$$\min h = a_{00} + a_{10} \min f + a_{01} \min g + \dots + a_{mn} (\min f)^m (\min g)^n.$$

Поскольку $0 \leq r_h < \min h$,

$$r_h = a_{00} + a_{10}r_f + a_{01}r_g + \dots + a_{mn}r_f^m r_g^n$$

для некоторых r_f и r_g , где $0 \leq r_f < \min f$ и $0 \leq r_g < \min g$. Тогда

$$h - r_h = a_{10}(f - r_f) + a_{01}(g - r_g) + \dots + a_{mn}(f^m g^n - r_f^m r_g^n). \quad (3.1)$$

Индукцией по i докажем, что для любых $i \geq 0$ и $j \geq 0$, где $i + j \geq 1$, верно

$$f^i g^j - r_f^i r_g^j \in [f - r_f] \vee [g - r_g]. \quad (3.2)$$

В этом случае $[h - r_h] \subseteq [f - r_f] \vee [g - r_g]$ будет следовать из (3.1) и (3.2).

Если $i = 0$, то $j \geq 1$ и

$$g^j - r_g^j = (g - r_g)(g^{j-1} + g^{j-2}r_g + \dots + r_g^{j-1}) \in [g - r_g].$$

Пусть (3.2) верно для всех $i \leq k$. В частности, $f^k g^j - r_f^k r_g^j \in [f - r_f] \vee [g - r_g]$. Тогда для $i = k + 1$ получаем

$$f^{k+1} g^j - r_f^{k+1} r_g^j = f(f^k g^j - r_f^k r_g^j) + r_f^k r_g^j (f - r_f) \in [f - r_f] \vee [g - r_g].$$

Утверждение (3.2), а вместе с ним и импликация 1) $\implies$ 2) доказаны.

2), 3) $\implies$ 1). Пусть условия 2) и 3) выполняются. Положим

$$h = f + g, \quad r_h = \min f + \min g.$$

Тогда $r_h < \min h$, так как $\text{Min } f \cap \text{Min } g = \emptyset$.

Допустим, что $h - r_h \in [f - r_f] \vee [g - r_g]$ для некоторых r_f и r_g . Положим

$$u = f - r_f, \quad v = g - r_g, \quad r = r_h - r_f - r_g.$$

Тогда $h - r_h = u + v - r$ и $u + v - r \in [u] \vee [v]$. Последнее означает, что функция $u + v$ имеет вид

$$u + v = a_{00} + a_{10}u + a_{01}v + \dots + a_{mn}u^m v^n, \quad (3.3)$$

причем $a_{00} > 0$, так как $r > 0$. Докажем, что $a_{ij} = 0$ при $i + j \geq 2$.

По условию на некотором подмножестве $X' \subseteq X$ имеем $f = a_0 + a_1 g$, $a_1 > 0$. Тогда на X' имеем $u = b_0 + b_1 v$ или $v = b_0 + b_1 u$ для некоторых $b_0 \geq 0$ и $b_1 > 0$.

Если $u = b_0 + b_1 v$, то на X' равенство (3.3) можно переписать как

$$b_0 + (b_1 + 1)v = c_0 + c_1 v + \dots + c_{m+n} v^{m+n},$$

причем если $a_{ij} > 0$, то $c_{i+j} > 0$.

Допустим, что $c_{i+j} > 0$ для некоторых i и j , где $i + j \geq 2$. Тогда на X' по правилу знаков Декарта $\text{Im } v \leq 2$, а значит, $\text{Im } g \leq 2$, так как $g = v + r_g$; противоречие. Поэтому $c_{i+j} = 0$ при $i + j \geq 2$. Отсюда получаем $a_{ij} = 0$ при $i + j \geq 2$. Воспользуемся этим и перепишем равенство (3.3) в виде $(1 - a_{10})u + (1 - a_{01})v = a_{00}$.

Поскольку $a_{00} > 0$, разности $1 - a_{10}$ и $1 - a_{01}$ не равны нулю одновременно. Если $1 - a_{10} = 0$, то $v \in \mathbb{P}$, что противоречит $|\text{Min } v| = |\text{Min } g| \geq 3$ на X' . Значит, $1 - a_{10} \neq 0$. Аналогично, $1 - a_{01} \neq 0$.

Если разности $1 - a_{10}$ и $1 - a_{01}$ разных знаков, то $\text{Min } u = \text{Min } v$, что противоречит $\text{Min } f = \text{Min } u$, $\text{Min } g = \text{Min } v$ и $\text{Min } f \cap \text{Min } g = \emptyset$. Поэтому разности положительны, что также невозможно, так как $u = b_0 + b_1 v$ и $|\text{Im } v| \geq 3$ на X' .

Аналогично доказывается, что равенство $v = b_0 + b_1 u$ на X' невозможно. Значит, $h - r_h \notin [f - r_f] \vee [g - r_g]$, т.е. подалгебра $[h]$ искомая.

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Для произвольных подалгебр $[f]$, $\text{Im } f = \{r_1, \dots, r_n\}$, и $[g]$ рассмотрим следующие условия:

1) существуют подалгебры $[h] \subseteq [f] \vee [g]$ и $[w] \subseteq [h] \vee [g]$ такие, что $[w - r_w] \not\subseteq [h - r_h] \vee [g - r_g]$ для некоторого r_w и любых r_h и r_g ;

2) $\text{Min } f \cap \text{Min } g = \emptyset$;

3) $|\text{Im } g| \geq 3$ на $f^{-1}(r_i)$ для некоторого i , $1 \leq i \leq n$.

Тогда верны импликации 1) $\implies$ 2) и 2), 3) $\implies$ 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2). Пусть условие 1) выполняется. Тогда по лемме 6 имеем $\text{Min } h \cap \text{Min } g = \emptyset$. Если $\text{Min } f \cap \text{Min } g \neq \emptyset$, то $\text{Min } f \cap \text{Min } g \subseteq \text{Min } h$, так как $[h] \subseteq [f] \vee [g]$; противоречие с $\text{Min } h \cap \text{Min } g = \emptyset$. Значит, $\text{Min } f \cap \text{Min } g = \emptyset$.

2), 3) $\implies$ 1). Пусть условия 2) и 3) выполняются. Без ограничения общности можно считать, что $1 = r_1 < r_2 < \dots < r_n$, причем $n \geq 2$, так как если $[f] = \mathbb{P}$, то условие 2) неверно. Положим $h = gf^m$, где $m \in \mathbb{N}$ выбрано так, что

$$\text{Min } h \subseteq \text{Min } f = f^{-1}(1). \quad (3.4)$$

Тогда $[h] \subseteq [g] \vee [f]$ и $\text{Min } h \cap \text{Min } g = \emptyset$ в силу условий 2) и (3.4). Кроме того, на $f^{-1}(r_i)$ имеем $h = gr_i^m$, причем $|\text{Im } g| \geq 3$ по условию 3). Следовательно, по лемме 6 требуемая подалгебра $[w]$ существует.

Лемма доказана.

Наконец, докажем, что равенство $\text{Min } f \cup \text{Min } g = X$, или, что равносильно, $\text{Min } f \cup \text{Min } g \neq X$, имеет решеточную характеристику для любых подалгебр $[f]$ и $[g]$. При этом можно считать, что $[f]$ и $[g]$ отличны от $\mathbb{P}$, так как в противном случае уже $\text{Min } f = X$ или $\text{Min } g = X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Для любых подалгебр $[f]$ и $[g]$, отличных от $\mathbb{P}$, равносильны следующие условия:*

- 1) $\text{Min } f \cup \text{Min } g \neq X$;
- 2) *существует подалгебра $[h]$ такая, что*

$$\text{Min } h \cap \text{Min } f = \emptyset, \quad \text{Min } h \cap \text{Min } g = \emptyset, \quad (3.5)$$

причем равенства (3.5) имеют решеточную характеристику.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2). Пусть $\text{Min } f \cup \text{Min } g \neq X$. Если $|\text{Im } f| < \infty$ и $|\text{Im } g| < \infty$, то поскольку X является бесконечным тихоновским пространством, найдется функция $h \in U(X)$ такая, что $|\text{Im } h| \geq 3 \max\{|\text{Im } f|, |\text{Im } g|\}$ и верны равенства (3.5). Последнее означает, что $|\text{Im } h| \geq 3$ на $f^{-1}(r)$ и $|\text{Im } h| \geq 3$ на $g^{-1}(r')$ для некоторых $r \in \text{Im } f$ и $r' \in \text{Im } g$. Тогда равенства (3.5) имеют решеточную характеристику по лемме 7.

Пусть $|\text{Im } f| = \infty$ и $|\text{Im } g| = \infty$. Выберем различные точки $x_0, \dots, x_6$ такие, что $x_0 \notin \text{Min } f \cup \text{Min } g$, $|\text{Im } f| = 3$ на $\{x_1, x_2, x_3\}$ и $|\text{Im } g| = 3$ на $\{x_4, x_5, x_6\}$. Поскольку пространство X тихоновское, найдется функция $h \in U(X)$ такая, что $h = f$ на $\{x_1, x_2, x_3\}$, $h = g$ на $\{x_4, x_5, x_6\}$ и $x_0 \in \text{Min } h \subseteq X \setminus (\text{Min } f \cup \text{Min } g)$. Тогда равенства (3.5) верны и имеют решеточную характеристику по лемме 6.

Наконец, пусть $|\text{Im } f| = \infty$ и $|\text{Im } g| < \infty$ (случай $|\text{Im } f| < \infty$ и $|\text{Im } g| = \infty$ аналогичен). Выберем различные точки $x_0, \dots, x_3$ такие, что $x_0 \notin \text{Min } f \cup \text{Min } g$ и $|\text{Im } f| = 3$ на $\{x_1, x_2, x_3\}$. Поскольку X является бесконечным тихоновским пространством, найдется функция $h \in U(X)$ такая, что $h = f$ на $\{x_1, x_2, x_3\}$, $|\text{Im } h| \geq 3|\text{Im } g|$ и $x_0 \in \text{Min } h \subseteq X \setminus (\text{Min } f \cup \text{Min } g)$. Последнее означает, что $|\text{Im } h| \geq 3$ на $g^{-1}(r)$ для некоторого $r \in \text{Im } g$. Тогда равенства (3.5) верны и имеют решеточную характеристику в силу лемм 6 и 7 соответственно.

Импликация 2) $\implies$ 1) очевидна.

Предложение доказано.

Под *окрестностью точки* пространства X будем понимать любое содержащее ее открытое множество. Замыкание произвольного множества $F \subseteq X$ будем обозначать через $\bar{F}$, а внутренность – через F° .

ЛЕММА 8. Для любых подалгебр $[f_1], \dots, [f_n]$, отличных от $\mathbb{P}$, имеем

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Min}^\circ f_i \neq \emptyset \iff \text{Min } f_i \cup \text{Min } g = X$$

для некоторой подалгебры $[g] \neq \mathbb{P}$ и всех $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V = \bigcap_{i=1}^n \text{Min}^\circ f_i \neq \emptyset$. Выберем точку $x \in V$. Поскольку пространство X тихоновское, найдется функция $g \in U(X)$ такая, что $g = 1/2$ на $X \setminus V$, $g(x) = 1$ и $1/2 \leq g \leq 1$. Тогда $[g] \neq \mathbb{P}$ и $\text{Min } f_i \cup \text{Min } g = X$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Обратно, поскольку $[g] \neq \mathbb{P}$ и $\text{Min } f_i \cup \text{Min } g = X$ для всех $i = 1, \dots, n$, открытое множество $X \setminus \text{Min } g$ непусто и включено в $\bigcap_{i=1}^n \text{Min}^\circ f_i$.

Лемма доказана.

Согласно предложению 6 условие $\text{Min } f_i \cup \text{Min } g = X$ леммы 8 является чисто решеточным. Поэтому из леммы 8 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Для произвольной системы $\{[f_i]\}_{i \in I}$ подалгебр, отличных от $\mathbb{P}$, имеется решеточная характеристика того, что множества $\text{Min}^\circ f_i$ непустые и образуют центрированное семейство $\{\text{Min}^\circ f_i\}_{i \in I}$.

Свяжем с точками компакта X системы подалгебр, которые будут играть важную роль в дальнейших рассуждениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. 1) Для любой точки $x \in X$ найдется максимальная система $S = \{[f_i]\}_{i \in I}$ подалгебр, отличных от $\mathbb{P}$, такая, что семейство $\{\text{Min}^\circ f_i\}_{i \in I}$ центрировано, причем $\bigcap_{i \in I} \text{Min } f_i = \{x\}$.

2) Для любой максимальной системы $S = \{[f_i]\}_{i \in I}$ подалгебр, отличных от $\mathbb{P}$, с центрированным семейством $\{\text{Min}^\circ f_i\}_{i \in I}$ выполняются следующие свойства:

2.1) $\bigcap_{i \in I} \text{Min } f_i = \{x\}$ для некоторой точки $x \in X$;

2.2) $x \in \text{Min}^\circ f_i$ для всех $i \in I$;

2.3) если $[f] \neq \mathbb{P}$ и $x \in \text{Min}^\circ f$, то $[f] \in S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку пространство X тихоновское, для каждой точки $y \in X$, отличной от x , найдется функция $f_y \in U(X)$ такая, что $x \in \text{Min}^\circ f_y$ и $y \notin \text{Min } f_y$. Рассмотрим множество M всевозможных систем $\{[f_j]\}_{j \in J}$ подалгебр, отличных от $\mathbb{P}$, каждая из которых обладает свойством центрированности семейства $\{\text{Min}^\circ f_j\}_{j \in J}$ и включает систему $\{[f_y]\}_{y \in X, y \neq x}$. Множество M непусто (содержит $\{[f_y]\}_{y \in X, y \neq x}$) и, будучи упорядочено по включению, индуктивно, так как мажорантой любой цепи систем подалгебр из M будет их объединение, очевидно, обладающее свойством центрированности и включающее $\{[f_y]\}_{y \in X, y \neq x}$. По принципу Куратовского–Цорна это означает существование в M максимальной системы подалгебр $S = \{[f_i]\}_{i \in I}$.

Далее, семейство замкнутых множеств $\{\text{Min } f_i\}_{i \in I}$ компакта X центрировано (в силу центрированности $\{\text{Min}^\circ f_i\}_{i \in I}$), а потому имеет непустое пересечение. Кроме того,

$$\bigcap_{i \in I} \text{Min } f_i \subseteq \bigcap_{y \in X, y \neq x} \text{Min } f_y = \{x\}. \quad (3.6)$$

Значит, $\bigcap_{i \in I} \text{Min } f_i = \{x\}$.

2) Поскольку семейство $\{\text{Min}^\circ f_i\}_{i \in I}$ центрировано, семейство замкнутых множеств $\{\text{Min} f_i\}_{i \in I}$ компакта X центрировано. Значит, $\bigcap_{i \in I} \text{Min} f_i \neq \emptyset$. Выберем произвольную точку x из пересечения и докажем, что произвольная ее окрестность $U_x \neq X$ пересекается с каждым множеством $\text{Min}^\circ f_i$, $i \in I$. Отсюда, в частности, получим утверждения 2.2) и 2.3) ($\text{Min}^\circ f \cap \text{Min}^\circ f_i \neq \emptyset$ для всех $i \in I$, а потому $[f] \in S$ в силу максимальности S).

Предположим обратное, т.е. $U_x \cap \text{Min}^\circ f_i = \emptyset$ для некоторой подалгебры $[f_i] \in S$. Поскольку пространство X тихоновское, найдется функция $f \in U(X)$ такая, что $f = 1/2$ на $X \setminus U_x$, $f(x) = 1$ и $1/2 \leq f \leq 1$. Тогда $\text{Min}^\circ f_i \subseteq \text{Min}^\circ f$, а потому добавление к S подалгебры $[f] \neq \mathbb{P}$ не нарушает свойство центрированности. Отсюда получаем $[f] \in S$ в силу максимальности S . Кроме того, $x \notin \bigcap_{i \in I} \text{Min} f_i$, так как $x \notin \text{Min} f$; противоречие. Значит, любая окрестность точки x пересекается с каждым множеством $\text{Min}^\circ f_i$, $i \in I$.

Наконец, заметим, что в силу п. 2.3) для любой точки $y \neq x$ подалгебра $[f_y]$ (в обозначениях п. 1)) лежит в S , т.е. верно соотношение (3.6), а вместе с ним и свойство 2.1).

Предложение доказано.

В силу следствия 2 системы подалгебр S (см. утверждение 2) предложения 7) имеют решеточную характеристику. Две такие системы S и S' назовем *эквивалентными*, если они отвечают одной и той же точке:

$$S \sim S' \iff \bigcap_{[f] \in S} \text{Min} f = \bigcap_{[f] \in S'} \text{Min} f.$$

Докажем, что отношение $\sim$ имеет решеточную характеристику.

Для произвольного множества $F \subseteq X$ множество функций $f \in U(X)$ таких, что $F \subseteq \text{Min} f$, образует подалгебру, которую обозначим через M_F .

ЛЕММА 9. Для любых замкнутых множеств F и V имеем

$$F \cap V = \emptyset \iff M_F \vee M_V = U(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M_F \vee M_V = U(X)$. Тогда $F \cap V \subseteq \text{Min} f$ для любой функции $f \in U(X)$, что возможно лишь в случае $F \cap V = \emptyset$.

Обратно, пусть $F \cap V = \emptyset$. Докажем, что любую функцию $f \in U(X)$ можно представить в виде gh , где $g \in M_F$ и $h \in M_V$. Отсюда, в частности, будет следовать, что $M_F \vee M_V = U(X)$.

Функцию $1/f$ будем считать нормированной. Поскольку компакт X является нормальным пространством, найдется функция $\lambda \in U(X)$ такая, что $\lambda = 1$ на F , $\lambda = \min 1/f$ на V и $\min 1/f \leq \lambda \leq 1$. Положим

$$g = \frac{1}{\lambda \vee 1/f}, \quad h = f \left(\lambda \vee \frac{1}{f} \right),$$

где $\vee$ – max-сумма функций. Тогда $f = gh$, причем $g \in M_F$ и $h \in M_V$, так как $g = 1$ на F , $g \geq 1$, и $h = 1$ на V , $h \geq 1$.

Лемма доказана.

Опираясь на предложение 6, для произвольной подалгебры $[f]$, $\text{Min}^\circ f \neq \emptyset$, дадим решеточную характеристику подалгебры $M_{\overline{\text{Min}^\circ f}}$ (условие $\text{Min}^\circ f \neq \emptyset$ является решеточным по следствию 2).

ЛЕММА 10. Для любых подалгебр $[f] \neq \mathbb{P}$, $\text{Min}^\circ f \neq \emptyset$, и $[g]$ имеем

$$g \in M_{\overline{\text{Min}^\circ f}} \iff \text{Min } g \cup \text{Min } h = X$$

для всех подалгебр $[h]$ таких, что $\text{Min } f \cup \text{Min } h = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что минимальные значения функций f, g и h равны 1.

Пусть $g \in M_{\overline{\text{Min}^\circ f}}$, т.е. $\overline{\text{Min}^\circ f} \subseteq \text{Min } g$. Докажем, что $\text{Min } g \cup \text{Min } h = X$ для любой подалгебры $[h]$ со свойством $\text{Min } f \cup \text{Min } h = X$. Рассуждая от противного, выберем точку $x \in \text{Min } f \setminus (\text{Min } g \cup \text{Min } h)$. Тогда $f(x) = 1$, $g(x) > 1$ и $h(x) > 1$. Выберем произвольную окрестность U_x точки x , на которой значения h больше 1. Поскольку $\text{Min } f \cup \text{Min } h = X$, имеем $f = 1$ на U_x , в частности $x \in \text{Min}^\circ f$. А так как $\overline{\text{Min}^\circ f} \subseteq \text{Min } g$, получаем $g(x) = 1$; противоречие. Значит, $\text{Min } g \cup \text{Min } h = X$.

Обратно, предположим, что существует функция g такая, что $g(x) > 1$ в некоторой точке $x \in \text{Min}^\circ f$, хотя $\text{Min } g \cup \text{Min } h = X$ для любой подалгебры $[h]$ такой, что $\text{Min } f \cup \text{Min } h = X$. Рассмотрим произвольную окрестность U_x точки x , на которой значения g больше 1. Зафиксируем точку $y \in U_x \cap \text{Min}^\circ f$. Поскольку пространство X тихоновское, найдется функция $h \in U(X)$ такая, что $h = 1$ на $X \setminus (U_x \cap \text{Min}^\circ f)$, $h(y) = 2$, $1 \leq h \leq 2$. Ясно, что $\text{Min } f \cup \text{Min } h = X$, хотя $y \in X \setminus (\text{Min } g \cup \text{Min } h)$, так как $g(y) > 1$ и $h(y) > 1$.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Для любых максимальных систем подалгебр S и S' имеем

$$S \sim S' \iff M_{\overline{\text{Min}^\circ f}} \vee M_{\overline{\text{Min}^\circ g}} \neq U(X)$$

для любых подалгебр $[f] \in S$ и $[g] \in S'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть системы S и S' соответствуют точке x . Тогда по п. 2.2) предложения 7 имеем $x \in \overline{\text{Min}^\circ f} \cap \overline{\text{Min}^\circ g}$ для любых $[f] \in S$ и $[g] \in S'$. Значит, $M_{\overline{\text{Min}^\circ f}} \vee M_{\overline{\text{Min}^\circ g}} \neq U(X)$ по лемме 9.

Обратно, предположим противное, т.е. условие выполняется, но системы S и S' соответствуют различным точкам x и y . Поскольку пространство X тихоновское, найдутся функции $f, g \in U(X)$ такие, что $x \in \text{Min}^\circ f$, $y \in \text{Min}^\circ g$ и $\text{Min } f \cap \text{Min } g = \emptyset$. Тогда $[f] \in S$ и $[g] \in S'$ согласно п. 2.3) предложения 7. Кроме того, $M_{\overline{\text{Min}^\circ f}} \vee M_{\overline{\text{Min}^\circ g}} = U(X)$ по лемме 9; противоречие. Значит, $S \sim S'$. Предложение доказано.

Обозначим через S_x класс эквивалентности, образованный максимальными системами подалгебр S , которые соответствуют точке x . Из предложения 8 следует, что классы S_x имеют решеточную характеристику.

ЛЕММА 11. Для любых подалгебр $[f] \neq \mathbb{P}$, $\text{Min}^\circ f \neq \emptyset$, и класса S_x имеем

$$x \in \text{Min}^\circ f \iff \text{Min } f \cup \text{Min } g = X$$

для некоторой подалгебры $[g] \neq \mathbb{P}$ такой, что $[g] \notin S$ для всех $S \in S_x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \text{Min}^\circ f$. Поскольку пространство X тихоновское, найдется функция $g \in U(X)$ такая, что $g = 1/2$ на $X \setminus \text{Min}^\circ f$, $g(x) = 1$ и $1/2 \leq g \leq 1$. Тогда $[g] \neq \mathbb{P}$, $\text{Min} f \cup \text{Min} g = X$ и $[g] \notin S$ для всех $S \in S_x$, так как $x \notin \text{Min} g$.

Обратно, поскольку $[f] \neq \mathbb{P}$ и $\text{Min} f \cup \text{Min} g = X$, множество $\text{Min}^\circ g$ непусто и включает $X \setminus \text{Min} f$. Следовательно, если $x \notin \text{Min}^\circ f$, то $\text{Min}^\circ f_i \cap \text{Min}^\circ g \neq \emptyset$ для любой подалгебры $[f_i]$, где $x \in \text{Min}^\circ f_i$. Таким образом, семейство множеств, состоящее из $\text{Min}^\circ g$ и всевозможных $\text{Min}^\circ f_i$, где $x \in \text{Min}^\circ f_i$, центрировано. Поэтому, как и при доказательстве утверждения 1) предложения 7, найдется система подалгебр S , содержащая подалгебры $[g]$ и $[f_i]$, где $x \in \text{Min}^\circ f_i$, причем $S \in S_x$. С другой стороны, $[g] \notin S$, так как $S \in S_x$; противоречие. Значит, $x \in \text{Min}^\circ f$.

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 для компактов. Пусть X и Y – компакты и $\alpha: A_1(U(X)) \rightarrow A_1(U(Y))$ – изоморфизм решеток. Тогда по предложению 5 компакты X и Y конечны или бесконечны одновременно, причем если $|X| = n$, то $|Y| = n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Значит, теорема 1 верна для конечных компактов.

Пусть X и Y – бесконечные компакты. Тогда в силу предложений 7 и 8 соответствие

$$\varphi: X \rightarrow Y, \quad \varphi(x) = y \iff \alpha(S_x) = S_y$$

будет биекцией компактов X и Y , причем (по лемме 11) если $\alpha([f]) = [g]$, то $\varphi(\text{Min}^\circ f) = \text{Min}^\circ g$ для любой подалгебры $[f]$ полуполя $U(X)$. Множества $\text{Min}^\circ f$ образуют базу открытых множеств любого тихоновского пространства, в том числе компакта. Значит, φ – гомеоморфизм. Теорема 1 для компактов доказана.

§ 4. Случай хьюиттовских пространств

Сведем доказательство теоремы 1 для хьюиттовских пространств к случаю компактов. Пространство X пока считаем тихоновским.

Подалгебру A полуполя $U(X)$ назовем *b-подалгеброй*, если все функции из A ограничены сверху, и *sp-подалгеброй*, если любая функция $f \in A$ строго положительна, т.е. $\inf f > 0$.

Заметим, что подалгебра A будет sp- или b-подалгеброй тогда и только тогда, когда любая подалгебра $[f] \subseteq A$ будет sp- или b-подалгеброй соответственно. Поэтому для решеточной характеристики sp-подалгебр и b-подалгебр можно ограничиться случаем однопорожденных подалгебр.

ЛЕММА 12. Для любой подалгебры $[f]$ имеем

$$[f] \text{ – sp-подалгебра} \iff [f] = [g + r]$$

для некоторых подалгебры $[g]$ и $r > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[f]$ – sp-подалгебра. Положим $g = f - \inf f/2$ и $r = \inf f/2$. Тогда $[f] = [g + r]$. Обратное очевидно. Лемма доказана.

Напомним, что решеточная характеристика подалгебр $[g + r]$, $r > 0$, была дана в предложении 4. Поэтому лемма 12 содержит решеточную характеристику однопорожденных sr -подалгебр.

Рассмотрим произвольную подалгебру $[f]$, воспользуемся предложением 4 и перейдем к подалгебре $[f + r]$ для некоторого $r > 0$. Заметим, что подалгебра $[f]$ будет b -подалгеброй тогда и только тогда, когда ею будет sr -подалгебра $[f + r]$. Таким образом, для решеточной характеристики b -подалгебр можно ограничиться случаем sr -подалгебр.

ЛЕММА 13. *Для любой sr -подалгебры $[f]$ равносильны следующие условия:*

- 1) $[f]$ не является b -подалгеброй;
- 2) существует подалгебра $[g]$, которая не является sr -подалгеброй, такая, что $[f] \not\subseteq [g]$ и $[h] \subseteq [g]$ для любой подалгебры $[h] \subseteq [f] \vee [g]$, не являющейся sr -подалгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть sr -подалгебра $[f]$ не является b -подалгеброй. Положим $g = 1/f$. Тогда $\inf g = 0$, т.е. $[g]$ не sr -подалгебра. Предположим, что $[f] \subseteq [g]$. Тогда функция f имеет вид

$$f = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{f} \right) + \cdots + a_n \left(\frac{1}{f} \right)^n.$$

Отсюда получаем

$$1 = a_0 \left(\frac{1}{f} \right) + a_1 \left(\frac{1}{f} \right)^2 + \cdots + a_n \left(\frac{1}{f} \right)^{n+1},$$

что невозможно, так как функция f не ограничена сверху. Значит, $[f] \not\subseteq [g]$.

Для произвольной подалгебры $[h] \subseteq [f] \vee [g]$, которая не является sr -подалгеброй, функция h имеет вид

$$h = b_0 + b_1 f + \cdots + b_m f^m + c_1 \left(\frac{1}{f} \right) + \cdots + c_s \left(\frac{1}{f} \right)^s.$$

Поскольку $\inf f > 0$ и $\inf h = 0$, $b_i = 0$ для всех $i = 0, \dots, m$. Значит, $[h] \subseteq [g]$.

Обратно, пусть условие 2) выполняется, но $[f]$ – это b -подалгебра. Положим $h = fg$. Тогда $[h] \subseteq [f] \vee [g]$ и $\inf h = 0$, так как $\sup f < \infty$ и $\inf g = 0$. Поскольку $[h]$ не sr -подалгебра, $[h] \subseteq [g]$ по условию 2). Следовательно, функция $h = fg$ имеет вид

$$fg = a_0 + a_1 g + \cdots + a_n g^n,$$

причем $a_0 = 0$, так как $\inf fg = 0$. Отсюда получаем

$$f = a_1 + \cdots + a_n g^{n-1},$$

что противоречит $[f] \not\subseteq [g]$. Значит, $[f]$ не является b -подалгеброй.

Лемма доказана.

Из лемм 12 и 13 получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Для любого тихоновского пространства X в $\mathbb{A}_1(U(X))$ имеется решеточная характеристика b - и sr -подалгебр.*

Обозначим через $f \wedge g$ min-сумму функций $f, g \in U(X)$:

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{для всех } x \in X.$$

ЛЕММА 14. Пусть X – бесконечный компакт. Тогда для произвольных подалгебры $[f]$, $\text{Min}^\circ f = \emptyset$, и класса S_x равносильны следующие условия:

- 1) $x \notin \text{Min } f$;
- 2) существуют подалгебры $[g]$ и $[h]$ такие, что
 - 2.1) $[g] \in S$ для всех $S \in S_x$,
 - 2.2) $[h] \neq \mathbb{P}$, $\text{Min}^\circ h \neq \emptyset$ и $[h] \notin S$ для всех $S \in S_x$,
 - 2.3) $[h] \subseteq [f] \vee [g]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2). Пусть $x \notin \text{Min } f$. Без ограничения общности будем считать, что функция f нормированная. Положим

$$r = \frac{f(x) + 2 \min f}{3}, \quad g = 2 - f \wedge r, \quad h = f + 2 - f \wedge r.$$

Тогда $g \geq 2 - r$, причем открытое множество

$$F = \left\{ y \in X : f(y) > \frac{2f(x) + \min f}{3} \right\}$$

непусто ($x \in F$) и $g = 2 - r$ на F . Поэтому в силу предложения 7 $[g] \in S$ для любой $S \in S_x$, так как $x \in F \subseteq \text{Min}^\circ g$. Значит, условие 2.1) выполняется.

Далее, $h \geq 2$, причем открытое множество

$$V = \{y \in X : f(y) < r\}$$

непусто ($\text{Min } f \subseteq V$) и $h = 2$ на V . Поэтому $V \subseteq \text{Min}^\circ h$ и $\text{Min}^\circ h \neq \emptyset$. Кроме того, $x \notin \text{Min } h$ и $[h] \subseteq [f] \vee [g]$, так как $h(x) = f(x) + 2 - r > 2$ и $h = f + g$. Значит, условия 2.2) и 2.3) выполняются.

2) $\implies$ 1). Допустим, условие 2) верно, но $x \in \text{Min } f$. Тогда

$$\text{Min } f \cap \text{Min } g \neq \emptyset, \tag{4.1}$$

так как $x \in \text{Min } g$ согласно условию 2.1).

По условию 2.2) $[h] \neq \mathbb{P}$ и $\text{Min}^\circ h \neq \emptyset$. Значит, $[h] \not\subseteq [f]$ и $[h] \not\subseteq [g]$, так как в противном случае $\text{Min } h = \text{Min } f$, хотя $\text{Min}^\circ f = \emptyset$ по условию, или $\text{Min } h = \text{Min } g$, т.е. в силу условия 2.1) $[h] \in S$ для всех $S \in S_x$; противоречие с условием 2.2). Теперь из (4.1) и условия 2.3) находим, что $\text{Min } h = \text{Min } f \cap \text{Min } g$, хотя $\text{Min}^\circ h \neq \emptyset$ и $\text{Min}^\circ f = \emptyset$. Значит, $x \notin \text{Min } f$.

Лемма доказана.

Отметим, что в силу следствия 2 и предложения 7 условие 2) леммы 14, а значит, и условие 1) чисто решеточное.

Рассмотрим стоун-чеховскую компактификацию βX тихоновского пространства X . Компактификация βX характеризуется (см. [3; теорема 3.6.1]) следующими условиями: βX – компакт, X – плотное подпространство в βX и всякая ограниченная функция кольца $C(X)$ продолжается до некоторой (единственной) функции f^β из $C(\beta X)$.

Поскольку X плотно в βX , $\min f^\beta = \inf f$ и $\max f^\beta = \sup f$ для любой ограниченной функции $f \in C(X)$. Кроме того, если $f > 0$ на X и $\inf f = 0$, то $\text{Min } f^\beta \subseteq \beta X \setminus X$ и $\text{Min}^\circ f^\beta = \emptyset$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для любого класса S_x полуполя $U(\beta X)$ равносильны следующие условия:

- 1) $x \in X$;
- 2) $x \notin \text{Min } g^\beta$ для любой b -подалгебры $[f] \subseteq U(X)$, которая не является sr -подалгеброй, и любой sr -подалгебры $[g]$, где $[g] \subseteq [f]$ и $[g] \neq \mathbb{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2). Пусть $x \in X$ и $[f] \subseteq U(X)$ – это b -подалгебра, которая не является sr -подалгеброй. Тогда $\text{Min } f^\beta \subseteq \beta X \setminus X$ и $\text{Min}^\circ f^\beta = \emptyset$. Далее, $\text{Min } g^\beta = \text{Min } f^\beta$ для любой sr -подалгебры $[g] \subseteq [f]$, $[g] \neq \mathbb{P}$. Следовательно, $\text{Min}^\circ g^\beta = \emptyset$ и $x \notin \text{Min } g^\beta$.

2) $\implies$ 1). Пусть условие 2) выполняется, но $x \in \beta X \setminus X$. Найдется функция $f \in U(X)$ (см. [3; теорема 3.11.10]) такая, что $0 \leq f^\beta \leq 1$ и $f^\beta(x) = 0$. Тогда $[f]$ – это не являющаяся sr -подалгеброй b -подалгебра полуполя $U(X)$, для которой $\text{Min}^\circ f^\beta = \emptyset$ и условие 2) неверно, так как $x \in \text{Min } g^\beta = \text{Min } f^\beta$ для любой sr -подалгебры $[g] \subseteq [f]$, $[g] \neq \mathbb{P}$; противоречие. Значит, $x \in X$.

Предложение доказано.

Отметим, что по следствию 9 и лемме 14 условие 2) предложения 10, а значит, и условие 1) чисто решеточное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 для хьюиттовских пространств. Пусть α – изоморфизм решетки $\mathbb{A}_1(U(X))$ на решетку $\mathbb{A}_1(U(Y))$, где пространства X и Y хьюиттовские. Докажем, что X и Y гомеоморфны. В силу предложения 5 достаточно разобрать случай, когда пространства X и Y бесконечны.

Множество всех ограниченных строго положительных функций полуполя $U(X)$ образует подалгебру, которую обозначим через $\text{spb } U(X)$. Она канонически изоморфна полу полю $U(\beta X)$. Соответствующий канонический изоморфизм решеток $\mathbb{A}_1(\text{spb } U(X))$ и $\mathbb{A}_1(U(\beta X))$ обозначим через α_X . Аналогичным образом определим изоморфизм α_Y .

Согласно предложению 9 b - и sr -подалгебры полуполей $U(X)$ и $U(Y)$ имеют решеточные характеристики. Поэтому отображение $\gamma = \alpha_Y \circ \alpha \circ \alpha_X^{-1}$ будет изоморфизмом решетки $\mathbb{A}_1(U(\beta X))$ на решетку $\mathbb{A}_1(U(\beta Y))$. Тогда, как было показано ранее для компактов, соответствие

$$\varphi: \beta X \rightarrow \beta Y, \quad \varphi(x) = y \iff \gamma(S_x) = S_y$$

будет гомеоморфизмом компактов βX и βY . Кроме того, $\varphi(X) = Y$ в силу предложения 10. Значит, $\varphi|_X$ – гомеоморфизм пространств X и Y .

Теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

- [1] J. S. Golan, *Semirings and their applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, xii+381 с.
- [2] Г. Гретцер, *Общая теория решеток*, Мир, М., 1982, 454 с.; пер. с англ.: G. Grätzer, *General lattice theory*, Pure Appl. Math., **75**, Academic Press, New York–London, 1978, xiii+381 pp.
- [3] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986, 752 с.; пер. с англ.: R. Engelking, *General topology*, Monogr. Mat., **60**, PWN–Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977, 626 pp.

- [4] I. Gelfand, A. Kolmogoroff, “On rings of continuous functions on topological spaces”, *Докл. АН СССР*, **22**:1 (1939), 11–15.
- [5] Е. М. Вечтомов, “Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций”, *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.*, **28**, ВИНТИ, М., 1990, 3–46; англ. пер.: Е. М. Vechtomov, “Specification of topological spaces by algebraic systems of continuous functions”, *J. Soviet Math.*, **53**:2 (1991), 123–147.
- [6] Е. М. Вечтомов, “Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты”, *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.*, **29**, ВИНТИ, М., 1991, 119–191; англ. пер.: Е. М. Vechtomov, “Rings of continuous functions. Algebraic aspects”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **71**:2 (1994), 2364–2408.
- [7] E. Hewitt, “Rings of real-valued continuous functions. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64**:1 (1948), 45–99.
- [8] Е. М. Вечтомов, “Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства”, *Матем. заметки*, **62**:5 (1997), 687–693; англ. пер.: Е. М. Vechtomov, “Lattice of subalgebras of the ring of continuous functions and Hewitt spaces”, *Math. Notes*, **62**:5 (1997), 575–580.
- [9] В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов, И. А. Семенова, “Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4**:2 (1998), 493–510.
- [10] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Reprint of the 1960 ed., Grad. Texts in Math., **43**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1976, xiii+300 pp.
- [11] Е. М. Вечтомов, В. В. Сидоров, “Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **16**:3 (2010), 63–103; англ. пер.: Е. М. Vechtomov, V. V. Sidorov, “Isomorphisms of lattices of subalgebras of semirings of continuous nonnegative functions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **177**:6 (2011), 817–846.
- [12] Е. М. Вечтомов, В. В. Сидоров, “Определяемость хьюиттовских пространств решетками подалгебр полуколец непрерывных положительных функций с тах-сложением”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **21**, № 3, 2015, 78–88.

Вадим Вениаминович Сидоров

(Vadim V. Sidorov)

Вятский государственный университет, г. Киров

E-mail: sedoy_vadim@mail.ru

Поступила в редакцию

01.10.2015 и 09.03.2016