Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец, Н. Н. Тарханов, О голоморфной формуле Лефшеца в строго псевдовыпуклых областях на комплексных многообразиях, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 12, 57–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm865>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 02:31:25

УДК 517.55

А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец, Н. Н. Тарханов

**О голоморфной формуле Лефшеца
в строго псевдовыпуклых областях
на комплексных многообразиях**

Классическая формула Лефшеца выражает число неподвижных точек непрерывного отображения $f: M \rightarrow M$ в терминах преобразования, индуцированного f на когомологиях M . В 1966 г. Атья и Ботт расширили эту формулу на эллиптические комплексы над компактным замкнутым многообразием. В частности, они получили голоморфную формулу Лефшеца для компактных комплексных многообразий без границы. Бреннер и Шубин (1981, 1991) распространили теорию Атья и Ботта на компактные многообразия с границей. На компактных комплексных многообразиях с границей комплекс Дольбо не эллиптический и, следовательно, теория Атья и Ботта не применима. Обходя трудности, связанные с граничным поведением когомологий Дольбо, Донелли и Фефферман (1986) получили формулу для числа неподвижных точек для бергмановой метрики. Цель статьи – дать голоморфную формулу Лефшеца на относительно компактных строго псевдовыпуклых областях на комплексных многообразиях X с гладкой границей, т.е. определить полное число Лефшеца для голоморфного эндоморфизма f^* комплекса Дольбо и вычислить его в терминах локальных инвариантов неподвижных точек отображения f .

Библиография: 15 названий.

Введение

Если M есть замкнутое многообразие и $f: M \rightarrow M$ – непрерывное отображение, то число Лефшеца f определяется формулой

$$L(f) = \sum_i (-1)^i \operatorname{tr}(Hf)_i,$$

где $(Hf)_i$ обозначает индуцированный эндоморфизм в когомологиях с действительными коэффициентами $H^i(M, \mathbb{R})$ и tr – след. В 1926 г. С. Лефшец опубликовал свою знаменитую формулу неподвижных точек [1], выражающую эту глобальную характеристику f в случае, когда все неподвижные точки f изолированы, как сумму локальных индексов $\mu(p)$ относительно этих неподвижных точек.

В [2] М. Ф. Атья и Р. Ботт установили аналог формулы Лефшеца для геометрических эндоморфизмов эллиптических комплексов над гладкими компактными замкнутыми многообразиями M .

Работа первого автора выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1212-2003.1), работа второго автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 02-01-00167).

В [3], [4] А. В. Бреннер и М. А. Шубин доказали аналог формулы Лефшеца для эллиптических комплексов на компактных гладких многообразиях с границей M , в которых дифференциалы суть операторы из алгебры Буте де Монвиля.

В частном случае формулу Лефшеца можно применить к комплексу Дольбо и получить *голоморфную формулу Лефшеца*. В самом начале 80-х годов М. А. Шубин поставил задачу о распространении теории неподвижных точек на компактные комплексные многообразия с границей. Заметим, что результаты [3], [4] не применимы к комплексу Дольбо на комплексных многообразиях с границей, поскольку этот комплекс не эллиптичен. Хотя когомологии комплекса Дольбо конечномерны в ненулевых размерностях для строго псевдовыпуклых многообразий, нулевые когомологии бесконечномерны. Это одна из основных трудностей при определении числа Лефшеца на комплексных многообразиях с границей. В 80-е годы данной проблемой интенсивно занимался А. В. Бреннер. Он также изучал теорию неподвижных точек для касательного комплекса Коши–Римана. Однако он не смог довести до конца эту деятельность [5].

Цель нашей статьи – получить формулу Лефшеца для комплекса Дольбо в компактных строго псевдовыпуклых областях с гладкой границей на комплексных многообразиях. Наш подход совершенно отличен от подхода работ [3]–[5]. Вместо него мы используем точные интегральные формулы для числа Лефшеца, предложенные в [6]. Для строго выпуклых областей в $\mathbb{C}^n$ этот подход был осуществлен авторами в [7].

§ 1. Локальные ядра

В этом параграфе кратко напомним конструкцию локального фундаментального решения для комплекса Дольбо в строго выпуклых областях в $\mathbb{C}^n$.

Пусть $\mathcal{D}$ есть ограниченная строго выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ с границей $\partial\mathcal{D}$ класса C^∞ . Будем считать, что данная область задается в виде

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\},$$

где ρ – вещественнозначная функция в $\mathbb{C}^n$ класса C^∞ , удовлетворяющая условию $\nabla\rho \neq 0$ на $\partial\mathcal{D}$.

Положим

$$P(\zeta) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_1}, \dots, \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_n} \right)$$

и определим

$$\Phi(z, \zeta) = \langle P(\zeta), \zeta - z \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_j} (\zeta_j - z_j)$$

для $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Поскольку $\mathcal{D}$ строго выпукла, то функция $\Phi(z, \zeta)$ не обращается в 0 для всех $\zeta \in \partial\mathcal{D}$ и $z \in \overline{\mathcal{D}} \setminus \{\zeta\}$.

Для заданной гладкой вектор-функции $\eta = \eta(z, \zeta, \lambda)$ переменных $(z, \zeta, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ введем дифференциальную форму Лере

$$\omega'(\eta) = \sum_{j=1}^n (-1)^j \eta_j d\eta[j],$$

где $d\eta[j]$ есть внешнее произведение всех дифференциалов $d\eta_1, \dots, d\eta_n$, кроме $d\eta_j$. Легко проверить, что

$$\omega'(\eta) \wedge d\zeta \wedge dz = \left(\sum_{q=1}^n \omega'_q(\eta) \right) \wedge d\zeta \wedge dz,$$

где $\omega'_q(\eta)$ является дифференциальной формой степени $n - q - 1$ по $d\bar{\zeta}_1, \dots, d\bar{\zeta}_n$ и $d\lambda$ и степени q по $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$.

Обозначим через $\mathcal{E}^q(\bar{\mathcal{D}})$ пространство всех C^∞ -дифференциальных форм бистепени $(0, q)$ в замыкании области $\mathcal{D}$. Если $u \in \mathcal{E}^q(\bar{\mathcal{D}})$, то определим

$$(T_q u)(z) = (-1)^q \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\mathcal{D}} u(\zeta) \wedge \omega'_{q-1} \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge d\zeta,$$

$$(L_q u)(z) = (-1)^q \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial\mathcal{D} \times [0,1]} u(\zeta) \wedge \omega'_{q-1} \left((1-\lambda) \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} + \lambda \frac{P(\zeta)}{\Phi(z, \zeta)} \right) \wedge d\zeta$$

для $z \in \mathcal{D}$.

Заметим, что $T_0 u \equiv 0$ и $L_0 u \equiv L_n u \equiv 0$. Операторы T_q и L_q (как известно) отображают $\mathcal{E}^q(\bar{\mathcal{D}})$ непрерывно в $\mathcal{E}^{q-1}(\bar{\mathcal{D}})$.

Введем еще два интегральных оператора, которые непрерывно отображают $\mathcal{E}^q(\partial\mathcal{D})$ в $\mathcal{E}^q(\bar{\mathcal{D}})$, а именно

$$(M_q u)(z) = (-1)^q \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial\mathcal{D}} u(\zeta) \wedge \omega'_q \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge d\zeta,$$

$$(F_q u)(z) = (-1)^q \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial\mathcal{D}} u(\zeta) \wedge \omega'_q \left(\frac{P(\zeta)}{\Phi(z, \zeta)} \right) \wedge d\zeta,$$

если $z \in \mathcal{D}$.

При $q = 0$ первый из них есть в точности интеграл Бохнера–Мартинелли, а второй обычно называют интегралом Коши–Фанташье. Поскольку векторное поле $P(\zeta)/\Phi(z, \zeta)$ голоморфно по $z \in \mathcal{D}$, то операторы F_q равны нулю при $q > 0$.

Обозначим $P_q = T_q + L_q$, если $1 \leq q \leq n$, $P_q = 0$, если $q = 0$ или $q = n + 1$.

Эти операторы образуют формулу гомотопии Лере–Кошелямана (ср. [8; § 8]).

ЛЕММА 1.1. *Каждая дифференциальная форма $u \in \mathcal{E}^q(\bar{\mathcal{D}})$, $q \geq 0$, представляется в области $\mathcal{D}$ формулой*

$$u = F_q u + P_{q+1}(\bar{\partial}u) + \bar{\partial}(P_q u). \quad (1.1)$$

Другими словами, лемма 1.1 говорит о том, что операторы $\{P_q\}$ дают фундаментальное решение для положительных значений q в комплексе Дольбо для строго выпуклых областей $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Кошелямана (см., например, [9; гл. 1])

$$u = M_q u + T_{q+1}(\bar{\partial}u) + \bar{\partial}(T_q u)$$

в $\mathcal{D}$. С другой стороны, тождество (см. [8; § 8])

$$(\bar{\partial}_\zeta + d_\lambda)\omega'_q(\eta) + \bar{\partial}_z \omega'_{q-1}(\eta) = 0 \quad (1.2)$$

влечет

$$M_q u - F_q u = L_{q+1}(\bar{\partial}u) + \bar{\partial}(L_q u)$$

в области $\mathcal{D}$. Комбинируя эти два равенства, приходим к нужной формуле (1.1).

§ 2. Вспомогательный комплекс Дольбо

Везде в дальнейшем будем считать, что $M = \overline{\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D}$ есть строго псевдоголomorphic относительно компактная область в комплексном многообразии X , $n > 1$, с границей класса C^∞ . Это означает что $\mathcal{D}$ имеет вид: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$, где ρ есть гладкая (класса C^∞) вещественнозначная функция на X , строго плюрисубгармоническая в окрестности ∂D , и градиент ρ не равен нулю на $\partial \mathcal{D}$.

Рассмотрим комплекс Дольбо на $\overline{\mathcal{D}}$

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^0(\overline{\mathcal{D}}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^1(\overline{\mathcal{D}}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^n(\overline{\mathcal{D}}) \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

где пространство $\mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$ определено в §1. Хорошо известно, что когомологии $H^q(\mathcal{E}^\bullet(\overline{\mathcal{D}}))$ из (2.1) конечномерны для каждого $q > 0$ (см., например, [8; теорема 8.12]). Когомологии $H^q(\mathcal{E}^\bullet(\overline{\mathcal{D}}))$ для $q = 0$ являются бесконечномерными. Они совпадают с пространством $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$ всех C^∞ -функций на $\overline{\mathcal{D}}$, которые голоморфны в области $\mathcal{D}$.

В дальнейшем нам понадобится также вспомогательный комплекс Дольбо

$$0 \rightarrow \mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D}) \xrightarrow{\iota} \mathcal{E}^0(\overline{\mathcal{D}}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^1(\overline{\mathcal{D}}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^n(\overline{\mathcal{D}}) \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

где ι есть оператор вложения. Когомологии (2.2) для каждого $q \geq 1$ равны соответствующим когомологиям комплекса (2.1). С другой стороны, когомологии (2.2) для $q = -1$ и $q = 0$ тривиальны. Следовательно, комплекс (2.2) является фредгольмовым (см., например, [10; § 19.1]) в отличие от комплекса (2.1).

Рассмотрим голоморфное отображение $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, которое продолжается как C^∞ -отображение на $\overline{\mathcal{D}}$. Если, в частности, f собственное, то оно автоматически продолжается как C^∞ -отображение на $\overline{\mathcal{D}}$ (см. [11; гл. 2, теорема 11]). В дальнейшем предположим, что f имеет только изолированные неподвижные точки $f(z) = z$ на $\overline{\mathcal{D}}$. Тогда число этих точек на $\overline{\mathcal{D}}$ конечно.

Отображение f индуцирует эндоморфизм $f^* = \{f_q^*\}$, $q = -1, 0, \dots, n$, комплекса (2.2):

$$f_q^*: \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}}),$$

где f_q^* есть оператор прообраза на дифференциальных формах бистепени $(0, q)$ отображения $f: u(z) \mapsto f_q^*(u)(z) = u(f(z))$. Тогда $\{f_q^*\}$ образует последовательность линейных ограниченных операторов на $\mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$, коммутирующих с оператором $\bar{\partial}$.

Так как f голоморфно, то f_0^* сохраняет также пространство $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$. На когомологиях эти операторы индуцируют эндоморфизмы $(Hf^*)_q$ групп когомологий комплекса (2.2). Поскольку группы когомологий комплекса (2.2) конечномерны для всех $q = -1, 0, \dots, n$, то определены следы операторов $(Hf^*)_q$ для всех q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Числом Лефшеца вспомогательного комплекса (2.2) назовем

$$L_P(f^*) = \sum_{q=-1}^n (-1)^q \operatorname{tr}(Hf^*)_q = \sum_{q=1}^n (-1)^q \operatorname{tr}(Hf^*)_q.$$

Здесь $\operatorname{tr}(Hf^*)_q$ есть след эндоморфизма $(Hf^*)_q$ на когомологиях (2.2) в q -м шаге. Следы $\operatorname{tr}(Hf^*)_q$ тривиальны для $q = -1$ и $q = 0$. Следовательно, $L_P(f^*)$ может быть назван частным числом Лефшеца эндоморфизма f^* комплекса (2.1).

Оператор $u \mapsto f^*u$ является также эндоморфизмом комплекса Дольбо (2.1). Однако нет канонического пути введения *полного числа Лефшеца* $L_t(f^*)$ для эндоморфизма (2.1), поскольку когомологии $H^0(\mathcal{E}^\cdot(\overline{\mathcal{D}}))$ бесконечномерны, а оператор Hf_0^* не является, вообще говоря, ядерным оператором. Поэтому след $(Hf^*)_0$ на $H^0(\mathcal{E}^\cdot(\overline{\mathcal{D}}))$ требует подходящей регуляризации. Цель статьи – определить полное число Лефшеца для эндоморфизма f^* комплекса Дольбо и вычислить его в терминах локальных инвариантов неподвижных точек отображения f .

§3. Построение глобальных интегральных операторов

В этом параграфе строится “грубый” параметрикс вспомогательного комплекса Дольбо с помощью склейки локальных ядер, определенных в §1.

Для каждой точки $p \in \partial\mathcal{D}$ существует окрестность U этой точки p в X с локальными координатами $h: U \rightarrow \mathbb{C}^n$ такая, что

$$h(\mathcal{D} \cap U) = \{z \in h(U) : \rho(z) < 0\}, \quad (3.1)$$

где ρ – гладкая вещественнозначная функция с положительно определенным вторым дифференциалом в $h(U)$ (см., например, [12; п. 15.5]). Другими словами, образ $\mathcal{D} \cap U$ при отображении h является строго выпуклым на части границы $h(\partial\mathcal{D} \cap U)$. Если $p \in \mathcal{D}$, то выбор координат в U не имеет особого значения. В дальнейшем будем отождествлять такую окрестность U с ее образом в $\mathbb{C}^n$.

Выберем конечное покрытие $\mathcal{U} = \{U_\nu\}$ замыкания $\overline{\mathcal{D}}$ координатными окрестностями, удовлетворяющее условию (3.1), так, что каждая окрестность U_ν содержит не более одной неподвижной точки отображения f . Можно предполагать без ограничения общности, что неподвижные точки f принадлежат первым N окрестностям покрытия $\mathcal{U}$, т.е. $p_\nu \in U_\nu$ для $\nu = 1, \dots, N$.

Выберем подчиненное $\mathcal{U}$ разбиение единицы $\{\varphi_\nu\}$ на $\overline{\mathcal{D}}$, удовлетворяющее двум условиям:

- 1) $\text{supp } \varphi_\nu \subset U_\nu$ для каждого ν ;
- 2) $\varphi_\nu \equiv 1$ в окрестности $V_\nu \subset U_\nu$ точки p_ν для всех $\nu = 1, \dots, N$.

Поскольку f непрерывно, то для любой окрестности V_ν точки $p_\nu = f(p_\nu)$ существует окрестность W_ν точки p_ν , для которой $W_\nu \subset U_\nu$ и $f(W_\nu) \subset V_\nu$, где $\nu = 1, \dots, N$.

Выберем другую систему функций $\psi_\nu \in C_{\text{comp}}^\infty(U_\nu)$ со свойствами:

- 1) $\psi_\nu \equiv 1$ на множестве $(\text{supp } \varphi_\nu) \cup W_\nu$ для каждого $\nu = 1, \dots, N$;
- 2) $\psi_\nu \equiv 1$ на множестве $\text{supp } \varphi_\nu$ для всех $\nu > N$.

В каждой координатной окрестности U_ν построим локальные интегральные операторы $T_{q,\nu}$, $L_{q,\nu}$, $M_{q,\nu}$ и $F_{q,\nu}$, которые входят в формулу Лере–Кошпельмана (1.1). Определим глобальные операторы T_q , L_q , M_q и F_q формулами

$$\begin{aligned} T_q &= \sum_\nu \varphi_\nu T_{q,\nu} \psi_\nu, & M_q &= \sum_\nu \varphi_\nu M_{q,\nu} \psi_\nu, \\ L_q &= \sum_\nu \varphi_\nu L_{q,\nu} \psi_\nu, & F_q &= \sum_\nu \varphi_\nu F_{q,\nu} \psi_\nu \end{aligned}$$

и положим $P_q = T_q + L_q$.

ЛЕММА 3.1. *Определенные выше операторы F_0 и P_q удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} F_0 u &= u - S_{-1} u, & u &\in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D}), \\ F_0 u + P_1 \bar{\partial} u &= u - S_0 u, & u &\in \mathcal{E}^0(\overline{\mathcal{D}}), \\ \bar{\partial} P_q u + P_{q+1} \bar{\partial} u &= u - S_q u, & u &\in \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}}), \quad q = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $S_{-1} u = S_0(\iota u)$ и

$$S_q u = \sum_{\nu} (-\bar{\partial} \varphi_{\nu} \wedge P_{q,\nu}(\psi_{\nu} u) + \varphi_{\nu} P_{q+1,\nu}(\bar{\partial} \psi_{\nu} \wedge u)), \quad q = 0, 1, \dots, n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in \mathcal{E}^0(\overline{\mathcal{D}})$. По формуле (1.1) получаем

$$\varphi_{\nu} F_{0,\nu}(\psi_{\nu} u) + \varphi_{\nu} P_{1,\nu} \bar{\partial}(\psi_{\nu} u) = \varphi_{\nu} \psi_{\nu} u$$

для каждого ν . Суммируя по ν , имеем

$$\sum_{\nu} \varphi_{\nu} F_{0,\nu}(\psi_{\nu} u) + \sum_{\nu} \varphi_{\nu} P_{1,\nu}(\psi_{\nu} \bar{\partial} u) = u - \sum_{\nu} \varphi_{\nu} P_{1,\nu}(\bar{\partial} \psi_{\nu} \cdot u),$$

что дает второе равенство в (3.2).

Применяя эту формулу к ιu , для $u \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$ получаем первое равенство в (3.2).

Если $u \in \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$, где $q > 0$, то формула (1.1) дает

$$\varphi_{\nu} \bar{\partial} P_{q,\nu}(\psi_{\nu} u) + \varphi_{\nu} P_{q+1,\nu} \bar{\partial}(\psi_{\nu} u) = \varphi_{\nu} \psi_{\nu} u$$

для каждого ν . Дифференцируя $\psi_{\nu} u$ и суммируя по ν , получаем последнее равенство в (3.2).

Остаточные члены S_q в (3.2) улучшают гладкость форм u в соответствующих функциональных пространствах. В частности, они являются компактными операторами в соболевских пространствах дифференциальных форм на $\overline{\mathcal{D}}$.

Свойство S_q , которое является основным при его применении в настоящей статье, состоит в том факте, что ядра K_{S_q} операторов S_q являются гладкими в окрестности графика $\Gamma_f = \{(\zeta, f(\zeta)) \in \overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}}\}$ отображения f .

Чтобы показать это, достаточно доказать, что ядро K_{S_q} является гладким (класса C^{∞}) в окрестности части графика Γ_f , лежащей в любом произведении $(\overline{\mathcal{D}} \cap U_{\nu}) \times (\overline{\mathcal{D}} \cap U_{\mu})$. Поскольку все сингулярности ядер K_{S_q} лежат на диагонали $\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}}$ и U_{ν} содержит не более одной неподвижной точки отображения f , то ядро K_{S_q} является гладким в любой части Γ_f , лежащей в произведении $(\overline{\mathcal{D}} \cap U_{\nu}) \times (\overline{\mathcal{D}} \cap U_{\mu})$ при $\mu \neq \nu$. Рассмотрим случай $\mu = \nu$. Для $\nu \leq N$ функция φ_{ν} была выбрана таким образом, что $\varphi_{\nu}(f(\zeta)) \equiv 1$ в окрестности W_{ν} точки p_{ν} . Следовательно, $f^*(\bar{\partial} \varphi_{\nu}) = \bar{\partial}(f^* \varphi_{\nu})$ равна нулю в W_{ν} . Более того, поскольку $\psi_{\nu} \equiv 1$ на множестве $(\text{supp } \varphi_{\nu}) \cup W_{\nu}$, то $\bar{\partial} \psi_{\nu}(\zeta) = 0$ для всех $\zeta \in W_{\nu}$. Отсюда следует, что ядро K_{S_q} гладкое вблизи части Γ_f , лежащей в произведении $(\overline{\mathcal{D}} \cap U_{\nu}) \times (\overline{\mathcal{D}} \cap U_{\nu})$ при $\nu \leq N$.

С другой стороны, если $\nu > N$, то f не имеет неподвижных точек в U_{ν} , и поэтому часть графика Γ_f , лежащего в $(\overline{\mathcal{D}} \cap U_{\nu}) \times (\overline{\mathcal{D}} \cap U_{\nu})$, не пересекается с диагональю $\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}}$. Поэтому K_{S_q} является гладким вблизи любой части графика Γ_f , лежащей в произведении $(\overline{\mathcal{D}} \cap U_{\nu}) \times (\overline{\mathcal{D}} \cap U_{\nu})$ при $\nu > N$. Это дает нужное заключение.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Операторы S_q действуют как отображения $\mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}}) \rightarrow \mathcal{E}'^q(\overline{\mathcal{D}})$. По теореме Шварца о ядре S_q могут быть отождествлены с их ядрами $K_{S_q} \in \mathcal{E}'^q(\overline{\mathcal{D}}) \hat{\otimes} \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})'$. Последнее тензорное произведение топологически изоморфно пространству потоков на $X \times X$ бистепени $(0, q)$ по z и бистепени $(n, n - q)$ по ζ с носителями в $\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}}$. Фактически S_q разлагается в сумму двух операторов

$$\begin{aligned} S_q^{(T)} u &= \sum_{\nu} (-\bar{\partial} \varphi_{\nu} \wedge T_{q, \nu}(\psi_{\nu} u) + \varphi_{\nu} T_{q+1, \nu}(\bar{\partial} \psi_{\nu} \wedge u)), \\ S_q^{(L)} u &= \sum_{\nu} (-\bar{\partial} \varphi_{\nu} \wedge L_{q, \nu}(\psi_{\nu} u) + \varphi_{\nu} L_{q+1, \nu}(\bar{\partial} \psi_{\nu} \wedge u)). \end{aligned}$$

§ 4. Параметрикс вспомогательного комплекса

Хотя остатки S_q являются “малыми” операторами, семейство $F_0, P_1, \dots, P_n$ в лемме 3.1 не образует параметрикс вспомогательного комплекса Дольбо (2.2), поскольку F_0 не отображает $\mathcal{E}^0(\overline{\mathcal{D}})$ в $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$. Чтобы построить правильный параметрикс, нам нужно подправить отображение F_0 .

Для этого мы рассмотрим проекцию Π пространства $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}})$ на его подпространство, состоящее из голоморфных функций в $\mathcal{D}$. Дополнительно потребуем, чтобы выполнялось равенство $I - \Pi = C\bar{\partial}$ на $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}})$, где I — тождественный оператор, C — компактный оператор из соболевского пространства $W_2^s(\mathcal{D})$ $(0, 1)$ -форм в соболевское пространство $W_2^s(\mathcal{D})$ для достаточно больших s .

Для строго псевдовыпуклых многообразий $\overline{\mathcal{D}}$ существует много способов построения такого оператора Π с данными свойствами: например, проекции Бергмана или Сегё, граничный интегральный оператор, определенный глобальной формулой Коши–Фанташье с голоморфным ядром (см., например, [13]).

Положим $R_0 = \Pi F_0$, тогда получим непрерывное отображение $\mathcal{E}^0(\overline{\mathcal{D}})$ в $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$. Легко увидеть, что

$$\begin{aligned} R_0 \iota u &= u - \Pi S_0 \iota u, & u &\in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D}), \\ \iota R_0 u + P_1 \bar{\partial} u &= u - (S_0 + (I - \Pi) F_0) u, & u &\in \mathcal{E}^0(\overline{\mathcal{D}}), \\ \bar{\partial} P_q u + P_{q+1} \bar{\partial} u &= u - S_q u, & u &\in \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}}), \quad q = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.1)$$

ЛЕММА 4.1. Семейство $R_0, P_1, \dots, P_n$ является параметриksom вспомогательного комплекса Дольбо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что остаточные члены ΠS_0 и $S_0 + (I - \Pi) F_0$ являются компактными операторами в подходящих соболевских пространствах на $\mathcal{D}$.

Сначала покажем, что S_0 есть сглаживающий оператор в том смысле, что он отображает любое соболевское пространство $W_2^s(\mathcal{D})$ с $s > \frac{1}{2}$ в $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}})$. Действительно, по лемме 3.1 получаем, что

$$S_0 u = \sum_{\nu} \varphi_{\nu} P_{1, \nu}(\bar{\partial} \psi_{\nu} \cdot u),$$

$\bar{\partial} \psi_{\nu} = 0$ на носителе φ_{ν} . Поскольку ядро каждого локального оператора $T_{1, \nu}$ является гладким вне диагонали, то очевидно, что ядро оператора $S_0^{(T)}$ гладкое (класса C^{∞}) на произведении $\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}}$.

Поэтому $S_0^{(T)}$ есть сглаживающий оператор в том смысле, что он отображает $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}})'$ в $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}})$.

Похожие аргументы показывают, что $S_0^{(L)}$ отображает любое соболевское пространство $W_2^s(\mathcal{D})$ с $s > \frac{1}{2}$ в $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}})$, что и требовалось.

Поскольку Π является непрерывным отображением на $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}})$, то можно заключить, что ΠS_0 является ядерным оператором на $W_2^s(\mathcal{D})$, если $s > \frac{1}{2}$ (см., например, [14; гл. 16]).

Далее, поскольку ядра локальных операторов $F_{0,\nu}$ голоморфны по внешним переменным z , то получаем

$$(I - \Pi)F_0 u = \sum_{\nu} C(\overline{\partial}\varphi_{\nu} \cdot F_{0,\nu}(\psi_{\nu} u)), \quad (4.2)$$

где $\overline{\partial}\varphi_{\nu} \cdot F_{0,\nu}\psi_{\nu}$ отображает $W_2^s(\mathcal{D})$ непрерывно в пространство $(0, 1)$ -форм класса $W_2^s(\mathcal{D})$, если $s > \frac{1}{2}$ (см. [8; §5.1]).

Так как C есть компактный оператор из пространства $(0, 1)$ -форм класса $W_2^s(\mathcal{D})$ в $W_2^s(\mathcal{D})$ для достаточно больших s , то остаточный оператор $S_0 + (I - \Pi)F_0$ является компактным на таких пространствах.

Приведенное выше доказательство делает очевидным тот факт, что ядра операторов ΠS_0 и $S_0 + (I - \Pi)F_0$ являются гладкими в некоторой окрестности графика отображения f . Чтобы увидеть это, достаточно скомбинировать точную формулу (4.2) с тем фактом, что оператор C псевдолокальный и $\overline{\partial}\varphi_{\nu} \equiv 0$ вблизи любой неподвижной точки отображения f , что следует из выбора разбиения единицы на $\mathcal{D}$.

§ 5. Вспомогательные формулы для числа Лефшеца

Обозначим

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \Pi S_0 \iota, \\ E_0 &= S_0 + (I - \Pi)F_0, \\ E_q &= S_q, \quad q = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Формулы (4.1) показывают, что набор $E = \{E_q\}$ определяет эндоморфизм вспомогательного комплекса Дольбо.

ЛЕММА 5.1. *Композиция $f^* \circ E$ есть эндоморфизм вспомогательного комплекса Дольбо и*

$$L_p(f^*) = L_p(f^* \circ E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя эндоморфизм f^* к обеим сторонам (4.1), получаем

$$\begin{aligned} f^* R_0 \iota &= f^* - f^* E_{-1} \quad \text{на } \mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D}), \\ \iota f^* R_0 + f^* P_1 \overline{\partial} &= f^* - f^* E_0 \quad \text{на } \mathcal{E}^0(\overline{\mathcal{D}}), \\ \overline{\partial} f^* P_q + f^* P_{q+1} \overline{\partial} &= f^* - f^* E_q \quad \text{на } \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}}), \quad q = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Поскольку f^*R_0 отображает $\mathcal{E}^0(\overline{\mathcal{D}})$ в $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$ и f^*P_q отображает $\mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$ в $\mathcal{E}^{q-1}(\overline{\mathcal{D}})$, $q > 0$, то f^* и $f^* \circ E$ являются гомотопными эндоморфизмами вспомогательного комплекса Дольбо. Поэтому они индуцируют одинаковые эндоморфизмы на группах когомологий, т.е. $Hf^* = H(f^* \circ E)$.

Как отмечалось, ядра отображений E_q гладкие в окрестности графика отображения f . Отсюда следует, что операторы

$$f^* \circ E_q(u)(z) = \langle K_{E_q}(f(z), \cdot), u \rangle$$

являются ядерными операторами (см., например, [14; гл. 16]).

ЛЕММА 5.2. Пусть E – эндоморфизм вспомогательного комплекса Дольбо, определенный выше. Тогда

$$L_p(f^*) = \sum_{q=-1}^n (-1)^q \operatorname{tr} f^* \circ E_q. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5.1 следует, что $L_p(f^*) = L_p(f^* \circ E)$. Остается доказать обобщенное тождество Эйлера для эндоморфизма $f^* \circ E$. Для этого мы используем теорему 19.1.15 из [10]. А именно, рассмотрим гильбертовы пополнения $W_2^{s,q}(\mathcal{D})$, $s \geq 1$, пространств $\mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$. Операторы $f^* \circ E_q$ продолжаются по непрерывности до отображений $W_2^{s,q}(\mathcal{D})$. Эти продолжения, полученные данным путем, являются ядерными операторами, и их следы не зависят от s .

Поскольку вспомогательный комплекс Дольбо имеет параметрикс (см. лемму 4.1 и равенства (4.1)), то известным способом проверяется, что когомологии комплекса (2.2) изоморфны когомологиям вспомогательного комплекса Дольбо, вычисленным для гильбертовых пространств $W_2^{s,q}(\mathcal{D})$. Применяя теорему 19.1.15 из [10], устанавливаем, что обобщенная формула Эйлера (5.2) справедлива.

§ 6. Регуляризация следа оператора f^* на нулевой группе когомологий

Обозначим через $K_{T_q}(z, \zeta)$, $K_{S_q}(z, \zeta)$, $K_{L_q}(z, \zeta)$ и $K_{F_0}(z, \zeta)$ ядра операторов T_q , S_q , L_q и F_0 соответственно.

Пусть Δ – диагональное отображение $\overline{\mathcal{D}} \rightarrow \overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}}$, т.е. $\Delta(z) = (z, z)$. Для заданной гладкой $2n$ -формы K на $\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}}$ прообраз Δ^*K означает сужение K на $\overline{\mathcal{D}}$, т.е. $(\Delta^*K)(\zeta, z) = K(z, z)$.

В случае компактного многообразия с границей когомологии комплекса Дольбо для нулевого шага имеют бесконечную размерность. В действительности они совпадают с $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$. Для определения следа оператора f^* на $H^0(M, \mathcal{O})$ нужно расширить это понятие. Однако в некоторых случаях сам этот оператор является ядерным оператором.

ЛЕММА 6.1. Предположим, что f является C^∞ -отображением $\overline{\mathcal{D}}$, голоморфным в $\mathcal{D}$ и таким, что $f(\overline{\mathcal{D}}) \subset \mathcal{D}$. Тогда f^* является ядерным оператором в каждом соболевском пространстве $W_2^s(\mathcal{D}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$, $s > \frac{1}{2}$, и

$$\operatorname{tr} f^* = \int_{\partial \mathcal{D}} \Delta^*(f \times 1)^* K_{HF_0} + \left(\int_{\partial \mathcal{D}} \Delta^*(f \times 1)^* K_{HS_0^{(L)}} + \int_{\mathcal{D}} \Delta^*(f \times 1)^* K_{HS_0^{(T)}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $s \geq 0$ и любой области $U \Subset \mathcal{D}$ с гладкой границей существует константа $c(s, U)$ такая, что $\|u\|_{W_2^s(U)} \leq c(s, U) \sup_{\partial \mathcal{D}} |u|$ для каждой функции u , голоморфной в $\mathcal{D}$ и непрерывной на $\overline{\mathcal{D}}$.

Поскольку $f(\overline{\mathcal{D}})$ компактно в $\mathcal{D}$, то можно найти область $U \Subset \mathcal{D}$ с C^∞ -границей, которая содержит $f(\overline{\mathcal{D}})$. Отсюда следует, что

$$\|f^* u\|_{W_2^s(D)} \leq c(s, U) \sup_{\partial \mathcal{D}} |u|$$

для всех функций $u \in W_2^s(\mathcal{D})$, голоморфных в $\mathcal{D}$. Следовательно, f^* разлагается в композицию ограниченного оператора и оператора вложения, который является ядерным,

$$W_2^1(\mathcal{D}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D}) \xrightarrow{f^*} W_2^{n+1}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D}) \hookrightarrow W_2^1(\mathcal{D}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D}),$$

и тогда сам f^* является ядерным оператором (см., например, [14; гл. 16]).

Для вычисления следа оператора f^* на $W_2^1(\mathcal{D}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$ воспользуемся тем, что $W_2^1(\mathcal{D}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Более точно, рассмотрим полную ортонормальную систему функций $\{e_j\}_{j=1,2,\dots}$ в пространстве $W_2^1(\mathcal{D}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$. Для $(z, \zeta) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ рассмотрим ряд

$$Q(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{e_j(z)} \otimes e_j(\zeta),$$

который сходится равномерно со всеми производными на компактных подмножествах в $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, так что $Q \in \mathcal{E}(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$. Если $z \in \mathcal{D}$ фиксировано, то этот ряд сходится также по норме пространства $W_2^1(\mathcal{D})$.

По определению следа получаем (см., например, [14; гл. 16])

$$\operatorname{tr} f^* = \sum_{j=1}^{\infty} (f^* e_j, e_j), \quad (6.1)$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в $W_2^1(\mathcal{D})$. Для каждого j представим e_j по формуле (4.1), а именно

$$e_j = R_0 e_j + \Pi S_0^{(L)} e_j + \Pi S_0^{(T)} e_j,$$

тогда $f^* e_j = f^* R_0 e_j + f^* \Pi S_0^{(L)} e_j + f^* \Pi S_0^{(T)} e_j$. Подставляя эти равенства в (6.1), получаем

$$\operatorname{tr} f^* = \sum_{j=1}^{\infty} (f^* R_0 e_j, e_j) + \sum_{j=1}^{\infty} (f^* \Pi S_0^{(L)} e_j, e_j) + \sum_{j=1}^{\infty} (f^* \Pi S_0^{(T)} e_j, e_j).$$

Вычислим след только первого оператора, стоящего справа. (Похожие аргументы применимы и к остальным следам.) Запишем

$$(f^* R_0 e_j)(z) = \int_{\partial \mathcal{D}} K_{R_0}(f(z), \zeta) e_j(\zeta),$$

тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (f^* R_0 e_j, e_j) &= \int_{\partial \mathcal{D}} \sum_{j=1}^{\infty} (K_{R_0}(f(z), \zeta), e_j(z))_{W_2^1(\mathcal{D})} e_j(\zeta) \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}} (K_{R_0}(f(z), \zeta), Q(z, \zeta))_{W_2^1(\mathcal{D})}. \end{aligned}$$

Первое равенство следует из того факта, что ряд под знаком интеграла справа сходится по норме в $W_2^{1/2}(\partial \mathcal{D})$, и поэтому можно поменять знак суммы и интеграла.

Для фиксированного $\zeta \in \partial \mathcal{D}$ ядро $K_{R_0}(f(z), \zeta)$ голоморфно в $\mathcal{D}$ и гладкое на $\overline{\mathcal{D}}$. Следовательно,

$$(K_{R_0}(f(z), \zeta), Q(z, \zeta))_{W_2^1(\mathcal{D})} = K_{R_0}(f(\zeta), \zeta) = \Delta^*(f \times 1)^* K_{R_0},$$

что и устанавливает требуемую формулу.

Если отображение f имеет неподвижные точки на границе, то f^* , вообще говоря, не является ядерным оператором в $W_2^s(\mathcal{D}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$. Лемма (6.1) показывает, что можно ввести регуляризованный след f^* на голоморфных функциях следующим естественным образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Под *регуляризованным следом отображения f^* на нулевой группе когомологий комплекса Дольбо $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$* будем понимать выражение

$$\widetilde{\text{tr}}(Hf^*)_0 = \text{p.v.} \int_{\partial \mathcal{D}} \Delta^*(f \times 1)^* K_{\Pi F_0} + \text{tr } f^* \Pi S_0.$$

Как обычно, “p.v.” означает главное значение по Коши особого интеграла. Данный интеграл имеет особенности в неподвижных точках отображения f , лежащих на границе области.

§ 7. Полное число Лефшеца

Теперь можно ввести полное число Лефшеца $L_t(f^*)$ для эндоморфизма f^* комплекса Дольбо следующим образом:

$$L_t(f^*) = \widetilde{\text{tr}}(Hf^*)_0 + L_p(f^*).$$

Рассмотрим следующую дифференциальную форму бистепени $(n, n-1)$, определенную вне множества $\text{Fix}(f, \overline{\mathcal{D}})$ в $\mathcal{D}$:

$$\varphi(T) = \sum_{q=1}^n (-1)^q \Delta^*(f \times 1)^* K_{T_q}. \quad (7.1)$$

(Здесь и в дальнейшем $\text{Fix}(f, G)$ есть множество всех неподвижных точек отображения f , лежащих на множестве G .)

ЛЕММА 7.1. Пусть $\{S_0, \dots, S_n\}$ есть эндоморфизм комплекса Дольбо, определенный в лемме 3.1. Тогда

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \text{tr } f^* S_q^{(T)} = -\text{p.v.} \int_{\mathcal{D}} d\varphi(T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ядро отображения S_q является гладким в окрестности графика f , то композиция $f^* \circ S_q^{(T)}$ есть ядерный оператор в каждом соболевском пространстве $W_2^{s,q}(\overline{\mathcal{D}})$, $s \geq 0$. Отсюда следует, что левая сторона равенства корректно определена и поэтому

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \operatorname{tr} f^* S_q^{(T)} = \int_{\mathcal{D}} \sum_{q=0}^n (-1)^q \Delta^* (f \times 1)^* K_{S_q^{(T)}}. \quad (7.2)$$

По предположению множество $\operatorname{Fix}(f, \overline{\mathcal{D}})$ конечно. Поскольку подынтегральная функция в (7.2) класса $L^1(\mathcal{D})$, то получаем

$$\sum_{q=0}^n (-1)^q \operatorname{tr} f^* S_q^{(T)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D} \setminus U_\varepsilon} \sum_{q=0}^n (-1)^q \Delta^* (f \times 1)^* K_{S_q^{(T)}},$$

где U_ε — множество всех точек $\zeta \in \mathcal{D}$, расстояние от которых до $\operatorname{Fix}(f, \overline{\mathcal{D}})$ меньше чем ε .

Используем равенства (3.2) для нахождения подынтегрального выражения в последнем интеграле. Предположим, что (ζ, z) есть произвольная точка множества $(\mathcal{D} \times \mathcal{D}) \setminus \Delta$. Возьмем дифференциальную форму $u \in \mathcal{E}^q(\overline{\mathcal{D}})$ степени $q \geq 0$, носитель которой лежит в достаточно малом шаре с центром в ζ и равную нулю в окрестности z .

Поскольку особенности K_{T_q} лежат на диагонали Δ , то по формуле Стокса получим

$$\begin{aligned} T_{q+1} \bar{\partial} u + \bar{\partial} T_q u &= \int_{\mathcal{D}} u(\zeta) \wedge (\bar{\partial}'_{\zeta} K_{T_{q+1}}(z, \zeta) + \bar{\partial}_z K_{T_q}(z, \zeta)) \\ &= - \int_{\mathcal{D}} u(\zeta) \wedge K_{S_q^{(T)}}(z, \zeta), \end{aligned}$$

где $\bar{\partial}'_{\zeta} = (-1)^{q-1} \bar{\partial}_{\zeta}$ есть формально сопряженный оператор к $\bar{\partial}$ на формах бистепени $(0, q)$. Отсюда следует, что равенство

$$-K_{S_q^{(T)}} = \bar{\partial}'_{\zeta} K_{T_{q+1}} + \bar{\partial}_z K_{T_q}$$

выполняется на $\mathcal{D} \setminus U_\varepsilon$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{D} \setminus U_\varepsilon} \sum_{q=0}^n (-1)^q \Delta^* (f \times 1)^* K_{S_q^{(T)}} \\ &= - \int_{\mathcal{D} \setminus U_\varepsilon} \sum_{q=1}^n (-1)^q \Delta^* (\bar{\partial}_z (f \times 1)^* K_{T_q} - \bar{\partial}'_{\zeta} (f \times 1)^* K_{T_q}) \\ &= - \int_{\mathcal{D} \setminus U_\varepsilon} \bar{\partial} \left(\sum_{q=1}^n (-1)^q \Delta^* (f \times 1)^* K_{T_q} \right). \end{aligned}$$

Дифференциальная форма в круглых скобках есть в точности $\varphi(T)$. Поскольку эта форма имеет бистепень $(n, n-1)$, то можно заменить $\bar{\partial}$ на полный дифференциал d , что и доказывает лемму.

Конструкция операторов T_q показывает, что в окрестности каждой неподвижной точки f форма $\varphi(T)$ приводится к виду

$$\begin{aligned}\varphi(T) &= \Delta^*(f \times 1)^* \sum_{q=1}^n (-1)^q K_{T_q} \\ &= \Delta^*(f \times 1)^* \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{q=1}^n \omega'_{q-1} \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge d\zeta \\ &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \overline{f(\zeta)}}{|\zeta - f(\zeta)|^2} \right) \wedge d\zeta \\ &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\overline{\zeta_j - f_j(\zeta)}}{|\zeta - f(\zeta)|^{2n}} d\zeta \wedge d(\overline{\zeta - f(\zeta)})[j]\end{aligned}$$

и, таким образом, образует дифференциальную форму (ядро) для неполного логарифмического вычета.

Комбинируя леммы 5.2 и 7.1, получаем интегральную формулу для полного числа Лефшеца, которая отделяет граничный вклад от остальных, а именно

$$L_t(f^*) = \text{p.v.} \int_{\partial \mathcal{D}} \Delta^*(f \times 1)^* K_{F_0} + \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{tr } f^* S_q^{(L)} - \text{p.v.} \int_{\mathcal{D}} d\varphi(T). \quad (7.3)$$

§8. Основная формула для числа Лефшеца

Приведем более глубокую формулу, чем (7.3), удалив остаточные члены $S_q^{(L)}$. Чтобы сделать это, введем глобальную дифференциальную форму бистепени $(n, n-2)$ на $\mathcal{D}$, похожую на (7.1), а именно

$$\varphi(L) = \sum_{q=1}^n (-1)^q \Delta^*(f \times 1)^* K_{L_q}.$$

ТЕОРЕМА 8.1. *Для полного числа Лефшеца комплекса Дольбо (2.1) справедливо интегральное представление*

$$L_t(f^*) = \text{p.v.} \int_{\partial \mathcal{D}} (\varphi(T) - d\varphi(L)) - \text{p.v.} \int_{\mathcal{D}} d\varphi(T). \quad (8.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала перепишем (7.3) следующим образом:

$$\begin{aligned}L_t(f^*) &= \text{p.v.} \int_{\partial \mathcal{D}} (\Delta^*(f \times 1)^* K_{F_0} - \varphi(T)) + \text{p.v.} \int_{\partial \mathcal{D}} \varphi(T) \\ &\quad - \text{p.v.} \int_{\mathcal{D}} d\varphi(T) + \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{tr } f^* S_q^{(L)}.\end{aligned} \quad (8.2)$$

Заметим, что сужение ядра K_{T_q} на границу $\mathcal{D}$ совпадает с $-K_{M_{q-1}}$ для всех q . С другой стороны, ядро K_{F_q} равно нулю при $q > 0$. Поэтому получаем

$$\begin{aligned}\Delta^*(f \times 1)^* K_{F_0} - \varphi(T) &= \Delta^*(f \times 1)^* \left(K_{F_0} - \sum_{q=1}^n (-1)^q K_{T_q} \right) \\ &= \Delta^*(f \times 1)^* \left(K_{F_0} - \sum_{q=1}^n (-1)^{q-1} K_{M_{q-1}} \right) \\ &= -\Delta^*(f \times 1)^* \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q (K_{M_q} - K_{F_q})\end{aligned}$$

вне множества неподвижных точек отображения f , лежащих на границе.

Рассмотрим локальные ядра $K_{M_{q,\nu}}$ и $K_{F_{q,\nu}}$ в достаточно малой окрестности неподвижной точки p_ν .

Разность $K_{M_{q,\nu}} - K_{F_{q,\nu}}$ есть разность двух форм Коши–Фанташье, поэтому является $\bar{\partial}$ -точной.

Найдем эту форму. Используя тождество (1.2)

$$d_\lambda \omega'_q(\eta) + \bar{\partial}_z \omega'_{q-1}(\eta) + \bar{\partial}_\zeta \omega'_q(\eta) = 0,$$

формулу Стокса и голоморфность ядер $F_{q,\nu}$ по z , получаем, что

$$M_{q,\nu} u - F_{q,\nu} u = \bar{\partial}(L_{q,\nu} u) + L_{q+1,\nu}(\bar{\partial} u).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\Delta^*(f \times 1)^* \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q (K_{M_{q,\nu}} - K_{F_{q,\nu}}) &= \Delta^*(f \times 1)^* \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q K_{\bar{\partial} \circ L_{q,\nu} + L_{q+1,\nu} \circ \bar{\partial}} \\ &= \sum_{q=1}^n (-1)^q \Delta^*(f \times 1)^* (\bar{\partial}_z K_{L_{q,\nu}} - \bar{\partial}'_\zeta K_{L_{q,\nu}}) \\ &= \bar{\partial} \left(\sum_{q=1}^n (-1)^q \Delta^*(f \times 1)^* K_{L_{q,\nu}} \right),\end{aligned}$$

что и требовалось.

Вернемся к глобальным ядрам операторов M_q и F_q . Несложные вычисления, использующие конструкцию ядер M_q и F_q , и вышеприведенное равенство для локальных ядер показывают, что

$$\begin{aligned}\Delta^*(f \times 1)^* \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q (K_{M_q} - K_{F_q}) \\ &= \sum_{\nu} \Delta^*(f \times 1)^* (\varphi_\nu \otimes \psi_\nu) \Delta^*(f \times 1)^* \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q (K_{M_{q,\nu}} - K_{F_{q,\nu}}) \\ &= \sum_{\nu} \Delta^*(f \times 1)^* (\varphi_\nu \otimes \psi_\nu) \bar{\partial} \left(\sum_{q=1}^n (-1)^q \Delta^*(f \times 1)^* K_{L_{q,\nu}} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{q=1}^n (-1)^q \sum_{\nu} \Delta^*(f \times 1)^*(\varphi_{\nu} \otimes \psi_{\nu}) \bar{\partial}(\Delta^*(f \times 1)^* K_{L_q, \nu}) \\
&= \bar{\partial} \left(\sum_{q=1}^n (-1)^q \Delta^*(f \times 1)^* K_{L_q} \right) + \sum_{q=0}^n (-1)^q \Delta^*(f \times 1)^* K_{S_q^{(L)}}.
\end{aligned}$$

Подставляя это равенство в (8.2), получаем требуемую формулу (8.1) для полного числа Лефшеца $L_t(f^*)$.

§9. Голоморфная формула Лефшеца

Поскольку дифференциальные формы $\varphi(T)$ и $\varphi(L)$ являются гладкими вне множества неподвижных точек отображения f в $\mathcal{D}$, то из теоремы 8.1 следует (с помощью формулы Стокса) очевидный вывод: число Лефшеца локализуется в окрестности неподвижных точек отображения f .

Если f не имеет неподвижных точек на границе $\mathcal{D}$, то теория Лефшеца для $\overline{\mathcal{D}}$ совпадает с соответствующей теорией для компактных замкнутых многообразий (ср. [2]). Если, более того, f не имеет неподвижных точек во всем $\overline{\mathcal{D}}$, то полное число Лефшеца $L_t(f^*)$ равно нулю.

ТЕОРЕМА 9.1. *Полное число Лефшеца комплекса Дольбо (2.1) дается формулой*

$$L_t(f^*) = \sum_{p \in \text{Fix}(f, \overline{\mathcal{D}})} \mu_i(p) + \sum_{p \in \text{Fix}(f, \partial \mathcal{D})} \mu_b(p),$$

где

$$\begin{aligned}
\mu_i(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(p, \varepsilon) \cap \mathcal{D}} \varphi(T), \\
\mu_b(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial(B(p, \varepsilon) \cap \partial \mathcal{D})} \varphi(L).
\end{aligned}$$

Здесь $B(p, \varepsilon)$ обозначает шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке p . Если ε является достаточно малым, то $B(p, \varepsilon)$ не содержит неподвижных точек f , отличных от p . Числа $\mu_i(p)$ и $\mu_b(p)$ называются *локальными индексами отображения f* (или, что то же, $I - f$) в неподвижных точках p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$U_{\varepsilon} = \left(\bigcup_{p \in \text{Fix}(f, \overline{\mathcal{D}})} B(p, \varepsilon) \right) \cap \mathcal{D}.$$

Используя формулу Стокса, получаем

$$\begin{aligned}
-\text{p.v.} \int_{\mathcal{D}} d\varphi(T) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D} \setminus U_{\varepsilon}} d\varphi(T) \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{D} \setminus U_{\varepsilon}} \varphi(T) + \sum_{p \in \text{Fix}(f, \overline{\mathcal{D}})} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(p, \varepsilon) \cap \mathcal{D}} \varphi(T) \\
&= -\text{p.v.} \int_{\partial \mathcal{D}} \varphi(T) + \sum_{p \in \text{Fix}(f, \overline{\mathcal{D}})} \mu_i(p).
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляется интеграл $\int_{\partial \mathcal{D}} d\varphi(L)$.

Фактически формула Стокса дает

$$\begin{aligned} -\text{p.v.} \int_{\partial \mathcal{D}} d\varphi(L) &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{D} \setminus U_\varepsilon} d\varphi(L) = \sum_{p \in \text{Fix}(f, \partial \mathcal{D})} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial(B(p, \varepsilon) \cap \partial \mathcal{D})} \varphi(L) \\ &= \sum_{p \in \text{Fix}(f, \partial \mathcal{D})} \mu_b(p), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Для завершения доказательства достаточно применить теорему 8.1.

§ 10. Случай простых неподвижных точек

Нам нужно разделить типы простых неподвижных точек f , лежащих на границе. Пусть p – такая точка, т.е. $p \in \partial \mathcal{D}$ и $f(p) = p$. Тогда $df(p)$ индуцирует отображение $d_{\partial \mathcal{D}} f(p)$ множества $T_p \partial \mathcal{D}$ и, следовательно, отображение

$$(df/d_{\partial \mathcal{D}} f)(p): N_p \partial \mathcal{D} \rightarrow N_p \partial \mathcal{D} \quad (10.1)$$

факторпространства $N_p \partial \mathcal{D} = T_p \overline{\mathcal{D}} / T_p \partial \mathcal{D}$.

Последнее можно отождествить с нормальным пространством к границе в точке p . Так как $N_p \partial \mathcal{D}$ одномерное, то (10.1) сводится к умножению на число $q(p) \in \mathbb{R}$. Ясно, что $q(p) \geq 0$, поскольку $\overline{\mathcal{D}}$ сохраняется при отображении f . Более того, если p есть простая неподвижная точка отображения f , то $q(p) \neq 1$.

Простая неподвижная точка $p \in \partial \mathcal{D}$ называется *притягивающей*, если $q(p) < 1$, и *отталкивающей*, если $q(p) > 1$.

Обозначим через $\text{Fix}^{(a)}(f, \partial \mathcal{D})$ множество всех притягивающих граничных неподвижных точек отображения f .

Вычислим локальные индексы $\mu_i(p)$ и $\mu_b(p)$ отображения f для простых неподвижных точек $p \in \overline{\mathcal{D}}$ для строго псевдовыпуклых областей $\mathcal{D} \subset X$.

ЛЕММА 10.1. Пусть $p \in \overline{\mathcal{D}}$ является простой неподвижной точкой f , т.е. $\det_{\mathbb{C}}(E - f'(p)) \neq 0$ (здесь E – единичная матрица размерности n , а $f'(p)$ – матрица Якоби голоморфного отображения f в точке p). Тогда

$$\mu_i(p) = \begin{cases} \frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(E - f'(p))}, & \text{если } p \in \mathcal{D}; \\ \frac{1}{2} \frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(E - f'(p))}, & \text{если } p \in \partial \mathcal{D}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p \in \mathcal{D}$. Сделаем замену переменных в некоторой окрестности точки p по формуле $w = \zeta - f(\zeta)$. Так как p – простая неподвижная

точка отображения f , то эта замена переменных биголоморфна в окрестности p . Поэтому по формуле Бохнера–Мартинелли получаем

$$\begin{aligned}\mu_i(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{(I-f)_* \partial B(p, \varepsilon)} \frac{1}{\det_{\mathbb{C}} w'_\zeta(\zeta(w))} \omega' \left(\frac{\bar{w}}{|w|^2} \right) \wedge dw \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial B(0, \delta)} \frac{1}{\det_{\mathbb{C}} (E - f'(\zeta(w)))} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{\bar{w}_j}{|w|^{2n}} dw \wedge d\bar{w}[j] \\ &= \frac{1}{\det_{\mathbb{C}} (E - f'(p))},\end{aligned}$$

что и требовалось.

Пусть $p \in \partial \mathcal{D}$. Сделаем снова замену переменных $w = \zeta - f(\zeta)$ в окрестности точки p . Получаем

$$\begin{aligned}\mu_i(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{(I-f)_* (\partial B(p, \varepsilon) \cap \mathcal{D})} \det_{\mathbb{C}} \zeta'_w \omega' \left(\frac{\bar{w}}{|w|^2} \right) \wedge dw \\ &= \frac{1}{\det_{\mathbb{C}} (E - f'(p))} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{(I-f)_* (\partial B(p, \varepsilon) \cap \mathcal{D})} \omega' \left(\frac{\bar{w}}{|w|^2} \right) \wedge dw,\end{aligned}$$

где $\det_{\mathbb{C}} \zeta'(w)$ является гладким в окрестности $w = 0$. Голоморфное отображение $w = \zeta - f(\zeta)$ сохраняет ориентацию $\mathbb{C}^n$, поэтому предел в правой части не зависит от того, является ли p притягивающей или отталкивающей. При отображении $I - f$ шар $B(p, \varepsilon)$ искривляется, но данный предел равен соответствующему пределу, если интегрирование ведется по множеству $\partial B(p, \varepsilon) \cap \mathcal{D}$ (см., например, [15; теорема 20.4]). Поэтому этот предел равен $\frac{1}{2}$ (см., например, [15; лемма 2.1]), что и устанавливает формулу.

Заметим, что ядра P_q совпадают с локальными ядрами $P_{q, \nu}$ в окрестности $(p_\nu, p_\nu) \in \overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}}$.

ЛЕММА 10.2. *Если p есть простая неподвижная точка f на $\partial \mathcal{D}$, то*

$$\mu_b(p) = \begin{cases} +\frac{1}{2} \frac{1}{\det_{\mathbb{C}} (E - f'(p))}, & \text{если } p \text{ притягивающая;} \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{\det_{\mathbb{C}} (E - f'(p))}, & \text{если } p \text{ отталкивающая.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В некоторой окрестности U точки $p \in \partial \mathcal{D}$ сделаем замену переменных по формуле $w = \zeta - f(\zeta)$. Без ограничения общности можно предполагать, что гиперповерхность $\partial \mathcal{D} \cap U$ преобразуется к виду

$$(I - f)_* (\partial \mathcal{D} \cap U) = \{w : \varrho(w) < 0\}, \quad (10.2)$$

где $\varrho(w) = |w'|^2 + (\operatorname{Re} w_n)^2 - \operatorname{Im} w_n$ и $w' = (w_1, \dots, w_{n-1})$.

Действительно, как показано в [13] (а также [12; п. 15.5]), в достаточно малой окрестности U точки $z \in \partial \mathcal{D}$ можно выбрать такую систему голоморфных координат w , что с точностью до малых третьего порядка гиперповерхность $\partial \mathcal{D}$ будет задаваться следующим образом:

$$\partial \mathcal{D} \cap U = \{w : |w'|^2 = \operatorname{Im} w_n\},$$

где $w' = (w_1, \dots, w_{n-1})$. Отобразим конформно по последнему переменному верхнюю полуплоскость на множество $\{w_n : \operatorname{Im} w_n > (\operatorname{Re} w_n)^2\}$. Теперь можно считать, что множество $\partial\mathcal{D} \cap U$ задается нулями функции $\varrho(w)$ вида

$$\varrho(w) = |w'|^2 + (\operatorname{Re} w_n)^2 - \operatorname{Im} w_n.$$

Гиперповерхность $\partial B(0, \varepsilon)$ пересекает $(E - f)_*(\partial\mathcal{D} \cap U)$ по $(2n-2)$ -мерной сфере радиуса

$$\delta = \sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \varepsilon^2}}$$

с центром в точке $(w', \operatorname{Re} w_n) = 0$, лежащей на гиперплоскости $\operatorname{Im} w_n = \delta^2$. Для упрощения вычислений заменим $\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^4}$ на ε , чтобы свести пересечение к $(2n-2)$ -мерной сфере радиуса ε , лежащей на гиперплоскости $\operatorname{Im} w_n = \varepsilon^2$. Обозначим

$$\mathcal{C}(\varepsilon) := \{w : |w'|^2 + (\operatorname{Re} w_n)^2 = \varepsilon^2, \operatorname{Im} w_n = \varepsilon^2\}.$$

Для этого цикла ориентация индуцируется $(2n-1)$ -мерным шаром.

По определению

$$\mu_b(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial(B(p, \varepsilon) \cap \partial\mathcal{D}) \times [0, 1]} \omega'(\eta(\zeta, \lambda)) \wedge d\zeta,$$

где

$$\eta(\zeta, \lambda) = (1 - \lambda) \frac{\overline{\zeta - f(\zeta)}}{|\zeta - f(\zeta)|^2} + \lambda \frac{P(\zeta)}{\Phi(\zeta, f(\zeta))}.$$

После замены переменных $w = \zeta - f(\zeta)$ получим

$$\begin{aligned} \mu_b(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \\ &\times \int_{((I-f)_*\partial(B(p, \varepsilon) \cap \partial\mathcal{D})) \times [0, 1]} \omega'(\eta(\zeta(w), \lambda)) \wedge \frac{dw}{\det_{\mathbb{C}}(E - f'(\zeta(w)))}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \eta(\zeta(w), \lambda) &= (1 - \lambda) \frac{\overline{w}}{|w|^2} + \lambda \frac{P(\zeta(w))}{\langle P(\zeta(w)), w \rangle}, \\ P(\zeta(w)) &= \left(\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_{n-1}, \operatorname{Re} w_n - \frac{1}{2i} \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\langle P(\zeta(w)), w \rangle = |w'|^2 + \left(x_n - \frac{1}{2i} \right) w_n,$$

где $x_n = \operatorname{Re} w_n$, то компоненты вектор-функции $\eta(\zeta(w), \lambda)$ примут вид

$$\begin{aligned} \eta_j &= (1 - \lambda) \frac{\overline{w}_j}{|w|^2} + \lambda \frac{2\overline{w}_j}{2|w'|^2 + 2x_n w_n + i w_n}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ \eta_n &= (1 - \lambda) \frac{\overline{w}_n}{|w|^2} + \lambda \frac{2x_n + i}{2|w'|^2 + 2x_n w_n + i w_n}. \end{aligned}$$

Для малых $\varepsilon > 0$ цикл $(I - f)_* \partial(B(p, \varepsilon) \cap \partial \mathcal{D})$ на $(I - f)_*(\partial \mathcal{D} \cap U)$ гомологичен циклу $+\mathcal{C}(\varepsilon)$, если p – притягивающая неподвижная точка отображения f , и циклу $-\mathcal{C}(\varepsilon)$, если p – отталкивающая неподвижная точка.

Для доказательства этого заметим, что голоморфное отображение $I - f$ сохраняет ориентацию области $\mathcal{D}$.

Следовательно, оно сохраняет ориентацию касательной гиперплоскости в точке p , если p притягивающая, и изменяет ориентацию, если p отталкивающая.

Для вычисления интеграла по поверхности $(I - f)_* \partial(B(p, \varepsilon) \cap \partial \mathcal{D})$ можно заменить цикл интегрирования для достаточно малых $\varepsilon > 0$ на цикл $(\pm 1)\mathcal{C}(\varepsilon)$, зависящий от того, является ли p притягивающей или отталкивающей.

На каждой поверхности $\mathcal{C}(\varepsilon)$ знаменатели η_j могут быть легко оценены, а именно

$$\begin{aligned} 2|w'|^2 + 2x_n w_n + i w_n &= 2|w'|^2 + 2x_n^2 + 2ix_n \operatorname{Im} w_n + i w_n \\ &= ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2 \neq 0 \end{aligned}$$

для всех $\varepsilon > 0$. Более того, $|w|^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^4$.

Далее, преобразуем дифференциальную форму $\omega'(\eta(\zeta(w), \lambda)) \wedge dw$ на поверхности $\mathcal{C}(\varepsilon)$. Имеем

$$\begin{aligned} \omega'(\eta) \wedge dw &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \left((1 - \lambda) \frac{\bar{w}_j}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \lambda \frac{2\bar{w}_j}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right) d\eta[j] \wedge dw \\ &+ (-1)^{n-1} \left((1 - \lambda) \frac{x_n - i\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \lambda \frac{2x_n + i}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right) d\eta[n] \wedge dw. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Поскольку равенство

$$dw = dw' \wedge dx_n$$

справедливо на $\mathcal{C}(\varepsilon)$, то

$$\begin{aligned} d\eta[j] \wedge dw &= \left(\frac{1 - \lambda}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2\lambda}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right)^{n-2} d\bar{w}[j, n] \\ &\wedge \left(-\frac{x_n - i\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2x_n + i}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right) d\lambda \wedge dw \end{aligned}$$

для $1 \leq j \leq n - 1$ и

$$\begin{aligned} d\eta[n] \wedge dw &= \left(\left(\frac{1 - \lambda}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2\lambda}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right) d\bar{w}_1 \right. \\ &+ \bar{w}_1 \left(\frac{-1}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right) d\lambda \Big) \wedge \dots \\ &\wedge \left(\left(\frac{1 - \lambda}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2\lambda}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right) d\bar{w}_{n-1} \right. \\ &+ \bar{w}_{n-1} \left(\frac{-1}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right) d\lambda \Big) \wedge dw. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} d\eta[n] \wedge dw &= \left(-\frac{1}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right) \\ &\times \left(\frac{1 - \lambda}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2\lambda}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right)^{n-2} d\lambda \wedge \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \bar{w}_j d\bar{w}[j, n] \wedge dw \end{aligned}$$

с точностью до слагаемых, не содержащих $d\lambda$.

Суммируя, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \omega'(\eta) \wedge dw &= \left(\frac{1 - \lambda}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2\lambda}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right)^{n-1} d\lambda \left(-\frac{x_n - i\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2x_n + i}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right) \\ &\wedge \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j-1} \bar{w}_j d\bar{w}[j, n] \wedge dw + \left(\frac{1 - \lambda}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2\lambda}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right)^{n-2} \\ &\times \left((1 - \lambda) \frac{x_n - i\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \lambda \frac{2x_n + i}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right) d\lambda \\ &\wedge \left(-\frac{1}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right) \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} \bar{w}_j d\bar{w}[j, n] \wedge dw, \end{aligned}$$

которое окончательно дает

$$\begin{aligned} \omega'(\eta) \wedge dw &= \left(\frac{1 - \lambda}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} + \frac{2\lambda}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right)^{n-2} d\lambda \\ &\wedge \frac{i(1 + 2\varepsilon^2)}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} \frac{(-1)^n}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \bar{w}_j d\bar{w}[j, n] \wedge dw. \end{aligned}$$

Используя формулу

$$\int_0^1 (1 - \lambda)^k \lambda^{n-2-k} d\lambda = \frac{k!(n-2-k)!}{(n-1)!}$$

и формулу бинома, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \omega'(\eta) \wedge dw &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + \varepsilon^4} \right)^k \left(\frac{2}{ix_n(1 + 2\varepsilon^2) + \varepsilon^2} \right)^{n-k} \right) \\ &\times \frac{(-1)^n i(1 + 2\varepsilon^2)}{2(n-1)} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \bar{w}_j d\bar{w}[j, n] \wedge dw. \end{aligned}$$

Обозначим эту $(2n-2)$ -форму через $F(w', x_n, \varepsilon^2)$. Тогда

$$\mu_b(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\mathcal{C}(\varepsilon)} \frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(E - f'(\zeta(w)))} F(w', x_n, \varepsilon^2).$$

Перейдем к интегрированию по единичной сфере $\mathbb{S}^{2n-2}$ на гиперплоскости переменных (w', x_n) с помощью замены

$$\begin{aligned} w' &\mapsto \varepsilon w', \\ x_n &\mapsto \varepsilon x_n \end{aligned}$$

для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} F(\varepsilon w', \varepsilon x_n, \varepsilon^2) &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon^{n-1-k} \left(\frac{1}{1+\varepsilon^2} \right)^k \left(\frac{2}{ix_n(1+2\varepsilon^2) + \varepsilon} \right)^{n-k} \right) \\ &\quad \times \frac{(-1)^n i(1+2\varepsilon^2)}{2(n-1)} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \bar{w}_j d\bar{w}[j, n] \wedge dw. \end{aligned}$$

Наиболее сложно вычисляется предел для слагаемого, соответствующего $k = n-1$. Для этого слагаемого получаем

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}(1)} \left(\frac{1}{1+\varepsilon^2} \right)^{n-1} \frac{i(1+2\varepsilon^2)}{ix_n(1+2\varepsilon^2) + \varepsilon} \frac{(-1)^n}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \bar{w}_j d\bar{w}[j, n] \wedge dw \\ &= \frac{1}{n-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \frac{i}{ix_n(1+2\varepsilon^2) + \varepsilon} dx_n \\ &\quad \times \int_{|w'|=\sqrt{1-x_n^2}} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \bar{w}_j d\bar{w}[j, n] \wedge dw' \\ &= \frac{i}{n-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \frac{(1-x_n^2)^{n-1}}{ix_n(1+2\varepsilon^2) + \varepsilon} dx_n \int_{|w'|=1} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \bar{w}_j d\bar{w}[j, n] \wedge dw' \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}, \end{aligned} \tag{10.4}$$

поскольку

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \frac{(1-x_n^2)^{n-1}}{ix_n(1+2\varepsilon^2) + \varepsilon} dx_n \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^1 \frac{(1-x_n^2)^{n-1} - 1}{ix_n(1+2\varepsilon^2) + \varepsilon} dx_n + \int_{-1}^1 \frac{1}{ix_n(1+2\varepsilon^2) + \varepsilon} dx_n \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^1 \frac{(1-x_n^2)^{n-1} - 1}{ix_n} dx_n + \int_{-1}^1 \frac{-ix_n(1+2\varepsilon^2) + \varepsilon}{x_n^2(1+2\varepsilon^2)^2 + \varepsilon^2} dx_n \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\varepsilon \int_0^1 \frac{1}{x_n^2(1+2\varepsilon^2)^2 + \varepsilon^2} dx_n \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{1+2\varepsilon^2} \left(\operatorname{arctg} \frac{1+2\varepsilon^2}{\varepsilon} x_n \right) \Big|_0^1 = \pi, \end{aligned}$$

третье равенство следует из нечетности подынтегральной функции. Далее,

$$\begin{aligned} \int_{|w'|=1} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \bar{w}_j d\bar{w}[j, n] \wedge dw' &= \int_{|w'| \leq 1} (n-1) d\bar{w}' \wedge dw' \\ &= (n-1)(2i)^{n-1} \int_{|w'| \leq 1} dv = \frac{(2\pi i)^{n-1}}{(n-2)!}. \end{aligned}$$

Вычислим пределы слагаемых в $F(\varepsilon w', \varepsilon x_n, \varepsilon^2)$, соответствующих $k = 1, \dots, n-2$. Для этого применим предыдущие вычисления и получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}(1)} \varepsilon^{n-1-k} \left(\frac{1}{1+\varepsilon^2} \right)^k \left(\frac{2}{ix_n(1+2\varepsilon^2) + \varepsilon} \right)^{n-k} \frac{(-1)^n i(1+2\varepsilon^2)}{2(n-1)} \\ \times \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \bar{w}_j d\bar{w}[j, n] \wedge dw \right) \\ = \frac{2^{n-k-1} i}{n-1} \frac{(2\pi i)^{n-1}}{(n-2)!} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{n-1-k} \int_{-1}^1 \frac{(1-x_n^2)^{n-1}}{(ix_n(1+2\varepsilon^2) + \varepsilon)^{n-k}} dx_n \\ = \frac{2^{n-k-1} i}{n-1} \frac{(2\pi i)^{n-1}}{(n-2)!} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{n-1-k} \int_{-1}^1 \frac{(1-x_n^2)^{n-1}}{(ix_n + \varepsilon)^{n-k}} dx_n. \end{aligned}$$

Если $j = 1, \dots, n-1$, то

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 \varepsilon^{n-1-k} \frac{x_n^{2j}}{(ix_n + \varepsilon)^{n-k}} dx_n \right| &\leq \int_{-1}^1 \varepsilon^{n-1-k} \frac{|x_n|^{2j}}{|ix_n + \varepsilon|^{n-k}} dx_n \\ &\leq \int_{-1}^1 \varepsilon^{n-1-k} \frac{|x_n|^{2j-2}}{|ix_n + \varepsilon|^{n-k-2}} dx_n \leq \varepsilon \int_{-1}^1 |x_n|^{2j-2} dx_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Далее,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \varepsilon^{n-1-k} \frac{1}{(ix_n + \varepsilon)^{n-k}} dx_n \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{dv}{(iv + 1)^{n-k}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{(iv + 1)^{n-k}} = 0 \end{aligned}$$

по теореме Коши о вычетах.

Суммируя, можно заключить, что

$$\begin{aligned} \mu_b(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{S}^{2n-2}} \frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(E - f'(\zeta(\varepsilon w', \varepsilon x_n, \varepsilon^2)))} F(\varepsilon w', \varepsilon x_n, \varepsilon^2) = \\ &= \frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(E - f'(p))} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{S}^{2n-2}} F(\varepsilon w', \varepsilon x_n, \varepsilon^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(E - f'(p))}, \end{aligned}$$

которое приводит к (10.4).

Доказанные леммы влекут элегантную формулу Лефшеца для простых неподвижных точек комплекса Дольбо.

СЛЕДСТВИЕ 10.3. Пусть f есть голоморфное отображение отображения $\mathcal{D}$, которое продолжается до C^∞ -отображения на $\overline{\mathcal{D}}$. Если все неподвижные точки f в $\mathcal{D}$ простые, то

$$L_t(f^*) = \sum_{p \in \text{Fix}(f, \mathcal{D}) \cup \text{Fix}^{(a)}(f, \partial\mathcal{D})} \frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(E - f'(p))}.$$

Другими словами, результат из [4] остается справедливым для комплекса Дольбо в строго псевдовыпуклых многообразиях.

§ 11. Пример

Рассмотрим постоянное отображение $f: \overline{\mathcal{D}} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$, т.е. $f(z) \equiv a$ для некоторой точки $a \in \overline{\mathcal{D}}$. Это отображение имеет единственную неподвижную точку a в $\overline{\mathcal{D}}$ и $\det_{\mathbb{C}}(E - f'(a)) = 1$. В частности, a — простая неподвижная точка. Если $a \in \partial\mathcal{D}$, то эта точка притягивающая (как легко проверить). Оператор f_0^* на $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathcal{D})$ сводится к оператору $u \mapsto u \circ f = u(a)$, т.е. к оператору Дирака с носителем в точке a .

Данный оператор не является ядерным оператором, однако он фактически действует на подпространстве постоянных функций и имеет естественного кандидата на роль следа. А именно, $\text{tr}(Hf^*)_0 = 1$. Этот след также может быть вычислен для любого представления оператора Дирака на пространстве голоморфных функций. Можно использовать ядра Бергмана или Сегё так же, как и интеграл Коши–Фанташье. Это согласуется с нашим определением регуляризованного следа

$$\widetilde{\text{tr}}(Hf^*)_0 = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \text{p.v.} \int_{\partial\mathcal{D}} \omega' \left(\frac{P(\zeta)}{\Phi(\zeta, a)} \right) \wedge d\zeta - \int_{\mathcal{D}} \Delta^\sharp (1 \times f)^\sharp K_{HS_0} = 1.$$

При $q > 0$ справедливо $f_q^* = 0$. Отсюда получаем, что $L_p(f^*) = 0$. Поэтому

$$L_t(f^*) = \sum_{p \in \text{Fix}(f, \mathcal{D}) \cup \text{Fix}^{(a)}(f, \partial\mathcal{D})} \frac{1}{\det_{\mathbb{C}}(E - f'(p))} = 1,$$

так что с обеих сторон получаем 1.

Для шара в $\mathbb{C}^n$ оператор F_0 есть интеграл Коши–Сегё. Он дает ортогональную проекцию на подпространство голоморфных функций в $\mathcal{D}$. Следовательно, регуляризация

$$\text{p.v.} \int_{\partial\mathcal{D}} K_{F_0}(\zeta, f(\zeta))$$

совпадает с проекцией Сегё в шаре.

Список литературы

1. *Lefschetz S.* Intersections and transformations of complexes and manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. V. 28. P. 1–49.
2. *Atiyah M. F., Bott R.* A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I // Ann. of Math. (2). 1967. V. 86. №2. P. 374–407.

3. *Бреннер А. В., Шубин М. А.* Теорема Атьи–Ботта–Лефшеца для многообразий с границей // Функци. анализ и его прилож. 1981. Т. 15. № 4. С. 67–68.
4. *Бреннер А. В., Шубин М. А.* Формула Атьи–Ботта–Лефшеца для эллиптических комплексов на многообразиях с границей // Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 38. М.: ВИНТИ, 1991. С. 119–183.
5. *Бреннер А. В.* Теорема о фиксированных точках для ∂_b -комплекса на строго псевдотупых многообразиях // УМН. 1988. Т. 43. № 4. С. 165.
6. *Tarkhanov N. N.* Complexes of differential operators. Dordrecht, NL: Kluwer Acad. Publ., 1995.
7. *Kytmanov A., Myslivets S., Tarkhanov N.* Holomorphic Lefschetz formula for manifolds with boundary // Math. Z. 2004. V. 246. P. 769–794.
8. *Хенкин Г. М.* Метод интегральных представлений в комплексном анализе // Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 7. М.: ВИНТИ, 1985. С. 23–124.
9. *Айзенберг Л. А., Даутов Ш. А.* Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства. Новосибирск: Наука, 1975.
10. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators. V. 3. Pseudo-differential operators. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
11. *Пинчук С. И.* Голоморфные отображения в $\mathbb{C}^n$ и проблема голоморфной эквивалентности // Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1986. С. 195–224.
12. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
13. *Kerzman N., Stein E. M.* The Szegő kernel in terms of Cauchy–Fantappiè kernels // Duke Math. J. 1978. V. 45. № 2. P. 197–224.
14. *Meise R., Vogt D.* Introduction on functional analysis. Oxford: Clarendon Press, 1997.
15. *Кытманов А. М.* Интеграл Бохнера–Мартинелли и его приложения. Новосибирск: Наука, 1992.

Красноярский государственный университет;
 Красноярский государственный университет;
 Потсдамский университет, Германия
E-mail: kytmanov@lan.krasu.ru
 simona@lan.krasu.ru
 tarkhanov@math.uni-potsdam.de

Поступила в редакцию
 28.10.2003 и 28.06.2004