Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Степин, А. М. Еременко, Неединственность включения в поток и обширность централизатора для типичного сохраняющего меру преобразования, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 12, 95–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm867>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:36:00

УДК 517.987.5+938.5

А. М. Степин, А. М. Еременко

Неединственность включения в поток и обширность централизатора для типичного сохраняющего меру преобразования

Для сохраняющего меру преобразования рассматривается задача о включении в потоки. Оказывается, что для преобразования T с однократным спектром множество потоков, включающих T , если и не пусто, то состоит либо из единственного элемента, либо из бесконечного числа спектрально неэквивалентных потоков.

Доказано, что в типичном случае имеет место максимальная неединственность включения в поток в том смысле, что централизатор типичного преобразования содержит подгруппу, изоморфную бесконечномерному тору. Доказательство этого утверждения использует так называемую динамическую альтернативу, топологический аналог теоремы Фубини, фундаментальный факт дескриптивной теории множеств о почти открытости аналитических множеств и лемму Догерти, дающую достаточные условия того, что образ сепарабельного метрического пространства имеет вторую категорию.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

1.1. Предварительные сведения.

Пусть (X, μ) — вероятностное пространство, обладающее счетным базисом и полное mod 0 относительно него. Обозначим через $\text{Aut}(X, \mu)$ группу преобразований пространства X , сохраняющих меру μ . Везде далее мы предполагаем, что (X, μ) изоморфно промежутку $[0, 1]$ со стандартной мерой Лебега.

Корнем степени n из $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ называется такое сохраняющее меру преобразование S , что $S^n = T$. Необходимое и достаточное условие существования корня из эргодического преобразования с точечным спектром было найдено П. Р. Халмошем в работе 1942 года. Эта публикация (см. также [1]) поставила вопрос о существовании преобразований с непрерывным спектром, не имеющих корней. Конструкция таких преобразований была анонсирована одним из авторов настоящей статьи в [2] и на Международном конгрессе математиков (Москва, 1966 г.). Примеры, доставляемые конструкцией из [2] и ее обобщениями, являются групповыми расширениями и обладают несчетным централизатором. Ответ на вопрос Халмоша был получен также Р. Чеконом [3], пример перемешивающего преобразования без корней предложил Д. Орнштейн [4].

В [2] показано, что число спектрально неэквивалентных корней простой степени p из преобразования T с однократным спектром равно p^n для некоторого

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-457.2003.1).

$n = 0, 1, 2, \dots$, если, разумеется, конечно множество корней из T степени p . Имеется обобщение этого утверждения на случай корней произвольной степени. Как само утверждение, так и упомянутое его обобщение перестают быть верными для преобразований со спектром кратности больше 1.

В контексте задачи о включении преобразований в потоки аналогичное утверждение может быть сформулировано (ср. [5]) следующим образом; здесь и ниже *включение T в поток $\{F_t, t \in \mathbb{R}\}$* означает, что $F_1 = T$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если преобразование T с однократным спектром допускает включение в поток, то либо такое включение единственно, либо множество $\mathcal{F}(T)$ потоков, включающих T , бесконечно, причем геометрически различные элементы $\mathcal{F}(T)$ спектрально неэквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, допустим, что T обладает однократным спектром и включается в потоки $\{F_t\}$ и $\{G_t\}$. Тогда эти потоки перестановочны между собой и $\{S_t = F_t G_{-t}, t \in \mathbb{R}\}$ есть коммутирующее с T действие окружности. Но в этом случае

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \{F_t S_{nt}\} \in \mathcal{F}(T),$$

а значит, множество $\mathcal{F}(T)$ по крайней мере счетно. Предположим теперь, что спектрально эквивалентные потоки $\{F_t^1\}$ и $\{F_t^2\}$ включают T , и обозначим через Φ_t^i унитарные операторы $f(x) \mapsto f(F_t^i x)$, $f(x) \in L^2(X, \mu)$, $i = 1, 2$. Для всех $t \in \mathbb{R}$ имеем равенство $\Phi_t^1 = V \Phi_t^2 V^{-1}$, где V – некоторый унитарный оператор. Отсюда следует, что V коммутирует с оператором $U_T: f(x) \mapsto f(Tx)$. Поскольку централизатор оператора с однократным спектром абелев, V коммутирует с операторами Φ_t^i , $t \in \mathbb{R}, i = 1, 2$. Таким образом, $\Phi_t^1 = \Phi_t^2$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Новые результаты в задачах об извлечении корней из сохраняющих меру преобразований, включении таких преобразований в потоки, типичном числе (мощности множеств) корней и включений в потоки связаны с использованием некоторых свойств аналитических¹ и массивных (всюду плотных типа G_δ) подмножеств в топологических пространствах. Среди них – фундаментальный факт дескриптивной теории множеств, доказательство которого основано на конструкции “решета Лузина”.

ТЕОРЕМА 1.2 (см., например, [6]). *Каждое аналитическое подмножество полного сепарабельного метрического пространства обладает свойством Бэра, т.е. представимо в виде симметрической разности $O \Delta M$, где O – открытое множество, а M – первой категории.*

Этот факт в сочетании с “динамической альтернативой” был использован Джонатаном Кингом в доказательстве типичности свойства преобразований обладать корнем любой степени [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 (динамическая альтернатива, см. [8]). *Пусть Γ – группа гомеоморфизмов полного сепарабельного метрического пространства $\mathcal{X}$, имеющая плотную орбиту. Тогда всякое множество $M \subset \mathcal{X}$, обладающее свойством Бэра и инвариантное относительно Γ , либо массивно, либо имеет первую категорию.*

¹ *Аналитическое множество* – это образ борелевского множества при непрерывном отображении между полными сепарабельными пространствами.

Доказательство предложения основано на единственности регулярного представления множества, обладающего свойством Бэра (т.е. такого представления в виде $O \triangle M$, где M – первой категории, а O совпадает с множеством внутренних точек своего замыкания, см. [9]).

1.2. Основная теорема. В $\text{Aut}(X, \mu)$ или, более общо, в множестве представлений некоторой локально компактной группы преобразованиями из $\text{Aut}(X, \mu)$ стандартным образом вводится слабая топология. Типичность действий группы на пространстве (X, μ) , обладающих тем или иным свойством (т.е. массивность множества таких действий), понимается в смысле этой топологии. Существенно, что слабая топология метризуема и соответствующее метрическое пространство полное.

Сформулируем теперь наш основной результат.

ТЕОРЕМА 1.3. *Для типичного преобразования $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ множество $\mathcal{F}(T)$ потоков, включающих T , имеет мощность континуума, причем потоки из $\mathcal{F}(T)$ спектрально неэквивалентны.*

Этот результат получен с помощью следующего факта, который является топологическим аналогом теоремы Фубини из теории меры.

ТЕОРЕМА 1.4 (см. [6] или [9]). *Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – полные сепарабельные метрические пространства. Если E – массивное подмножество в $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, то для типичного $x \in \mathcal{X}$ множество $E_x = \{y \in \mathcal{Y} : (x, y) \in E\}$ массивно в $\mathcal{Y}$.*

Пусть $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ и функция $f: X \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ измерима. Косым произведением (надстройкой) с базой T и коциклом f называется преобразование

$$T^f(x, n) = (Tx, f(x) + n) \quad (1)$$

пространства $(Y, \nu) = (X, \mu) \times (\mathbb{Z}_2, \mu_2)$, где $\mu_2(0) = \mu_2(1) = \frac{1}{2}$. Косое произведение с базой T мы будем также обозначать через $\tilde{T}$, не указывая коцикл явно.

Преобразование $R \in \text{Aut}(Y, \nu)$ является косым произведением в том и только том случае, когда R коммутирует со сдвигом на образующий $(x, j) \mapsto (x, j + 1)$. Группу всех косых произведений обозначим $\text{SAut}(Y, \nu)$. Она замкнута в $\text{Aut}(Y, \nu)$ и, стало быть, является полным метрическим пространством, изометричным произведению $\text{Aut}(X, \mu)$ и пространства коциклов $\mathbb{Z}_2(X)$ (топология в $\mathbb{Z}_2(X)$ вводится с помощью метрики $d_c(f, g) = \mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$). Именно $\text{Aut}(X, \mu)$ и $\mathbb{Z}_2(X)$ будут служить в качестве сомножителей $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно в теореме 1.4, а роль E будет играть массивное множество надстроек, допускающих включение в поток.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Множество*

$$\mathcal{K} = \{T^f \in \text{SAut}(Y, \nu) : \mathcal{F}(T^f) \neq \emptyset\}$$

массивно в $\text{SAut}(Y, \nu)$.

Следующее предложение содержит альтернативу относительно включения в поток для типичного преобразования.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть преобразование T принадлежит множеству $\text{SAAut}(X, \mu)$ преобразований, допускающих циклическую аппроксимацию² со скоростью $o(1/n)$, и $\mathcal{F}(T)$ не более чем счетно. Тогда множество $\mathcal{K}_T$ коциклов f , для которых $\mathcal{F}(T^f) \neq \emptyset$, имеет первую категорию в $\mathbb{Z}_2(X)$.

Пусть предложения 1.2 и 1.3 доказаны. Для типичного преобразования T множество $\mathcal{K}_T$ массивно в пространстве коциклов по предложению 1.2 и теореме 1.4. Множество $\text{SAAut}(X, \mu)$ массивно в $\text{Aut}(X, \mu)$, поэтому в силу предложения 1.3 для типичного $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ множество $\mathcal{F}(T)$ несчетно. Поскольку $\mathcal{F}(T)$ — замкнутое множество (как прообраз T при непрерывном отображении $\{T_t\} \mapsto T_1$), оно имеет мощность континуума (см., например, [6]), что доказывает теорему 1.3.

§ 2. Типичность надстроек, включаемых в потоки

2.1. Редукция к динамической альтернативе. Пусть ξ^n обозначает разбиение промежутка X на 2^n равных полуинтервалов, $\tilde{\xi}^n = \xi^n \times \varepsilon_2$, где ε_2 — разбиение $\mathbb{Z}_2$ на точки. Слабую топологию в пространстве $\text{Aut}(Y, \nu)$ зададим с помощью метрики

$$d_Y(T, S) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} d_Y^m(T, S),$$

где

$$d_Y^m(T, S) = \frac{1}{2} \sum_{C \in \tilde{\xi}^m} (\mu(TC \triangle SC) + \mu(T^{-1}C \triangle S^{-1}C)).$$

Функция

$$d_F(\{F_t\}, \{G_t\}) = \sup_{s \in [0,1]} d_Y(F_s, G_s)$$

превращает множество $\text{Flow}(Y, \nu)$ всех потоков на (Y, ν) в полное метрическое пространство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Множество

$$\text{SFlow}(Y, \nu) = \{\{F_t\} \in \text{Flow}(Y, \nu) : \forall t \in \mathbb{R} \quad F_t \in \text{SAut}(Y, \nu)\}$$

является полным сепарабельным пространством относительно топологии, индуцированной метрикой d_F .

Рассмотрим непрерывное отображение $\mathbb{P} : \text{SFlow}(Y, \nu) \rightarrow \text{SAut}(Y, \nu)$, сопоставляющее потоку $\{F_t\}$ преобразование F_1 . Множество $\mathcal{K}$ (см. предложение 1.2) является образом пространства $\text{SFlow}(Y, \nu)$ при этом отображении, в силу утверждения 2.1 и теоремы 1.2 оно обладает свойством Бэра. Воспользуемся теперь предложением 1.1, для чего рассмотрим действие группы $\text{SAut}(Y, \nu)$ на себе сопряжениями. Множество $\mathcal{K}$ инвариантно относительно этого действия.

ЛЕММА 2.1 (о сопряженности). Пусть $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ — апериодическое преобразование, $f \in \mathbb{Z}_2(X)$. Тогда множество $\{\tilde{Q}^{-1}T^f\tilde{Q} : \tilde{Q} \in \text{SAut}(Y, \nu)\}$ плотно в $\text{SAut}(Y, \nu)$.

²По поводу соответствующих определений см. [10].

Доказательство приведено в §3. Согласно этой лемме указанное выше действие имеет плотную орбиту, следовательно, множество $\mathcal{X}$ либо массивно, либо первой категории. Для того чтобы исключить вторую возможность, нам потребуется следующее понятие.

Точка $x \in \mathcal{X}$ называется *точкой локальной плотности* непрерывного отображения $f: \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$, если для любой окрестности $U \ni x$ найдется окрестность $V \ni f(x)$ такая, что $f(U)$ плотно в V . Множество точек локальной плотности данного отображения обозначается $\text{LocDen}(f)$.

ЛЕММА 2.2 (Догерти, см. [7]). Пусть $f: \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ — непрерывное отображение и $\mathcal{X}$ является полным сепарабельным метрическим пространством. Если $\text{LocDen}(f)$ плотно в $\mathcal{X}$, то $f(\mathcal{X})$ не может иметь первую категорию в $\mathcal{Y}$.

Таким образом, предложение 1.2 будет доказано, когда мы установим, что множество $\text{LocDen}(\mathbb{P})$ всюду плотно в $\text{SFlow}(Y, \nu)$. Наше доказательство будет следовать схеме рассуждений из [11].

Зафиксируем $\alpha \in (0, 1)$ и рассмотрим косое произведение P_α^f с базой $P_\alpha: x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$ и коциклом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1 - \alpha); \\ 1, & x \in [1 - \alpha, 1). \end{cases}$$

Преобразование P_α^f будем называть *сдвигом на Y* и обозначать в соответствии с договоренностью просто $\tilde{P}_\alpha$. При изоморфизме пространств (X, μ) и (Y, ν) посредством отображения $(x, j) \mapsto y = (x + j)/2$ автоморфизму $\tilde{P}_\alpha$ соответствует преобразование сдвига $y \mapsto y + \alpha/2$.

Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ потоков $\{\tilde{F}_t\} \in \text{SFlow}(Y, \nu)$, для которых преобразование $\tilde{F}_1$ сопряжено иррациональному сдвигу на Y с помощью косого произведения, т.е.

$$\tilde{F}_1 = \varphi \tilde{P}_\alpha \varphi^{-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \varphi \in \text{SAut}(Y, \nu). \quad (2)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Справедливо включение $\mathcal{P} \subset \text{LocDen}(\mathbb{P})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Множество $\mathcal{P}$ плотно в $\text{SFlow}(Y, \nu)$.

2.2. Леммы для вывода утверждения 2.2.

ЛЕММА 2.3. Пусть $\{\tilde{F}_t\} \in \mathcal{P}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ $\{\tilde{F}_{2^{-n}t}\} \in \mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что если $\{\tilde{F}_t\} \in \mathcal{P}$, то преобразование $\tilde{F}_{1/2}$ сопряжено иррациональному сдвигу посредством некоторого $\varphi_1 \in \text{SAut}(Y, \nu)$. Преобразование $\tilde{F}_{1/2}$, как и $\tilde{F}_1$, обладает чисто точечным спектром и, стало быть, имеет вид $\varphi_1 \tilde{P}_\beta \varphi_1^{-1}$. Отсюда следует, что $\varphi_1^{-1} \varphi_1$ коммутирует с $\tilde{P}_\alpha$. Сдвиг $\tilde{P}_\alpha$ имеет однократный спектр, поэтому $\varphi_1^{-1} \varphi_1$ является косым произведением вида (1), следовательно, $\varphi_1 \in \text{SAut}(Y, \nu)$, что доказывает лемму.

Занумеруем элементы разбиения $\xi^n \times \{0\}$ слева направо числами от 0 до $2^n - 1$ и аналогично элементы $\xi^n \times \{1\}$ — числами от 2^n до $2^{n+1} - 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Назовем $(2, n)$ -циклом преобразование, реализующее на элементах $\tilde{\xi}^n$ посредством параллельного переноса перестановку вида $\sigma_1\sigma_2$, где σ_1, σ_2 — непересекающиеся циклы длины 2^n , сопряженные с помощью “сдвига на образующий” $\theta = (0\ 2^n)(1\ 2^n + 1) \dots (2^n - 1\ 2^{n+1} - 1)$:

$$\theta\sigma_1 = \sigma_2\theta.$$

Отметим, что всякий $(2, n)$ -цикл S заведомо является косым произведением вида (1), так как

$$\theta S = \theta\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\theta\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1\theta = S\theta;$$

$(2, n)$ -циклы составляют в $\text{SAut}(Y, \nu)$ всюду плотное подмножество.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\tilde{S} - (2, n)$ -цикл. Тогда существует такой поток $\{\tilde{S}_t\} \in \text{SFlow}(Y, \nu)$, что $\tilde{S}_1 = \tilde{S}$ и

$$\forall t \in [0, 1] \quad d_Y(\tilde{S}_t, \text{id}) \leq d_Y(\tilde{S}, \text{id}), \quad (3)$$

id — тождественное преобразование.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдется такое $\varphi \in \text{SAut}(Y, \nu)$, что $\tilde{S} = \varphi\tilde{Q}\varphi^{-1}$, где $\tilde{Q} - (2, n)$ -цикл вида

$$(0\ 1 \dots 2^n - 1)(2^n\ 2^n + 1 \dots 2^{n+1} - 1).$$

Действительно, если перестановка, соответствующая $\tilde{S}$, есть

$$(k_0\ k_1 \dots k_{2^n-1})(k_{2^n}\ k_{2^n+1} \dots k_{2^{n+1}-1}),$$

$$k_0 = 0, \quad k_{i+2^n} = k_i + 2^n \pmod{2^{n+1}}, \quad i = 0, \dots, 2^n - 1,$$

то в качестве φ нужно взять преобразование, которое параллельным переносом переводит элемент разбиения ξ^n с номером i в элемент с номером k_i , $i = 0, \dots, 2^{n+1} - 1$.

Положим $\tilde{Q}_t(x, j) = (x + t/2^n \pmod{1}, j)$ и $\tilde{S}_t = \varphi\tilde{Q}_t\varphi^{-1}$. Ясно, что $\tilde{S}_1 = \tilde{S}$. Для того чтобы проверить неравенство (3), убедимся, что для всякого элемента C разбиения $\tilde{\xi}^m$, $m = 1, 2, \dots$, выполнено

$$\forall t \in [0, 1] \quad \nu(\tilde{S}_t C \cap C) \geq \nu(\tilde{S} C \cap C). \quad (4)$$

Если $m \geq n$, то $\tilde{S} C \cap C = \emptyset$. Пусть теперь $m < n$. Тогда

$$\nu(\tilde{S} C \cap C) = \frac{1}{2 \cdot 2^n} \text{card}\{B \in \tilde{\xi}^n : B \subset C \text{ и } \tilde{S}B \subset C\}.$$

При $t \in [0, 1]$ для любого элемента $B \in \tilde{\xi}^n$ выполняется $\tilde{S}_t B \subset (B \cup \tilde{S}B)$. Следовательно, если $B \subset C$ и $\tilde{S}B \subset C$, то $\tilde{S}_t B \subset C$, а значит, (4) имеет место.

ЛЕММА 2.5. Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\tilde{T} = \varphi \tilde{P}_\alpha \varphi^{-1}$, $\varphi \in \text{SAut}(Y, \nu)$, и дано $\varepsilon > 0$. Тогда существуют такие $\delta > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, что для всякого $(2, n)$ -цикла $\tilde{S}$, $n > N$, удовлетворяющего условию

$$d_Y(\tilde{T}^2, \tilde{S}) < \delta,$$

найдется $(2, n+1)$ -цикл $\tilde{S}_1$ такой, что $\tilde{S}_1^2 = \tilde{S}$ и

$$d_Y(\tilde{T}, \tilde{S}_1) < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование $\tilde{T}^2$ сопряжено иррациональному сдвигу $\tilde{P}_{2\alpha}$, поэтому найдется k такое, что

$$d_Y(\tilde{T}, (\tilde{T}^2)^k) < \varepsilon. \quad (5)$$

Выберем N из условия

$$\sum_{n \geq N} \frac{1}{2^n} < \varepsilon, \quad (6)$$

а $\delta > 0$ возьмем настолько малым, что для любого преобразования $\tilde{S} \in \text{SAut}(Y, \nu)$, лежащего в δ -окрестности $\tilde{T}^2$, выполняется неравенство

$$d_Y(\tilde{S}^q, \tilde{T}^{2q}) < \varepsilon, \quad q = -k+1, k. \quad (7)$$

Зафиксируем теперь $n > N$ и $(2, n)$ -цикл $\tilde{S}$ из δ -окрестности преобразования $\tilde{T}^2$, переставляющий полуинтервалы разбиения $\tilde{\xi}^n$. Введем следующее обозначение: если C – произвольный элемент $\tilde{\xi}^n$, то входящие в него полуинтервалы разбиения $\tilde{\xi}^{n+1}$ (т.е. левую и правую половины C) будем обозначать C_L и C_R соответственно. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 C_R &= \tilde{S}^k C_L, \\ \tilde{S}_1 C_L &= \tilde{S}^{-k+1} C_R \end{aligned}$$

и вычислим $d_Y^m(\tilde{S}_1, \tilde{T})$ для $m \leq n$.

Пусть A – произвольный элемент $\tilde{\xi}^m$, обозначим

$$A_R = A \cap \bigcup_{C \in \tilde{\xi}^n} C_R, \quad A_L = A \cap \bigcup_{C \in \tilde{\xi}^n} C_L.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 A_R &\subset \tilde{S}^k A, \\ \tilde{S}_1 A_L &\subset \tilde{S}^{-k+1} A \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1^{-1} A_R &\subset \tilde{S}^{k-1} A, \\ \tilde{S}_1^{-1} A_L &\subset \tilde{S}^{-k} A. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\nu(\tilde{S}_1 A \setminus \tilde{T} A) \leq \nu(\tilde{S}^k A \setminus \tilde{T} A) + \nu(\tilde{S}^{-k+1} A \setminus \tilde{T} A)$$

и

$$\nu(\tilde{S}_1^{-1} A \setminus \tilde{T}^{-1} A) \leq \nu(\tilde{S}^{-k} A \setminus \tilde{T}^{-1} A) + \nu(\tilde{S}^{k-1} A \setminus \tilde{T}^{-1} A).$$

Поскольку $\nu(A \triangle B) = 2\nu(A \setminus B)$, если $\nu A = \nu B$, имеем

$$\nu(\tilde{S}_1 A \triangle \tilde{T} A) \leq \nu(\tilde{S}^k A \triangle \tilde{T} A) + \nu(\tilde{S}^{-k+1} A \triangle \tilde{T} A)$$

и

$$\nu(\tilde{S}_1^{-1} A \triangle \tilde{T}^{-1} A) \leq \nu(\tilde{S}^{-k} A \triangle \tilde{T}^{-1} A) + \nu(\tilde{S}^{k-1} A \triangle \tilde{T}^{-1} A).$$

Складывая два последних неравенства и суммируя по $A \in \tilde{\xi}^m$, получаем для $m \leq n$

$$d_Y^m(\tilde{S}_1, \tilde{T}) \leq d_Y^m(\tilde{S}^k, \tilde{T}) + d_Y^m(\tilde{S}^{-k+1}, \tilde{T}).$$

Отсюда с учетом (6) получаем неравенство

$$d_Y(\tilde{S}_1, \tilde{T}) \leq d_Y(\tilde{S}^k, \tilde{T}) + d_Y(\tilde{S}^{-k+1}, \tilde{T}) + \varepsilon.$$

Однако в силу (5) и (7) выполняется

$$d_Y(\tilde{S}^k, \tilde{T}) \leq d_Y(\tilde{S}^k, \tilde{T}^{2k}) + d_Y(\tilde{T}^{2k}, \tilde{T}) < 2\varepsilon$$

и аналогично

$$d_Y(\tilde{S}^{-k+1}, \tilde{T}) \leq d_Y(\tilde{S}^{-k+1}, \tilde{T}^{2(-k+1)}) + d_Y(\tilde{T}^{2(-k+1)}, \tilde{T}) < 2\varepsilon,$$

так как преобразование $\tilde{T}$ сохраняет меру. Таким образом,

$$d_Y(\tilde{S}_1, \tilde{T}) < 5\varepsilon.$$

2.3. Доказательство утверждения 2.2. Пусть даны $\varepsilon > 0$ и $\{\tilde{T}_t\} \in \mathcal{P}$. Необходимо указать такое $\delta > 0$, что для всякого преобразования $\tilde{S}$ из некоторого плотного подмножества в $\text{SAut}(Y, \nu)$, $d_Y(\tilde{S}, \tilde{T}_1) < \delta$, найдется поток $\{\tilde{S}_t\} \in \text{SFlow}(Y, \nu)$ такой, что $\tilde{S}_1 = \tilde{S}$ и

$$d_F(\{\tilde{S}_t\}, \{\tilde{T}_t\}) < \varepsilon.$$

Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\forall r \in \left[0, \frac{1}{2^k}\right] \quad d_Y(\tilde{T}_r, \text{id}) < \varepsilon. \quad (8)$$

Пусть $\omega \in (0, \varepsilon)$ настолько мало, что для любого $\tilde{S} \in \text{SAut}(Y, \nu)$, лежащего в ω -окрестности преобразования $\tilde{T}_{1/2^k}$, выполняется

$$d_Y(\tilde{S}^m, \tilde{T}_{m/2^k}) < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots, 2^k.$$

В силу леммы 2.3 преобразование $\tilde{T}_{1/2^k}$ сопряжено иррациональному сдвигу на Y . Согласно лемме 2.5 существуют $N_1 \in \mathbb{N}$ и $\delta_1 > 0$ такие, что для всякого $(2, n-1)$ -цикла $\tilde{R}_1$, $n > N_1$, $d_Y(\tilde{R}_1, \tilde{T}_{2/2^k}) < \delta_1$, найдется $(2, n)$ -цикл $\tilde{R}_0$, удовлетворяющий условиям

$$\tilde{R}_0^2 = \tilde{R}_1, \quad d_Y(\tilde{R}_0, \tilde{T}_{1/2^k}) < \omega.$$

Аналогично, преобразование $T_{2/2^k}$ сопряжено иррациональному сдвигу на Y , поэтому существуют $N_2 > N_1$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для всякого $(2, n-2)$ -цикла $\tilde{R}_2$, $n > N_2$, $d_Y(\tilde{R}_2, \tilde{T}_{2/2^k}) < \delta_2$, найдется $(2, n-1)$ -цикл $\tilde{R}_1$, удовлетворяющий условиям

$$\tilde{R}_1^2 = \tilde{R}_2, \quad d_Y(\tilde{R}_1, \tilde{T}_{2/2^k}) < \delta_1.$$

Применив k раз леммы 2.3 и 2.5, укажем числа $N = N_k$ и $\delta = \delta_k$ такие, что для всякого $(2, n-k)$ -цикла $\tilde{S}$, $n > N$, $d_Y(\tilde{S}, \tilde{T}_1) < \delta$, найдется $(2, n)$ -цикл $\tilde{R}$ такой, что

$$\tilde{R}^{2^k} = \tilde{S}, \quad d_Y(\tilde{R}, \tilde{T}_{1/2^k}) < \omega.$$

В силу выбора ω справедливо

$$d_Y(\tilde{R}^m, \tilde{T}_{m/2^k}) < \varepsilon, \quad m = 1, \dots, 2^k. \quad (9)$$

Пусть $\tilde{R}_t$ – поток, построенный из $\tilde{R}$ по лемме 2.4. Положим $\tilde{S}_t = \tilde{R}_{2^k t}$, тогда $\tilde{S}_{1/2^k} = \tilde{R}$ и для $r \in [0, 1/2^k]$ в силу выбора $\tilde{R}$ и неравенства (8) выполняется

$$d_Y(\tilde{S}_r, \text{id}) \leq d_Y(\tilde{S}_{1/2^k}, \text{id}) \leq d_Y(\tilde{R}, \tilde{T}_{1/2^k}) + d_Y(\tilde{T}_{1/2^k}, \text{id}) < 2\varepsilon. \quad (10)$$

Пусть t – произвольное число из отрезка $[0, 1]$, $t = m/2^k + r$, где m целое, $0 \leq r < 1/2^k$. Благодаря (8)–(10) имеем

$$\begin{aligned} d_Y(\tilde{S}_t, \tilde{T}_t) &\leq d_Y(\tilde{S}_t, \tilde{S}_{m/2^k}) + d_Y(\tilde{S}_{m/2^k}, \tilde{T}_{m/2^k}) + d_Y(\tilde{T}_{m/2^k}, \tilde{T}_t) \\ &= d_Y(\tilde{S}_r, \text{id}) + d_Y(\tilde{S}_{m/2^k}, \tilde{T}_{m/2^k}) + d_Y(\text{id}, \tilde{T}_r) < 4\varepsilon, \end{aligned}$$

поскольку участвующие преобразования сохраняют меру.

2.4. Доказательство утверждения 2.3. Пусть даны $\{\tilde{T}_t\} \in \text{SFlow}(Y, \nu)$ и $\varepsilon > 0$. Выберем такое k , чтобы

$$\forall r \in \left[0, \frac{1}{2^k}\right] \quad d_Y(\tilde{T}_r, \text{id}) < \varepsilon, \quad (11)$$

и $\delta \in (0, \varepsilon)$ настолько малое, чтобы для всякого $\tilde{S} \in \text{SAut}(Y, \nu)$ из δ -окрестности преобразования $\tilde{T}_{1/2^k}$ выполнялось

$$d_Y(\tilde{S}^m, \tilde{T}_{m/2^k}) < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots, 2^k. \quad (12)$$

Найдем такое преобразование $S \in \text{Aut}(X, \mu)$, циклически переставляющее посредством параллельного переноса элементы разбиения ξ^n подходящего ранга n , и такой ξ^n -измеримый нечетный³ коцикл $f(x)$, чтобы косое произведение $\tilde{S} = S^f$ оказалось в $\delta/2$ -окрестности $\tilde{T}_{1/2^k}$. Как в доказательстве леммы 2.4, можно указать $\varphi \in \text{SAut}(Y, \nu)$ такое, что $\tilde{S} = \varphi \tilde{P}_{1/2^n} \varphi^{-1}$. Положим $\{\tilde{Q}_t = \varphi \tilde{P}_{t/2^n} \varphi^{-1}, t \in \mathbb{R}\}$, тогда $\tilde{Q}_1 = \tilde{S}$.

³То есть такой, сумма mod 2 значений которого по элементам ξ^n равняется 1.

Аналогично доказательству леммы (2.4) устанавливается, что

$$\forall t \in [0, 1] \quad d_Y(\tilde{Q}_t, \text{id}) \leq d_Y(\tilde{Q}_1, \text{id}).$$

Пусть α – иррациональное число из интервала $(0, 1/2^n)$, положим

$$\{\tilde{Q}'_t = \varphi \tilde{P}_{\alpha t} \varphi^{-1}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда

$$\forall t \in [0, 1] \quad d_Y(\tilde{Q}'_t, \text{id}) < d_Y(\tilde{Q}_1, \text{id}) \quad (13)$$

и можно выбрать α настолько близким к $1/2^n$, что

$$d_Y(\tilde{Q}'_1, \tilde{Q}_1) < \frac{\delta}{2}. \quad (14)$$

Наконец, положим $\{\tilde{Q}''_t = \tilde{Q}'_{2^k t}, t \in \mathbb{R}\}$, тогда $\{\tilde{Q}''_t\} \in \mathcal{P}$. Покажем, что $\{\tilde{Q}''_t\}$ достаточно хорошо приближает $\{\tilde{T}_t\}$. Действительно, произвольное $t \in [0, 1]$ можно представить в виде $t = m/2^k + r$, $0 \leq r < 1/2^k$, m целое. Поскольку рассматриваемые преобразования сохраняют меру, имеем

$$\begin{aligned} d_Y(\tilde{Q}''_t, \tilde{T}_t) &\leq d_Y(\tilde{Q}''_t, \tilde{Q}''_{m/2^k}) + d_Y(\tilde{Q}''_{m/2^k}, \tilde{T}_{m/2^k}) + d_Y(\tilde{T}_{m/2^k}, \tilde{T}_t) \\ &= d_Y(\tilde{Q}''_r, \text{id}) + d_Y(\tilde{Q}''_{m/2^k}, \tilde{T}_{m/2^k}) + d_Y(\text{id}, \tilde{T}_r). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое не превосходит ε в силу (11). Из (12) следует, что

$$d_Y(\tilde{Q}''_{m/2^k}, \tilde{T}_{m/2^k}) < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots, 2^k,$$

поскольку в силу (14) и выбора $\tilde{S} = \tilde{Q}_1$ выполняется неравенство

$$d_Y(\tilde{Q}''_{1/2^k}, \tilde{T}_{1/2^k}) \leq d_Y(\tilde{Q}''_{1/2^k}, \tilde{Q}_1) + d_Y(\tilde{Q}_1, \tilde{T}_{1/2^k}) < \delta.$$

Наконец, для $r \in [0, 1/2^k]$ благодаря (13) и (11) выполняется

$$d_Y(\tilde{Q}''_r, \text{id}) < d_Y(\tilde{Q}_1, \text{id}) \leq d_Y(\tilde{Q}_1, \tilde{T}_{1/2^k}) + d_Y(\tilde{T}_{1/2^k}, \text{id}) < 2\varepsilon.$$

Таким образом,

$$d_Y(\tilde{Q}''_t, \tilde{T}_t) < 4\varepsilon.$$

2.5. Полнота и сепарабельность $\text{SFlow}(Y, \nu)$.

Полнота. Если последовательность потоков $(\{\tilde{S}_t\})_{n=1}^\infty$ является фундаментальной в метрике d_F , то для каждого фиксированного t_0 последовательность преобразований $(\tilde{S}_{t_0})_{n=1}^\infty$ фундаментальна в метрике d_Y . Так как пространство $\text{SAut}(Y, \nu)$ полно, то предел $\tilde{S}'_{t_0}$ этой последовательности существует и является косым произведением вида (1). Ясно, что преобразования $\{\tilde{S}'_t, t \in \mathbb{R}\}$ образуют поток, который и будет пределом исходной последовательности при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $\text{SFlow}(Y, \nu)$ – полное пространство.

Сепарабельность. Обозначим через M множество потоков, полученных по лемме 2.4 из всевозможных $(2, n)$ -циклов. Докажем, что множество

$$\bigcup_k \{ \{ \tilde{S}_{2^k t} \} : \{ \tilde{S}_t \} \in M \}$$

является всюду плотным в $\text{SFlow}(Y, \nu)$.

Пусть даны $\{ \tilde{T}_t \} \in \text{SFlow}(Y, \nu)$ и $\varepsilon > 0$. Выберем k такое, что

$$\forall r \in \left[0, \frac{1}{2^k} \right] \quad d_Y(\tilde{T}_r, \text{id}) < \varepsilon,$$

и $\delta \in (0, \varepsilon)$ настолько малое, чтобы для каждого $\tilde{S}$ из δ -окрестности преобразования $\tilde{T}_{1/2^k}$ выполнялось

$$d_Y(\tilde{S}^m, \tilde{T}_{m/2^k}) < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots, 2^k. \quad (15)$$

Пусть $\tilde{S} - (2, n)$ -цикл, достаточно близкий к $\tilde{T}_{1/2^k}$, $\{ \tilde{S}'_t \}$ – поток из леммы 2.4, построенный по $\tilde{S}$. Положим $\{ \tilde{S}''_t = \tilde{S}'_{2^k t}, t \in \mathbb{R} \}$. Благодаря (15) для каждого $m = 1, 2, \dots, 2^k$ выполнено неравенство $d_Y(\tilde{S}''_{m/2^k}, \tilde{T}_{m/2^k}) < \varepsilon$. В силу выбора k для $r \in [0, 1/2^k]$ справедлива оценка

$$d_Y(\tilde{S}''_r, \text{id}) \leq d_Y(\tilde{S}''_{1/2^k}, \text{id}) \leq d_Y(\tilde{S}''_{1/2^k}, \tilde{T}_{1/2^k}) + d_Y(\tilde{T}_{1/2^k}, \text{id}) < 2\varepsilon.$$

Пусть $t \in [0, 1]$, $t = m/2^k + r$, где m целое, $0 \leq r < 1/2^k$. Тогда ввиду инвариантности меры имеем

$$\begin{aligned} d_Y(\tilde{S}''_t, \tilde{T}_t) &\leq d_Y(\tilde{S}''_t, \tilde{S}''_{m/2^k}) + d_Y(\tilde{S}''_{m/2^k}, \tilde{T}_{m/2^k}) + d_Y(\tilde{T}_{m/2^k}, \tilde{T}_t) \\ &= d_Y(\tilde{S}''_r, \text{id}) + d_Y(\tilde{S}''_{m/2^k}, \tilde{T}_{m/2^k}) + d_Y(\text{id}, \tilde{T}_r) < 4\varepsilon. \end{aligned}$$

§ 3. Альтернатива относительно включения в поток

3.1. Когомологичность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $f, g \in \mathbb{Z}_2(X)$, $T \in \text{Aut}(X, \mu)$. Будем говорить, что f *когомологично* g *над* T (обозначение: $f \underset{T}{\sim} g$), если найдется такая измеримая функция $u(x) \in \mathbb{Z}_2(X)$, что для μ -почти всех x

$$f(x) = u(Tx) + g(x) - u(x). \quad (16)$$

Если $f \underset{T}{\sim} g$, то T^f изоморфно T^g .

Это понятие естественно возникает при рассмотрении корней из косых произведений. Если $Q^h = (R^g)^2$, то

$$Q = R^2, \quad h(x) = g(Rx) + g(x) = g(Rx) - g(x),$$

т.е. $h \underset{R}{\sim} \mathbf{i}$, где $\mathbf{i}$ – тривиальный коцикл, тождественно равный нулю. Множество всех коциклов, когомологичных $\mathbf{i}$ над данным $T \in \text{Aut}(X, \mu)$, обозначим через H_T .

ЛЕММА 3.1. *Множество H_T есть всюду плотная подгруппа в $\mathbb{Z}_2(X)$.*

В [12] отмечено, что если T эргодично, то существуют кошиклы, не когомологичные $\mathbb{I}$, причем условие эргодичности можно ослабить. Это утверждение можно уточнить (см. также [13]):

ЛЕММА 3.2. *Если $R \in \text{Aut}(X, \mu)$ эргодично, то H_R имеет первую категорию в $\mathbb{Z}_2(X)$.*

Пусть лемма 3.2 доказана и $T \in \text{CAAut}(X, \mu)$. Рассмотрим коцикл $f(x) \in \mathbb{Z}_2(X)$, обладающий нечетной аппроксимацией (см. [10]) относительно той же последовательности разбиений, что и T , множество таких коциклов обозначим $\text{OAZ}_2(X)$. В этом случае T^f имеет однократный спектр, следовательно, $\mathcal{F}(T^f) \subset \text{SFlow}(Y, \nu)$. Пусть $\{\tilde{T}_t\} \in \mathcal{F}(T^f)$, тогда $f \in H_{T_{1/2}}$. Заметим, что преобразования $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ тоже составляют поток и $T_1 = T$. Таким образом, справедливо включение

$$\{f(x) \in \text{OAZ}_2 : \mathcal{F}(T^f) \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{\{T_t\} \in \mathcal{F}(T)} H_{T_{1/2}}. \quad (17)$$

В силу леммы 3.2 каждое $H_{T_{1/2}}$ имеет первую категорию в $\mathbb{Z}_2(X)$, а так как по условию доказываемого предложения $\mathcal{F}(T)$ не более чем счетно, то и левая часть (17) есть множество первой категории. Следовательно, таковым является и $\mathcal{H}_T$, поскольку отличается от него разве что на множество коциклов, не допускающих подходящей аппроксимации, а последнее также имеет первую категорию в $\mathbb{Z}_2(X)$.

3.2. Доказательство леммы 3.1. Зафиксируем $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ и $\varepsilon > 0$. Покажем, что для любого наперед заданного $g \in \mathbb{Z}_2(X)$ найдется такое $h \in \mathbb{Z}_2(X)$, что $d_c(g, h \circ T - h) < \varepsilon$. Приближим T циклической перестановкой T_1 элементов разбиения ξ^l подходящего ранга, а $g - \xi^l$ -измеримым коциклом g_1 так, чтобы

$$\sum_{C \in \xi^l} \mu(T^{-1}C \Delta T_1^{-1}C) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d_c(g, g_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

и сумма значений g_1 по элементам ξ^l равнялась нулю mod 2. Тогда $g_1 \in H_{T_1}$ и найдется такой ξ^l -измеримый коцикл h , что $g_1(x) = h(T_1x) - h(x)$. Вычислим, насколько отличаются кошиклы g_1 и $g_2 = h \circ T - h$:

$$d_c(g_1, g_2) = \mu\{x \in X : h(T_1x) \neq h(Tx)\} \leq \sum_{C \in \xi^l} \mu(T_1^{-1}C \Delta T^{-1}C) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, $d_c(g, g_2) < \varepsilon$, что доказывает лемму.

Отметим, что для суммируемых коциклов со значениями в $\mathbb{R}$ утверждение леммы 3.1 уже неверно.

3.3. Доказательство леммы 3.2. Заметим, что множество H_R не может быть массивно. Действительно, в этом случае для любого $g \in \mathbb{Z}_2(X)$ массивно множество

$$g + H_R = \{g + f, f \in H_R\},$$

следовательно, найдутся $f_1, f_2 \in H_R$ такие, что $g(x) + f_1(x) = f_2(x)$. Отсюда $g \in H_R$ и, так как коцикл g был выбран произвольно, $H_R = \mathbb{Z}_2(X)$, что противоречит эргодичности R .

Воспользуемся теперь динамической альтернативой, для чего рассмотрим в качестве Γ группу $\mathbb{Z}_2(X)$, действующую на себе следующим образом: элемент h переводит коцикл f в $f + h \circ R - h$. Множество H_R инвариантно относительно этого действия и обладает свойством Бэра как образ $\mathbb{Z}_2(X)$ при непрерывном отображении $f \mapsto f \circ R - f$. В силу леммы 3.1 орбита коцикла $\mathbf{i}$ при указанном действии плотна в $\mathbb{Z}_2(X)$. Используя предложение 1.1 и предыдущее замечание, заключаем, что множество H_R имеет первую категорию в $\mathbb{Z}_2(X)$.

3.4. Доказательство леммы сопряженности для $\text{SAut}(Y, \nu)$. Равенство $S^h = \tilde{Q}^{-1}T^f\tilde{Q}$ выполнено в том и только том случае, когда $S = Q^{-1}TQ$ и $h \underset{S}{\sim} f \circ Q$.

Пусть $U \times V$ – окрестность в $\text{SAut}(Y, \nu)$, $U \subset \text{Aut}(X, \mu)$, $V \subset \mathbb{Z}_2(X)$ – открытые множества. В силу известной леммы Халмоша найдется $Q \in \text{Aut}(X, \mu)$ такое, что $Q^{-1}TQ \in U$. Множество H_S плотно в $\mathbb{Z}_2(X)$ (лемма 3.1), следовательно, найдется коцикл $h \in V$ такой, что $h \underset{S}{\sim} f \circ Q$. Таким образом, $S^h \in U \times V$ и лемма 2.1 доказана.

§ 4. Заключительные замечания

Пусть натуральное $p \geq 2$. Обозначим через $\sqrt[p]{T}$ множество корней степени p из преобразования T . Из теоремы 1.3 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для типичного преобразования $T \in \text{Aut}(X, \mu)$ множество $\sqrt[p]{T}$ имеет мощность континуума.*

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1.3, легко установить, что геометрически различные корни также спектрально неэквивалентны.

Теорему 4.1 можно доказать и непосредственно, применив изложенную схему рассуждений с использованием теоремы 1.4. Рассмотрим косые произведения с коциклами $f : X \rightarrow \mathbb{Z}_p$. Если $Q^h = (R^g)^p$, то

$$Q = R^p, \quad h(x) = \sum_{k=0}^{p-1} g(R^k x).$$

В этом случае по-прежнему $h \underset{R}{\sim} \mathbf{i}$, когомологию осуществляет функция $u(x) = -\sum_{k=1}^{p-1} kg(R^{k-1}x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Множество*

$$\mathcal{K}' = \{T^f \in \text{SAut}(Y, \nu) : \sqrt[p]{T^f} \neq \emptyset\}$$

массивно в $\text{SAut}(Y, \nu)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Пусть $T \in \text{CAAut}(X, \mu)$ и $\sqrt[p]{T}$ не более чем счетно. Тогда множество $\mathcal{K}'_T$ коциклов f , для которых $\sqrt[p]{T^f} \neq \emptyset$, имеет первую категорию в $\mathbb{Z}_p(X)$.*

Для доказательства предложения 4.1 достаточно установить, что множество точек локальной плотности отображения $T^f \mapsto (T^f)^p$ массивно в $\text{Aut}(Y, \nu)$. Для $p = 2$ это утверждение содержится в лемме 2.5.

Доказательство предложения 4.2 аналогично рассуждениям из § 3: вместо (17) нужно рассмотреть включение

$$\{f \in \text{OAZ}_p(X) : \sqrt[p]{T^f} \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{R \in \sqrt[p]{T}} H_R.$$

Результат настоящей работы использован С.В. Тихоновым в [14] для решения поставленной в [11] проблемы о продолжении действия решетки до действия $\mathbb{R}^d$. Типичность континуальной периодической части централизатора установлена также О.Н. Агеевым в дополнение к [15] (см. [16]).

Настоящая работа в части теоремы 4.1 выполнена в 2000/2001 академическом году при частичной поддержке РФФИ. Теорема 1.3 и метод ее доказательства анонсированы авторами в [17].

Авторы благодарят Сергея Тихонова за плодотворные обсуждения по теме настоящей публикации.

Список литературы

1. Халмош П.Р. Лекции по эргодической теории. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
2. Степин А.М. О корнях квадратных из метрических автоморфизмов // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. №5. С. 1023–1026.
3. Chacon R. V. Transformations having continuous spectrum // J. Math. Mech. 1966. V. 16. №5. P. 399–415.
4. Ornstein D. S. On the root problem in ergodic theory // Proceedings of the Sixth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971). V. 2. Berkeley, CA: Univ. California Press, 1972. P. 347–356.
5. Степин А.М. Применение метода периодических аппроксимаций в спектральной теории динамических систем // Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1968.
6. Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
7. King J. F. The generic transformation has roots of all orders // Colloq. Math. 2000. V. 84/85. P. 521–547.
8. Glasner E., King J. F. A zero-one law for dynamical properties // Contemp. Math. 1998. V. 215. P. 231–242.
9. Окстоби Дж. Мера и категория. М.: Мир, 1974.
10. Каток А.Б., Степин А.М. Аппроксимации в эргодической теории // УМН. 1967. Т. 22. №5. С. 81–106.
11. de la Rue T., de Sam Lazaro J. Une transformation générique peut être insérée dans un flot // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 2003. V. 39. P. 121–134.
12. Степин А.М. О когомологиях групп автоморфизмов пространства Лебега // Функци. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. №2. С. 91–92.
13. Lemanczyk M. Extensions of cocycles for hyperfinite actions and applications // Monatsh. Math. 1997. V. 123. №4. P. 209–228.
14. Тихонов С.В. Типичное действие группы $\mathbb{Z}^d$ вкладывается в действие группы $\mathbb{R}^d$ // Докл. РАН. 2003. Т. 391. №1. С. 26–28.
15. Агеев О.Н. Типичный автоморфизм пространства Лебега сопряжен с G -расширением для любой конечной абелевой группы G // Докл. РАН. 2000. Т. 374. №4. С. 439–442.
16. Агеев О.Н. О типичности некоторых неасимптотических динамических свойств // УМН. 2003. Т. 58. №1. С. 177–178.
17. Степин А.М., Еременко А.М. Типичное сохраняющее меру преобразование имеет обширный централизатор // Докл. РАН. 2004. Т. 394. №6. С. 739–742.