Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Михайлов, О существовании граничного значения у бигармонических функций, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 12, 81–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm866>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 08:18:56

УДК 517.928

В. П. Михайлов

О существовании граничного значения у бигармонических функций

В работе устанавливаются критерии существования L_2 -предела и слабого L_2 -предела бигармонической функции на правильной аналитической границе двумерной ограниченной области.

Библиография: 7 названий.

Пусть Q – ограниченная двумерная область, $Q \subset \mathbb{R}_2$, $x = (x_1, x_2)$ – точка области Q , $z = (x_1 + ix_2)$ – ее комплексная координата, и пусть $u(x) = u(z)$ – бигармоническая в области Q функция, т.е. функция, являющаяся решением уравнения

$$\Delta^2 u = 0, \quad x \in Q. \quad (1)$$

Границу ∂Q области Q будем предполагать правильной аналитической кривой, т.е. кривой такой, что для любой точки $z_0 \in \partial Q$ существует такая ее (комплексная) окрестность U_{z_0} , что уравнение попавшего в эту окрестность куска $\partial Q \cap U_{z_0}$ кривой ∂Q имеет вид $z = \lambda(t)$, $t_1 < t < t_2$, где $\lambda(t)$ – аналитическая функция вещественного переменного $t \in (t_1, t_2)$, $z_0 = \lambda(t_0)$, $t_0 \in (t_1, t_2)$, $t_1 = t_1(z_0)$, $t_2 = t_2(z_0)$, причем $\lambda'(t) \neq 0$ для $t \in (t_1, t_2)$.

Обозначим через

$$w = w(z), \quad z \in Q, \quad (2)$$

функцию, осуществляющую конформное отображение области Q комплексной z -плоскости на единичный круг $\{|w| < 1\}$ комплексной w -плоскости, а через

$$z = z(w), \quad |w| < 1, \quad (3)$$

обратную к ней функцию. Прообраз при преобразовании (2) кольца $\{r_0 < |w| < 1\}$ при некотором $r_0 \in (0, 1)$ обозначим через Q_{r_0} . (Ниже число r_0 будет выбрано конкретно.) Область Q_{r_0} состоит из точек кривых γ_r , $r_0 < r < 1$, являющихся прообразами окружностей $\{|w| = r\}$:

$$\gamma_r = \{z = z(re^{i\varphi}), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad r_0 < r < 1. \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00988) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1542.2003.1).

Прообразом окружности $\{|w| = 1\}$ является граница ∂Q области Q , которую естественно по аналогии с (4) обозначить через γ_1 ,

$$\partial Q = \gamma_1 = \{z = z(e^{i\varphi}), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Пусть в области Q_{r_0} задана некоторая непрерывная функция $g(z)$ (в частности, исследуемая бигармоническая функция $u(z)$). Будем говорить, что функция $g(z)$ имеет L_2 -предел на границе $\partial Q = \gamma_1$, если семейство ее следов на кривых γ_r , $r_0 < r < 1$, т.е. множество функций

$$\{g(z(re^{i\varphi})), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad r_0 < r < 1, \quad (5)$$

имеет $L_2(0, 2\pi)$ -предел при $r \rightarrow 1 - 0$. Если множество функций (5) имеет слабый $L_2(0, 2\pi)$ -предел при $r \rightarrow 1 - 0$, то скажем, что функция $g(z)$ имеет слабый L_2 -предел на границе ∂Q . Будем также говорить, что функция $g(z)$ L_2 -компактна (слабо L_2 -компактна) вблизи границы ∂Q , если множество ее следов (5) $L_2(0, 2\pi)$ -компактно (соответственно слабо $L_2(0, 2\pi)$ -компактно). Аналогично скажем, что функция $g(z)$ L_2 -ограничена вблизи границы ∂Q , если множество ее следов (5) $L_2(0, 2\pi)$ -ограничено. Ясно, что свойства функции $g(z)$ быть слабо L_2 -компактной и L_2 -ограниченной вблизи границы эквивалентны.

Целью настоящей работы является установление критериев существования L_2 -предела и слабого L_2 -предела бигармонической функции $u(z)$ на границе области Q . А именно будет установлена справедливость следующих утверждений.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы бигармоническая функция $u(z)$, $z \in Q$, имела L_2 -предел на границе области, необходимо и достаточно, чтобы она была L_2 -компактна вблизи ее границы.*

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы бигармоническая функция $u(z)$, $z \in Q$, имела слабый L_2 -предел на границе области, необходимо и достаточно, чтобы она была слабо L_2 -компактна вблизи ее границы.*

Для случая, когда двумерная область есть круг, теорема 1 и некоторые другие критерии существования L_2 -предельных значений на границе области, причем не только для бигармонических, но и m -гармонических функций при любом $m \geq 1$, были установлены в работе [1]. Аналогичные результаты были получены в работе [2] для случая полосы в $\mathbb{R}_n$ при любом $n \geq 2$ для решений линейного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами порядка $2m$, $m \geq 1$, характеристический многочлен которых отличается от характеристического многочлена для m -гармонического оператора на произвольный многочлен степени, меньшей чем $2m$.

Отметим, что критерии, содержащиеся в теоремах 1 и 2, относятся к любому решению уравнения (1), в том числе и к произвольной гармонической функции. Для гармонических функций, как известно (см. [3] и [4], а для решений общих линейных эллиптических уравнений второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами в ограниченных областях n -мерного пространства с достаточно гладкой границей см. [5]), критерием существования L_2 -предела на границе является

условие их принадлежности классу Харди H_2 , т.е. в определенном смысле условие их L_2 -ограниченности вблизи границы. Это, конечно, не противоречит теореме 1, поскольку для решений эллиптических уравнений второго порядка условие их L_2 -ограниченности вблизи границы является условием их L_2 -компактности. С другой стороны, как показано в работах [1] и [2], условие L_2 -ограниченности вблизи границы для всех решений уравнения порядка, большего чем 2, критерием быть не может: это условие, конечно, необходимо, но, вообще говоря, достаточным не является.

Заметим, что и в настоящей работе, так же как и в перечисленных выше работах, предельное значение функции на границе области понимается как предельное значение множества следов этой функции на некоторой системе “параллельных” границе и в определенном смысле аппроксимирующих границу кривых (в многомерном случае – на системе поверхностей). Здесь в качестве такой системы кривых взято множество кривых $\{\gamma_r\}$. Вопрос о возможности замены системы кривых $\{\gamma_r\}$ другими аппроксимирующими границу системами кривых будет рассмотрен нами в другом месте. Отметим лишь, что глубокие результаты в этом направлении для решений эллиптических уравнений второго порядка имеются в работе [6].

Поскольку из L_2 -компактности (или L_2 -слабой компактности) вблизи границы комплекснозначной бигармонической функции $u(z)$, очевидно, вытекает L_2 -компактность (соответственно L_2 -слабая компактность) вблизи границы вещественнозначных бигармонических функций $\operatorname{Re} u(z)$ и $\operatorname{Im} u(z)$, то сформулированные выше теоремы достаточно доказать для вещественнозначных бигармонических функций. В связи с этим в дальнейшем мы будем считать функцию $u(z)$ принимающей лишь вещественные значения.

Хорошо известно [7], что для любой вещественнозначной бигармонической в области Q функции $u(z)$ существуют две аналитические в Q функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ комплексного переменного z такие, что

$$u(z) = \operatorname{Re}(f_1(z) + \bar{z}f_2(z)), \quad z \in Q. \quad (6)$$

Функции f_1 и f_2 определяются по функции $u(z)$ с точностью до линейных слагаемых. Точнее, функция $f_1(z)$ определяется с точностью до слагаемого $\alpha z + ai$, а функция $f_2(z)$ – с точностью до слагаемого $ibz - \bar{\alpha}$, где α – произвольное комплексное число, а a и b – произвольные вещественные числа. Доказательство этого утверждения состоит в проверке того, что равенству

$$\operatorname{Re}(g_1(z) + \bar{z}g_2(z)) \equiv 0, \quad z \in Q, \quad (7)$$

в котором $g_1(z)$ и $g_2(z)$ – аналитические в Q функции, удовлетворяют только функции $g_1(z) = \alpha z + ai$ и $g_2(z) = ibz - \bar{\alpha}$ при указанных выше α , a и b . То, что эти функции равенству (7) удовлетворяют, очевидно:

$$\operatorname{Re}(\alpha z + ai + \bar{z}(ibz - \bar{\alpha})) = \operatorname{Re}(\alpha z + ib|z|^2 - \bar{z}\bar{\alpha}) = \operatorname{Re}(\alpha z - \bar{z}\bar{\alpha}) \equiv 0.$$

Для доказательства обратного утверждения подставим в (7) $g_1(z) = u_1(x) + iv_2(x)$, $g_2(z) = u_2(x) + iv_2(x)$, где u_k и v_k , $k = 1, 2$, – соответствующие вещественнозначные гармонические в Q функции. В результате равенство (7) заменится эквивалентным равенством

$$u_1(x) + x_1 u_2(x) + x_2 v_2(x) \equiv 0, \quad x \in Q. \quad (8)$$

После применения к (8) оператора Лапласа получим тождество

$$u_{2x_1}(x) + v_{2x_2}(x) \equiv 0, \quad x \in Q,$$

которое в силу условий Коши–Римана для функции $g_2(z)$ приводит к равенствам $u_2(x) = c_0x_2 + c_1$, $v_2(x) = -c_0x_1 + c_2$, т.е. $g_2(z) = -c_0iz + c_1 + ic_2$, где c_0, c_1, c_2 – произвольные вещественные постоянные. Подставляя найденные значения для u_2 и v_2 в (8), получаем, что $u_1(x) \equiv -c_1x_1 - c_2x_2$ и, тем самым, согласно условиям Коши–Римана для функции $g_1(z)$ имеем $v_1(x) = -c_1x_2 + c_2x_1 + c_3$, где c_3 – вещественная постоянная, т.е. $g_1(z) = z(-c_1 + ic_2) + ic_3$. Что и требовалось установить (при этом $\alpha = -c_1 + ic_2$, $a = c_3$, $b = -c_0$).

Поскольку добавление к функциям $f_1(z)$ и $f_2(z)$ линейных слагаемых не изменяет их поведения вблизи границы области в интересующем нас смысле, т.е. в смысле существования предельного значения на границе области у функции $u(z)$ или ее L_2 -компактности (или ее слабой L_2 -компактности) вблизи границы, то в дальнейшем мы ограничимся каким-либо конкретным выбором в равенстве (6) этих функций.

В результате преобразования (2) равенство (6) приобретает вид

$$U(w) = \operatorname{Re}(F_1(w) + \overline{z(w)}F_2(w)), \quad |w| < 1, \quad (9)$$

где $U(w) = u(z(w))$, $|w| < 1$, – вещественнозначная функция, а $F_1(w) = f_1(z(w))$ и $F_2(w) = f_2(z(w))$ – аналитические в круге $\{|w| < 1\}$ функции.

В силу принятого выше определения исследуемая бигармоническая функция $u(z)$ имеет L_2 -предел или слабый L_2 -предел на границе ∂Q тогда и только тогда, когда семейство функций

$$\{U(re^{i\varphi}), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad r_0 < r < 1, \quad (10)$$

имеет $L_2(0, 2\pi)$ -предел или соответственно слабый $L_2(0, 2\pi)$ -предел при $r \rightarrow 1 - 0$. Аналогично, L_2 -компактность или слабая L_2 -компактность (т.е. L_2 -ограниченность) функции $u(z)$ вблизи границы ∂Q эквивалентны $L_2(0, 2\pi)$ -компактности или соответственно слабой $L_2(0, 2\pi)$ -компактности (т.е. $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченности) семейства функций (10). Следовательно, доказательство сформулированных теорем 1 и 2 эквивалентно доказательству соответствующих утверждений для функции $U(w)$, т.е. доказательству следующих теорем 1' и 2'.

ТЕОРЕМА 1'. *Для того чтобы множество функций (10) имело $L_2(0, 2\pi)$ -предел при $r \rightarrow 1 - 0$, необходимо и достаточно, чтобы это множество было L_2 -компактным.*

ТЕОРЕМА 2'. *Для того чтобы множество функций (10) имело слабый $L_2(0, 2\pi)$ -предел при $r \rightarrow 1 - 0$, необходимо и достаточно, чтобы это множество было слабо $L_2(0, 2\pi)$ -компактным, т.е. $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченным.*

В силу предположения о границе ∂Q области Q функция $z(w)$, $|w| < 1$, из (3) аналитически продолжается в круг $\{|w| < R\}$ некоторого радиуса $R = R(\partial Q) > 1$,

и, тем самым, функция $\overline{z(1/\overline{w})}$ является аналитической по w для $|w| > 1/R$. Поскольку нас интересует поведение функции $U(re^{i\varphi})$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $r < 1$, для r достаточно близких к $r = 1$, то наряду с равенством (9) для функции $U(w)$ можно воспользоваться также вытекающим из него, но справедливым лишь в кольце $\{1/R < |w| < 1\}$ равенством

$$U(w) = \operatorname{Re} \left(\left(F_1(w) + z \overline{\left(\frac{1}{\overline{w}} \right)} F_2(w) \right) + \left(\overline{z(w)} - z \overline{\left(\frac{1}{\overline{w}} \right)} \right) F_2(w) \right), \quad \frac{1}{R} < |w| < 1.$$

Отметим, что в качестве числа r_0 , которое было введено при рассмотрении семейства кривых γ_r (4), можно взять любое число из полуинтервала $[1/R, 1)$; в дальнейшем будем считать $r_0 = 1/R$.

Функция $F_1(w) + z \overline{(1/\overline{w})} F_2(w)$ является аналитической функцией переменного w в кольце $\{1/R < |w| < 1\}$. Пусть ее лорановское разложение в этом кольце имеет вид

$$F_1(w) + z \overline{\left(\frac{1}{\overline{w}} \right)} F_2(w) = G_1(w) + \tilde{G}_1(w), \quad \frac{1}{R} < |w| < 1,$$

где

$$G_1(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k, \quad |w| < 1, \quad (11)$$

— правильная часть ряда Лорана, а

$$\tilde{G}_1(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_k}{w^k}, \quad |w| > \frac{1}{R},$$

— главная его часть; функции $G_1(w)$ и $\tilde{G}_2(w)$ аналитичны соответственно в круге $\{|w| < 1\}$ и вне круга $\{|w| \leq 1/R\}$. Таким образом, для функции $U(w)$ окончательно получаем равенство

$$U(w) = U_0(w) + \operatorname{Re}(G_1(w) + A(w)G_2(w)), \quad \frac{1}{R} < |w| < 1, \quad (12)$$

в котором

$$U_0(w) = \operatorname{Re}(\tilde{G}_1(w)), \quad |w| > \frac{1}{R},$$

— гармоническая в $\{|w| > 1/R\}$ функция, имеющая на окружности $\{|w| = 1\}$ L_2 -предельное значение, поскольку эта окружность принадлежит множеству $\{|w| > 1/R\}$, функции $G_1(w)$ и $G_2(w)$ аналитичны в круге $\{|w| < 1\}$, а функция

$$A(w) = \overline{z(w)} - z \overline{\left(\frac{1}{\overline{w}} \right)}, \quad \frac{1}{R} < |w| < R,$$

как функция вещественных переменных w_1 и w_2 ($w = w_1 + iw_2 = re^{i\varphi}$) бесконечно дифференцируема в кольце $\{1/R < |w| < R\}$, $A(w) \in C^\infty(1/R^2 < w_1^2 + w_2^2 < R^2)$, причем

$$A(re^{i\varphi})|_{r=1} = \left(\overline{z(re^{i\varphi})} - z \overline{\left(\frac{1}{r} e^{i\varphi} \right)} \right) \Big|_{r=1} = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Множество функций (10), которое будет предметом нашего исследования, в связи с равенством (12) порождает соответствующие множества функций, отвечающие функциям $U_0(w)$, $\operatorname{Re}(G_1(w))$, $\operatorname{Re}(A(w)G_2(w))$, т.е. множества

$$\{U_0(re^{i\varphi}), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad \frac{1}{R} < r < 1, \quad (13)$$

$$\{\operatorname{Re} G_1(re^{i\varphi}), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad \frac{1}{R} < r < 1, \quad (14)$$

$$\{\operatorname{Re}(A(re^{i\varphi})G_2(re^{i\varphi})), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad \frac{1}{R} < r < 1. \quad (15)$$

Отметим, что, как уже выше было сказано, множество функций (13) $L_2(0, 2\pi)$ -компактно и при $r \rightarrow 1$ имеет $L_2(0, 2\pi)$ -предел.

Пусть

$$G_2(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k, \quad |w| < 1, \quad (16)$$

и

$$z(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k, \quad |w| < R, \quad (17)$$

суть тейлоровские разложения функций $G_1(w)$ и $z(w)$.

Для коэффициентов a_k , b_k и c_k , $k \geq 0$, разложений (11), (16) и (17) (как хорошо известно) справедливы оценки:

для любого $\rho_1 < 1$

$$|a_k| \leq \frac{M_1(\rho_1)}{\rho_1^k}, \quad M_1(\rho_1) = \max_{|w|=\rho_1} |G_1(w)|, \quad k \geq 0, \quad (18)$$

для любого $\rho_2 < 1$

$$|b_k| \leq \frac{M_2(\rho_2)}{\rho_2^k}, \quad M_2(\rho_2) = \max_{|w|=\rho_2} |G_2(w)|, \quad k \geq 0, \quad (19)$$

для любого $\rho_3 < R$

$$|c_k| \leq \frac{M_3(\rho_3)}{\rho_3^k}, \quad M_3(\rho_3) = \max_{|w|=\rho_3} |z(w)|, \quad k \geq 0. \quad (20)$$

Из (11), (16) и (17) при $1/R < |w| < 1$ имеем равенство

$$G_1(w) + A(w)G_2(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k \left(\bar{w}^k - \frac{1}{w^k} \right) \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k,$$

из которого вытекает, что при любом r , $1/R < r < 1$,

$$\begin{aligned}
& (G_1(w) + A(w)G_2(w)) \Big|_{w=re^{i\varphi}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\varphi} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k (r^k - r^{-k}) e^{-ik\varphi} \sum_{s=0}^{\infty} b_s r^s e^{is\varphi} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\varphi} + \sum_{-\infty}^{\infty} e^{ik\varphi} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_m b_{k+m} (r^m - r^{-m}) r^{m+k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k r^k + \sum_{m=1}^{\infty} \bar{c}_m b_{k+m} (r^m - r^{-m}) r^{m+k} \right) e^{ik\varphi} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ik\varphi} \sum_{m=k}^{\infty} \bar{c}_m b_{m-k} (r^m - r^{-m}) r^{m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k r^k + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{mk} (r^m - r^{-m}) r^{m+k} \right) e^{ik\varphi} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=k}^{\infty} \mu_{mk} (r^m - r^{-m}) r^{m-k} \right) e^{-ik\varphi},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda_{mk} &= \bar{c}_m b_{m+k}, & k \geq 0, \quad m \geq 1, \\
\mu_{mk} &= \bar{c}_m b_{m-k}, & k \geq 1, \quad m \geq k.
\end{aligned} \tag{21}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}(G_1(w) + A(w)G_2(w)) \Big|_{w=re^{i\varphi}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a'_k r^k + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_{mk} (r^m - r^{-m}) r^{m+k} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=k}^{\infty} \mu'_{mk} (r^m - r^{-m}) r^{m-k} \right) \cos k\varphi \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \left(a''_k r^k + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda''_{mk} (r^m - r^{-m}) r^{m+k} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=k}^{\infty} \mu''_{mk} (r^m - r^{-m}) r^{m-k} \right) \sin k\varphi \\
&\quad + a'_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_{m0} (r^m - r^{-m}) r^m,
\end{aligned}$$

где $a'_k, \lambda'_{mk}, \mu'_{mk}$ — вещественные части соответствующих чисел $a_k, \lambda_{mk}, \mu_{mk}$, а $a''_k, \lambda''_{mk}, \mu''_{mk}$ — мнимые части этих чисел. Поскольку

$$r^m - r^{-m} = (r - r^{-1})(r^{m-1} + r^{m-3} + \dots + r^{-(m-1)}) = -(1 - r^2) \sum_{s=0}^{m-1} r^{m-2-2s},$$

то последнее равенство удобно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}(G_1(w) + A(w)G_2(w))|_{w=re^{i\varphi}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a'_k r^k - (1-r^2) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_{mk} \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s+k} \right. \\
&\quad \left. - (1-r^2) \sum_{m=k}^{\infty} \mu'_{mk} \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s-k} \right) \cos k\varphi \\
&\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \left(a''_k r^k - (1-r^2) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda''_{mk} \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s+k} \right. \\
&\quad \left. + (1-r^2) \sum_{m=k}^{\infty} \mu''_{mk} \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s-k} \right) \sin k\varphi \\
&\quad + \left(a'_0 - (1-r^2) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_{m0} \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s} \right). \tag{22}
\end{aligned}$$

Для доказательства сформулированных теорем нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Семейство функций (10) ($r_0 = 1/R$) $L_2(0, 2\pi)$ -ограничено тогда и только тогда, когда $L_2(0, 2\pi)$ -ограничены каждое из семейств функций (14) и (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма показывает, что в представлении функции $U(w)$ с помощью равенства (12) три слагаемых правой части этого равенства в определенном смысле независимы по отношению к $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченности: из $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченности их суммы вытекает $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченность каждого слагаемого (напомним, что первое слагаемое $L_2(0, 2\pi)$ -ограничено, поскольку функция $U_0(w)$ непрерывна в области $\{|w| > 1/R\}$). Заметим, что представление (9) функции $U(w)$ этим свойством не обладает: из $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченности суммы не вытекает, вообще говоря, $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченность каждого слагаемого его правой части.

Поскольку множество функций (13), связанное с первым слагаемым равенства (12), $L_2(0, 2\pi)$ -ограничено, то в доказательстве нуждается лишь утверждение леммы о необходимости.

Пусть множество функций (10) $L_2(0, 2\pi)$ -ограничено. Тогда существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $r \in (1/R, 1)$ имеет место неравенство

$$M \geq \int_0^{2\pi} (U(w) - U_0(w))^2|_{w=re^{i\varphi}} d\varphi + \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re}(G_1(w) + A(w)G_2(w)))^2|_{w=re^{i\varphi}} d\varphi,$$

которому в силу (22) можно придать вид

$$\begin{aligned}
M \geq \pi \sum_{k=1}^{\infty} & \left(a'_k r^k - (1-r^2) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_{mk} \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s+k} \right. \\
& \left. - (1-r^2) \sum_{m=k}^{\infty} \mu'_{mk} \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s-k} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k'' r^k - (1-r^2) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{mk}'' \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s+k} \right. \\
& \left. + (1-r^2) \sum_{m=k}^{\infty} \mu_{mk}'' \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s-k} \right)^2 \\
& + 2\pi \left(a_0' - (1-r^2) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{m0}' \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2s-2} \right)^2.
\end{aligned}$$

Следовательно, при любом $N > 0$ для всех $r \in (1/R, 1)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^N \left(a_k' r^k - (1-r^2) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{mk}' \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s+k} \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{m=k}^{\infty} \mu_{mk}' \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s-k} \right) \right)^2 \\
& + \sum_{k=1}^N \left(a_k'' r^k - (1-r^2) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{mk}'' \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s+k} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{m=k}^{\infty} \mu_{mk}'' \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s-k} \right) \right)^2 \\
& + 2 \left(a_0' - (1-r^2) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{m0}' \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2s-2} \right)^2 \leq \frac{M}{\pi}. \quad (23)
\end{aligned}$$

В силу (21) и неравенств (18)–(20)

$$\begin{aligned}
|\lambda_{mk}'| &= |\operatorname{Re} \lambda_{mk}| \leq |c_m| |b_{m+k}| \leq \frac{M_3(\rho_3)}{\rho_3^m} \frac{M_2(\rho_2)}{\rho_2^{m+k}}, \quad m \geq 1, \quad k \geq 1, \\
|\lambda_{mk}''| &\leq \frac{M_3(\rho_3)}{\rho_3^m} \frac{M_2(\rho_2)}{\rho_2^{m+k}}, \quad m \geq 1, \quad k \geq 0, \\
|\mu_{mk}'| &= |\operatorname{Re} \mu_{mk}| \leq |c_m| |b_{m-k}| \leq \frac{M_3(\rho_3)}{\rho_3^m} \frac{M_2(\rho_2)}{\rho_2^{m-k}}, \quad m \geq k \geq 0, \\
|\mu_{mk}''| &\leq \frac{M_3(\rho_3)}{\rho_3^m} \frac{M_2(\rho_2)}{\rho_2^{m-k}}, \quad m \geq k \geq 1.
\end{aligned}$$

Положим

$$\rho_3 = \frac{R+1}{2}, \quad \rho_2 = \frac{R+3}{2(R+1)};$$

при этом, очевидно,

$$1 < \rho_3 < R, \quad \rho_2 \rho_3 = \frac{R+3}{4} > 1.$$

Тогда для всех $r \in (1/R, 1)$ при любом $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda'_{mk}| \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s+k} &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M_3(\rho_3)M_2(\rho_2)}{\rho_3^m \rho_2^{m+k}} m r^{-k} \\ &\leq M_3(\rho_3)M_2(\rho_2) r^{-k} \rho_2^{-k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\rho_2^m \rho_3^m} \\ &= M_3(\rho_3)M_2(\rho_2) \left(\frac{R}{\rho_2}\right)^k \frac{\rho_2 \rho_3}{(1 - \rho_2 \rho_3)^2} \leq C R^{2k}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^{\infty} |\mu'_{mk}| \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s-k} &\leq \sum_{m=k}^{\infty} \frac{M_3(\rho_3)M_2(\rho_2)}{\rho_3^m \rho_2^{m-k}} m r^{-k} \\ &= M_2(\rho_2)M_3(\rho_3) \rho_2^k r^{-k} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{m}{\rho_2^m \rho_3^m} \\ &= M_2(\rho_2)M_3(\rho_3) (R \rho_2)^k \frac{\rho_2 \rho_3}{(1 - \rho_2 \rho_3)^2} \leq C R^k, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$C = \frac{M_2(\rho_2)M_3(\rho_3)}{(1 - \rho_2 \rho_3)^2} \rho_2 \rho_3$$

при

$$\rho_2 = \frac{R+3}{2(R+1)}, \quad \rho_3 = \frac{R+1}{2}.$$

Аналогично,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda''_{mk}| \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s+k} \leq C R^{2k}, \quad (24')$$

$$\sum_{m=k}^{m-1} |\mu''_{mk}| \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2-2s-k} \leq C R^k \quad (25')$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda'_{m0}| \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-2s-2} \leq C. \quad (24'')$$

Поэтому после перехода к пределу при $r \rightarrow 1 - 0$ в неравенстве (23) (в котором $1 \leq k \leq N$) получим неравенство

$$\sum_{k=1}^N (a_k'^2 + a_k''^2) + 2a_0'^2 \leq \frac{M}{\pi},$$

справедливое при любом $N > 0$, т.е. неравенство

$$2a_0'^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k'^2 + a_k''^2) \leq \frac{M}{\pi},$$

из которого вытекает справедливое при всех $r \leq 1$ неравенство

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} G_1(w))^2 \big|_{w=re^{i\varphi}} d\varphi = \pi \sum_{k=1}^{\infty} ((a'_k r^k)^2 + (a''_k r^k)^2) + 2\pi r a_0'^2 \leq M,$$

т.е. $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченность семейства функций (14). Согласно равенству (12) $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченность семейства функций (15) есть следствие условия леммы, $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченности семейства (13) и только что доказанной $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченности семейства функций (14). Лемма доказана.

Имеют место также следующие утверждения.

ЛЕММА 2. Пусть семейство функций (14) $L_2(0, 2\pi)$ -ограничено. Тогда при $r \rightarrow 1 - 0$ это семейство имеет $L_2(0, 2\pi)$ -предел.

ЛЕММА 3. Пусть семейство функций (15) $L_2(0, 2\pi)$ -ограничено. Тогда при $r \rightarrow 1 - 0$ это семейство слабо $L_2(0, 2\pi)$ -сходится к нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Поскольку $\operatorname{Re} G_1(w)$ является в круге $\{|w| < 1\}$ гармонической функцией, то справедливость утверждения леммы 2 можно получить, как об этом уже говорилось выше, с помощью результатов работ [3], [4] или [5]. Однако и непосредственное доказательство леммы 2 не представляет трудностей (отметим, что нас интересует лишь вопрос об L_2 -сходимости, в то время как в [3] и [4] изучен более общий случай L_p -сходимости).

Из (11) имеем при всех $\varphi \in (0, 2\pi)$ и всех $r \in (1/R, 1)$ равенство

$$\operatorname{Re} G_1(re^{i\varphi}) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (a'_k \cos k\varphi - a''_k \sin k\varphi),$$

$a'_k = \operatorname{Re} a_k$, $a''_k = \operatorname{Im} a_k$, $a_k, k \geq 0$, — коэффициенты разложения в (11), и при всех $\varphi \in [0, 2\pi]$ и r_1, r_2 из интервала $(1/R, 1)$ равенство

$$\operatorname{Re} G_1(r_1 e^{i\varphi}) - \operatorname{Re} G_1(r_2 e^{i\varphi}) = \sum_{k=1}^{\infty} (r_1^k - r_2^k) (a'_k \cos k\varphi - a''_k \sin k\varphi).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} G_1(re^{i\varphi}))^2 d\varphi &= 2\pi a_0'^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k'^2 + a_k''^2) r^{2k}, \quad r \in \left(\frac{1}{R}, 1\right), \\ \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} G_1(r_1 e^{i\varphi}) - \operatorname{Re} G_1(r_2 e^{i\varphi}))^2 d\varphi \\ &= \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k'^2 + a_k''^2) (r_1^k - r_2^k)^2, \quad r_1, r_2 \in \left(\frac{1}{R}, 1\right). \end{aligned} \quad (26)$$

По условию леммы существует постоянная $M > 0$ такая, что для всех $r \in (1/R, 1)$

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} G_1(re^{i\varphi}))^2 d\varphi = 2\pi a_0'^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k'^2 + a_k''^2) r^{2k} \leq M.$$

Следовательно, для всех целых $N \geq 1$ и всех $r \in (1/R, 1)$

$$\sum_{k=1}^N (a_k'^2 + a_k''^2) r^{2k} \leq M,$$

откуда (после перехода к пределу при $r \rightarrow 1 - 0$ в последнем неравенстве) имеем справедливое для всех $N \geq 1$ неравенство

$$\sum_{k=1}^N (a_k'^2 + a_k''^2) \leq M$$

и, тем самым, получаем сходимость числового ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k'^2 + a_k''^2).$$

Поэтому ряд, стоящий в правой части равенства (26), сходится равномерно по $r_1 \in (1/R, 1)$, $r_2 \in (1/R, 1)$. Переходя в этом равенстве к пределу при $r_1 \rightarrow 1 - 0$, $r_2 \rightarrow 1 - 0$, получаем соотношение

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} G_1(r_1 e^{i\varphi}) - \operatorname{Re} G_1(r_2 e^{i\varphi}))^2 d\varphi \rightarrow 0, \quad r_1 \rightarrow 1 - 0, \quad r_2 \rightarrow 1 - 0,$$

из которого вытекает утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Поскольку по условию множество функций (15) $L_2(0, 2\pi)$ -ограничено, то для доказательства леммы достаточно установить, что при любом (целом) $k \geq 1$

$$I_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(A(re^{i\varphi})G_2(re^{i\varphi})) \cos k\varphi d\varphi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 1 - 0, \quad (27')$$

$$J_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(A(re^{i\varphi})G_2(re^{i\varphi})) \sin k\varphi d\varphi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 1 - 0, \quad (27'')$$

и

$$I_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(A(re^{i\varphi})G_2(re^{i\varphi})) d\varphi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 1 - 0. \quad (27''')$$

Из равенства (22) следует, что

$$\begin{aligned} I_k(r) = (r^2 - 1) & \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_{mk} \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m+k-2-2s} \right. \\ & \left. + \sum_{m=k}^{\infty} \mu'_{mk} \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-k-2-2s} \right), \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_k(r) &= (1 - r^2) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda''_{mk} \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m+k-2-2s} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=k}^{\infty} \mu''_{mk} \sum_{s=0}^{m-1} r^{2m-k-2-2s} \right), \quad k \geq 1, \\
I_0(r) &= (r^2 - 1) \sum_{m=1}^{\infty} \lambda'_{m0} \sum_{s=0}^{\infty} r^{2m-2-2s}.
\end{aligned}$$

В силу (24) и (25) при $k \geq 1$ имеем неравенство

$$|I_k(r)| \leq (1 - r^2)(CR^{2k} + CR^k),$$

из которого следует соотношение (27'). Соотношения (27'') и (27''') аналогично вытекают из неравенств (24'), (25') и (24''). Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Семейство функций (10) ($r_0 = 1/R$) $L_2(0, 2\pi)$ -компактно тогда и только тогда, когда $L_2(0, 2\pi)$ -компактны каждое из семейств (14) и (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма, так же как и лемма 1, показывает определенную независимость в смысле $L_2(0, 2\pi)$ -компактности слагаемых правой части равенства (12): из $L_2(0, 2\pi)$ -компактности суммы вытекает $L_2(0, 2\pi)$ -компактность каждого слагаемого.

Так как множество функций (13), связанное с первым слагаемым правой части равенства (12) и имеющее $L_2(0, 2\pi)$ -предел при $r \rightarrow 1 - 0$, является $L_2(0, 2\pi)$ -компактным, то в доказательстве нуждается лишь утверждение о необходимости. Если множество функций (10) $L_2(0, 2\pi)$ -компактно, то из лемм 1 и 2 вытекает $L_2(0, 2\pi)$ -компактность множества функций (14), а следовательно, в силу равенства (12) и $L_2(0, 2\pi)$ -компактности множества функций (13) и $L_2(0, 2\pi)$ -компактность множества функций (15). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1'. Поскольку утверждение теоремы о необходимости тривиально, то мы останавливаемся лишь на доказательстве утверждения о достаточности. Из $L_2(0, 2\pi)$ -компактности множества функций (10) ($r_0 = 1/R$) в силу лемм 4 и 2 вытекает существование $L_2(0, 2\pi)$ -предела при $r \rightarrow 1 - 0$ множества функций (14), а в силу лемм 4, 1 и 3 вытекает $L_2(0, 2\pi)$ -компактность семейства (15) и его слабая $L_2(0, 2\pi)$ -сходимость к нулю при $r \rightarrow 1 - 0$. Покажем, что тогда семейство функций (15) сходится к нулю при $r \rightarrow 1 - 0$ и в $L_2(0, 2\pi)$.

Прежде всего отметим, что если какая-либо последовательность функций семейства (15), для которой $r \rightarrow 1 - 0$, имеет $L_2(0, 2\pi)$ -предел, то этот предел в силу слабой сходимости семейства (15) к нулю непременно нулевой.

Если бы множество функций (15) не сходилось в $L_2(0, 2\pi)$ к нулю, то существовало бы $\varepsilon' > 0$ такое, что для любого $n \geq 1$ нашлось бы r_n , $1/n < r_n < 1$, такое, что

$$\|\operatorname{Re}(A(r_n e^{i\varphi})G_2(r_n e^{i\varphi}))\| \geq \varepsilon', \quad n = 1, 2, \dots, \quad (28)$$

при этом последовательность $\{r_n, n = 1, 2, \dots\}$ можно считать монотонно возрастающей. В силу $L_2(0, 2\pi)$ -компактности последовательности функций

$$\{\operatorname{Re}(A(r_n e^{i\varphi})G_2(r_n e^{i\varphi})), 0 \leq \varphi \leq 2\pi, n = 1, 2, \dots\},$$

в ней есть $L_2(0, 2\pi)$ -сходящаяся подпоследовательность, сходящаяся, как указано выше, к нулю. А это противоречит неравенству (28). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2'. Здесь, так же как и в случае теоремы 1', мы ограничиваемся лишь доказательством достаточности, поскольку утверждение о необходимости тривиально. Из $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченности (слабой $L_2(0, 2\pi)$ -компактности) семейства функций (10) по лемме 1 следует $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченность как семейства функций (14), так и семейства (15). В силу леммы 2 из $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченности множества функций (14) вытекает его $L_2(0, 2\pi)$ -сходимость (и тем более слабая $L_2(0, 2\pi)$ -сходимость) при $r \rightarrow 1 - 0$. В силу леммы 3 из $L_2(0, 2\pi)$ -ограниченности семейства функций (15) вытекает его слабая $L_2(0, 2\pi)$ -сходимость к нулю. Так как множество функций (13) также сходится в $L_2(0, 2\pi)$ при $r \rightarrow 1$, то согласно равенству (12) семейство функций (10) слабо $L_2(0, 2\pi)$ -сходится. Теорема доказана.

Список литературы

1. Михайлов В. П. О существовании предельных значений решений полигармонического уравнения на границе области // Матем. сб. 1996. Т. 187. №11. С. 89–114.
2. Михайлов В. П. Существование граничного значения у метагармонических функций // Матем. сб. 1999. Т. 190. №10. С. 17–48.
3. Riesz F. Über die Randwerte einer analytischen Funktion // Math. Z. 1923. V. 18. P. 87–95.
4. Привалов И. И. Граничные свойства однозначных аналитических функций. М.: ГИТТЛ, 1950.
5. Михайлов В. П. О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с гладкой границей // Матем. сб. 1976. Т. 101. №2. С. 163–188.
6. Гуцин А. К. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1988. Т. 137. №1. С. 19–64.
7. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва

Поступила в редакцию
15.03.2004