Общероссийский математический портал

А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов, Зарождение контрастных структур типа ступеньки, связанное с катастрофой сборки, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 12, 27–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm863>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:08:17

УДК 517.928

А. М. Ильин, Б. И. Сулейманов

Зарождение контрастных структур типа ступеньки, связанное с катастрофой сборки

Рассматривается специальное решение обыкновенного дифференциального уравнения $u''_{xx} = u^3 - tu - x$, которое связано с решениями широкого ряда дифференциальных уравнений с частными производными с малым параметром. Функция $u(x, t)$ является главным членом асимптотики по малому параметру этих решений около точек сборки предельного решения. Доказывается существование этой специальной функции $u(x, t)$. Строится и обосновывается ее равномерная асимптотика на бесконечности.

Библиография: 19 названий.

Введение

В статье исследовано специальное решение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$u''_{xx} = u^3 - tu - x. \quad (0.1)$$

Это определенное на всей плоскости (x, t) решение ОДУ (0.1) связано с решениями довольно широкого ряда уравнений математической физики [1] с малым параметром. Оно является главным членом внутренних асимптотических разложений в случае, когда их внешние разложения имеют особенности типа сборки [2]. К числу таких уравнений относится, в частности, уравнение

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \right) + f(X, U) = 0, \quad X = (x_1, x_2), \quad \varepsilon \ll 1. \quad (0.2)$$

На примере эвристического анализа решений этого уравнения поясним значение и особенности поведения исследуемого решения ОДУ (0.1).

Уравнение (0.2) имеет асимптотическое решение вида

$$U = u_0(X) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j(X) \varepsilon^j, \quad (0.3)$$

где $u_0(X)$ есть корень уравнения

$$f(X, u_0) = 0. \quad (0.4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 02-01-00768, 03-01-00716) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1446.2003.1).

Наиболее просто обстоит дело, когда уравнение (0.4) имеет единственный корень, который удовлетворяет условию устойчивости

$$f_U(X, u_0(X)) < 0.$$

(Например, в [3] показано, что в этом случае при дополнительных ограничениях весьма общего вида решение задачи Дирихле для уравнения (0.2) везде, кроме узкого пограничного слоя, выходит на режим, описываемый асимптотическим разложением (0.3).)

Другой типичной [2] ситуацией является наличие точки сборки, из которой на плоскости X исходят две кривые, разделяющие окрестность такой точки на две части: внутри одной решение уравнения (0.4) по-прежнему имеет единственный устойчивый корень $u_{0,0}(X)$, а внутри другой – три корня

$$u_{0,1}(X) < u_{0,2}(X) < u_{0,3}(X).$$

Наименьший и наибольший из них являются гладкими продолжениями корня $u_{0,0}(X)$ через одну из границ области однозначности решения уравнения (0.4). Тогда для построения полной асимптотики решения уравнения (0.2) необходимо исследование решения вблизи такой точки сборки (ср. с работами [4]–[9], где были рассмотрены схожие ситуации). К примеру, пусть точка сборки – это начало координат, $u_0(0,0) = 0$, а ряд Тейлора функции $f(x_1, x_2, U)$ в этой точке имеет вид

$$f(x_1, x_2, U) = x_1 + x_2 U - U^3 + \dots,$$

что с точностью до линейных преобразований соответствует ситуации общего положения.

В естественных внутренних переменных

$$x = \frac{x_1}{\varepsilon^{3/4}}, \quad t = \frac{x_2}{\varepsilon^{1/2}}, \quad v = \frac{u}{\varepsilon^{1/4}}$$

уравнение для главного члена асимптотики – это как раз ОДУ (0.1).

Вне малой окрестности начала координат в области трехзначности корней уравнения (0.4) возникает проблема, касающаяся внешнего разложения (0.3): для его однозначного определения внутри этой области необходимо указать линию

$$x_1 = \varphi(x_2), \tag{0.5}$$

по разные стороны от которой главными членами внешнего разложения (0.3) будут две разные устойчивые ветви решения уравнения (0.4) – корни $u_{0,1}(X)$ и $u_{0,3}(X)$. (Таким образом, внешнее разложение (0.3) определяется гладким вне критической кривой (0.5) корнем уравнения (0.4).) Но проблема нахождения функции φ легко решается с помощью простого соображения, очень похожего на то, что используется для определения фронта ударной волны в газодинамических задачах с малой вязкостью [10]–[12].

Для этого надо задаться вопросом о гладком в окрестности кривой (0.5) асимптотическом разложении решения (0.2), сшивающем разрывное внешнее разложение (0.3) (пусть для определенности при $x_1 > \varphi(x_2)$ главный член разложения (0.3) есть корень $u_{0,3}(X)$).

Растянутой переменной для такого сшивающего разложения является, очевидно, переменная

$$y = \frac{x_1 - \varphi(x_2)}{\varepsilon},$$

а его главным членом — гладкое при всех y решение $w(x_2, y)$ ОДУ

$$(1 + \varphi'(x_2)^2)w_{yy} + f(\varphi(x_2), x_2, w) = 0, \quad (0.6)$$

удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} w(x_2, y) = u_{0,1}(\varphi(x_2), x_2), \quad (0.7)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} w(x_2, y) = u_{0,3}(\varphi(x_2), x_2), \quad (0.8)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} w'_y(x_2, y) = 0. \quad (0.9)$$

После умножения обеих частей ОДУ (0.6) на w_y и интегрирования полученного уравнения на промежутке от $-\infty$ до ∞ , учитывая условия (0.7)–(0.9), получаем, что критическую кривую (0.5) надо определять из известного правила равных площадей

$$\int_{u_{0,1}(\varphi(x_2), x_2)}^{u_{0,3}(\varphi(x_2), x_2)} f(x_2, \varphi(x_2), w) dw = 0. \quad (0.10)$$

Этот вывод о выборе функции (0.5) косвенно подтверждают также результаты работ [13]–[15], объектом исследования которых являлись решения краевых задач для уравнения (0.2) в областях, где решения (0.3) многозначны: по разные стороны от кривой, определяемой именно по правилу (0.10), внешние асимптотические разложения этих решений задаются двумя разными рядами (0.3). В последние годы подобные — вида сглаженных ударных волн — асимптотические решения уравнений с малым параметром при производных часто называют *контрастными структурами типа ступеньки*.

Изучаемое в настоящей статье специальное решение ОДУ (0.1) описывает зарождение такого сорта контрастных структур, связанное с катастрофой сборки. Из общей идеологии метода согласования [8] следует, что поведение этого решения ОДУ (0.1) при $x^2 + t^2 \rightarrow \infty$ должно во многом походить на поведение описанного выше внешнего разложения асимптотического решения уравнения (0.2).

Например, понятно, что главным членом асимптотики данной функции $u(x, t)$ при $x^2 + t^2 \rightarrow \infty$ всюду, кроме окрестности одной линии, является гладкий корень $H(x, t)$ кубического уравнения

$$H^3 - tH - x = 0. \quad (0.11)$$

Сама же эта линия, расположенная внутри области

$$-\frac{2t^{3/2}}{\sqrt{27}} \leq x \leq \frac{2t^{3/2}}{\sqrt{27}}, \quad t > 0,$$

трехзначности решения (0.11), также может быть определена с помощью правила равных площадей. Действительно, переход при $t \gg 1$ к автомодельным переменным

$$s = \frac{x}{t^{3/2}}, \quad u = t^{1/2}v, \quad H = t^{1/2}f \quad (0.12)$$

сводит уравнение (0.11) к кубическому уравнению

$$f^3 - f - s = 0, \quad (0.13)$$

а ОДУ (0.1) – к сингулярно возмущенному ОДУ

$$t^{-4}v_{ss} = v^3 - v - s. \quad (0.14)$$

Из вида правой части ОДУ (0.14) ясно, что критическая кривая будет иметь вид $x = s_p t^{3/2}$ и что константа s_p находится из уравнения

$$\frac{f_1^4(s_p)}{4} - \frac{f_1^2(s_p)}{2} - s_p f_1(s_p) = \frac{f_3^4(s_p)}{4} - \frac{f_3^2(s_p)}{2} - s_p f_3(s_p), \quad (0.15)$$

где $f_1(s)$ и $f_3(s)$ суть минимальный и максимальный из трех корней уравнения (0.13) соответственно. (Правило равных площадей (0.15) из уравнения (0.13) выводится так же, как выше правило (0.10) было выведено из уравнения (0.2).)

Из уравнений (0.13), (0.15) и из условия расположения критической кривой внутри области трехзначности решения уравнения (0.13) следует, что

$$s_p = f_2(s_p) = 0.$$

Таким образом, выходит, что критической линией должен быть луч

$$L : (x = 0, t > 0).$$

Корень $H(x, t)$ уравнения (0.13), всюду вне луча L являющийся главным членом асимптотики при $x^2 + t^2 \rightarrow \infty$ интересующего нас решения (0.1), будет, очевидно, нечетной функцией переменной x . С учетом вида уравнения (0.1) логично поэтому ожидать, что нечетным по x должно быть и само это решение уравнения (0.1). Данный корень $H(x, t)$ монотонно растет по переменной x . И продолжая аналогии с газодинамическими задачами с малой вязкостью, решения которых в окрестности фронта ударной волны монотонны [12; § 12], следует ожидать, что нужное нам решение ОДУ (0.1) также будет монотонно растущей по переменной x функцией.

Для каждого фиксированного значения t теорема существования монотонно возрастающего и нечетного по переменной x решения ОДУ (0.1) была доказана в [16]. Здесь, в § 2, приводится несколько упрощенное доказательство этой теоремы, но главным содержанием статьи является исследование *равномерной* и полной асимптотики данного специального решения ОДУ (0.1) при $x^2 + t^2 \rightarrow \infty$.

Для того чтобы избежать повторений, в дальнейшем, за исключением особо оговоренных случаев, все рассматриваемые функции будем считать бесконечно дифференцируемыми, постоянные – независимыми как от x , так и от t , а под монотонностью и нечетностью будем иметь в виду монотонность и нечетность по переменной x .

§1. Вспомогательные леммы

ЛЕММА 1.1. Пусть при $x \geq x_1 > -\infty$ функция $u(x)$ удовлетворяет неравенству

$$u''(x) \geq \beta^2 u(x) \quad (1.1)$$

для некоторого $\beta > 0$ и при $x \rightarrow \infty$

$$u(x) = o(\exp(\beta x)). \quad (1.2)$$

Тогда при $x \geq x_1$ справедлива оценка

$$u(x) \leq |u(x_1)| \exp(\beta(x_1 - x)). \quad (1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что не существует точки, в которой функция $u(x)$ положительна, а ее производная неотрицательна. Допустим противное: пусть $u(x_2) > 0$, $u'(x_2) \geq 0$ для некоторой точки $x_2 \geq x_1$. Тогда в силу неравенства (1.1) функция $u(x)$ и ее производная монотонно растут при $x \geq x_2$ и поэтому положительны. Пусть $x_3 > x_2$ — некоторая точка. Ясно, что существует положительная постоянная $\gamma > 0$ такая, что $u(x_3) > \gamma$, $u'(x_3) > \beta\gamma$. Обозначим $v(x) = u(x) - \gamma \exp \beta(x - x_3)$. Тогда $v(x_3) > 0$, $v'(x_3) > 0$, а из неравенства (1.1) следует, что $v''(x) > \beta^2 v(x)$. Поэтому $v(x) > 0$ при $x > x_3$, что противоречит условию (1.2).

Если $u(x_1) \leq 0$, то $u(x) \leq 0$ всюду при $x \geq x_1$. Действительно, в противном случае существовала бы точка $x_2 > x_1$ такая, что $u(x_2) > 0$, $u'(x_2) \geq 0$. Как показано выше, это невозможно. Итак, в этом случае $u(x) \leq 0$ и, очевидно, неравенство (1.3) выполнено.

Остается рассмотреть единственную оставшуюся возможность, когда $u(x_1) > 0$, $u'(x_1) < 0$. В силу изложенного выше производная $u'(x)$ остается отрицательной до тех пор, пока функция остается положительной. Возможны лишь два варианта:

- 1) либо функция $u(x)$ где-нибудь обращается в нуль;
- 2) либо $u(x) > 0$ всюду при $x \geq x_2$.

1) Если функция $u(x)$ в какой-нибудь точке обратится в нуль, то пусть x_2 — такая точка, что $u(x_2) = 0$, а $u(x) > 0$ при $x_1 \leq x < x_2$. Так же, как показано выше (с заменой x_1 на x_2), следует заключить, что $u(x) \leq 0$ всюду при $x \geq x_2$, так что при $x \geq x_2$ неравенство (1.3) выполнено.

Для того чтобы проверить неравенство (1.3) при $x_1 \leq x \leq x_2$, умножим неравенство (1.1) на $u'(x)$ и проинтегрируем результат от $x < x_2$ до x_2 . Получаем неравенство

$$u'(x)^2 \geq \beta^2 u^2(x), \quad (1.4)$$

откуда следует, что $u'(x) + \beta u(x) \leq 0$, или, что эквивалентно, $(\exp(\beta x) u(x))'_x \leq 0$. Интегрируя последнее неравенство от x_1 до x , получаем оценку (1.3).

2) В этом случае $u(x) > 0$, $u'(x) < 0$ всюду при $x \geq x_1$. Следовательно, положительная функция $u(x)$ не возрастает и в силу неравенства (1.1) ее предел при $x \rightarrow \infty$ равен нулю. (Иначе этот предел равен $\mu > 0$, но тогда $u''(x) \geq \beta^2 \mu > 0$, что противоречит убыванию $u(x)$.)

Умножая неравенство (1.1) на $u'(x)$ и интегрируя результат от $x \geq x_1$ до $y > x$, выводим неравенство

$$-u'(x)^2 \leq \beta^2(u^2(y) - u^2(x)).$$

После перехода в нем к пределу при $y \rightarrow \infty$ возникает неравенство (1.4), из которого, как и выше, получаем оценку (1.3).

ЛЕММА 1.2. *На компактном промежутке $I = (s : a \leq s \leq b)$ рассмотрим задачу*

$$v''(s) = g(s, v), \quad (1.5)$$

$$v(a) = A, \quad v(b) = B, \quad (1.6)$$

где A, B конечны. Пусть найдутся функции $\alpha(s), \beta(s)$ такие, что

- 1) $\alpha(s) \leq \beta(s) \quad \forall s \in I;$
- 2) $\alpha''(s) \geq g(s, \alpha(s)), \quad \beta''(s) \leq g(s, \beta(s)) \quad \forall s \in I;$
- 3) $\alpha(a) \leq A \leq \beta(a), \quad \alpha(b) \leq B \leq \beta(b).$

Тогда существует решение задачи (1.5), (1.6), которое удовлетворяет неравенству

$$\alpha(s) \leq v(s) \leq \beta(s). \quad (1.7)$$

Доказательство приведено, например, в [17; гл. 3, § 1].

§ 2. Асимптотика при $x \rightarrow \infty$ для ограниченных значений t

Исходя из изложенных во введении наводящих соображений потребуем, чтобы искомое решение $u(x, t)$ ОДУ (0.1) было нечетной монотонно растущей функцией, которая при больших значениях x близка к $H(x, t)$. Под $H(x, t)$ будем понимать такой корень кубического уравнения (0.11), чтобы функция $H(x, t)$ являлась гладкой всюду в $\mathbb{R}^2$, кроме луча $(x = 0, t \geq 0)$, где $H(\pm 0, t) = \pm \sqrt{t}$. Очевидно, что эта функция $H(x, t)$ монотонно растет и нечетна. (Из ее нечетности следует, в частности, что $H(0, t) = 0$ при $t < 0$.)

Наложив дополнительные условия

$$u(0, t) = 0, \quad (2.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (u(x, t) - H(x, t)) = 0, \quad (2.2)$$

построим решение $u(x, t)$ при $x \geq 0$ и продолжим его по нечетности. При этом будем считать, что $H(0, t) = \sqrt{t}$ при $t > 0$.

Сначала будем доказывать существование $u(x, t)$ без исследования его асимптотики при $x \rightarrow \infty$. Для этого рассмотрим решение $u_\alpha(x, t)$ начальной задачи для уравнения (0.1) с условиями (2.1) и

$$u'_x(0, t) = \alpha. \quad (2.3)$$

Выберем $\alpha = \alpha_0$ так, чтобы решение $u_{\alpha_0}(x, t)$ задачи Коши (0.1), (2.1), (2.3) было искомым монотонным решением задачи (0.1), (2.1), (2.2).

При каждом фиксированном t пусть $M(t)$ – множество тех α , при которых существует точка $x(\alpha, t) > 0$ такая, что

$$0 < u_\alpha(x, t) < H(x, t)$$

при $0 < x < x(\alpha, t)$ и

$$u_\alpha(x(\alpha, t), t) = H(x(\alpha, t), t). \quad (2.4)$$

Прежде всего отметим, что всюду, кроме начала координат, справедливо неравенство

$$H'_x = \frac{1}{3H^2 - t} > 0,$$

влекущее за собой вывод о том, что $H(x, t) \geq H(0, t)$. Последнее неравенство при $t > 0$ означает справедливость оценки $H(x, t) \geq \sqrt{t}$. Поэтому из соотношения

$$u^3 - tu - x = (u - H(x, t))(u^2 + uH(x, t) + H^2(x, t) - t)$$

следует, что

$$u^3 - tu - x < 0 \quad (2.5)$$

при $0 < u < H(x, t)$.

ЛЕММА 2.1. *Для любого t множество $M(t)$ непусто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вторая производная корня $H(x, t)$ по x

$$H''_{xx} = -\frac{6H}{(3H^2 - t)^3}$$

неположительна всюду, кроме начала координат. Поэтому при $t \neq 0$ из утверждения леммы 1.2 следует, что на отрезке

$$0 \leq x \leq 1 \quad (2.6)$$

существует функция $\hat{u}(x, t)$, которая удовлетворяет ОДУ (0.1), начальному условию (2.1), краевому условию

$$u(1, t) = H(1, t) \quad (2.7)$$

и, кроме того, двойному неравенству

$$0 \leq \hat{u}(x, t) \leq H(x, t)$$

(в формулировке леммы 1.2 переменной s соответствует переменная x , промежутку I – отрезок $[0, 1]$, решению краевой задачи (1.5), (1.6) – решение $\hat{u}(x, t)$, нижнему барьеру $\alpha(s)$ – тождественный нуль, а верхнему барьеру $\beta(s)$ – функция $H(x, t)$). Так как $\hat{u}(x, t)$ не совпадает с $H(x, t)$, то при $t \neq 0$ в качестве $\alpha \in M(t)$ можно взять $(\hat{u})'_x(0, t)$.

Из леммы 1.2 следует также, что при $t = 0$ на промежутке (2.6) определено решение $\tilde{u}(x)$ краевой задачи (0.1), (2.1), (2.7), которое удовлетворяет двойному неравенству $0 \leq \tilde{u}(x) \leq 1$. Поскольку

$$\tilde{u}(x) < H(x, 0) = x^{1/3}$$

при всех достаточно малых положительных x и $H(1, 0) = 1$, то это двойное неравенство позволяет утверждать, что $\alpha = (\tilde{u})'(0) \in M(0)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Для $\alpha \in M(t)$ при $0 \leq x \leq x(\alpha, t)$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial u_\alpha(x, t)}{\partial x} > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из принадлежности α к $M(t)$ следует положительность α . В самом деле, неравенство $\alpha < 0$ невозможно по определению. Предположение же о том, что $\alpha = 0$, означает справедливость в точке $x = 0$ равенств

$$u'_x = u''_{xx} = 0, \quad u'''_{xxx} = -1,$$

чего тоже не может быть для положительного при $x > 0$ решения $u(x, t)$.

Предположение об обращении $u_\alpha(x, t)'_x$ в нуль в точке $x(\alpha, t)$ противоречит тому, что $H'_x(x(\alpha, t), t) > 0$.

В силу неравенства (2.5) внутри промежутка $[0, x(\alpha, t)]$

$$\frac{\partial^2 u_\alpha(x, t)}{\partial x^2} < 0.$$

Из этого неравенства и условий (2.1), (2.4) следует положительность $u_\alpha(x, t)'_x$ и при $0 < x < x(\alpha, t)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. При каждом фиксированном t множество $M(t)$ открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha \in M(t)$, то $u_\alpha(x, t) < H(x, t)$ при $0 < x < x(\alpha, t)$,

$$u_\alpha(x(\alpha, t), t) = H(x(\alpha, t), t).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \geq \frac{\partial H}{\partial x}$$

в точке $x(\alpha, t)$. Так как

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}(x(\alpha, t), t) = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x(\alpha, t), t) < 0,$$

то $u_\alpha > H$ при $x > x(\alpha, t)$ в малой окрестности точки $(x(\alpha, t), t)$ и при малом возмущении α это состояние сохранится. Лемма доказана.

Для каждого t положим

$$\alpha_0(t) = \inf_{\alpha(t) \in M(t)} \alpha(t)$$

и определим искомую функцию как $u_{\alpha_0(t)}(x, t)$. Всюду в дальнейшем под $u(x, t)$ будем понимать именно данное решение. Очевидно, что для любых x, t имеет место неравенство

$$0 \leq u(x, t) \leq H(x, t) \quad (2.8)$$

и что $u(x, t)$ есть монотонно растущая функция, которая удовлетворяет уравнению (0.1). Из самого способа его построения кажется почти очевидным, что оно также удовлетворяет условию (2.2) – т.е. является искомым. Осталось лишь исследовать асимптотику $u(x, t)$ на бесконечности.

Начнем с анализа асимптотики этой функции при $x \rightarrow \infty$ для конечных значений параметра t (результатом этого анализа, в частности, будет строгое обоснование справедливости для функции $u(x, t)$ соотношения (2.2)). Для этого заметим прежде всего, что существует однозначно определенное формальное решение уравнения (0.1) в виде ряда

$$u = x^{1/3} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t) x^{-2j/3} \right). \quad (2.9)$$

Подстановка этого ряда в уравнение (0.1) и приравнивание в результате членов при одинаковых степенях x позволяют последовательно определить все коэффициенты $c_j(t)$. Оказывается, что на любом компактном промежутке изменения параметра t при $x \rightarrow \infty$ функция $u(x, t)$ имеет асимптотику в виде ряда (2.9).

ТЕОРЕМА 2.1. *Для любого конечного положительного T_* существуют такие положительные постоянные $x(T_*)$, что для любого натурального n найдутся положительные постоянные $M_n(T_*)$ и $Q_n(T_*)$, для которых в полуполосе*

$$\Lambda = (x, t: x > x(T_*), 0 \leq |t| \leq 2T_*) \quad (2.10)$$

функция $u(x, t)$ и коэффициенты $c_j(t)$ формального решения ОДУ (0.1) в виде правой части (2.9) связаны неравенствами

$$\left| u(x, t) - x^{1/3} \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(t) x^{-2j/3} \right) \right| \leq M_n(T_*) x^{(1-2n)/3}, \quad (2.11)$$

$$\left| u'_x(x, t) - x^{-2/3} \left(\frac{1}{3} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(1-2j)c_j(t)}{3} x^{-2j/3} \right) \right| \leq Q_n(T_*) x^{-2(1+n)/3}. \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что коэффициенты $c_j(t)$ суть многочлены. Поэтому для любого натурального n и достаточно больших $x(T_*)$ существует постоянная $M_n(T_*)$ такая, что в полуполосе (2.10) функции

$$Y_{-n}(x, t) = x^{1/3} \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(t) x^{-2j/3} - M_n(T_*) x^{-2n/3} \right),$$

$$Y_{+n}(x, t) = x^{1/3} \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(t) x^{-2j/3} + M_n(T_*) x^{-2n/3} \right)$$

удовлетворяют неравенствам

$$(Y_{-n}(x, t))''_{xx} - (Y_{-n}(x, t))^3 + tY_{-n}(x, t) + x > 0,$$

$$(Y_{+n}(x, t))''_{xx} - (Y_{+n}(x, t))^3 + tY_{+n}(x, t) + x < 0.$$

Следовательно, для достаточно больших значений $x(T_*)$ разности

$$R_{-}(x, t) = Y_{-n}(x, t) - u(x, t), \quad R_{+} = u(x, t) - Y_{+n}(x, t)$$

в полуполосе (2.10) удовлетворяют неравенствам

$$(R_{\mp}(x, t))''_{xx} > Q_{\mp}(x, t)R_{\mp}(x, t)$$

с коэффициентами

$$Q_{\mp}(x, t) = u^2(x, t) + u(x, t)Y_{\mp}(x, t) + (Y_{\mp}(x, t))^2 - t > 1.$$

Согласно лемме 1.1 из этих неравенств и неравенства (2.8) следует, что в полуполосе (2.10) для функций $R_{\mp}(x, t)$ справедливы оценки

$$R_{\mp}(x, t) \leq |R_{\mp}(x(T_*))| \exp(x(T_*) - x). \quad (2.13)$$

С другой стороны, при $x(T_*) \rightarrow \infty$ имеют место неравенства

$$0 \leq u(x(T_*), t) \leq H(x(T_*), T) < 2(x(T_*))^{1/3}$$

и

$$\left| x(T_*)^{1/3} \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(T_*) x(T_*)^{-2j/3} \right) \right| < 2(x(T_*))^{1/3}.$$

Из этих неравенств и оценки (2.13) следует, что, увеличив при необходимости $x(T_*)$ и $M_n(T_*)$, мы получим в полуполосе (2.10) справедливость неравенств (2.11).

А из этих оценок вытекает и справедливость оценок (2.12). Действительно, оценки (2.11) гарантируют существование такой последовательности $y_n(t)$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u'_x(y_n(t), t) = 0$. Поэтому после интегрирования обеих частей уравнения (0.1) на промежутке от x до $y_n(t)$ с последующим переходом к пределу при $n \rightarrow \infty$ будем иметь интегральное уравнение

$$u'_x(x, t) = - \int_x^\infty (u^3(z, t) - tu(z, t) - z) dz.$$

Из данного интегрального уравнения, из того факта, что ряд (2.9) есть формальное решение ОДУ (0.1), и из оценок (2.11) искомые оценки (2.12) получаются уже непосредственно. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. *Для всех значений параметра t монотонно возрастающее решение задачи (0.1), (2.1), асимптотическое разложение которого при $x \rightarrow \pm\infty$ задается рядом (2.9), единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После перехода от функции $u(x, t)$ к обратной функции $x(u, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = F(u, t, x, x'),$$

где $F(u, t, x, x') = (x + ut - u^3)(\partial x / \partial u)^3$.

Допустим существование двух различных решений $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, рассматриваемых в теореме 2.1. Тогда соответствующие решения $x_1(u, t)$ и $x_2(u, t)$ монотонно растут и равны нулю при $u = 0$.

По доказанному выше они имеют одинаковые асимптотические разложения при $u \rightarrow \infty$

$$x = u^3 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) u^{-k} \right).$$

Значит, разность двух таких решений стремится к нулю при $u \rightarrow \infty$.

Эта разность не может иметь ни точек положительного максимума, ни точек отрицательного минимума, так как в этих точках

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^3 > 0.$$

Следовательно, $x_1(u, t) = x_2(u, t)$. Теорема доказана.

§3. Равномерная асимптотика при $t < 0$

При $t < 0$ замена

$$u = |t|^{1/2} w, \quad x = s(-t)^{3/2}$$

сводит решение $u(x, t)$ ОДУ (0.1) к решению $w(s, t)$ ОДУ

$$t^{-4} w''_{ss} = w^3 + w - s. \quad (3.1)$$

Ниже будет построено и обосновано полное асимптотическое разложение при $t \rightarrow -\infty$ этого решения $w(s, t)$, которое будет равномерным по аргументу $s \in \mathbb{R}_+$.

Из теоремы 2.1 следует, что нужное нам решение $w(s, t)$ удовлетворяет условиям

$$w(0, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} w'_s(s, t) = 0, \quad (3.3)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (w(s, t) - f(s)) = 0, \quad (3.4)$$

где $f(s)$ есть единственный вещественный корень кубического уравнения

$$f^3 + f - s = 0. \quad (3.5)$$

Формальное асимптотическое решение (ФАР) задачи (3.1)–(3.4) легко строится в виде ряда

$$w_-(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-4k} w_k(s), \quad (3.6)$$

главный член которого

$$w_0(s) = f(s) \quad (3.7)$$

есть корень кубического уравнения (3.5), а остальные выражаются через него из рекуррентной последовательности уравнений, возникающей после подстановки ряда (3.6) в ОДУ (3.1) и приравнивания в результате членов при одинаковых степенях t :

$$\begin{aligned} w_1(s)(3f^2(s) + 1) &= (w_0)''_{ss}, \\ w_k(s)(3f^2(s) + 1) &= (w_{k-1})''_{ss} - \sum_{i_1+i_2+i_3=k, 0 \leq i_j < k} w_{i_1} w_{i_2} w_{i_3}, \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

ЛЕММА 3.1. *Функции $w_k(s)$, определяемые соотношениями (3.7), (3.8), удовлетворяют условиям*

$$w_k(0) = 0 \quad (3.9)$$

и при всех достаточно больших значениях $s > s_$ представляются сходящимися рядами*

$$w_k(s) = s^{(1-8k)/3} \sum_{j=0}^{\infty} c_{jk} s^{-2j/3}. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $w_0(s)$ утверждение леммы следует из кубического уравнения (3.5), а для остальных тривиальным образом доказывается с помощью использования рекуррентных уравнений (3.8) и математической индукции.

ЛЕММА 3.2. *Для всех функций $w_k(s)$ существуют положительные постоянные C_k такие, что при $s \geq 0$ имеют место оценки*

$$|w_k(s)| \leq C_k \frac{s}{(1+s^2)^{(4k+1)/3}}. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из справедливости разложения (3.10) и условия (3.9) следует существование таких положительных констант α_k , β_k и s_k , что при $s \geq s_*$ и $0 \leq s \leq s_k$ соответственно справедливы оценки (3.11), в которых постоянные C_k заменены на константы α_k и на константы β_k . Существование положительной константы γ_k , обеспечивающей после ее подстановки вместо C_k справедливость подобной оценки на компактном интервале $s_k \leq s \leq s_*$, очевидно в силу гладкости обеих частей неравенства (3.11). Полагая теперь $C_k = \max\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\}$, приходим к выводу о справедливости утверждения леммы.

Введем в рассмотрение функции

$$Y_n(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_k(s)}{t^{4k}} - \frac{K_n}{t^{4n}} \frac{s}{(1+s^2)^{(4n+1)/3}},$$

$$Z_n(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_k(s)}{t^{4k}} + \frac{K_n}{t^{4n}} \frac{s}{(1+s^2)^{(4n+1)/3}}.$$

ЛЕММА 3.3. *Функции $Y_n(s, t)$ и $Z_n(s, t)$ удовлетворяют условиям*

$$Y_n(0, t) = Z_n(0, t) = 0, \quad (3.12)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (Y_n(s, t) - f(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} (Z_n(s, t) - f(s)) = 0. \quad (3.13)$$

Для достаточно больших значений $|t|$ и постоянных K_n при всех $s \geq 0$ и $n > 0$ они удовлетворяют неравенствам

$$t^{-4} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial s^2} - Y_n^3 - Y_n + s \geq 0, \quad (3.14)$$

$$t^{-4} \frac{\partial^2 Z_n}{\partial s^2} - Z_n^3 - Z_n + s \leq 0. \quad (3.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость равенств (3.12) и (3.13) очевидным образом следует из соотношений (3.9), (3.10).

Из процесса построения рекуррентной последовательности функций $w_k(s)$ следует, что левая часть (3.14) представляет собой многочлен по степеням t^{-4j}

$$\sum_{j=n}^{3n} \frac{y_j(s)}{t^{4j}}, \quad (3.16)$$

для всех коэффициентов $y_j(s)$ которого существуют положительные постоянные M_j такие, что при $s \geq 0$ справедливы оценки

$$|y_j(s)| \leq M_j \frac{s}{(1+s^2)^{4j/3}}. \quad (3.17)$$

(Их справедливость следует из оценок (3.11).)

При этом главный член суммы (3.16) при $s > 0$ положителен для достаточно больших значений постоянной K_n , так как

$$y_n(s) = K_n \frac{s(3f^2 + 1)}{(1+s^2)^{(4n+1)/3}} + g_n(s),$$

где функции $g_n(s)$, явным образом выражаясь через s и функции $w_k(s)$ с номерами $k < n$, удовлетворяют оценкам

$$g_n(s) \leq M(n) \frac{s}{(1+s^2)^{4n/3}}$$

с не зависящей от K_n постоянной $M(n)$. Из этого факта и из оценок (3.17) для достаточно больших значений $|t|$ сразу же следует справедливость неравенств (3.14). Доказательство неравенства (3.15) совершенно аналогично.

ЛЕММА 3.4. *Для решения ОДУ (3.1), удовлетворяющего (3.2)–(3.4), при всех $s \geq 0$, $n > 0$ и достаточно больших $|t|$ справедливы неравенства*

$$Y_n(s, t) \leq w(s, t) \leq Z_n(s, t). \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вида уравнения (3.1) и из неравенства (3.15) следует, что при $s > 0$ разность $R = Z_n - w$ удовлетворяет неравенству

$$t^{-4} R''_{ss} < RQ(s, t), \quad (3.19)$$

где

$$Q(s, t) = Z_n^2 + Z_n w + w^2 + 1 > 1. \quad (3.20)$$

Кроме того, соотношения (3.2), (3.4), (3.7), (3.9) и (3.10) означают, что для нее выполнены условия

$$R(0) = 0, \quad R(\infty) = 0.$$

Так как неравенства (3.19), (3.20) препятствуют наличию у функции R отрицательного минимума, то из этих условий следует справедливость второй части неравенства (3.18). Так же доказывается и его первая часть.

ТЕОРЕМА 3.1. При $n > 1$ и достаточно большом значении $T_* > 0$ решение задачи (3.1)–(3.4) в квадранте

$$s \geq 0, \quad t \leq -T_*$$

допускает оценки

$$w(s, t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^{-4k} w_k(s) = O\left(t^{-4n} \frac{s}{(1+s^2)^{(4n+1)/3}}\right), \quad (3.21)$$

$$w'_s(s, t) - \sum_{k=0}^{n-2} t^{-4k} w'_k(s) = O\left(t^{-4(n-1)} \frac{1}{(1+s^2)^{4n/3-1}}\right). \quad (3.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценок (3.11) следует, что соотношения (3.21) доказаны в лемме 3.4. А уже из этих соотношений, (3.3), вида ОДУ (3.1), рекуррентной последовательности формул (3.7), (3.8) и очевидных оценок

$$w'_k(s) = O\left(\frac{1}{(1+s^2)^{(4k+1)/3}}\right)$$

выводится справедливость оценок (3.22).

В самом деле,

$$\begin{aligned} w'_s(s, t) &= -t^4 \int_s^\infty (w^3(y, t) - w(y, t) - y) dy \\ &= - \int_s^\infty \left(\sum_{j=0}^{n-2} t^{-4j} (w_j(y, t))''_{yy} + O\left(t^{-4(n-1)} \frac{y}{(1+y^2)^{4n/3}}\right) \right) dy. \end{aligned}$$

Поэтому

$$w'_s(s, t) - \sum_{j=0}^{n-2} t^{-4j} (w_j(s, t))'_s = O\left(t^{-4(n-1)} \frac{1}{(1+s^2)^{4n/3-1}}\right).$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что формальное решение $w_-(s, t)$ действительно является равномерным по s асимптотическим разложением интересующего нас решения задачи (3.1)–(3.4).

§4. Равномерная асимптотика при $t > 0$

При $t > 0$ замена (0.12) переводит функцию $u(x, t)$ в гладкое и монотонное решение уравнения (0.14), которое удовлетворяет условиям

$$v(0, t) = 0, \quad (4.1)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} v'_s(s, t) = 0, \quad (4.2)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (v(s, t) - f(s)) = 0, \quad (4.3)$$

где $f(s)$ есть гладкий и положительный при $s \geq 0$ корень кубического уравнения (0.13). Для $v(s)$ справедливо двойное неравенство

$$0 \leq v(s, t) \leq f(s). \quad (4.4)$$

ФАР уравнения (0.14), формально удовлетворяющее условиям (4.2), (4.3), трудно построить в виде ряда

$$v_+(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-4k} v_k(s), \quad (4.5)$$

главный член которого

$$v_0(s) = f(s) \quad (4.6)$$

есть упомянутый положительный корень кубического уравнения (0.13), а остальные выражаются через него из рекуррентной последовательности уравнений, возникающей в результате подстановки ряда (4.5) в ОДУ (0.14) и приравнивания членов при одинаковых степенях t :

$$\begin{aligned} v_1(s)(3f^2(s) - 1) &= (v_0)''_{ss}, \\ v_k(s)(3f^2(s) - 1) &= (v_{k-1})''_{ss} - \sum_{i_1+i_2+i_3=k, 0 \leq i_j < k} v_{i_1} v_{i_2} v_{i_3}, \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для коэффициентов этого ФАР справедливы следующие три леммы, доказательство которых фактически сводится к повторению рассуждений, использованных при доказательстве лемм 3.1–3.3.

ЛЕММА 4.1. *Функции $v_k(s)$, определяемые соотношениями (4.6), (4.7), при всех достаточно больших значениях s представляются сходящимися рядами*

$$v_k(s) = s^{(1-8k)/3} \sum_{j=0}^{\infty} c_{jk} s^{-2j/3}. \quad (4.8)$$

ЛЕММА 4.2. *Существуют положительные постоянные C_k такие, что при $s \gg 1$ имеют место оценки*

$$|v_k(s)| \leq C_k s^{(1-8k)/3}. \quad (4.9)$$

ЛЕММА 4.3. *Для любых постоянных K_n функции*

$$A_n(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k(s)}{t^{4k}} - \frac{K_n}{t^{4n}} s^{(1-8n)/3}, \quad B_n(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k(s)}{t^{4k}} + \frac{K_n}{t^{4n}} s^{(1-8n)/3}$$

удовлетворяют условиям

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (A_n(s, t) - f(s)) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} (B_n(s, t) - f(s)) = 0. \quad (4.10)$$

Для достаточно больших значений постоянных s_ , K_n , T и при всех $s \geq s_*$ и $t \geq T$ имеют место неравенства*

$$t^{-4} \frac{\partial^2 A_n}{\partial s^2} - A_n^3 + A_n + s \geq 0, \quad t^{-4} \frac{\partial^2 B_n}{\partial s^2} - B_n^3 + B_n + s \leq 0. \quad (4.11)$$

ЛЕММА 4.4. Пусть функция $v(s, t)$ удовлетворяет условиям (4.2), (4.3) и является решением ОДУ (0.14) при всех s , больших некоторой положительной постоянной. Тогда для достаточно больших значений t и постоянных s^* , K_{n-1} оно при $n \geq 1$ и $s \geq s^*$ удовлетворяет двойному неравенству

$$A_{n-1}(s, t) \leq v(s, t) \leq B_{n-1}(s, t). \quad (4.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем левую часть неравенства (4.12). Из вида уравнения (0.14) и первого из неравенств (4.11) следует, что при достаточно больших значениях K_n разность $R = A_n - v$ удовлетворяет неравенству

$$t^{-4} R''_{ss} > RQ(s, t), \quad (4.13)$$

где в силу справедливости соотношений (4.8) функция

$$Q(s, t) = A_n^2 + A_n v + v^2 - 1$$

при s , больших некоторой константы $s^* > 0$, допускает оценку

$$Q(s, t) > 1. \quad (4.14)$$

Кроме того, соотношения (4.2), (4.3) и (4.10) означают, что для R выполнены условия

$$R(\infty) = R'(\infty) = 0. \quad (4.15)$$

Согласно лемме 1.1 из соотношений (4.13)–(4.15) следует неравенство $|R(s, t)| \leq |R(s^*, t)| \exp(t^2(s^* - s))$. Учитывая неравенство (4.4), приходим к выводу о справедливости левой части неравенства (4.12) для достаточно больших значений постоянных K_{n-1} .

Доказательство правой части неравенства (4.12) проводится аналогично вышеприведенному.

Повторение рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 3.1, приводит теперь к заключению об асимптотическом характере формального решения в виде ряда (4.5).

ТЕОРЕМА 4.1. При достаточно больших значениях постоянных T_* и S_* для решения $v(s, t)$ ОДУ (0.14), удовлетворяющего условиям (4.1)–(4.3), в квадрате

$$\Upsilon: \quad s \geq S_*, \quad t > T_*$$

справедливы оценки

$$v(s, t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^{-4k} v_k(s) = O(t^{-4n} s^{(1-8n)/3}),$$

здесь функции $v_k(s)$, определяемые формулами (4.6), (4.7), удовлетворяют оценкам (4.9).

Таким образом, осталось исследовать асимптотику при $t \rightarrow \infty$ на конечном промежутке

$$J: \quad 0 \leq s \leq S_*$$

монотонного решения ОДУ (0.14), которое удовлетворяет начальному условию (4.1) и краевому условию

$$v(S_*, t) = v_*(t). \quad (4.16)$$

Здесь функция $v_*(t)$ при $t \rightarrow \infty$ имеет АР

$$v_*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-4k} v_k(S_*),$$

где $v_k(s)$ заданы формулами (4.6), (4.7).

ФАР краевой задачи (0.14), (4.1), (4.16) получается с использованием методики экспоненциально убывающих пограничных функций [18]. Оно имеет вид суммы

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} t^{-4j} v_j(s) + \sum_{k=0}^{\infty} t^{-2k} \Pi_k(\xi) = v_+(s, t) + \Pi(\xi, t) \quad (4.17)$$

формального решения $v_+(s, t)$ ОДУ (0.14) в виде ряда (4.5) (как следует из рекуррентных соотношений (4.6), (4.7), его коэффициенты $v_k(s)$ являются гладкими при $s \geq 0$ функциями) и зависящего от растянутой переменной $\xi = st^2$ погранслойного ряда, формально устраняющего невязку, вносимую в начальное условие (4.1) рядом $v_+(s, t)$.

Подставляя анзац (4.17) в ОДУ (0.14), получаем, что

$$t^{-4}(v_+(s, t))''_{ss} + (\Pi(\xi, t))''_{\xi\xi} = (v_+(s, t))^3 - v_+(s, t) - s + \Pi h(\xi, t),$$

где $\Pi h(\xi, t)$ есть формальный ряд, получающийся в результате подстановки в выражение

$$\Pi h(\xi, t) = (3v_+^2(\xi t^{-2}, t) - 1)\Pi(\xi, t) + 3v_+(\xi t^{-2}, t)(\Pi(\xi, t))^2 + (\Pi(\xi, t))^3$$

рядов $\Pi(\xi, t)$ и $v_+(\xi t^{-2}, t)$, в последнем из которых все коэффициенты $v_k(\xi t^{-2})$ заменены их рядами Тейлора в точке $\xi = 0$.

Поскольку $v_+(s, t)$ есть формальное решение ОДУ (0.12), то подстановка в задачу (0.14), (4.1) анзаца (4.17) и приравнивание в результате подстановки коэффициентов при одинаковых степенях t дает следующую рекуррентную последовательность задач на коэффициенты $\Pi_k(\xi)$ погранслойного ряда $\Pi(\xi, t)$:

$$(\Pi_0)''_{\xi\xi} = (\Pi_0)^3 + 3(\Pi_0)^2 + 2\Pi_0, \quad \Pi_0(0) = -1, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} L\Pi_1 &\equiv (\Pi_1)''_{\xi\xi} - (3(\Pi_0)^2 + 6(\Pi_0) + 2)\Pi_1 \\ &= P_1(\xi, \Pi_0), \end{aligned} \quad \Pi_1(0) = 0, \quad (4.19)$$

$$L\Pi_2 = P_2(\xi, \Pi_0, \Pi_1), \quad \Pi_2(0) = -v_1(0), \quad (4.20)$$

.....

$$L\Pi_{2n-1} = P_{2n-1}(\xi, \Pi_0, \dots, \Pi_{2n-2}), \quad \Pi_{2n-1}(0) = 0, \quad (4.21)$$

$$L\Pi_{2n} = P_{2n}(\xi, \Pi_0, \dots, \Pi_{2n-1}), \quad \Pi_{2n}(0) = -v_n(0). \quad (4.22)$$

Здесь P_m суть многочлены (индекс m не имеет отношения к степени этих многочленов) своих аргументов, коэффициенты которых зависят лишь от значений в нуле функций $v_k(s)$ и значений в нуле их производных с индексом $k \leq [m/2]$. При $\xi = 0$ эти многочлены не обращаются тождественно в нуль.

Задачи (4.18)–(4.22) добавляются стандартными для метода экспоненциально убывающих погранфункций условиями:

$$\Pi_k(\infty) = 0, \quad (\Pi_k)'(\infty) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

Решение задачи (4.18), (4.23)

$$\Pi_0(\xi) = -1 + \operatorname{th} \frac{\xi}{\sqrt{2}} \quad (4.24)$$

есть отрицательная при всех конечных ξ функция с положительной производной

$$\Phi(\xi) = (\Pi_0(\xi))'_\xi = \frac{1}{\sqrt{2} (\operatorname{ch}(\xi/\sqrt{2}))^2}. \quad (4.25)$$

ЛЕММА 4.5. *Существуют положительные постоянные M_n и натуральные числа $j(n)$ такие, что модули решений последовательности задач (4.18)–(4.22), удовлетворяющих условиям (4.23), а также модули их первых производных при достаточно больших ξ не превосходят функций*

$$M_n \xi^{j(n)} \exp(-\sqrt{2} \xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 0$ утверждение леммы очевидным образом следует из формул (4.24), (4.25). Далее из вида решений задач (4.19)–(4.22)

$$\Pi_k(\xi) = \Phi(\xi) \left(\Pi_k(0) \sqrt{2} - \int_0^\xi \Phi^{-2}(y) \int_y^\infty \Phi(\sigma) H_k(\sigma) d\sigma dy \right),$$

где $k = 1, 2, \dots$, H_k – правые части ОДУ в задачах (4.18)–(4.22), удовлетворяющих условиям (4.23), утверждение леммы следует по индукции [18].

ТЕОРЕМА 4.2. *Монотонное решение краевой задачи (0.12), (4.1), (4.16) единственно и при $t \rightarrow \infty$ имеет дифференцируемое асимптотическое разложение (4.17).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность доказывается так же, как в теореме 2.2. Обоснование же асимптотики (4.17) произведем, следуя схеме статьи [19], с помощью леммы 1.2.

Фигурирующим в формулировке этой леммы постоянным и функциям в нашем случае отвечают следующие:

$$a = 0, \quad b = S_*, \quad A = 0, \quad B = v(S_*, t), \quad g(s, v) = t^4(v^3 - v - s),$$

$$\beta(s) \equiv \beta_{4n}(s) = V_n(s, t) + t^{-4n} \gamma_n(V_n(s, t))'_s, \quad (4.26)$$

$$\alpha(s) \equiv \alpha_{4n}(s) = V_n(s, t) - t^{-4n} \gamma_n(V_n(s, t))'_s, \quad (4.27)$$

где

$$V_n(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k(s) t^{-4k} + \sum_{j=0}^{2n-1} \Pi_j(\xi) t^{-2j},$$

а γ_n – положительная постоянная.

Для достаточно больших значений γ_n из способа построения функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ выполнение условий 1) и 3) леммы 1.2 следует автоматически (функции $f'(s)$ и $(\Pi_0(\xi))'_\xi$ положительны на интервале J).

Заметим далее, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} t^{-4}(V_n(s, t))''_{ss} - (V_n(s, t))^3 + V_n(s, t) + s &= O(t^{-4n}), \\ t^{-4}(V_n(s, t))'''_{sss} - (3(V_n(s, t))^2 - 1)(V_n(s, t))'_s + 1 &= O(t^{-4n_1(n)}), \end{aligned}$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} n_1(n) = \infty$. Поэтому при $t \rightarrow \infty$ для всех достаточно больших значений натурального n найдутся такие постоянные γ_n , что будет выполнено соотношение

$$\begin{aligned} t^{-4}\beta''_{ss}(s, t) - \beta^3(s, t) + \beta(s, t) + s &= t^{-4n}(\gamma_n(-1 + O(t^{-4n_1(n)})) \\ &+ P(t, \xi, \Pi_0(\xi), \dots, \Pi_{n-1}(\xi), s, v_0(s), \dots, v_{n-1}(s))), \end{aligned} \quad (4.28)$$

где P – ограниченная при $t \rightarrow \infty$ и $0 \leq s \leq S_*$ функция. Поэтому при достаточно больших значениях n положительной постоянной γ_n правая часть равенства (4.28) отрицательна. Таким образом, при достаточно больших значениях n выполняется первая часть условий 3) леммы 1.2, касающаяся верхнего барьера $\beta(s, t)$. Отсюда, очевидно, следует их выполнение и при всех натуральных n . Точно так же показывается выполнение второй части этих условий, касающейся нижнего барьера $\alpha(s, t)$. А следовательно, при всех натуральных n барьеры (4.26), (4.27) и решение $v(s, t)$ краевой задачи (0.12), (4.1), (4.16) в силу леммы 1.2 связаны неравенством (1.7), означающим обоснованность разложения (4.17).

Эти неравенства гарантируют также существование внутри интервала J точки $s_i(t)$, в которой для всех достаточно больших натуральных n имеют место оценки

$$|(\alpha(s, t) - v(s, t))'_s| = O(t^{-4n_2(n)}), \quad |(\beta(s, t) - v(s, t))'_s| = O(t^{-4n_2(n)}),$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} n_2(n) = 0$. Из этого факта, из обоснованности разложения (4.17) и из вида ОДУ (0.14) дифференцируемость (и, как следствие, монотонность соответствующего решения $v(s, t)$) теперь вытекает непосредственно. Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, получена равномерная асимптотика функции $u(x, t)$ при $x^2 + t^2 \rightarrow \infty$:

i) при $|t| \leq T_*$

$$\left| u(x, t) - x^{1/3} \left(1 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j(t) x^{-2j/3} \right) \right| \leq M_n(T_*) x^{(1-2n)/3};$$

ii) при $t < -T^*$

$$\left| u(x, t) - |t|^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |t|^{-4k} w_k(s) \right) \right| \leq A_n(T^*) |t|^{1/2-4n} \frac{s}{(1+s^2)^{(4n+1)/3}};$$

iii) при $t > T_{**}$ и $0 \leq s \leq \infty$

$$\begin{aligned} \left| u(x, t) - t^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k(s) t^{-4k} + \sum_{j=0}^{2n-1} \Pi_j(\xi) t^{-2j} \right) \right| \\ \leq B_n(T_{**}) t^{1/2-4n} ((1+s)^{(1-8n)/3} + |\Pi_{2n}(\xi)|). \end{aligned}$$

Здесь T_* , T^* , T_{**} – произвольные, а $A_n(T^*)$, $B_n(T^{**})$ – конкретные положительные постоянные, $s = x/|t|^{3/2}$, $\xi = xt^{1/2}$, а $w_k(s)$, $v_k(s)$ и $\Pi_k(\xi)$ – конкретные гладкие функции, определенные в §§ 3, 4. Функции $\Pi_k(\xi)$ экспоненциально быстро стремятся к нулю при $\xi \rightarrow \infty$.

Список литературы

1. Ильин А. М., Сулейманов Б. И. О двух специальных функциях, связанных с особенностью сборки // Докл. РАН. 2002. Т. 387. № 2. С. 156–158.
2. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Наука, 1980.
3. De Villiers J. M. A uniform asymptotic expansion of the positive solution of a non-linear Dirichlet problem // Proc. London Math. Soc. (3). 1973. V. 27. P. 701–722.
4. Lighthill M. J. Viscosity effects in sound waves of finite amplitude // Surveys in mechanics / ed. G. K. Batchelor, R. M. Davies. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1956. P. 250–351.
5. Ильин А. М. Задача Коши для одного квазилинейного уравнения с малым параметром // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 3. С. 530–534.
6. Haberman R. Note of the initial formation of shocks // SIAM J. Appl. Math. 1986. V. 6. № 1. P. 16–19.
7. Haberman R. The initial formation and structure of two dimensional diffusive shock waves // Wave Motion. 1986. V. 8. P. 267–276.
8. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1987.
9. Zakharov S. V., P' in A. M. On the influence of small dissipation on the evolution of weak discontinuities // Funct. Differ. Equ. 2001. V. 8. № 3–4. P. 257–271.
10. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1961.
11. Богаевский В. Н., Повзнер В. Н. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. М.: Наука, 1987.
12. Маслов В. П., Мосолов П. П. Уравнения одномерного баротропного газа. М.: Наука, 1990.
13. Файф П., Гринли У. Внутренние переходные слои для эллиптических краевых задач с малым параметром // УМН. 1974. Т. 29. № 4. С. 103–130.
14. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1142–1149.
15. Бутузов В. Ф., Неделько И. В. О неустойчивости многомерных контрастных структур // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 2. С. 222–233.
16. Ильин А. М., Сулейманов Б. И. Коэффициенты внутреннего разложения при исследовании асимптотики некоторых сингулярно возмущенных краевых задач // Дальневост. матем. журн. 2003. Т. 4. № 1. С. 78–85.
17. Васильев Н. И., Клоков Ю. А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1978.
18. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
19. Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач в частных производных // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 719–722.

Челябинский государственный университет;
Институт математики с ВЦ УфНЦ, Уфа
E-mail: iam@csu.go.ru, ilam@go.ru;
bis@imat.rb.ru

Поступила в редакцию
20.05.2004