Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. II, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 11, 119–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm861>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:52:01

УДК 513.6

А. В. Пухликов

Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. II

Продолжено изучение бирациональной геометрии расслоений Фано $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, слой которых – двойная гиперповерхность Фано индекса 1. Для большинства семейств этого типа, не удовлетворяющих условию достаточной закрученности по базе, доказана бирациональная жесткость (в частности, отсутствие других структур расслоения на рационально связные многообразия) и вычислена группа бирациональных автоморфизмов. Существенно усилены основные компоненты метода максимальных особенностей, прежде всего, техника подсчета кратностей для расслоений $V/\mathbb{P}^1$ на многообразия Фано над прямой.

Библиография: 20 названий.

Введение

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1]. Мы изучаем бирациональную геометрию многомерных алгебраических многообразий с пучком двойных накрытий Фано, уже не предполагая выполненным стандартное условие достаточной закрученности по базе – K^2 -условие [2], [3]. Как отмечено в [3], если отклонение от K^2 -условия не слишком велико, техника метода максимальных особенностей сохраняет силу и позволяет доказывать бирациональную жесткость. Этому и посвящена данная работа: рассматриваются расслоения Фано $V/\mathbb{P}^1$, не удовлетворяющие K^2 -условию, однако отклоняющиеся от него не очень сильно.

Если отклонение от K^2 -условия переходит некоторую границу, то многообразие V перестает быть бирационально жестким. Нежесткие и “пограничные” семейства расслоений $V/\mathbb{P}^1$ будут рассмотрены в последующей статье – третьей части настоящего исследования. Для этого будет использована усиленная техника, развиваемая в настоящей работе.

0.1. K^2 -условие и K -условие. В этой статье, как и в предыдущей работе [1], рассматриваются расслоения Фано $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, удовлетворяющие условиям

$$A^1V = \text{Pic } V = \mathbb{Z}K_V \oplus \mathbb{Z}F, \quad A^2V = \mathbb{Z}K_V^2 \oplus \mathbb{Z}H_F,$$

где F – класс проекции π , $H_F = (-K_V \cdot F)$ – гиперплоское сечение слоя. Положим $A_{\mathbb{R}}^1V = A^1V \otimes \mathbb{R}$, $A_{\mathbb{R}}^2V = A^2V \otimes \mathbb{R}$. Пусть

$$A_+^1V \subset A_{\mathbb{R}}^1V, \quad A_{\text{mov}}^1V \subset A_{\mathbb{R}}^1V, \quad A_+^2V \subset A_{\mathbb{R}}^2V$$

Работа выполнена в рамках Программы поддержки молодых российских ученых – докторов наук (грант № МД-328.2003.01) и при поддержке Фонда содействия отечественной науке.

– замкнутые конусы, порожденные эффективными дивизорами, подвижными дивизорами и эффективными циклами коразмерности два соответственно. Геометрия расслоения $V/\mathbb{P}^1$ существенно зависит от взаимного расположения класса K_V^2 и конуса $A_+^2 V$, а также взаимного расположения антиканонического класса $(-K_V)$ и конуса $A_{\text{mov}}^1 V$. Различные возможности для K_V^2 показаны на рис. 1–3. Очевидно, $A_{\mathbb{R}}^2 V = \mathbb{R}K_V^2 \oplus \mathbb{R}H_F$, так что $A_{\mathbb{R}}^2 V^* = \mathbb{R}\beta \oplus \mathbb{R}\chi$, где $\beta: A_{\mathbb{R}}^2 V \rightarrow \mathbb{R}$ определяется условием $\beta(H_F) = 1$, $\beta(K_V^2) = 0$ и, аналогично, $\kappa(K_V^2) = 1$, $\kappa(H_F) = 0$.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

В случаях, изображенных на рис. 2, 3, выполнено K^2 -условие:

$$K_V^2 \notin \text{Int } A_+^2 V.$$

Хорошо известно (и легко доказать, см. [2], [3]), что из K^2 -условия вытекает K -условие:

$$-K_V \notin \text{Int } A_{\text{mov}}^1 V.$$

(Имеется естественное отображение самопересечения

$$\begin{aligned} \text{sq}: A_{\text{mov}}^1 V &\rightarrow A_+^2 V, \\ \text{sq}: z &\mapsto z^2, \end{aligned}$$

причем легко проверить, что $\text{sq}(\text{Int } A_{\text{mov}}^1 V) \subset \text{Int } A_+^2 V$, см. замечание 1.1 в §1 ниже.) Настоящая работа посвящена расслоениям Фано $V/\mathbb{P}^1$, каждый слой $F_t = \pi^{-1}(t)$ которых есть регулярная двойная гиперповерхность Фано индекса 1, $F_t \in \mathcal{F}^{\text{reg}}$, см. [1], причем K^2 -условие не выполнено, т.е. $K_V^2 \in \text{Int } A_+^2 V$ (рис. 1). Степень отклонения от K^2 -условия измеряется числом $a \geq 0$, удовлетворяющим формуле

$$K_V^2 - aH_F \in \partial A_+^2 V.$$

В настоящей статье рассматриваются в основном расслоения $V/\mathbb{P}^1$, удовлетворяющие K -условию. K -условие также не является необходимым для бирациональной жесткости: если отклонение от K -условия не слишком велико, техника метода максимальных особенностей сохраняет силу и многообразие все еще поддается изучению. Семейства, не удовлетворяющие K -условию, а также некоторые другие, не рассматриваемые здесь и не рассмотренные в [1], будут изучены в следующей статье – третьей части работы.

0.2. Список рассматриваемых многообразий. Напомним конструкцию многообразий с пучком двойных гиперповерхностей Фано, более подробно см. [4], [1]. Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ – локально свободный пучок ранга $M+2$, где $a_0 = 0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{M+1}$, $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $\text{Pic } X = \mathbb{Z}L_X \oplus \mathbb{Z}R$, L_X – класс тавтологического пучка, R – класс слоя естественной проекции $\pi_X: X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Теперь многообразие V реализуется как двойное накрытие $\sigma: V \rightarrow Q$ гладкой гиперповерхности $Q \subset X$,

$$Q \sim mL_X + a_Q R, \quad a_Q \in \mathbb{Z}_+,$$

разветвленное над гладким дивизором $W_Q = W \cap Q$, где $W \subset X$,

$$W \sim 2lL_X + 2a_W R, \quad a_W \in \mathbb{Z}_+.$$

Символом $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^1$ обозначаем естественную проекцию, символом F_t – слой $\pi^{-1}(t)$, иногда опуская t . Легко видеть, что

$$K_V = -L_V + (a_X + a_Q + a_W - 2)F,$$

где $L_V = \sigma^*(L_X|_Q)$, $a_X = a_1 + \dots + a_{M+1}$. Поскольку линейная система $|L_X|$ (и, значит, $|L_V|$) свободна, K^2 -условие является следствием неравенства

$$(K_V^2 \cdot L_V^{M-1}) = 2m(4 - a_X - 2a_Q - 2a_W) + 2a_Q \leq 0. \quad (1)$$

В настоящей работе рассматриваются семейства, не удовлетворяющие (1). Приведем их список. Параметры семейств записываем в следующем формате:

$$((a_1, \dots, a_{M+1}), (a_Q, a_W)),$$

для компактности записи в наборе $(a_1, \dots, a_{M+1})$ пишем только ненулевые числа, если таковые имеются, в противном случае пишем (0): таким образом, например, (1) обозначает набор $(0, \dots, 0, 1)$, $(1, 1)$ обозначает набор $(0, \dots, 0, 1, 1)$, а (0) обозначает набор $(0, \dots, 0)$, целиком состоящий из нулей. Вот список многообразий, изученных в работе:

1. $((0), (2, 0));$
2. $((0), (1, 1));$
3. $((1), (0, 1));$
4. $((2), (1, 0));$
5. $((2), (0, 0));$
6. $((3), (0, 0));$
7. $((1, 2), (0, 0));$
8. $((1, 1, 1), (0, 0)).$

Еще раз подчеркнем, что перечисленные выше восемь семейств не исчерпывают списка многообразий, не удовлетворяющих K^2 -условию. Имеются еще семь семейств, не удовлетворяющих K -условию, большинство которых не является бирационально жесткими, обладая многими структурами рационально связного расслоения. Эти семейства в настоящей работе не рассматриваются.

0.3. Многообразия с пучком двойных пространств. Бирациональная жесткость многообразий V , расслоенных на двойные пространства индекса 1, была доказана в самой первой работе автора, посвященной расслоениям Фано, в [2], в предположении достаточной закрученности по базе, т.е. K^2 -условия. В настоящей статье будут рассмотрены многообразия этого типа, удовлетворяющие K -условию, но не K^2 -условию. Напомним их конструкцию, являющуюся упрощением приведенной выше конструкции для двойных гиперповерхностей (и соответствующую значению $m = 1$). Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ – локально свободный пучок ранга $M + 1$, $a_0 = 0 \leq \dots \leq a_M$, $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ – его проективное расслоение, тогда V реализуется как двойное накрытие $\sigma: V \rightarrow X$, разветвленное над гладкой гиперповерхностью $W \subset X$,

$$W \sim 2ML_X + 2a_W R,$$

где L_X – класс тавтологического пучка, R – класс слоя проекции $\pi_X: X \rightarrow \mathbb{P}^3$. Очевидно,

$$K_V = -L_V + (a_X + a_W - 2)F,$$

где $L_V = \sigma_* L_X$, $F = \sigma^* R$ – класс слоя,

$$\text{Pic } V = \mathbb{Z}L_V \oplus \mathbb{Z}F,$$

$a_X = a_1 + \dots + a_M$, $a_W \in \mathbb{Z}_+$. Параметры семейства записываем в таком формате:

$$((a_1, \dots, a_M), a_W),$$

причем, как и выше, если $(a_1, \dots, a_M) \neq (0, \dots, 0)$, то нули опускаем, а если $(a_1, \dots, a_M) = (0, \dots, 0)$, то пишем просто (0) . Многообразие V удовлетворяет K^2 -условию, если выполнено неравенство

$$(K_V^2 \cdot L_V^{M-1}) = 8 - 2a_X - 4a_W \leq 0. \quad (2)$$

В настоящей работе рассматриваются семейства, не удовлетворяющие (2). Приведем их список:

- 1*. $((1), 1)$;
- 2*. $((2), 0)$;
- 3*. $((3), 0)$;
- 4*. $((1, 2), 0)$;
- 5*. $((1, 1, 1), 0)$.

Для всех перечисленных типов многообразий K -условие выполнено (это будет показано ниже). Имеются еще четыре семейства, не удовлетворяющие K^2 - и K -условиям. Их бирациональная геометрия будет изучена в последующей работе.

0.4. Формулировка основного результата. Для дивизора D на рационально связном многообразии Y полагаем

$$c(D, Y) = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \mid D + \varepsilon K_Y \in A_+^1 Y\}.$$

Для подвижной линейной системы Σ на унилинейчатом многообразии V определим *виртуальный порог канонического присоединения* формулой

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = \inf_{V^\# \rightarrow V} \{c(\Sigma^\#, V^\#)\},$$

где точная нижняя грань взята по всем бирациональным морфизмам $V^\# \rightarrow V$, $V^\#$ — проективная модель поля $\mathbb{C}(V)$, неособая в коразмерности 1, $\Sigma^\#$ — собственный прообраз системы Σ на $V^\#$. Следующее определение бирациональной жесткости эквивалентно стандартному.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. (i) Многообразие V называется *бирационально сверхжестким*, если для любой подвижной линейной системы Σ на V имеет место равенство

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma, V).$$

(ii) Многообразие V (соответственно расслоение Фано V/S) называется *бирационально жестким*, если для любой подвижной линейной системы Σ на V существует бирациональный автоморфизм $\chi \in \text{Bir } V$ (соответственно послойный автоморфизм $\chi \in \text{Bir}(V/S)$), обеспечивающий равенство

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\chi_* \Sigma, V).$$

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. (i) *Регулярные многообразия V с пучком двойных гиперповерхностей типов 2–8 в приведенном выше списке и все многообразия типов 1*–5* с пучком двойных пространств являются бирационально сверхжесткими и удовлетворяют K -условию: $-K_V \notin A_{\text{mov}}^1 V$. Имеющаяся на этих многообразиях структура рационально связного расслоения $V/\mathbb{P}^1$ – единственная нетривиальная структура рационально связного расслоения на V . Группы бирациональных и бирегулярных автоморфизмов этих многообразий совпадают:*

$$\text{Bir } V = \text{Aut } V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(ii) *Регулярные многообразия V типа 1 (т.е. многообразия семейства $((0), (2, 0))$) являются бирационально жесткими. Они обладают нетривиальным бирациональным автоморфизмом – инволюцией $\tau \in \text{Bir } V \setminus \text{Aut } V$ – и не удовлетворяют K -условию. На V имеется ровно две нетривиальные структуры рационально связного расслоения: пучок $|F|$ слоев морфизма π и его образ $|\tau_* F|$. Группа $\text{Bir } V$ состоит из четырех элементов:*

$$\text{Bir } V = \langle \tau \rangle \times \text{Aut } V = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\times 2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 0.1. *Все многообразия типов 1–8 и 1*–5* не имеют структур рационально связного расслоения над базой размерности 2 или выше, в частности, не могут быть расслоены рациональным отображением на рациональные кривые или рациональные поверхности. Тем самым, все они нерациональны.*

0.5. Структура статьи. Для доказательства теоремы 1 необходимо усилить технику метода максимальных особенностей. Такое усиление важно само по себе, так как расширяет область применимости метода: еще далеко не для всех естественных семейств расслоений Фано над $\mathbb{P}^1$ доказана бирациональная жесткость, даже при условии достаточной закрученности по базе. Поэтому большая часть статьи носит технический характер.

В §1 проведена подготовительная работа: совпадение виртуального и фактического порогов канонического присоединения доказано в предположении, что выполнено K^2 -условие и слои расслоения Фано $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяют стандартным условиям (h), (v) и (vs) (см. [1]). Затем сделан первый шаг в направлении усиления техники: показано, что усиление условия (h) компенсирует ослабление K^2 -условия.

Параграф 2 посвящен усилению техники метода максимальных особенностей на основе совершенно другой идеи: сопоставления особенностей горизонтального цикла Z^h и его ограничения на слой F , содержащий центр максимальной особенности. Эта идея является новой и используется для доказательства бирациональной жесткости впервые. Кроме того, приводятся со всеми подробностями техника подсчета кратностей: во всех предшествовавших работах [1]–[10] вычислялась кратность цикла Z – пересечения двух дивизоров линейной системы Σ , здесь же речь идет о пересечении дивизора и неприводимого подмногообразия коразмерности 2. Вычисления параллельны дивизориальному случаю, однако имеются некоторые различия: например, учитываются только раздутия подмногообразий коразмерности 3 и выше, причем раздутия подмногообразий коразмерности 3 играют ту же роль, что в дивизориальном случае – коразмерности 2.

В §3 доказывается теорема 1. Сначала изучен вопрос о справедливости K -условия для многообразий из приведенных выше списков. Затем проверены необходимые оценки для подмногообразий $Y \subset F$ произвольного слоя F (большая часть этой работы проделана в предыдущей статье [1] и в [4]). Оставшаяся часть параграфа посвящена усилению оценки на кратности подмногообразий коразмерности два, для чего, в свою очередь, необходимо оценить количество прямых (с учетом их кратностей), проходящих через произвольную точку слоя. Комбинация этой усиленной оценки с общей теорией, развитой в первых двух параграфах, позволяет доказывать совпадение виртуального и фактического порогов канонического присоединения для многообразий, еще сильнее отклоняющихся от K^2 -условия, чем многообразия, рассматриваемые в настоящей работе. Эти предельные возможности техники метода максимальных особенностей будут использованы в дальнейшем.

0.6. Исторические замечания. Сразу же после того, как в [2] была разработана эффективно работающая техника изучения бирациональной геометрии расслоений Фано $V/\mathbb{P}^1$, удовлетворяющих K^2 -условию, на повестку дня встал вопрос об изучении “пограничных” классов, для которых отклонение от K^2 -условия не слишком велико. Уже в [3] отмечено, что для конкретных изученных многообразий K^2 -условие излишне сильное; неравенства, с помощью которых устанавливается бирациональная жесткость, содержат значительный “запас”. Поэтому некоторое ослабление этого условия не должно влиять на окончательный результат. Работы М. М. Гриненко [11]–[13] и И. В. Соболева [14], [15] подтвердили данное предположение. В [12] высказана гипотеза, что K -условие (более слабое, чем K^2 -условие) уже является достаточным для бирациональной жесткости. Эта гипотеза недавно вызвала интерес [16] в связи с попытками изучать бирациональную геометрию трехмерных расслоений на коники (над $\mathbb{P}^2$), не удовлетворяющих условию Саркисова [17], [18] (это условие является точным аналогом K^2 -условия). Однако в работах [14], [15] успешно изучены многообразия, не удовлетворяющие и K -условию (хотя, конечно, отклоняющиеся от него не слишком сильно). При этом в [14], [15] использовалась техника существенно более слабая, чем доступная сегодня (§2 настоящей статьи). Все это свидетельствует о том, что механизмы, контролирующие бирациональную жесткость (может быть, следовало бы говорить о “степени бирациональной жесткости”), до сих пор неизвестны. С другой стороны, имеются основания для оптимизма в отношении перспектив изучения бирациональной геометрии расслоений Фано методом максимальных особенностей.

0.7. Благодарности. Существенная часть настоящей работы проделана автором в Институте Макса Планка в Бонне осенью 2003 г. Автор благодарит Математический институт Макса Планка в Бонне за гостеприимство и прекрасные условия работы.

§ 1. Метод максимальных особенностей

В §1 напоминаются основные факты метода максимальных особенностей: неравенство Нётера–Фано, понятия максимальных и сверхмаксимальных особенностей, вычисление самопересечения подвижной линейной системы [5], [8], [10]. Доказана теорема 2 предшествующей работы [1]. Затем техника модифицирована с учетом отклонения от K^2 -условия.

1.1. Максимальные особенности линейных систем. Пусть

$$\Sigma \subset |-nK_V + lF|, \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

— подвижная линейная система на многообразии V . Поскольку $l \geq 0$, имеем

$$c(\Sigma) = n,$$

причем $n = 0$ тогда и только тогда, когда линейная система Σ составлена из пучка $|F|$, т.е. поднята с базы $\mathbb{P}^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если расслоение $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет K^2 -условию:

$$K_V^2 \notin \text{Int } A_+^2 V,$$

то для любой подвижной системы $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$ имеем $l \geq 0$. В самом деле, самопересечение линейной системы Σ

$$(-nK_V + lF)^2 = n^2 K_V^2 + 2nlH_F$$

есть класс эффективного цикла коразмерности два. В силу K^2 -условия отсюда вытекает, что $l \in \mathbb{Z}_+$.

Предположим, что имеет место неравенство

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) < c(\Sigma) = n,$$

т.е. существует модель $V^\#$ многообразия V такая, что

$$c(\Sigma^\#, V^\#) < c(\Sigma, V).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Существует простой дивизор $E \subset V^\#$, для которого выполнено неравенство Нётера–Фано*

$$\nu_E(\Sigma) > n \cdot a(V, E). \quad (3)$$

Геометрическое дискретное нормирование ν_E поля рациональных функций $\mathbb{C}(V)$ или любой простой дивизор $E^+ \subset V^+$ на любой модели V^+ многообразия V , реализующий это дискретное нормирование, называется *максимальной особенностью* линейной системы Σ .

По поводу доказательства предложения 1.1 см. любую из работ [2], [5], [8], [10], [19].

Отметим, что $a(V, E)$ в (3) обозначает дискрепантность E относительно исходной модели V . Таким образом, лог-пара

$$\left(V, \frac{1}{n}\Sigma\right)$$

не канонична: исключительный дивизор E реализует ее особенность, не являющуюся канонической.

Поскольку линейная система Σ подвижна, а $\nu_E(\Sigma) > 0$, центр дискретного нормирования ν_E на V есть подмногообразие $B = \text{centrev}_V(\nu_E) \subset V$ коразмерности не меньше двух. Пусть

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{i,i-1}: & V_i & \rightarrow V_{i-1} \\ & \cup & \cup \\ & E_i & \rightarrow B_{i-1} \end{array} \quad (4)$$

— последовательность раздутий с неприводимыми центрами $B_{i-1} \subset V_{i-1}$, однозначно определенная условиями

- 1) $V_0 = V$, $B_0 = B$, $i = 1, \dots, K$;
- 2) $B_j = \text{centrev}_{V_j}(\nu_E) \subset V_j$, $E_{j+1} = \varphi_{j+1,j}^{-1}(B_j)$;
- 3) нормирование ν_{E_K} совпадает с ν_E .

Иными словами, бирациональное отображение

$$V_K \dashrightarrow V^\#$$

бирегулярно в общей точке дивизора E_K и преобразует E_K в E . Символом Σ^j обозначим собственный прообраз линейной системы Σ на V_j . Положим

$$\nu_j = \text{mult}_{B_{j-1}} \Sigma^{j-1}, \quad \delta_j = \text{codim } B_{j-1} - 1.$$

На множестве исключительных дивизоров

$$\{E_1, \dots, E_K\}$$

зададим обычным образом [5], [8], [19] структуру ориентированного графа: E_i и E_j соединены ориентированным ребром, если и только если $i > j$ и

$$B_{i-1} \subset E_j^{i-1},$$

обозначение: $i \rightarrow j$. Как обычно, пусть при $i > j$

$$p_{ij} = \#\{\text{пути из } E_i \text{ в } E_j\} \geq 1,$$

$p_{ii} = 1$ по определению. Положим $p_i = p_{Ki}$. Неравенство Нётера–Фано принимает традиционный вид

$$\sum_{i=1}^K p_i \nu_i > n \sum_{i=1}^K p_i \delta_i.$$

1.2. Усиление неравенства Нётера–Фано. Предположим теперь, что общий слой $F = F_t$ расслоения $V/\mathbb{P}^1$ не допускает подвижных линейных систем, обладающих максимальной особенностью, т.е. для любой подвижной системы $\Sigma_F \subset |nH_F| = |-nK_F|$ и любого геометрического дискретного нормирования ν_{E^*} имеет место неравенство

$$\nu_{E^*}(\Sigma_F) \leq na(E^*).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Центр B максимальной особенности ν_E на V содержится в некотором слое $\pi^{-1}(t) = F_t$, $t \in \mathbb{P}^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $\pi(B) = \mathbb{P}^1$. Пусть $F \subset V$ – слой общего положения. Легко видеть, что ограничение $\Sigma_F = \Sigma|_F$ линейной системы Σ на F есть подвижная линейная система $\Sigma_F \subset |nH_F|$, обладающая максимальной особенностью $\nu_{E^*} = \nu_E|_F$, которую проще всего определить, ограничивая последовательность раздутий (4) на слой F и замечая, что дискрепантность остается той же самой:

$$a(E|_F, F) = a(E, V),$$

именно потому, что B покрывает базу. Центр нормирования $\nu_E|_F$ есть $B_F = B \cap F$. Однако это противоречит сделанному выше предположению. Следовательно, $\pi(B) \neq \mathbb{P}^1$. Предложение доказано.

Пусть $\mathcal{M} = \{T_1, \dots, T_k\}$ – множество всех простых дивизоров на $V^\#$, удовлетворяющих неравенству Нётера–Фано (см. предложение 1.1). Как было только что доказано, центр $B_E = \text{centre}(\nu_E)$ любой максимальной особенности $E \in \mathcal{M}$ содержится в некотором слое F_t . Множество $\mathcal{M}$ конечно (потому что фиксирована модель $V^\#$), так что существует не более чем конечное множество точек $t \in \mathbb{P}^1$, слои над которыми F_t содержат центры максимальных особенностей. Положим $\mathcal{M}_t = \{E \in \mathcal{M} \mid B_E \subset F_t\}$,

$$e(E) = \nu_E(\Sigma) - na(E, V) > 0$$

для $E \in \mathcal{M}$. Напомним, что $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$, $l \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \max_{\{E \in \mathcal{M}_t\}} \frac{e(E)}{\nu_E(F_t)} > l. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D^\# \in \Sigma^\#$ – общий дивизор, т.е. собственный прообраз некоторого дивизора $D \in \Sigma$ общего положения на $V^\#$. По предположению линейная система

$$|D^\# + nK_{V^\#}|$$

пуста. Поэтому пуста линейная система

$$\left| lF - \sum_{E \in \mathcal{M}} e(E)E \right|.$$

С другой стороны, для $E \in \mathcal{M}_t$ по построению дивизор

$$F_t - \nu_E(F_t)E$$

эффективен, так что эффективен и дивизор

$$\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \left[\left(\max_{\{E \in \mathcal{M}_t\}} \frac{e(E)}{\nu_E(F_t)} \right) F_t - \sum_{E \in \mathcal{M}_t} e(E)E \right].$$

Отсюда немедленно получаем неравенство (5). Предложение доказано.

1.3. Самопересечение линейной системы Σ . Пусть $D_i \in \Sigma$, $i = 1, 2$, — общие дивизоры, так что замкнутое множество $D_1 \cap D_2$ имеет коразмерность два. Пусть

$$Z = (D_1 \circ D_2) = Z^v + Z^h$$

— разложение алгебраического цикла теоретико-схемного пересечения этих дивизоров на вертикальную (Z^v) и горизонтальную (Z^h) части. Для цикла Z^v имеем дальнейшее разложение

$$Z^v = \sum_{t \in \mathbb{P}^1} Z_t^v, \quad \text{Supp } Z_t^v \subset F_t.$$

Пусть $E \in \mathcal{M}_t \subset \mathcal{M}$ — некоторая максимальная особенность. Зафиксируем t и E и применим к циклу $Z_t^v + Z^h$ технику подсчета кратностей, развитую в [3], [5], [8]. До конца этого пункта t и E фиксированы, так что для упрощения обозначений пишем далее F , Z^v , e , B вместо F_t , Z_t^v , $e(E)$, $B_E = \text{centre}(E)$ соответственно.

ЛЕММА 1.1. *Имеет место неравенство*

$$\text{codim}_F B \geq 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $B \subset F$ — простой дивизор. Пусть $D \in \Sigma$ — общий дивизор, D_F — его ограничение на F . В силу неравенства Нётера–Фано $\text{mult}_B D > n$, так что

$$D_F = \alpha B + D^\#,$$

где $\alpha > n$ и $D^\#$ — эффективный дивизор на F . Однако

$$D_F \sim nH_F,$$

что сразу дает противоречие. Лемма доказана.

Рассмотрим последовательность раздутий (4), связанную с дискретным нормированием E . Мы пользуемся обозначениями п. 1.1. Собственные прообразы $(Z^h)^j$, $(Z^v)^j$ на V_j циклов Z^h , Z^v корректно определены. Символом F^j обозначим собственный прообраз слоя F на V_j . Положим

$$N = \max\{i \mid B_{i-1} \subset F^{i-1}\}.$$

Нетрудно видеть, что $\varphi_{i,i-1}(B_i) = B_{i-1}$ для любого $i = 1, \dots, K-1$, так что коразмерности $\text{codim } B_i$ не возрастают. Положим

$$L = \max\{i \mid \text{codim } B_{i-1} \geq 3\} \leq K.$$

Введем следующие обозначения: при $i \in \{1, \dots, L\}$

$$m_i^h = \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^h)^{i-1}, \quad m_i^v = \text{mult}_{B_{i-1}}(Z^v)^{i-1},$$

$$m_i^{h(v)} \leq m_{i-1}^{h(v)} \text{ для } i = 2, \dots, L.$$

Положим также

$$\mu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} F^{i-1}.$$

Очевидно, $\mu_i = 0$ при $i \geq N+1$. Тем более, $m_i^v = 0$ при $i \geq N+1$ (если $N < L$). Обозначая, как выше, символом p_i число путей в графе Γ разрешения (4) из вершины $E = E_K$ в E_i , получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{i=1}^L p_i m_i^h + \sum_{i=1}^{\min\{N,L\}} p_i m_i^v \geq \sum_{i=1}^K p_i \nu_i^2 \geq \frac{(n \sum_{i=1}^K p_i \delta_i + e)^2}{\sum_{i=1}^K p_i}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается применением техники подсчета кратностей [3], [5], [8] в сочетании с условием

$$\sum_{i=1}^K p_i \nu_i = n \sum_{i=1}^K p_i \delta_i + e,$$

$e > 0$. Здесь мы не будем повторять этих стандартных рассуждений, отсылая читателя к [3].

1.4. K^2 -условие и бирациональная жесткость. В качестве первого примера использования описанной выше техники докажем теорему 2 предшествующей работы [1]. Приводимые рассуждения повторяют данное в [2], [3] доказательство частных случаев этой теоремы, относящихся к конкретным семействам расслоений Фано. Здесь мы рассматриваем общий случай.

Предположим, что расслоение $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет K^2 -условию:

$$K_V^2 \notin \text{Int } A_+^2 V.$$

Тогда для некоторого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ имеет место соотношение

$$Z^h \sim n^2 K_V^2 + \alpha H_F,$$

так что

$$\deg Z^v = \sum_{t \in \mathbb{P}^1} \deg Z_t^v \leq (2n \deg V)l. \quad (7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Для некоторого $t \in \mathbb{P}^1$ существует максимальная особенность $E \in \mathcal{M}_t$, удовлетворяющая оценке*

$$e(E) > \frac{\nu_E(F_t)}{2n \deg V} \deg Z_t^v. \quad (8)$$

Следуя [2], [3], назовем особенность E , удовлетворяющую неравенству (8), *сверхмаксимальной*.

Для доказательства предложения 1.5 достаточно сравнить неравенства (5) и (7).

Теперь в обозначениях п. 1.3 положим

$$\Sigma_l = \sum_{i=1}^L p_i, \quad \Sigma_u = \sum_{i=L+1}^K p_i, \quad \Sigma_f = \sum_{i=2}^{\min\{N,L\}} p_i.$$

Отметим, что

$$\nu_E(F) = \sum_{i=1}^N p_i \mu_i \leq p_1 \mu_1 + \mu_2 \Sigma_f$$

по определению кратностей μ_i . Очевидно,

$$m_i^h \leq m_h = m_1^h = \text{mult}_B Z^h.$$

Положим также

$$d_h = \deg Z^h, \quad d_v = \deg Z_t^v$$

и введем коэффициенты

$$k_h = \frac{m_h}{d_h} \deg V, \quad k_v = \frac{\deg V}{\nu_E(F) d_v} \sum_{i=1}^{\min\{N, L\}} p_i m_i^v.$$

Из предложения 1.5 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Имеет место неравенство*

$$(4 - k_h) \Sigma_l (\Sigma_l + \Sigma_u) n^2 + \Sigma_u^2 n + e^2 + 2(2 - k_v) \Sigma_l n e + 2(1 - k_v) \Sigma_u n e < 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В неравенстве (6) заменим m_i^h на $m_h = k_h d_h / \deg V = k_h n^2$, числа δ_i при $i \leq L$ — на 2, отчего неравенство может лишь усилиться, и с учетом определения коэффициента k_v после несложных преобразований получим

$$(4 - k_h) \Sigma_l (\Sigma_l + \Sigma_u) n^2 + (n \Sigma_u + e)^2 + 4 \Sigma_l e n - k_v \frac{d_v \nu_E(F)}{\deg V} (\Sigma_l + \Sigma_u) \leq 0. \quad (9)$$

Учитывая определение сверхмаксимальной особенности (предложение 1.5), заменим $d_v \nu_E(F)$ на $2ne \deg V$. При этом неравенство станет строгим и мы получим в точности то, что утверждалось. Следствие доказано.

Предположим теперь, что расслоение $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет

- условию (v) работы [1], т.е. для любого неприводимого вертикального подмногообразия Y коразмерности 2, $Y \subset \pi^{-1}(t) = F_t$, и гладкой точки $o \in F_t$ выполнено неравенство

$$\frac{\text{mult}_o Y}{\deg Y} \leq \frac{2}{\deg V};$$

- условию (vs) работы [1], т.е. для любого вертикального подмногообразия $Y \subset F_t$ коразмерности 2 (относительно V , т.е. простого дивизора на F_t), особой точки $o \in F_t$ и бесконечно близкой точки $x \in \tilde{F}_t$, где $\varphi: \tilde{F}_t \rightarrow F_t$ — раздутие точки o , $\varphi(x) = o$, $\tilde{Y} \subset \tilde{F}_t$ — собственный прообраз подмногообразия Y на $\tilde{F}_t$, выполнены оценки

$$\frac{\text{mult}_o Y}{\deg Y} \leq \frac{4}{\deg V}, \quad \frac{\text{mult}_x \tilde{Y}}{\deg \tilde{Y}} \leq \frac{2}{\deg V};$$

- условию (h) работы [1], т.е. для любого горизонтального подмногообразия Y коразмерности 2 и точки $o \in Y$ выполнена оценка

$$\frac{\text{mult}_o Y}{\deg Y} \leq \frac{4}{\deg V}.$$

В этих предположениях справедлива

ЛЕММА 1.2. *Имеют место оценки: $k_h \leq 4$, $k_v \leq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое из этих двух неравенств вытекает непосредственно из определения числа k_h и условия (h), которому по предположению удовлетворяет расслоение $V/\mathbb{P}^1$. Докажем второе неравенство. Имеем

$$\left(\frac{d_v}{\deg V}\right)k_v = \frac{\sum_{i=1}^{\min\{N,L\}} p_i m_i^v}{\sum_{i=1}^N p_i \mu_i} \leq \frac{p_1 m_1^v + \Sigma_f m_2^v}{p_1 \mu_1 + \Sigma_f}.$$

Если $\dim B \geq 1$ или $B = o \in F$ — неособая точка слоя, то $\mu_1 = \dots = \mu_N = 1$ и в силу условия (v)

$$m_2^v \leq m_1^v \leq 2 \frac{d_v}{\deg V},$$

откуда сразу следует неравенство $k_v \leq 2$. Если $B = o \in F$ — особая точка слоя, то $\mu_1 \geq 2$ и в силу условия (vs)

$$m_1^v \leq \frac{4d_v}{\deg V}, \quad m_2^v \leq \frac{2d_v}{\deg V},$$

откуда снова получаем, что $k_v \leq 2$. Лемма доказана.

Напомним формулировку теоремы 2 работы [1]:

Предположим, что гладкое стандартное расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет K^2 -условию и условиям (v), (vs) и (h). Тогда $V/\mathbb{P}^1$ — бирационально свертжесткое расслоение Фано.

Завершим ее доказательство. Предположим, что она неверна. Тогда из следствия 1.1 и леммы 1.2 вытекает неравенство

$$\Sigma_u^2 n^2 - 2\Sigma_u n e + e^2 < 0.$$

Такого не может быть. Противоречие. Теорема 2 работы [1] доказана.

1.5. Обобщенное K^2 -условие. Развитые в [2], [3] и воспроизведенные выше в общем виде методы сохраняют силу для расслоений Фано $V/\mathbb{P}^1$, не удовлетворяющих K^2 -условию. Если отклонение от K^2 -условия не слишком велико, то техника п. 1.4 продолжает быть эффективной и требует лишь небольшой модификации. Прежде всего необходимо измерить отклонение от K^2 -условия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Стандартное расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет *обобщенному K^2 -условию глубины $\varepsilon \geq 0$* , если

$$K_V^2 - \varepsilon H_F \notin \text{Int } A_+^2 V.$$

Как отмечалось в [3], для эффективных циклов коразмерности 2 на естественных многообразиях Фано справедливы более сильные оценки на кратности, чем этого требует доказательство бирациональной жесткости. Однако для расслоений Фано, не удовлетворяющих K^2 -условию, эти усиленные оценки оказываются востребованными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Стандартное расслоение Фано $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет *обобщенному условию (h) глубины* $\delta \geq 0$, если для любого горизонтального подмногообразия $Y \subset V$ коразмерности два и произвольной точки $o \in Y$ выполнено неравенство

$$\frac{\text{mult}_o Y}{\deg V} \leq \frac{4 - \delta}{\deg V}.$$

Начиная с этого момента и до конца параграфа предполагаем, что расслоение $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет обобщенному K^2 -условию глубины $\varepsilon \geq 0$ и обобщенному условию (h) глубины $\delta \geq 0$. Кроме того, предполагаются выполненными условия (v) и (vs) (в прежней форме). Зафиксируем подвижную линейную систему $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$ с $l \in \mathbb{Z}_+$ и предположим, что $c_{\text{virt}}(\Sigma) < n$. Для горизонтальной части самопересечения линейной системы Σ имеем

$$Z^h \sim n^2 K_V^2 + \alpha H_F,$$

где коэффициент $\alpha \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет неравенству

$$\alpha \geq -\varepsilon n^2.$$

Следовательно, для вертикальной компоненты имеем

$$Z^v \sim (2nl - \alpha)H_F,$$

откуда

$$\deg Z^v = \sum_{t \in \mathbb{P}^1} \deg Z_t^v \leq (2nl + \varepsilon n^2) \deg V. \quad (10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Для некоторой точки $t \in \mathbb{P}^1$ существует максимальная особенность $E \in \mathcal{M}_t \neq \emptyset$, удовлетворяющая оценке

$$e(E) > \frac{\nu_E(F_t)}{2} \left(\frac{\deg Z_t^v}{n \deg V} - \varepsilon n \right). \quad (11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. При $\varepsilon = 0$ получаем предложение 1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.6. Сравним неравенства (5) и (10). Заменяя число l в правой части неравенства (10) левой частью неравенства (5), получаем

$$\sum_{t \in \mathbb{P}^1} \left[\deg Z_t^v - 2n \deg V \max_{\{E \in \mathcal{M}_t\}} \frac{e(E)}{\nu_E(F_t)} \right] < \varepsilon n^2 \deg V,$$

откуда немедленно следует наше предложение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Если имеется несколько максимальных особенностей, центры которых лежат в слоях над различными точками $t_1, \dots, t_k$, то предложение 1.6 усиливается: существует максимальная особенность $E \in \mathcal{M}_t$, $t \in \{t_1, \dots, t_k\}$, удовлетворяющая оценке

$$e(E) > \frac{\nu_E(F_t)}{2} \left(\frac{\deg Z_t^v}{n \deg V} - \frac{\varepsilon n}{k} \right).$$

Впрочем, такое усиление мало что дает, так как для доказательства бирациональной жесткости, т.е. полной реализации схемы метода максимальных особенностей, нужно рассматривать наихудшую возможность.

Теперь рассуждаем как при доказательстве следствия 1.1 с единственной разницей: выражение $d_v \nu_E(F)$ заменяем в неравенстве (9) на выражение

$$(2ne + \varepsilon n^2 \nu_E(F)) \deg V,$$

при этом неравенство становится строгим. Учитывая, что условия (h), (v) и (vs) по-прежнему выполнены, так что лемма 1.2 верна, получаем неравенство

$$((4 - k_h) \Sigma_l - k_v \varepsilon \nu_E(F)) (\Sigma_l + \Sigma_u) n^2 + (n \Sigma_u - e)^2 < 0.$$

По определению числа k_v имеем

$$k_v \nu_E(F) = \deg V \sum_{i=1}^{\min\{N, L\}} p_i \frac{m_i^v}{d_v} \leq 2 \Sigma_l.$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$(4 - k_h - 2\varepsilon) \Sigma_l (\Sigma_l + \Sigma_u) n^2 + (n \Sigma_u - e)^2 < 0. \quad (12)$$

Вспомним, что в силу обобщенного условия (h) глубины $\delta \geq 0$ для коэффициента k_h справедлива оценка

$$k_h \leq 4 - \delta.$$

Отсюда немедленно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. *Если $\delta \geq 2\varepsilon$, то имеет место равенство*

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma) = n.$$

В частности, если для любой подвижной линейной системы $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$ имеем $l \in \mathbb{Z}_+$, то расслоение $V/\mathbb{P}^1$ бирационально сверхжесткое.

§ 2. Усиленная техника подсчета кратностей

Цель настоящего параграфа — усилить неравенство (12) и предложение 1.7. Для этого используются соображения размерности раздуваемых подмногообразий B_{i-1} : чем меньше размерность раздуваемого подмногообразия, тем выше дискрепантность исключительного дивизора и, следовательно, тем сильнее оценка на кратность $\nu_E(\Sigma)$. С другой стороны, единственный реальный способ оценить сверху особенности горизонтального цикла Z^h заключается в том, чтобы ограничить Z^h на слой F и оценить особенности эффективного цикла $(Z^h \circ F)$ коразмерности два на F . Этим способом мы пользовались выше; и в работах [1]–[3] особенности цикла Z^h оценивались именно таким образом. При этом до сих пор никогда не учитывался вклад подмногообразий B_{i-1} коразмерности три (относительно V), содержащихся в собственном прообразе F^{i-1} слоя F (если таковые существуют). Именно это и сделано ниже. В результате получены оценки, позволяющие исключить максимальную особенность даже при существенном отклонении от K^2 -условия: достаточно, если выполнено обобщенное K^2 -условие глубины 2.

2.1. Обозначения и формулировка основного утверждения. Продолжаем изучать подвижную линейную систему $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$, $l \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющую неравенству

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) < c(\Sigma) = n.$$

Все обозначения §1 сохраняют силу. Однако если в пп. 1.4 и 1.5 мы объединяли раздутия всех подмногообразий коразмерности 3 и выше, то теперь будем рассуждать тоньше. Положим

$$\begin{aligned} J_s &= \{i \mid 1 \leq i \leq K, \text{codim } B_{i-1} \geq 4\}, \\ J_m &= \{i \mid 1 \leq i \leq K, \text{codim } B_{i-1} = 3\}, \\ J_u &= \{i \mid L+1 \leq i \leq K\}, \quad J_l = J_s \cup J_m. \end{aligned}$$

В свою очередь, разобьем множество J_m на два непересекающихся подмножества, $J_m = J_m^+ \sqcup J_m^-$ где

$$J_m^+ = \{i \in J_m \mid B_{i-1} \subset F^{i-1}\},$$

$J_m^- = J_m \setminus J_m^+ = \{i \in J_m \mid B_{i-1} \not\subset F^{i-1}\}$. Может оказаться, что J_m^+ или J_m^- (или все множество J_m) пусто. Положим, далее,

$$\Sigma_s = \sum_{i \in J_s} p_i, \quad \Sigma_m^\pm = \sum_{i \in J_m^\pm} p_i, \quad \Sigma_m = \Sigma_m^+ + \Sigma_m^-,$$

символ Σ_u сохраняет прежний смысл. В обозначениях п. 1.4 имеем $\Sigma_l = \Sigma_s + \Sigma_m$.

Теперь неравенство (6) можно переписать в виде

$$\sum_{i \in J_l} p_i m_i^h + \sum_{i \in J_s \cup J_m^+} p_i m_i^v \geq \frac{((3\Sigma_s + 2\Sigma_m + \Sigma_u)n + e)^2}{\Sigma_s + \Sigma_m + \Sigma_u}. \quad (13)$$

Напомним, что $\mu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} F^{i-1}$, $\mu_i = 1$ при $i \geq 2$, и для μ_1 имеются две возможности: $\mu_1 = 1$ или $\mu_1 = 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Имеет место оценка*

$$\sum_{i \in J_s \cup J_m^+} \mu_i p_i m_i^h \leq p_1 \text{mult}_B(Z^h \circ F) + (\Sigma_s - p_1) \text{mult}_{B_1}(Z^h \circ F)^1. \quad (14)$$

В частности,

$$\sum_{i \in J_s \cup J_m^+} \mu_i p_i m_i^h \leq \Sigma_s \text{mult}_B(Z^h \circ F). \quad (15)$$

2.2. Доказательство предложения 2.1: подсчет кратностей. Рассмотрим сначала следующую общую ситуацию. Пусть $Y \subset V$ — неприводимое горизонтальное подмногообразие коразмерности 2, $Y^i \subset V_i$ — его собственный прообраз,

$$m_Y(i) = \text{mult}_{B_{i-1}} Y^{i-1} \quad (16)$$

— соответствующая кратность. Положим $Y_F = (Y \circ F)$ — эффективный цикл коразмерности два в слое F , $Y_F^i \subset V_i$ — его собственный прообраз,

$$m_{Y,F}(i) = \text{mult}_{B_{i-1}} Y^{i-1}. \quad (17)$$

Поскольку носитель цикла Y_F содержится в слое F , числа $m_{Y,F}(i)$ обращаются в нуль при $i \in J_m^-$.

ЛЕММА 2.1. *Имеет место оценка*

$$\sum_{i \in J_s \cup J_m^+} p_i m_Y(i) \mu_i \leq \sum_{i \in J_s} p_i m_{Y,F}(i). \quad (18)$$

Прежде чем начинать доказательство, напомним некоторые факты, непосредственно вытекающие из элементарной теории пересечений [20]. Отсутствие удобных ссылок объясняется тем, что здесь речь идет о пересечении дивизора и подмногообразия, а не двух дивизоров, как в [5], [8]. Пусть X — произвольное гладкое многообразие, $B \subset X$, $B \not\subset \text{Sing } X$ — неприводимое подмногообразие коразмерности ≥ 2 , $\sigma_B: X(B) \rightarrow X$ — его раздутие, $E(B) = \sigma_B^{-1}(B)$ — исключительный дивизор. Пусть

$$Z = \sum m_i Z_i, \quad Z_i \subset E(B),$$

— цикл размерности k , $k \geq \dim B$. Определим *степень* цикла Z , полагая

$$\deg Z = \sum_i m_i \deg(Z_i \cap \sigma_B^{-1}(b)),$$

где $b \in B$ — точка общего положения, $\sigma_B^{-1}(b) \cong \mathbb{P}^{\text{codim } B - 1}$ и степень справа есть обычная степень в проективном пространстве.

Отметим, что $\deg Z_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma_B(Z_i)$ — собственное замкнутое подмножество подмногообразия B .

Теперь пусть D — простой дивизор Вейля на X , $Y \subset X$ — некоторое неприводимое подмногообразие размерности $l \leq \dim X - 1$. Предположим, что $Y \not\subset D$ и что $\dim B \leq l - 1$. Собственные прообразы дивизора D и подмногообразия Y на $X(B)$ обозначим символами D^B и Y^B соответственно.

ЛЕММА 2.2. (i) *Предположим, что $\dim B \leq l - 2$. Тогда*

$$D^B \circ Y^B = (D \circ Y)^B + Z,$$

где $\circ$ обозначает операцию взятия алгебраического цикла теоретико-схемного пересечения, $\text{Supp } Z \subset E(B)$ и

$$\text{mult}_B(D \circ Y) = \text{mult}_B D \cdot \text{mult}_B Y + \deg Z.$$

(ii) *Предположим, что $\dim B = l - 1$. Тогда*

$$D^B \circ Y^B = Z + Z_1,$$

где $\text{Supp } Z \subset E(B)$, $\text{Supp } \sigma_B(Z_1)$ не содержит B и

$$D \circ Y = [(\text{mult}_B D)(\text{mult}_B Y) + \deg Z]B + (\sigma_B)_* Z_1.$$

Доказательство легко получается применением стандартной теории пересечений [20].

2.3. Доказательство леммы 2.1. Построим последовательность эффективных циклов коразмерности три на многообразиях V_i , полагая

$$\begin{aligned} Y \circ F &= Z_0 \quad (= Y_F), \\ Y^1 \circ F^1 &= Z_0^1 + Z_1, \\ &\dots\dots\dots \\ Y^i \circ F^i &= (Y^{i-1} \circ F^{i-1})^i + Z_i, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$i \in J_s$, где $\text{Supp } Z_i \subset E_i$. Таким образом, для любого $i \in J_s$ получаем:

$$Y^i \circ F^i = Y_F^i + Z_1^i + \dots + Z_{i-1}^i + Z_i.$$

Для любых $j > i, j \in J_s$ положим

$$m_{i,j} = \text{mult}_{B_{j-1}}(Z_i^{j-1})$$

(кратность неприводимого подмногообразия вдоль меньшего подмногообразия понимается в обычном смысле; для произвольного цикла продолжаем кратность по линейности).

Положим теперь $d_i = \deg Z_i$. Получаем следующую систему равенств:

$$\begin{aligned} m_Y(1)\mu_1 + d_1 &= m_{Y,F}(1), \\ m_Y(2)\mu_2 + d_2 &= m_{Y,F}(2) + m_{1,2}, \\ &\dots\dots\dots \\ m_Y(i)\mu_i + d_i &= m_{Y,F}(i) + m_{1,i} + \dots + m_{i-1,i}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$i \in J_s$. Полагая $S = \max\{i \in J_s\}$, рассмотрим последнее равенство в этой последовательности:

$$m_Y(S)\mu_S + d_S = m_{Y,F}(S) + m_{1,S} + \dots + m_{S-1,S}.$$

Если $J_m^+ \neq \emptyset$, то согласно части (ii) леммы 2.2 имеем

$$d_S \geq \sum_{i \in J_m^+} m_Y(i)\mu_i \deg(\varphi_{i-1,S})_* B_{i-1} \geq \sum_{i \in J_m^+} m_Y(i)\mu_i.$$

Напомним следующее полезное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 (см. [5], [8]). Функция $a: J_s \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *согласованной со структурой графа*, если

$$a(i) \geq \sum_{\substack{j \rightarrow i \\ j \in J_s}} a(j)$$

для любого $i \in J_s$.

Фактически мы будем использовать только одну функцию, согласованную со структурой графа, а именно $a(i) = p_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $a(\cdot)$ – функция, согласованная со структурой графа. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{i \in \mathcal{J}_s} a(i) m_{Y,F}(i) \geq \sum_{i \in \mathcal{J}_S} a(i) m_Y(i) \mu_i + a(S) \sum_{i \in \mathcal{J}_m^+} m_Y(i) \mu_i. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится дословно тем же способом, что и в случае двух дивизоров [5], [8]: умножим i -е равенство на $a(i)$ и сложим их все вместе. Справа для любого $i \geq 1$ получим выражение

$$\sum_{j \geq i+1} a(j) m_{i,j}.$$

В левой части для любого $i \geq 1$ получим слагаемое $a(i) d_i$.

ЛЕММА 2.3. Если $m_{i,j} > 0$, то $j \rightarrow i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО [5], [8]. Если $m_{i,j} > 0$, то $B_{j-1} \subset \text{Supp } Z_i^{j-1}$, но $\text{Supp } Z_i \subset E_i$, так что $B_{j-1} \subset E_i^{j-1}$. Лемма доказана.

Следующий стандартный шаг – сравнение кратностей $m_{i,j}$ со степенями.

ЛЕММА 2.4. Для любых $i < j \in J_s$ имеем

$$m_{i,j} \leq d_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m_{i,j} = 0$, то доказывать нечего. В противном случае $j \rightarrow i$ и необходимо доказать, что

$$\text{mult}_{B_{j-1}} Z_i^{j-1} \leq \deg Z_i.$$

Учитывая, что отображения $\varphi_{a,b}: B_a \rightarrow B_b$ сюръективны, достаточно доказать неравенство

$$\text{mult}_{[B_{j-1} \cap \varphi_{i,i-1}^{-1}(t)]^{j-1}} [Z_i \cap \varphi_{i,i-1}^{-1}(t)]^{j-1} \leq \deg [Z_i \cap \varphi_{i,i-1}^{-1}(t)], \quad (20)$$

где $t \in B_{i-1}$ – точка общего положения. Учитывая, что $\varphi_{i,i-1}^{-1}(t)$ есть проективное пространство $\mathbb{P}^{\text{codim } B_{i-1}-1}$, получаем, что справа в (20) стоит обычная степень гиперповерхности в проективном пространстве, а множество $[Z_i \cap \varphi_{i,i-1}^{-1}(t)]^{j-1}$ получается из этой гиперповерхности конечной последовательностью раздутий $\varphi_{s,s-1}$, $s = i+1, \dots, j-1$, ограниченных на $\varphi_{i,i-1}^{-1}(t)$. Учитывая, что кратности при раздутиях не возрастают, сводим утверждение к очевидному случаю гиперповерхности в проективном пространстве. Лемма доказана.

В результате получаем следующую оценку:

$$\sum_{j \geq i+1} a(j) m_{i,j} = \sum_{\substack{j \geq i+1 \\ m_{i,j} \neq 0}} a(j) m_{i,j} \leq d_i \sum_{j \rightarrow i} a(j) \leq a(i) d_i.$$

В силу сказанного выше можно выбросить справа все слагаемые $m_{i,*}, i \geq 1$, а слева – все слагаемые $d_i, i \geq 1$, заменяя при этом знак равенства на знак неравенства $\leq$. Что и требовалось доказать.

Полагая в неравенстве (19) $a(i) = p_i$ и замечая, что для $j \geq S$ имеем $p_j \leq p_S$, завершаем доказательство леммы 2.1.

Закончим доказательство предложения 2.1.

Очевидно, неравенство (18) остается справедливым, если Y – эффективный горизонтальный цикл коразмерности 2 на V , т.е. каждая неприводимая компонента цикла Y – горизонтальное подмногообразие. При этом формулы (16), (17) продолжаются по линейности на множество всех эффективных горизонтальных циклов, а левая и правая части неравенства (18) линейны по $m_Y(\cdot), m_{Y,F}(\cdot)$ соответственно.

Положим теперь $Y = Z^h$ и учтем, что

$$m_{Y,F}(i) \leq \text{mult}_{B_1}(Z^h \circ F)^1$$

для $i \geq 2$. Отсюда получаем неравенство (14). Второе неравенство предложения 2.1 вытекает из (14). Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Неравенство (15) компактнее, чем (14), однако в некоторых случаях можно получить более сильную оценку на $\text{mult}_{B_1}(Z^h \circ F)^1$, чем на $\text{mult}_B(Z^h \circ F)$.

2.4. Оценка кратностей линейной системы: неособый случай. Обратимся теперь к основной задаче – оценке особенностей подвижной линейной системы Σ . Предположим, что расслоение $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет условиям (v) и (vs), а также в каждой точке $o \in V$ удовлетворяет хотя бы одному из сформулированных ниже условий (f) и (fs):

(f) для любого неприводимого подмногообразия $Y \ni o \in F$ коразмерности 2 (относительно слоя F) имеет место неравенство

$$\frac{\text{mult}_o Y}{\deg V} \leq \frac{4}{\deg V}; \quad (21)$$

(fs) $o \in F$ – двойная точка слоя, для любого неприводимого подмногообразия $Y \subset F$ коразмерности 2 имеет место оценка

$$\frac{\text{mult}_o Y}{\deg V} \leq \frac{6}{\deg V} \quad (22)$$

и, кроме того, для любой бесконечно близкой точки первого порядка $x \in E_F$, где $\varphi_o: \tilde{F} \rightarrow F$ – раздутие точки $o \in F$, $E_F \subset \tilde{F}$ – исключительный дивизор, выполнено неравенство

$$\frac{\text{mult}_x \tilde{Y}}{\deg Y} \leq \frac{3}{\deg V},$$

где $\tilde{Y}$ – собственный прообраз подмногообразия Y на $\tilde{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Подчеркнем, что в условии (f) не оговаривается особая точка $o \in F$ или гладкая. Для общих многообразий, рассматриваемых в данной работе, все гладкие точки удовлетворяют условию (f), а особые точки ведут себя по-разному. Этот вопрос обсуждается ниже в § 3.

Предположим сначала, что $B = \text{centre}(\nu_E, V) \not\subset \text{Sing } F$. Иными словами, либо слой F неособ, либо B не есть особая точка слоя. В силу условия регулярности для любого неприводимого подмногообразия $Y \subset F$ коразмерности два (относительно F) имеет место оценка (21) для точки общего положения $o \in B$. Все числа $\mu_i = 1$. Из неравенства (21) немедленно получаем оценку

$$\sum_{i \in J_s \cup J_m^+} p_i m_i^h \leq 4n^2 \Sigma_s.$$

Поскольку $m_i^h \leq m_1^h \leq 4n^2$, получаем неравенство

$$\sum_{i \in J_l} p_i m_i^h \leq 4n^2 (\Sigma_s + \Sigma_m^-). \quad (23)$$

Это и есть необходимая оценка на особенности горизонтальной компоненты Z^h . Рассмотрим вертикальную компоненту Z^v . В силу условия (v) имеет место неравенство

$$m_i^v \leq m_1^v \leq \frac{2}{\deg V} d_v. \quad (24)$$

Из обобщенного K^2 -условия глубины ε получаем оценку

$$\frac{d_v}{\deg V} < \frac{2en}{\nu_E(F)} + \varepsilon n^2. \quad (25)$$

Комбинируя (24) и (25), получаем неравенство

$$\sum_{i \in J_s \cup J_m^+} p_i m_i^v < 2n \left(\frac{2e}{\nu_E(F)} + \varepsilon n \right) (\Sigma_s + \Sigma_m^+).$$

Учитывая, что по определению $\nu_E(F) = \sum_{i=1}^k p_i \mu_i \geq \Sigma_s + \Sigma_m^+$, получаем окончательно:

$$\sum_{i \in J_s \cup J_m^+} p_i m_i^v < 4ne + 2\varepsilon n^2 (\Sigma_s + \Sigma_m^+). \quad (26)$$

Теперь из неравенств (6), (23) и (26) вытекает следующая оценка:

$$\begin{aligned} & (4n^2 (\Sigma_s + \Sigma_m^-) + 4ne + 2\varepsilon n^2 (\Sigma_s + \Sigma_m^+)) (\Sigma_s + \Sigma_m + \Sigma_u) \\ & > ((3\Sigma_s + 2\Sigma_m + \Sigma_u)n + e)^2. \end{aligned}$$

Полагая в этом неравенстве $\varepsilon = 2$ и учитывая, что $\Sigma_m = \Sigma_m^+ + \Sigma_m^-$ (это ключевой момент), после несложных арифметических преобразований получаем неравенство

$$(n(\Sigma_s - \Sigma_u) + e)^2 < 0.$$

Противоречие.

Равенство порогов канонического присоединения

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma)$$

в неособом случае $B \not\subset \text{Sing } F$ доказано.

2.5. Оценка кратностей линейной системы: особый случай. Рассмотрим теперь случай, когда $B = o \in F$ — особая точка слоя. Если многообразие F удовлетворяет в точке o условию (f), то рассуждения предыдущего пункта проходят без изменений. Если это не так, то $\deg V = \deg F \geq 6$ (в противном случае $\deg V \leq 4$ и условие (f) выполнено автоматически) и потому $\dim F \geq 4$, $\dim V \geq 5$. Поэтому дискрепантность первого исключительного дивизора E_1 не меньше 4 (раздувается гладкая точка $o \in V$). По предположению выполнено условие (fs), откуда следует неравенство

$$m_i^h \leq m_1^h \leq 3n^2,$$

так что из оценки (14) получаем

$$\sum_{i \in J_l} p_i m_i^h \leq 3n^2(p_1 + \Sigma_s + \Sigma_m^-).$$

С другой стороны, как было отмечено выше, $a(E_1, V) \geq 4$, так что в неравенстве (6) можно заменить числитель на $(p_1 + 3\Sigma_s + 2\Sigma_m + \Sigma_u)$. Теперь, рассуждая как в п. 2.4, получаем неравенство

$$\begin{aligned} & (n(\Sigma_s - \Sigma_u) + e)^2 + (\Sigma_s - 3p_1)(\Sigma_s + \Sigma_m + \Sigma_u)n^2 \\ & + np_1(np_1 + 2(3\Sigma_s + 2\Sigma_m + \Sigma_u)n + 2e) < 0. \end{aligned}$$

Очевидно, $\Sigma_s - 3p_1 \geq -2p_1$, так что опять получаем противоречие.

Равенство порогов канонического присоединения $c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma)$ доказано полностью.

Ввиду важности полученного результата для дальнейшей работы сформулируем его в качестве отдельного утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что расслоение $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет обобщенному K^2 -условию глубины 2, условиям (v), (vs) и хотя бы одному из условий (f) или (fs) в любой точке $o \in V$. Тогда для любой подвижной линейной системы $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$ с $l \in \mathbb{Z}_+$ ее виртуальный и фактический пороги канонического присоединения совпадают:*

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma).$$

§3. Многообразия с пучком двойных накрытий Фано

Для того чтобы применить развитую выше технику к расслоениям $V/\mathbb{P}^1$ на двойные гиперповерхности Фано, необходимо описать подвижные линейные системы на этих многообразиях и проверить условия на кратности горизонтальных и вертикальных циклов для рассматриваемых семейств 1–8 и 1*–5* пп. 0.2 и 0.3.

3.1. Подвижные системы на многообразиях типа $((0), (2, 0))$. Пусть $V/\mathbb{P}^1$ — многообразие из семейства $((0), (2, 0))$. Конструкция многообразия V допускает следующее альтернативное описание.

Пусть $W_{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ — гиперповерхность степени $2l$,

$$\sigma_Y: Y \rightarrow \mathbb{P}$$

— двойное накрытие, разветвленное над дивизором $W_{\mathbb{P}}$. Рассмотрим многообразие $Y = \mathbb{P}^1 \times Y$, которое реализуется как двойное накрытие $\sigma_Y: Y \rightarrow X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}$,

разветвленное над дивизором $W = \mathbb{P}^1 \times W_{\mathbb{P}}$. Положим $V = \sigma_Y^{-1}(Q)$, где $Q \subset X$ – гладкий дивизор типа $(2, m)$. Легко видеть, что описанный способ построения многообразия V совпадает с конструкцией п. 0.2.

По предположению дивизор $Q \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}$ задается уравнением

$$A(x_*)u^2 + 2B(x_*)uv + C(x_*)v^2 = 0,$$

где $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$ однородны степени m . Здесь $(u : v)$ и $(x_*) = (x_0 : \dots : x_{M+1})$ – однородные координаты на $\mathbb{P}^1$ и $\mathbb{P}$ соответственно.

Далее, пусть $H_{\mathbb{P}}$ – класс гиперплоскости в $\mathbb{P}$, $L_X = p_X^* H_{\mathbb{P}}$ – тавтологический класс на X , где $p_X : X \rightarrow \mathbb{P}$ – проекция на второй сомножитель, $L_V = \sigma_Y^* L_X|_V$. Легко видеть, что

$$K_V = -L_V,$$

так что антиканоническая линейная система $|-K_V|$ свободна и задает проекцию $p_V = p_X \circ \sigma : V \rightarrow \mathbb{P}$.

ЛЕММА 3.1. *Проекция p_V пропускается через двойное накрытие $\sigma_{\mathbb{Y}} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{P}$. Точнее, существует морфизм $p : V \rightarrow \mathbb{Y}$ такой, что*

$$p_V = \sigma_{\mathbb{Y}} \circ p.$$

Степень морфизма p в общей точке равна 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку $x \in \mathbb{P} \setminus W_{\mathbb{P}}$ общего положения, пусть $\{y^+, y^-\} = \sigma_{\mathbb{Y}}^{-1}(x) \subset \mathbb{Y}$. Положим

$$L_x = \mathbb{P}^1 \times \{x\} \subset X, \quad L_x^{\pm} = \mathbb{P}^1 \times \{y^{\pm}\} \subset Y.$$

Очевидно, прообраз $\sigma_Y^{-1}(L_x)$ есть дизъюнктное объединение прямых L_x^+ и L_x^- , причем

$$p_{\mathbb{Y}}(L_x^{\pm}) = y^{\pm},$$

где $p_Y : Y \rightarrow \mathbb{Y}$ – проекция на второй сомножитель. Дивизор Q пересекает L_x в двух различных (для общей точки x) точках q_1, q_2 . Положим

$$\sigma^{-1}(q_i) = \{o_i^+, o_i^-\} \subset V, \quad o_i^{\pm} \in L_x^{\pm}.$$

Морфизм p есть ограничение $p_Y|_V$. Очевидно,

$$p^{-1}(y^{\pm}) = \{o_1^{\pm}, o_2^{\pm}\},$$

где знак $+$ или $-$ выбирается один и тот же справа и слева. Этим лемма доказана.

Пусть $\Delta \subset V$ – подмногообразие коразмерности 2, заданное системой уравнений $A = B = C = 0$. Подмногообразие Δ замещается прямыми $L_y = \mathbb{P}^1 \times \{y\}$, которые стягиваются морфизмом p . Положим $\Delta_{\mathbb{Y}} = p(\Delta)$. Очевидно,

$$p : V \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{Y} \setminus \Delta_{\mathbb{Y}}$$

– конечный морфизм степени 2. Пусть $\tau \in \text{Bir } V$ – соответствующая инволюция Галуа. Легко видеть, что τ коммутирует с инволюцией Галуа $\alpha \in \text{Aut } V$ двойного накрытия $\sigma : V \rightarrow Q$, так что τ и α порождают группу из четырех элементов. Поскольку инволюция τ бигулярна вне инвариантного замкнутого множества Δ коразмерности 2, $\tau \in \text{Aut}(V \setminus \Delta)$, действие τ на группе Пикара $\text{Pic } V$ корректно определено.

Пусть $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$ – подвижная линейная система.

ЛЕММА 3.2. (i) Инволюция τ переводит пучок $|F|$ слоев морфизма π в пучок $|mL_V - F|$.

(ii) Если $l < 0$, то инволюция τ переводит линейную систему Σ в линейную систему

$$\Sigma^+ \subset |n^+L_V + l^+F|,$$

где $n^+ = n + lm \geq 0$, $l^+ = -l > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $\tau^*L_V = L_V$. Пусть $F_t = \pi^{-1}(t)$ — некоторый слой. Имеем

$$p^{-1}(p(F_t)) = F_t \cup \tau(F_t).$$

Но $p(F_t) \sim mH_{\mathbb{Y}} = m\sigma_{\mathbb{Y}}^*H_{\mathbb{P}}$ в силу конструкции многообразия V . Поскольку $p^*H_{\mathbb{Y}} = L_V$, получаем утверждение (i). Таким образом, $\tau^*F = mL_V - F$. Отсюда непосредственно вытекает второе утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Многообразия типа $((0), (2, 0))$ аналогичны по своим свойствам расслоениям Фано, рассмотренным в [14].

3.2. Проверка K -условия. Докажем, что многообразие $V/\mathbb{P}^1$, принадлежащее к любому из семейств 2–8 или 1*–5* пп. 0.2, 0.3, удовлетворяет K -условию. Зафиксируем подвижную линейную систему $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$. Необходимо доказать, что $l \in \mathbb{Z}_+$. Для этого будем использовать рассуждения следующих двух типов:

(а) Предположим, что имеется дивизор $E \subset V$, заметаемый семейством неприводимых горизонтальных кривых $(C_\delta, \delta \in \Delta)$ таким, что

$$(-K_V \cdot C_\delta) \leq 0.$$

Тогда в силу подвижности линейной системы Σ имеем $l \geq 0$, что и требуется.

(б) Предположим, что на V имеется горизонтальный простой дивизор E , удовлетворяющий неравенству

$$(-K_V \cdot E \cdot L_V^{M-1}) \leq 0.$$

Для общего дивизора $D \in \Sigma$ цикл $(D \circ E)$ эффективен и потому

$$(D \cdot E \cdot L_V^{M-1}) \geq 0,$$

откуда, учитывая, что $(H_F \cdot L_V^{M-1}) > 0$, получаем $l \geq 0$.

Рассмотрим теперь многообразия типов 2–8 и 1*–5* по порядку.

3.2.1. Многообразия семейства $((0), (1, 1))$. Здесь $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}$, $Q \subset X$ задано уравнением $Au + Bv = 0$, где A, B — однородные многочлены степени m на $\mathbb{P}$. Пара уравнений $A = B = 0$ определяет на Q дивизор $\Delta = \mathbb{P}^1 \times \Delta_{\mathbb{P}}$, заметаемый горизонтальными прямыми, $\Delta_{\mathbb{P}} \subset \mathbb{P}$ — подмногообразие $\{A = B = 0\}$ коразмерности два. Для любой прямой $L_x = \sigma^{-1}(\mathbb{P}^1 \times \{x\})$, $x \in \Delta_{\mathbb{P}}$, имеем

$$(-K_V \cdot L_x) = (L_V \cdot L_x) = 0.$$

Рассуждение (а) показывает, что K -условие выполнено.

3.2.2. Многообразия типа $((1), (0, 1))$. Здесь

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus(M+1)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1),$$

и пусть $E \subset X$ — дивизор общих нулей всех сечений $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. Очевидно, $E = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^M$. Пусть $L_E = p_E^*(H_{\mathbb{P}|\mathbb{P}^M})$ — тавтологический класс на E , где $p_E: E \rightarrow \mathbb{P}^M$ — проекция на второй сомножитель. Имеем

$$-K_V|_E = L_V|_E = L_E,$$

$E \cap Q \sim mL_E$, так что $E \cap Q = \mathbb{P}^1 \times Q_E$, где $Q_E \subset \mathbb{P}^M$ — гиперповерхность степени m . Таким образом, V содержит дивизор $\sigma^{-1}(E \cap Q)$, заметаемый кривыми $L_x = \sigma^{-1}(\mathbb{P} \times \{x\})$, $x \in Q_E$, на которых $(-K_V)$ тривиален. Согласно рассуждению (а) K -условие выполнено.

3.2.3. Многообразия типа $((2), (1, 0))$. Здесь $-K_V = L_V - F$,

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus(M+1)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2),$$

пусть $E \subset X$ — дивизор общих нулей сечений $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$, тогда

$$\sigma^{-1}(E \cap Q) \in |L_V - 2F|.$$

Нетрудно подсчитать, что

$$(-K_V \cdot (L_V - 2F) \cdot L_V^{M-1}) = 2n(1 - m) \leq 0.$$

Согласно рассуждению (b) K -условие справедливо.

3.2.4. Многообразия типа $((2), (0, 0))$. Здесь $-K_V = L_V$ и применимо рассуждение (а): дивизор $\sigma^{-1}(E \cap Q) \subset V$ (в обозначениях предыдущего случая) замещается горизонтальными кривыми, на которых класс L_V тривиален.

3.2.5. Многообразия типа $((3), (0, 0))$. Здесь

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus(M+1)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$$

и $-K_V = L_V - F$. Пусть $E \subset X$ — дивизор общих нулей сечений $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)$, тогда дивизор $\sigma^{-1}(E \cap Q) \subset V$ замещается горизонтальными кривыми, на которых L_V тривиален. Применяем рассуждение (а).

3.2.6. Многообразия типа $((1, 2), (0, 0))$. Здесь $-K_V = L_V - F$ и существует простой дивизор $E \subset V$ такой, что

$$E \sim L_V - 2F.$$

Легко проверить, что

$$((L_V - 2F) \cdot (L_V - F) \cdot L_V^{M-1}) = 0.$$

Согласно рассуждению (b) K -условие выполнено.

3.2.7. Многообразия типа $((1, 1, 1), (0, 0))$. Здесь $-K_V = L_V - F$, причем

$$\operatorname{codim}_V \operatorname{Bs} |L_V - F| = 3.$$

Поэтому для любого псевдоэффективного класса $D \in \operatorname{Pic} V$ имеем неравенство

$$(D \cdot (L_V - F)^2 \cdot L_V^{M-2}) \geq 0.$$

Однако нетрудно подсчитать, что $((L_V - F)^3 \cdot L_V^{M-2}) = 0$. Поэтому если $D = -nK_V + lF$ есть даже просто псевдоэффективный класс, то $l \in \mathbb{Z}_+$. В частности, K -условие выполнено.

Оставшиеся пять типов двойных пространств рассматриваются аналогично (с упрощениями).

Справедливость K -условия для многообразий 2–8 и 1*–5* доказана.

3.3. Доказательство бирациональной жесткости. Теперь для того чтобы доказать теорему 1, необходимо установить справедливость равенства

$$c_{\text{virt}}(\Sigma) = c(\Sigma)$$

для любой подвижной линейной системы $\Sigma \subset |-nK_V + lF|$ с $n \geq 1$ и $l \in \mathbb{Z}_+$. В свою очередь, в силу теоремы 2 достаточно проверить, что для многообразий типов 1–8 и 1*–5* справедливо обобщенное K^2 -условие глубины 2 и что регулярное расслоение $V/\mathbb{P}^1$ удовлетворяет условиям (v), (vs) и (f) или (fs) в каждой точке (условие (h) непосредственно вытекает из любого из двух условий (f) или (fs)). Условия (v) и (vs) проверены в [1], условие (f) для регулярной гладкой точки слоя $o \in F$ – в работе [4]. Осталось проверить, что в двойной точке o слой F удовлетворяет хотя бы одному из двух условий (f) или (fs).

Если особая точка $o \in F$ лежит вне дивизора ветвления морфизма σ , то удовлетворяется требование (f). Это легко установить стандартным методом гиперкасательных дивизоров. Необходимо учесть, что если $o \in F$ не лежит на дивизоре ветвления, то имеются l дополнительных гиперкасательных дивизоров, связанных с двойным накрытием. Это и позволяет получить оценку (21) для любого неприводимого подмногообразия $Y \subset F$ коразмерности 2 (относительно слоя F). Мы не приводим здесь этих рассуждений, потому что они стандартны и, в частности, параллельны доказываемой ниже более сильной оценке (с заменой 4 на 3) для гладких точек.

Будем считать, что особая точка $o \in F$ лежит на дивизоре ветвления. Пусть $Y \subset F$ – неприводимое подмногообразие коразмерности 2, $T = \sigma^{-1}(T_p G \cap G)$, $p = \sigma(o)$, – касательный дивизор. Если $Y \not\subset T$, то, рассматривая эффективный цикл $(Y \circ T)$ коразмерности 3 и применяя к нему стандартную технику гиперкасательных дивизоров (пересекая его с $D_i \in \Lambda_i$, $i = 4, \dots, m-1$), получаем справедливость оценки (21). Значит, можно предполагать, что $Y \subset T$. Применяя технику гиперкасательных дивизоров (с $D_i \in \Lambda_i$ для $i = 3, \dots, m-1$), получаем (22) – первое из двух неравенств условия (fs). Докажем второе.

Пусть $\varphi: \tilde{T} \rightarrow T$ – раздутие точки o , $E = \varphi^{-1}(o) \subset \tilde{T}$ – исключительный дивизор. Легко видеть, что двойное накрытие σ реализует E как двойное накрытие квадрики E_G с ветвлением в дивизоре $\tilde{W} \cap E_G$ – сечении E_G квадратичной гиперповерхностью. Квадрика E_G есть исключительный дивизор раздутия точки

$p = \sigma(o)$ на многообразии $T_p G \cap G$, $\widetilde{W}$ – собственный прообраз ограничения $W|_G$. По предположению Y – простой дивизор на T . Следовательно, $Y_E = (\widetilde{Y} \circ E)$ – эффeктивный дивизор на двойной квадрике E , причем $\deg Y_E = \text{mult}_o Y$. Пусть $x \in E$ – произвольная точка.

Положим $q = \sigma(x) \in E_G$, $R = \sigma^{-1}(T_q E_G \cap E_G)$. Дивизор $R \subset E$ неприводим, $\deg R = 4$, $\text{mult}_x R = 2$. Если $Z \subset E$ – простой дивизор, отличный от R , то корректно определен цикл $(Z \circ R)$ коразмерности 2 на E , причем

$$\deg Z = \deg(Z \circ R) \geq \text{mult}_x(Z \circ R) \geq 2 \text{mult}_x Z.$$

Отсюда получаем, что

$$\text{mult}_x \widetilde{Y} \leq \text{mult}_x Y_E \leq \frac{1}{2} \deg Y_E = \frac{1}{2} \text{mult}_o Y.$$

Это доказывает второе неравенство условия (fs). Что же касается обобщенного K^2 -условия глубины 2, то оно вытекает из неравенства

$$((K_V^2 - 2H_F) \cdot L_V^{M-1}) \leq 0,$$

которое легко проверяется для многообразий типов 1–8 и 1*–5* пп. 0.2 и 0.3.

Доказательство теоремы 1 этим завершено.

3.4. Кратности подмногообразий коразмерности 2. Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $o \in F$ – неособая точка слоя, лежащая вне дивизора ветвления морфизма σ . Тогда для любого неприводимого подмногообразия $Y \subset F$ коразмерности два (и, тем самым, для любого эффeктивного цикла чистой коразмерности два) справедлива оценка

$$\frac{\text{mult}_o Y}{\deg Y} \leq \frac{3}{\deg V} = \frac{3}{2m}. \quad (27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Предложение 3.1 намечает другой подход к доказательству бирациональной жесткости рассматриваемых многообразий, основанный на предположении 1.7. Если неособая точка $o \in F$ лежит на дивизоре ветвления морфизма σ , то существует неприводимое подмногообразие $Y^+ \subset F$ коразмерности 2, для которого оценка условия (f) неуплучшаема: линейная система $|H - 2o|$ в этом случае подвижна и натянута на два дивизора, $\sigma^*(T_p G \cap G)$ и $\sigma^*(T_p W \cap G)$, где $p = \sigma(o)$. Пересечение этих дивизоров и дает подмногообразие Y^+ . Можно показать, однако, что для любого другого подмногообразия коразмерности два $Y \neq Y^+$ оценка (27) справедлива. Что же касается подмногообразия Y^+ , то оно удовлетворяет оценке (27) во всех остальных точках, включая бесконечно близкие точки первого порядка, лежащие над точкой o . Теперь по соображениям дискрепантности можно доказывать бирациональную жесткость, основываясь исключительно на предположении 1.7. Однако комбинация этих идей с теоремой 2 приводит к дальнейшему усилению техники, что будет использовано в последующих работах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Рассуждая по образцу работы [1; § 2], приведем два способа получения оценки (27). Первый гораздо проще, однако проходит для достаточно больших размерностей $M \geq M_0$. Второй способ дает оценку (27) для всех размерностей, однако требует дополнительных условий общности положения, которые необходимо обосновывать (п. 3.5). При любом способе рассуждений первый шаг дает

ЛЕММА 3.3. *Если выполнено неравенство*

$$\frac{\text{mult}_o Y}{\deg} > \frac{3}{2m}, \quad (28)$$

то $\sigma(Y) \subset T_p G$, где $p = \sigma(o)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: $\sigma(Y) \not\subset T_p G$. Тогда пересечение $Y \cap T$, где $T = \sigma^*(T_p G \cap G)$ — касательное сечение слоя F в точке o , имеет коразмерность 3 и потому корректно определен эффективный цикл $(Y \circ T)$. Для некоторой компоненты Y_3 этого цикла выполнено неравенство

$$\frac{\text{mult}_o Y_3}{\deg} > \frac{3}{m}. \quad (29)$$

Теперь, рассуждая обычным образом, рассмотрим общие дивизоры гиперкасательных линейных систем

$$D_i \in \Lambda_i, \quad D_j^+ \in \Lambda_j,$$

где

$$i \in \{4, \dots, m-1\}, \quad j \in \{l, \dots, 2l-2\}$$

при $m \leq 2l$ и

$$i \in \{4, \dots, m-2\}, \quad j \in \{l, \dots, 2l-1\}$$

при $m \geq 2l+1$. Из соображений коразмерности базисного множества системы Λ_i получаем, что множество

$$Y_3 \cap \left(\bigcap_i D_i \right) \cap \left(\bigcap_j D_j^+ \right)$$

одномерно в окрестностях точки o . Отсюда стандартным образом получаем оценку

$$\frac{\text{mult}_o Y_3}{\deg} \leq \frac{4l}{m(2l-1)} \quad (30)$$

при $m \leq 2l$ и

$$\frac{\text{mult}_o Y_3}{\deg} \leq \frac{2}{m-1} \quad (31)$$

при $m \geq 2l+1$. В любом случае оценки (30) и (31) противоречат неравенству (29). Лемма доказана.

Обратимся к доказательству предложения 3.1. Если оценка (27) неверна, т.е. справедлива оценка (28), то согласно доказанному выше $\sigma(Y) \subset T_p G$, т.е.

$$Y \subset T_1 = \sigma^{-1}(G \cap T_p G).$$

В силу условий регулярности $T_1 \subset F$ — неприводимое подмногообразие с изолированной двойной точкой $o \in T_1$. Рассмотрим замкнутое множество

$$T_{12} = \sigma^{-1}(\sigma(T_1) \cap T_p\sigma(T_1)).$$

В силу условий регулярности $T_{12} \subset F$ — неприводимое подмногообразие коразмерности 2, причем $\text{mult}_o T_{12} = 6$, так что справедливо равенство

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} T_{12} = \frac{3}{2m},$$

откуда в силу неравенства (28) следует, что $Y \neq T_{12}$. Пусть, как выше,

$$D_i \in \Lambda_i, \quad D_j^+ \in \Lambda_j^+$$

— общие гиперкасательные дивизоры, где

$$i \in I = \{2, 4, \dots, m-1\}, \quad j \in J = \{l, \dots, 2l-2\}$$

(в I элемент $i = 3$ пропущен) при $m \leq 2l$ и

$$i \in I\{2, 4, \dots, m-2\}, \quad j \in J = \{l, \dots, 2l-1\}$$

(в I снова пропущено $i = 3$) при $m \geq 2l+1$. В силу условий регулярности пересечение

$$Y \cap \left(\bigcap_{i \in I} D_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} D_j^+ \right)$$

одномерно в окрестности точки o , откуда получаем оценки

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y \leq \frac{8l}{3m(2l-1)}$$

и

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y \leq \frac{4}{3(m-1)}$$

при $m \leq 2l$ и $m \geq 2l+1$ соответственно. Нетрудно проверить, что получающиеся оценки доказывают предложение 3.1 во всех случаях, кроме следующих:

$$m \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \quad l \in \{3, 4\}.$$

Приведем теперь более тонкий способ рассуждений, требующий сильных условий регулярности, однако работающий во всех размерностях, включая небольшие. Этот способ полностью аналогичен методу доказательства условия (vs) для двойной точки слоя $o \in F$ вне дивизора ветвления в [1]. Поэтому здесь лишь кратко опишем основные шаги доказательства, уделяя основное внимание изменениям, которые необходимо внести в рассуждения работы [1].

Итак, предположим, что для неприводимого многообразия $Y \subset F$ справедливо неравенство (28), противоречащее требуемой оценке (27). Согласно лемме 3.3 $Y \subset T_1$. Многообразие T_1 имеет точку o изолированной факториальной особенностью и $\text{Pic } T_1 = \mathbb{Z}H_T$, где

$$H_T = H_F|_{T_1}$$

— класс гиперплоского сечения. Пусть $\varphi_T: \tilde{T} \rightarrow T_1$ — раздутие точки o , $E_T \subset \tilde{T}$ — (неприводимый) исключительный дивизор, $\tilde{Y} \subset \tilde{T}$ — собственный прообраз дивизора Y . Имеем

$$\tilde{Y} \sim \alpha H_T - \beta E_T,$$

причем $\beta/\alpha > 3/2$ в силу оценки (28).

ЛЕММА 3.4. *Простой дивизор $T_{12} \subset T_1$ замещается семейством кривых $\{C_\delta, \delta \in \Delta\}$, общая кривая которого неприводима и удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} C_\delta > \frac{2}{3}.$$

Считая лемму доказанной, рассмотрим собственный прообраз $\tilde{C}_\delta \subset \tilde{T}$ общей кривой $C_\delta, \delta \in \Delta$. Очевидно,

$$(\tilde{Y} \cdot \tilde{C}_\delta) < 0,$$

так что $C_\delta \subset Y$ и потому $T_{12} \subset Y$. Следовательно, $Y = T_{12}$, что невозможно. Этим предложение 3.1 доказано.

Лемма 3.4 доказывается рассуждениями, полностью аналогичными тем, которые использовались при доказательстве леммы 2.2 работы [1], и мы не будем их повторять, лишь напомним основные шаги. При $m \geq 4, l \geq 3$ определим последовательность чисел

$$c_e = \#[4, e] \cap \mathcal{M} + \#[3, e] \cap \mathcal{L}, \quad e \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\mathcal{M} = \{2, \dots, m-1\}, \mathcal{L} = \{l, \dots, 2l-1\}$, и построим упорядочивающую функцию

$$\chi: \{1, \dots, m+l-4\} \rightarrow \mathbb{Z}_+,$$

полагая $\chi([c_{e-1}+1, c_e] \cap \mathbb{Z}_+) = e$. В силу условия регулярности для общего набора

$$\mathbb{D} = \{D_i \in \Lambda_{\chi(i)}^P, i = 1, \dots, m+l-4\} \in \Lambda^P$$

гиперкасательных дивизоров замкнутое алгебраическое множество

$$R_i(\mathbb{D}) = \bigcap_{j=1}^i D_j \cap T_P$$

имеет коразмерность i в T_{12} при $i = 1, \dots, m+l-4$. Получаем эффективный 1-цикл

$$R(\mathbb{D}) = R(\mathbb{D}) = (T_P \circ D_1 \circ \dots \circ D_{m+l-4}) = \sum_{\delta_i \in \Delta} C_{\delta_i} + \Phi,$$

где $(C_\delta, \delta \in \Delta)$ – подвижное семейство кривых, замещающее T_{12} , Φ – неподвижная часть семейства $R(\mathbb{D})$. Легко видеть, что Φ есть в точности 1-цикл прямых на F , проходящих через точку $o \in F$, т.е. $\deg \Phi = \deg \mathbb{L}(o)$. Следовательно,

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} C_\delta \geq \frac{\frac{m!}{4} \cdot \frac{(2l)!}{l!} - \lambda_{m,l}}{\frac{2m!}{3} \cdot \frac{(2l-1)!}{(l-1)!} - \lambda_{m,l}} > \frac{2}{3}$$

в силу предложения 3.2 (доказываемого ниже). Аналогичным образом рассуждаем при $m = 3$ или $l = 2$. Этим доказательство леммы 3.3 завершено.

Подчеркнем, что в отличие от ситуации, рассмотренной в [1], здесь основная трудность заключается в оценке числа прямых (с учетом кратностей), проходящих через точку $o \in F$. В [1] рассматриваются двойные точки слоев, которых конечное число, так что для общего расслоения $V/\mathbb{P}^1$ все прямые, проходящие через особую

точку слоя, имеют кратность единица, и задача становится тривиальной. В нашем случае $o \in F$ — произвольная точка слоя. Как мы сейчас покажем, кратность прямой, проходящей через некоторую специально выбранную точку $o \in F$, может быть очень велика. Однако не настолько велика, чтобы метод доказательства леммы 2.2 статьи [1] перестал работать в нашем случае. Все остальные различия между доказательством предложения 3.1 настоящей работы и предложения 2.3 в [1] несущественны.

3.5. Оценка числа прямых. Для точки $o \in V \setminus \sigma^{-1}(W)$ вне дивизора ветвления определим *алгебраический цикл прямых* $\mathbb{L}(o)$ на V , проходящих через точку o , как 0-цикл подсхемы

$$\{q_1 = \dots = q_m = g_{l+1} = \dots = g_{2l} = 0\}$$

на $\mathbb{E} = \mathbb{P}(T_p \mathbb{P}) \cong \mathbb{P}^M$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Для общего по Зарискому расслоения $V/\mathbb{P}^1$ для любой гладкой точки $o \in V \setminus \sigma^{-1}(W)$ имеем*

$$\deg \mathbb{L}(o) \leq \lambda_{m,l} = \frac{m!}{6} \frac{(2l-1)!}{(l-1)!} - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем схему рассуждений и приведем со всеми подробностями основную техническую лемму, позволяющую оценить кратности прямых, проходящих через произвольную точку $o \in V$. Сами вычисления ввиду их элементарности и громоздкости приводить не будем.

Положим

$$\mathcal{H} = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(i))) \times \prod_{j=l+1}^{2l} \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^M, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^M}(j))).$$

Для упрощения обозначений записываем набор ненулевых многочленов $(q_{\#}, g_{\#}) \in \mathcal{H}$ как

$$h_{\#} = (h_1, \dots, h_{M+1}) \in \mathcal{H},$$

причем, меняя местами прямые сомножители, предполагаем, что $\deg h_{i+1} \geq \deg h_i$. Пусть

$$\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}$$

— пространство таких наборов $h_{\#}$, что схема общих нулей многочленов h_i нульмерна или пуста. Для $h_{\#} \in \mathcal{H}^+$ пусть $\mathbb{L}(h_{\#})$ — 0-цикл общих нулей системы $h_{\#}$. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Коразмерность замкнутого подмножества*

$$\mathcal{H}^+(j) = \{h_{\#} \in \mathcal{H}^+ \mid \deg \mathbb{L}(h_{\#}) \geq j\}$$

при $j = \lambda_{m,l} + 1$ не меньше чем $M + 2$.

Предложение 3.2 вытекает из этого факта автоматически. Объясним, как доказывается предложение 3.3. На самом деле для $j = \lambda_{m,l} + 1$ получается гораздо более сильная оценка коразмерности $\text{codim } \mathcal{H}^+(j)$, чем $M + 2$, но нам это не нужно.

Прежде всего отметим очевидный факт: при $j = 0, 1, \dots, M + 2$ имеет место оценка

$$\text{codim}\{h_{\#} \in \mathcal{H}^+ \mid \#\text{Supp } \mathbb{L}(h_{\#}) \geq j\} = j.$$

Отсюда следует, что можно предполагать, что носитель цикла $\mathbb{L}(h_{\#})$ состоит из $j \leq M + 1$ различных точек (т.е. через любую точку $o \in V$ проходит не более чем $M + 1$ различных прямых в слое $F \ni o$). Однако кратность этих точек может быть с ростом размерности M очень велика, как показывает следующий

ПРИМЕР. Пусть $p \in S = \{h_1 = \dots = h_{M-a} = 0\}$ — неособая точка, так что $S \ni p$ — росток неособого a -мерного подмногообразия. Требуется

$$\text{mult}_p\{h_j|_S = 0\} \geq 2, \quad (32)$$

$j = M - a + 1, \dots, M + 1$, накладывает на h_j ровно $a + 1$ условие. С учетом произвольности точки p получаем

$$a(a + 1) \sim a^2$$

условий на многочлены h_j , $M - a + 1 \leq j \leq M + 1$, и эти условия независимы. При $a \sim \sqrt{M}$, таким образом, на V существуют точки, удовлетворяющие требованию (32). Для таких точек имеем

$$\deg \mathbb{L}(o) \geq 2^a \sim 2^{\sqrt{M}}.$$

Приведенный пример является модельным и показывает порядок роста функции

$$\max_{o \in V} \deg \mathbb{L}(o)$$

для общего многообразия $V/\mathbb{P}^1$ при $M \rightarrow \infty$. Отметим, однако, что для малых M получаем ту же самую оценку, что и для числа различных прямых

$$\max_{o \in V} \#\text{Supp } \mathbb{L}(o).$$

Рассмотрим теперь задачу оценки размерности замкнутого множества $\mathcal{H}^+(j)$. Согласно сказанному выше можно уменьшить множество $\mathcal{H}^+$ и считать, что

$$\#\text{Supp } \mathbb{L}(h_{\#}) \leq M + 1$$

для любого $h_{\#} \in \mathcal{H}^+$. Для каждого $i = 1, \dots, M$ положим

$$Y_i = \{h_1 = \dots = h_i = 0\} = \bigcap_{j=1}^i \{h_j = 0\}$$

— алгебраический цикл теоретико-схемного пересечения гиперповерхностей $\{h_j = 0\}$, $\text{codim}_{\mathbb{E}} Y_i = i$. Положим также

$$Y_{M+1} = \{h_1 = \dots = h_{M-1} = h_{M+1} = 0\}.$$

Зафиксируем точки $o_1, \dots, o_k \in \mathbb{E}$, $k \leq M + 1$, и для каждой целочисленной матрицы

$$\mathbb{M} = \|\mu_{ij}\|_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq M+1}} \in \text{Mat}_{k \times (M+1)}(\mathbb{Z}_+)$$

рассмотрим множество

$$\mathcal{H}(\mathbb{M}) = \{h_{\#} \mid \text{mult}_{o_i} Y_j = \mu_{ij}\} \subset \mathcal{H}^+.$$

(Естественно, достаточно рассматривать только матрицы, удовлетворяющие условию неубывания

$$\mu_{i,1} \leq \mu_{i,2} \leq \dots \leq \mu_{i,M-1} \leq \min(\mu_{i,M}, \mu_{i,M+1}),$$

в противном случае либо $\mathcal{H}(\mathbb{M})$ пусто, либо точку o_i можно удалить.) Очевидно,

$$\deg \mathbb{L}(h_{\#}) \leq \sum_{i=1}^k \min(\mu_{i,M}, \mu_{i,M+1}).$$

Теперь для доказательства предложения 3.3 необходимо оценить коразмерность

$$\text{codim}_{\mathcal{H}} \overline{\mathcal{H}(\mathbb{M})}$$

для всех матриц $\mathbb{M}$, удовлетворяющих оценке

$$\sum_{i=1}^k \min(\mu_{i,M}, \mu_{i,M+1}) \geq \lambda_{m,l} + 1.$$

Способ оценки коразмерности $\text{codim} \overline{\mathcal{H}(M)}$ при переходе от Y_i к Y_{i+1} приведен ниже в п. 3.6. Теперь доказательство предложения 3.3 завершается громоздкими, но совершенно элементарными вычислениями на основе леммы 3.5, доказываемой ниже. Приводить эти вычисления здесь не будем.

Предложения 3.3 и 3.2 доказаны.

3.6. Метод оценки степени. Пусть $Y \subset \mathbb{A} = \mathbb{C}^N$ – эффективный цикл размерности $a \geq 1$, $o_1, \dots, o_k \in Y$ – набор попарно различных точек. Положим

$$\mu_i = \text{mult}_{o_i} Y,$$

$i = 1, \dots, k$. Пусть $\mathcal{P}_e(z_1, \dots, z_N)$ – пространство всех (неоднородных) многочленов степени, не превосходящей $e \in \mathbb{Z}_+$, от переменных $z_1, \dots, z_N$. Пусть $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{Z}_+$ – такой набор положительных целых чисел, что

$$c_1 + \dots + c_{k-1} + (k-1) \leq e, \quad (k-1)a \leq N$$

(если $k = 1$, то никаких ограничений не налагается). Положим

$$a_1 = \dots = a_{k-1} = a, \quad a_k = \min(a, N - (k-1)a),$$

$$c_i^* = c_i \text{ при } i = 1, \dots, k-1,$$

$$c_k^* = \min(c_k, e - c_1 - \dots - c_{k-1} - (k-1)).$$

Пусть

$$U_Y = \{f \in \mathcal{P}_e(z_*) \mid \dim\{f = 0\} \cap \text{Supp } Y = a-1\}$$

– (открытое) множество многочленов, не обращающихся тождественно в нуль ни на одной компоненте цикла Y . Положим

$$U_{c_*} = U(c_1, \dots, c_k) = \{f \in U_Y \mid \text{mult}_{o_i} \{f|_Y = 0\} \geq c_i \mu_i + 1\}.$$

Очевидно, подмножество $U_{c_*} \subset U_Y$ замкнуто по Зарискому.

ЛЕММА 3.5. *Имеет место оценка*

$$\operatorname{codim} U_{c_*} \geq \Delta(c_1, \dots, c_k) = \sum_{i=1}^k \binom{a_i + c_i^*}{c_i^*}. \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{U}_{c_*} \subset \mathcal{P}_e(z_*)$ — замыкание множества U_{c_*} . Для того чтобы доказать неравенство (33), достаточно предъявить замкнутое подмногообразие $Z \subset \mathcal{P}_e(z_*)$, удовлетворяющее равенству

$$\dim Z = \Delta(c_1, \dots, c_k), \quad (34)$$

такое, что

$$Z \cap \overline{U}_{c_*} = \{0\}.$$

Очевидно, $0 \in \overline{U}_{c_*}$, так как $\overline{U}_{c_*}$ — конус с вершиной в нуле. Способ построения такого замкнутого множества объясним сначала на примере одной точки $o = o_1, k = 1$, которую без ущерба для общности считаем началом координат $o = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}$. Для упрощения обозначений пишем

$$c_1 = c_1^* = c \leq e, \quad a_1 = a \leq N, \quad \mu_1 = \mu.$$

Пусть $\varphi: \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{A}$ — раздутие точки o , $E = \varphi^{-1}(o) \subset \tilde{\mathbb{A}}$ — исключительный дивизор $E \cong \mathbb{P}^{N-1}$. Рассмотрим некоторый эффективный дивизор $D \subset \mathbb{A}$, $o \in D$, не содержащий целиком ни одной компоненты цикла Y , так что

$$\dim(\operatorname{Supp} Y \cap \operatorname{Supp} D) = a - 1$$

и корректно определен эффективный цикл

$$Y_D = (Y \circ D)$$

размерности $a - 1$. Напомним, как вычисляется кратность этого цикла в точке o . Пусть $\tilde{Y}, \tilde{D} \subset \tilde{\mathbb{A}}$ — собственные прообразы цикла Y и дивизора D соответственно. Положим

$$Y_E = (\tilde{Y} \circ E) = \sum_{i \in I} b_i B_i$$

— проективизированный касательный конус к Y в точке $o \in \operatorname{Supp} Y$. Имеем

$$(\tilde{D} \circ \tilde{Y}) = (\widetilde{D \circ Y}) + \sum_{i \in I} d_i B_i$$

для некоторых неотрицательных $d_i \in \mathbb{Z}_+$. Теперь

$$\operatorname{mult}_o Y_D = \mu \operatorname{mult}_o D + \sum_{i \in I} d_i \deg B_i$$

(это стандартный факт теории пересечений, см. [20]). Отсюда следует, что если $B_i \not\subset \tilde{D}$ для всех $i \in I$, то $d_i = 0$ и потому имеет место равенство

$$\operatorname{mult}_o Y_D = \mu \operatorname{mult}_o D.$$

Скажем, что набор линейных функций $z_1, \dots, z_a$ *правильный* относительно пары $(o \in Y)$, если

- $B_i \not\subset \widetilde{(z_1)}$ для всех $i \in I$;
- проекция $\pi_{(z_1, \dots, z_a)}: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^a$ доминантна на каждой неприводимой компоненте цикла Y ;
- выполнено следующее инфинитезимальное условие в точке o . Считая $(z_1 : \dots : z_N)$ однородными координатами на E , рассмотрим аффинное множество $\{z_1 \neq 0\}$ с координатами $(y_2, \dots, y_N)$, где $y_i = z_i/z_1$. Набор функций $(y_2, \dots, y_a)$ определяет проекцию $\iota: \mathbb{C}^{N-1} \rightarrow \mathbb{C}^{a-1}$. Теперь наше условие формулируется таким образом: ограничение

$$\iota|_{B_i}: B_i \cap \{z_1 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}^{a-1}$$

проекции ι на каждую компоненту B_i есть доминантное отображение.

Легко видеть, что общий набор $(z_1, \dots, z_a)$ линейных функций будет правильным относительно пары $(o \in Y)$. В силу определения правильности для любого ненулевого многочлена $f \in \mathcal{P}_e(z_1, \dots, z_a)$ от переменных $z_1, \dots, z_a$ имеем

$$B_i \not\subset \widetilde{(f)}$$

и потому в силу сказанного выше $\text{mult}_o Y_{(f)} \leq \mu \deg f$. Таким образом, можно положить

$$Z = \mathcal{P}_c(z_1, \dots, z_a).$$

Любой ненулевой многочлен $f \in Z$ не содержит целиком ни одну из неприводимых компонент цикла Y , так что $Z \setminus \{0\} \subset U_Y$. Поэтому $Z \cap \overline{U}_c = \{0\}$, как и требовалось.

Рассмотрим теперь общий случай произвольного $k \geq 2$. Здесь имеем k точек $o_1, \dots, o_k \in \text{Supp } Y$. Рассмотрим систему аффинных функций

$$\begin{array}{c} l_{1,1}, \dots, l_{1,a_1}, \\ \dots\dots\dots \\ l_{k,1}, \dots, l_{k,a_k}, \end{array}$$

$a_1 = \dots = a_{k-1} = a$, $a_k = \min(a, N - (k-1)a)$, удовлетворяющую следующим требованиям:

- линейные части аффинных функций $l_{*,*}$ линейно независимы в совокупности, т.е. образуют часть базиса пространства $\mathbb{C}^N$;
- для любого $i \in \{1, \dots, k-1\}$ имеем $l_{i,\alpha}(o_i) = 0$ и система функций $(l_{i,1}, \dots, l_{i,a})$ правильная для пары $(o_i \in Y)$; $l_{k,\alpha}(o_k) = 0$ и система функций $(l_{k,1}, \dots, l_{k,a_k})$ образует часть правильного набора для пары $(o_k \in Y)$;
- при $i \neq j$ имеем $l_{i,1}(o_j) \neq 0$.

Положим теперь

$$Z = \sum_{i=1}^k \left(\prod_{j=1}^{i-1} l_{j,1}^{c_j+1} \right) \mathcal{P}_{c_i^*}(l_{i,1}, \dots, l_{i,a_i}), \quad (35)$$

где $\mathcal{P}_\alpha(\#)$ обозначает линейное пространство всех полиномиальных функций степени α от аффинных функций $\#$. Отметим сразу, что сумма в (35) является прямой, так как линейные части функций $l_\#$ линейно независимы.

ЛЕММА 3.6. *Замкнутые алгебраические множества Z и $\overline{U}_{c*}$ пересекаются только по нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $f \in Z$ имеем разложение

$$f = f_1 + \dots + f_k, \quad f_i \in Z_i = \left(\prod_{j=1}^{i-1} l_{j,1}^{c_j+1} \right) \mathcal{P}_{c_i^*}(l_{i,1}, \dots, l_{i,a_i}),$$

которое определено однозначно, так как $Z = \bigoplus_{i=1}^k Z_i$.

По построению для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ имеем

$$\text{mult}_{o_j} \{f_i|_Y = 0\} \geq (c_j + 1)\mu_j \geq c_j\mu_j + 1 \quad (36)$$

для всех $j \leq i - 1$. В частности, если $f \in Z \cap \overline{U}_{c*}$, то имеет место оценка

$$\text{mult}_{o_1} \{f_1|_Y = 0\} \geq c_1\mu_1 + 1,$$

так как для $f_2, \dots, f_k$ оценка (36) с $j = 1$ справедлива. Рассуждая, как выше, заключаем, что $f_1 \equiv 0$. Предположим, что уже доказано, что

$$f_1 \equiv \dots \equiv f_\gamma \equiv 0.$$

Поскольку при $j = \gamma + 1$ оценка (36) выполнена для всех $i \geq \gamma + 2$, заключаем, что

$$\text{mult}_{o_{\gamma+1}} \{f_{\gamma+1}|_Y = 0\} \geq c_{\gamma+1}\mu_{\gamma+1} + 1. \quad (37)$$

Однако по построению

$$f_{\gamma+1} = \left(\prod_{j=1}^{\gamma} l_{j,1}^{c_j+1} \right) f_{\gamma+1}^{\#},$$

где $f_{\gamma+1}^{\#} \in \mathcal{P}_{c_{\gamma+1}^*}(l_{\gamma+1,1}, \dots, l_{\gamma+1,a_{\gamma+1}})$. Учитывая, что для $j = 1, \dots, \gamma$ имеем $l_{j,1}(o_{\gamma+1}) \neq 0$, получаем, что оценка (37) остается справедливой при замене $f_{\gamma+1}$ на $f_{\gamma+1}^{\#}$. Теперь, рассуждая как в случае $k = 1$, разобранным выше, заключаем, что $f_{\gamma+1} \equiv 0$. Этим лемма 3.6 доказана.

Учитывая, что выполнено равенство (34) (это очевидно из явной конструкции (35) линейного пространства Z), завершаем доказательство леммы 3.5.

Список литературы

1. Пухликов А. В. Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. I // Матем. сб. 2004. Т. 195. №7. С. 127–160.
2. Пухликов А. В. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. №1. С. 123–164.
3. Пухликов А. В. Бирационально жесткие расслоения Фано // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. №3. С. 131–150.
4. Пухликов А. В. Бирационально жесткие двойные гиперповерхности Фано // Матем. сб. 2000. Т. 191. №6. С. 101–126.
5. Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of Fano hypersurfaces // Invent. Math. 1998. V. 134. №2. P. 401–426.

6. *Pukhlikov A. V.* Certain examples of birationally rigid varieties with a pencil of double quadrics // *J. Math. Sci.* 1999. V. 94. №1. P. 986–995.
7. *Пушликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы алгебраических многообразий с пучком двойных квадрик // *Матем. заметки.* 2000. Т. 67. №2. С. 241–249.
8. *Pukhlikov A. V.* Essentials of the method of maximal singularities // *Explicit birational geometry of threefolds.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 73–100. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 281.)
9. *Pukhlikov A. V.* Birationally rigid Fano complete intersections // *J. Reine Angew. Math.* 2001. V. 541. P. 55–79.
10. *Пушликов А. В.* Бирационально жесткие итерированные двойные накрытия Фано // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2003. Т. 67. №3. С. 139–182.
11. *Гриненко М. М.* Бирациональные автоморфизмы трехмерного двойного конуса // *Матем. сб.* 1998. Т. 189. №7. С. 37–52.
12. *Гриненко М. М.* Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степени 1 и 2 // *Матем. сб.* 2000. Т. 191. №5. С. 17–38.
13. *Гриненко М. М.* Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степени 1 и 2. II // *Матем. сб.* 2003. Т. 194. №5. С. 31–60.
14. *Соболев И. В.* Об одной серии бирационально жестких многообразий с пучком гиперповерхностей Фано // *Матем. сб.* 2001. Т. 192. №10. С. 123–130.
15. *Соболев И. В.* Бирациональные автоморфизмы одного класса многообразий, расслоенных на кубические поверхности // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2002. Т. 66. №1. С. 203–224.
16. *Brown G., Corti A., Zucconi F.* Birational geometry of 3-fold Mori fibre spaces // Preprint 2003; [arXiv:math.AG/0307301](https://arxiv.org/abs/math/0307301).
17. *Саркисов В. Г.* Бирациональные автоморфизмы расслоений на коники // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1980. Т. 44. №4. С. 918–945.
18. *Саркисов В. Г.* О структурах расслоений на коники // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1982. Т. 46. №2. С. 371–408.
19. *Исковских В. А., Манин Ю. И.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // *Матем. сб.* 1971. Т. 86. №1. С. 140–166.
20. *Фултон У.* Теория пересечений. М.: Мир, 1989.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: pukh@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
12.01.2004