Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Федорчук, Пример бикомпакта, лебегова, брауэрова и индуктивная размерности которого различны, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 12, 109–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm868>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:07:24

УДК 515.12

В. В. Федорчук

Пример бикompакта, лебегова, брауэрова и индуктивная размерности которого различны

Строится пример сепарабельного бикompакта B с первой аксиомой счетности размерности $2 = \dim B < \text{Dg } B = 3 < \text{ind } B = 4 = \text{Ind } B$, где Dg – индуктивный размерностный инвариант, введенный Брауэром в 1913 г. под названием “Dimensionsgrad”.

Библиография: 16 названий.

В статье строится пример сепарабельного бикompакта B с первой аксиомой счетности размерности $2 = \dim B < \text{Dg } B = 3 < \text{ind } B = 4 = \text{Ind } B$. Здесь через Dg обозначается размерностный инвариант, введенный Брауэром [1] еще в 1913 г. под названием “Dimensionsgrad”. Это было первое чисто топологическое определение размерности. Оно было дано для класса польских (т.е. полных сепарабельных метрических) без изолированных точек или, как говорили тогда, нормальных множеств в смысле Фреше. Но определение Брауэра подходит для произвольного топологического пространства.

Долгое время считалось, что размерность Dg совпадает с лебеговой размерностью $\dim$ и индуктивными размерностями ind и Ind в классе локально связных польских пространств (см., например, [2]). В [3] было доказано, что $\text{Dg} = \dim$ в классе всех метризуемых компактов. Но в [4] для всякого $n \geq 2$ было построено польское локально связное пространство X_n размерности $\text{Dg } X_n = 1 < n = \dim X_n$. В [5] было доказано, что $\dim X \leq \text{Dg } X$ для всякого бикompакта X . Построенный ниже пример бикompакта B снимает основные вопросы о взаимоотношениях между брауэровской размерностью Dg и другими классическими размерностями в классе бикompактов.

§ 1. Предварительные сведения

Все окрестности (если не оговорено противное) предполагаются открытыми. *Континуумом* будем называть связный бикompакт. Все рассматриваемые пространства тихоновские, все отображения непрерывны. Через Cl , Int , Bd обозначаются операторы замыкания, внутренности и границы множества соответственно. Недостающие понятия и факты читатель может найти в [6].

Разрезом между замкнутыми непересекающимися подмножествами A и B пространства X называется всякое замкнутое множество $C \subset X$, находящееся в дополнении к $A \cup B$ и обладающее следующим свойством: если континуум $K \subset X$ пересекается с A и B , то K пересекается и с C .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00706) и Веннер-Грен фонда (Wenner-Gren Foundations).

Перегородкой между замкнутыми непересекающимися подмножествами A и B пространства X называется всякое замкнутое множество $C \subset X$, находящееся в дополнении к $A \cup B$ и обладающее следующим свойством: существуют такие непересекающиеся окрестности U и V множеств A и B соответственно, что $X \setminus C = U \cup V$.

В этом определении множества U и V не фиксированы. Иногда их фиксируют, и тогда перегородкой в X между A и B называется всякая дизъюнктивная тройка $p = (U, C, V)$ со свойством $X = U \cup C \cup V$, где U и V — окрестности множеств A и B соответственно. В дальнейшем мы будем использовать оба определения перегородки. При этом переход от второго определения к первому однозначен. Иногда будем говорить, что тройка (U, C, V) является представлением перегородки C . Одним из простых, но важных свойств этих определений является то, что след перегородки на подпространстве является перегородкой. Иногда перегородкой в X называется просто дизъюнктивная тройка $p = (U, C, V)$ со свойством $X = U \cup C \cup V$, где U и V открыты и непусты.

Ясно, что всякая перегородка в X между A и B является разрезом в X между A и B . Обратное неверно уже в классе плоских континуумов. Тем не менее имеется достаточно широкий класс пространств, в которых эти понятия совпадают. Напомним, что пространство X *связно континуумами*, если любые две точки $x, y \in X$ лежат в некотором континууме $K \subset X$. Пространство X называется *локально связным континуумами*, если во всякой окрестности Ox произвольной точки $x \in X$ находится меньшая окрестность O_1x , связанная континуумами. Очевидно, что пространство, локально связанное континуумами, локально связно. Обратное неверно уже в классе сепарабельных метрических пространств. Но в классе бикомпактов понятия локальной связности и локальной связности континуумами совпадают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Пусть X — связное континуумами пространство. Тогда всякий разрез в X является перегородкой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F_1 и F_2 — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X , а Φ — разрез между ними. Для произвольной точки $x \in X \setminus \Phi$ обозначим через $C_\Phi(x)$ объединение всех континуумов, содержащих точку x и лежащих в $X \setminus \Phi$. Легко видеть, что множество $C_\Phi(x)$ открыто. Тогда открытым будет и множество $C_\Phi(A) = \bigcup \{C_\Phi(x) : x \in A\}$ для всякого множества $A \subset X \setminus \Phi$. Множества $C_\Phi(F_1)$ и $C_\Phi(F_2)$ не пересекаются, поскольку Φ является разрезом между F_1 и F_2 . Покажем, что множество

$$D = C_\Phi(F_1) \cup C_\Phi(F_2) \cup \Phi$$

замкнуто. Пусть $x \notin D$. Существует связная континуумами окрестность Ox , не пересекающаяся с Φ . Тогда $Ox \cap C_\Phi(F_i) = \emptyset$, так как в противном случае $x \in C_\Phi(F_i)$. Теперь, полагая $U_1 = C_\Phi(F_1)$ и $U_2 = C_\Phi(F_2) \cup (X \setminus D)$, получаем, что (U_1, Φ, U_2) есть перегородка между F_1 и F_2 . Предложение 1.1 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *В локально связном бикомпакте всякий разрез является перегородкой.*

СЛЕДСТВИЕ 1.3 (см. [7] или [8]). *В локально связном полном метризуемом пространстве всякий разрез является перегородкой.*

В самом деле, локально связное полное метризуемое пространство не только локально связно континуумами, но и локально связно дугами. Это вытекает из следующей знаменитой теоремы Мазуркевича.

ТЕОРЕМА 1.4 [9]. *Любые две точки связного локально связного полного метризуемого пространства соединяются гомеоморфным образом отрезка.*

Следующее утверждение очевидно.

ЛЕММА 1.5. *Пусть пространство X является дискретной суммой своих подпространств X_α , и пусть $F_1, F_2 \subset X$ — непересекающиеся замкнутые множества. Тогда если C_α является разрезом (перегородкой) в X_α между $F_1 \cap X_\alpha$ и $F_2 \cap X_\alpha$, то $\bigcup_\alpha C_\alpha$ является разрезом (перегородкой) в X между F_1 и F_2 .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. *Размерность $\text{Dg } X$ пространства X определяется по индукции:*

- $\text{Dg } X = -1$ тогда и только тогда, когда $X = \emptyset$;
- $\text{Dg } X \leq n$ тогда и только тогда, когда для любых замкнутых непересекающихся множеств $A, B \subset X$ существует разрез C между ними размерности $\text{Dg } C \leq n - 1$;
- $\text{Dg } X = n$ тогда и только тогда, когда n — наименьшее целое число, для которого $\text{Dg } X \leq n$. Если не существует такого n , что $\text{Dg } X \leq n$, то $\text{Dg } X = \infty$.

Из того, что всякая перегородка является разрезом, вытекает неравенство

$$\text{Dg } X \leq \text{Ind } X$$

для произвольного пространства X . При этом определение большой индуктивной размерности Ind повторяет определение 1.6 инварианта Dg . В частности, $\text{Ind } X = \infty$ для всякого пространства X , большая индуктивная размерность которого не определена, например, для не нормального пространства X . Ясно также, что инвариант Dg , как и Ind , обладает свойством монотонности при переходе к замкнутым подмножествам.

Напомним, что для отображения $f: X \rightarrow Y$ малым образом множества $A \subset X$ называется множество

$$f^\# A = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset A\} = Y \setminus f(X \setminus A).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7 [10]. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *вполне замкнутым*, если для каждой точки $y \in Y$ и любого конечного покрытия $\{U_1, \dots, U_s\}$ ее прообраза $f^{-1}(y)$ множествами, открытыми в X , множество $\{y\} \cup (\bigcup_{i=1}^s f^\# U_i)$ открыто в Y , в частности является окрестностью точки y .

Всякое вполне замкнутое отображение замкнуто. Непосредственно из определения 1.7 выводится

ЛЕММА 1.8 [11]. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ — вполне замкнутое отображение, а X_0 — замкнутое подмножество пространства X . Тогда отображение $f|_{X_0}: X_0 \rightarrow f(X_0)$ также вполне замкнуто.*

ЛЕММА 1.9 [10]. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – вполне замкнутое отображение регулярного пространства X на пространство Y , а U открыто в X . Тогда для всякой точки $y \in Y$ множество $U^y = (U \cap f^{-1}(y)) \cup f^{-1}(f \# U)$ открыто.

Из леммы 1.9 вытекает

ЛЕММА 1.10 [12]. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – вполне замкнутое отображение регулярного пространства X на пространство Y . Тогда для любых замкнутых непересекающихся множеств $F_1, F_2 \subset X$ множество $f(F_1) \cap f(F_2)$ дискретно в Y .

Напомним, что для отображения $f: X \rightarrow Y$ через $\dim f$ обозначается точная верхняя грань множества $\{\dim f^{-1}(y) : y \in Y\}$.

ТЕОРЕМА 1.11 [10]. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – вполне замкнутое отображение между бикомпактами. Тогда $\dim X \leq \max\{\dim Y, \dim f\}$.

Наша основная конструкция будет во многом напоминать конструкцию из работы [13]. Но нам потребуются некоторые ее дополнительные свойства. Поэтому приведем эту конструкцию в более общем виде. Пусть дано пространство X , и пусть для каждой точки $x \in X$ зафиксированы непустое пространство Y_x и непрерывное отображение $h_x: X \setminus \{x\} \rightarrow Y_x$. Резольвентой (множества) X относительно Y_x и h_x называется множество

$$R(X, Y_x, h_x) = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times Y_x.$$

Сопоставим каждой паре (U, V) , где U открыто в X и V открыто в Y_x для некоторого $x \in U$, множество

$$O(U, x, V) = \{x\} \times V \cup \left(\bigcup \{ \{z\} \times Y_x : z \in U \cap h_x^{-1}(V) \} \right).$$

Семейство всех таких множеств является базой топологии на $R(X, Y_x, h_x)$, называемой *топологией резольвенты*. Как правило, символы пространств Y_x и отображений h_x опускаются и резольвента обозначается через $R(X)$.

Естественное отображение $\pi: R(X) \rightarrow X$ также называется *резольвентой*. Оно, очевидно, непрерывно, и для каждого x отображение $y \mapsto (x, y)$ является вложением пространства Y_x в $R(X)$. Таким образом, $R(X)$ получается заменой каждой точки x пространством Y_x . Следующее утверждение доказывается непосредственной проверкой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.12. Если все пространства Y_x бикомпактны, то резольвента $\pi: R(X) \rightarrow X$ вполне замкнута.

Из предложения 1.12 непосредственно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13. Если X и все пространства Y_x бикомпактны, то резольвента $R(X)$ бикомпактна.

Следующее утверждение также достаточно очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.14. Пусть $\pi: R(X, Y_x, h_x) \rightarrow X$ – резольвента и $Z \subset X$. Тогда $\pi|_{\pi^{-1}(Z)}: \pi^{-1} \rightarrow Z$ также является резольventой относительно Y_z и g_z , где $g_z = h_z|_{(Z \setminus \{z\})}$.

В бикомпактах псевдохарактер совпадает с характером. Поэтому имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.15. Если $f: X \rightarrow Y$ – отображение бикомпакта X на бикомпакт Y с 1-й аксиомой счетности и каждый бикомпакт $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, удовлетворяет 1-й аксиоме счетности, то X также удовлетворяет 1-й аксиоме счетности.

Из предложений 1.13 и 1.15 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.16. Если бикомпакт X и все бикомпакты Y_x , $x \in X$, удовлетворяют 1-й аксиоме счетности, то резольвента $R(X)$ также удовлетворяет 1-й аксиоме счетности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.17 [14]. Отображение $f: X \rightarrow Y$ на Y называется *кольцевым*, если для любой точки $x \in X$ и произвольных окрестностей Ox и $Of(x)$ множество $Of(x) \cap f^\# Ox$ содержит перегородку между точкой x и множеством $Y \setminus Of(x)$.

Из того, что след перегородки на множестве является перегородкой, вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.18. Если $f: X \rightarrow Y$ – кольцевое отображение и $Z \subset Y$, то $f|_{f^{-1}(Z)}$ также является кольцевым отображением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.19 [14]. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – кольцевое отображение и $C \subset X$ – такое замкнутое множество, что множество $f(C)$ связно и состоит более чем из одной точки. Тогда $C = f^{-1}(f(C))$.

Напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ на Y называется *неприводимым*, если для произвольного замкнутого множества $F \subset X$ из $f(F) = Y$ следует $F = X$. Из предложения 1.19 непосредственно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.20. Всякое кольцевое отображение на связное неодноточечное пространство неприводимо.

Следующее утверждение достаточно очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.21. Всякий неприводимый прообраз сепарабельного пространства сепарабелен.

Из предложений 1.20 и 1.21 имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.22. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – кольцевое отображение на связное сепарабельное неодноточечное пространство. Тогда пространство X сепарабельно.

Из определения топологии резольventы непосредственно получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.23. Пусть $R(X)$ – резольвента пространства X относительно Y_x и h_x . Предположим, что для всякой точки $x \in X$, произвольной ее окрестности Ox и всякого непустого открытого множества $V \subset Y_x$ множество $Ox \cap h_x^{-1}(V)$ содержит перегородку между точкой x и множеством $X \setminus Ox$. Тогда резольвента $\pi: R(X) \rightarrow X$ является кольцевым отображением.

Напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *монотонным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ всякой точки $y \in Y$ связен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.24. Пусть f – монотонное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y , и пусть $A, B \subset Y$ – непересекающиеся замкнутые множества. Тогда для всякой перегородки (разреза) C в X между $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ множество $f(C)$ является перегородкой (разрезом) в Y между A и B .

Для разрезов это утверждение вытекает из того, что прообраз континуума при монотонном отображении является континуумом. Для перегородок надо применить очевидное равенство $f^\#(U \cup V) = f^\#U \cup f^\#V$, где U и V – непересекающиеся открытые подмножества пространства X .

ЛЕММА 1.25. Пусть F, F_1, F_2 – замкнутые подмножества нормального пространства X , причем $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Пусть $p = (U_1, C, U_2)$ – перегородка в X между множествами $F \cap F_1$ и $F \cap F_2$. Тогда существует такая замкнутая окрестность Φ множества F , что $(\Phi \cap U_1, \Phi \cap C, \Phi \cap U_2)$ есть перегородка в Φ между $\Phi \cap F_1$ и $\Phi \cap F_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $D_i = U_i \cup C$ и

$$X_0 = X \setminus (D_1 \cap F_2) \cup (D_2 \cap F_1).$$

Множество X_0 открыто в X . Покажем, что $F \subset X_0$. Для этого достаточно проверить, что $F \cap (D_i \cap F_{i+1}) = \emptyset$. Пусть $x \in F$. Тогда по определению перегородки p либо $x \in D_i$, либо $x \in U_{i+1}$. В первом случае $x \in D_i \cap F$ и, следовательно, $x \notin D_i \cap F \cap F_{i+1}$. Аналогично рассматривается и второй случай.

Из нормальности пространства X вытекает существование замкнутой окрестности Φ множества F , лежащей в X_0 . След перегородки на подмножестве есть перегородка. Остается проверить, что $\Phi \cap F_i \subset U_i$. Докажем больше:

$$X_0 \cap F_i \subset U_i. \quad (1.1)$$

Пусть $i = 1$. Если условие (1.1) не выполняется, то существует точка $x \in X_0 \cap F_1 \cap D_2$. Но этого не может быть по определению множества X_0 . Случай $i = 2$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.26. Пусть $f: R \rightarrow X$ – вполне замкнутое отображение между бикомпактами, определяемое семейством функций $h_x: X \setminus \{x\} \rightarrow Y_x$ (резольвента). Пусть $F_1, F_2 \subset R$ – такие непересекающиеся замкнутые множества, что $f(F_1) \cap f(F_2) = \{x_0\}$. Тогда для любой перегородки C в $f^{-1}(x_0)$ между $F_1 \cap f^{-1}(x_0)$ и $F_2 \cap f^{-1}(x_0)$ существует такая замкнутая окрестность H точки x_0 в X , что множество

$$D = C \cup f^{-1}(H \cap h_{x_0}^{-1}(C))$$

есть перегородка в $f^{-1}(H)$ между $F_1 \cap f^{-1}(H)$ и $F_2 \cap f^{-1}(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют такие непересекающиеся окрестности V_1 и V_2 множеств $F_1 \cap f^{-1}(x_0)$ и $F_2 \cap f^{-1}(x_0)$ в $f^{-1}(x_0)$, что $f^{-1}(x_0) \setminus C = V_1 \cup V_2$. По определению резольвенты существует такая окрестность Ox_0 , что $h_{x_0}^{-1}(f^{-1}(x_0)) = Ox_0 \setminus \{x_0\}$. Поскольку $f^{-1}(x_0) = V_1 \cup C \cup V_2$, имеем $Ox_0 = \{x_0\} \cup G_1 \cup h_{x_0}^{-1}(C) \cup G_2$, где $G_i = h_{x_0}^{-1}(V_i)$. Следовательно, $f^{-1}(Ox_0) = O_1 \cup K \cup O_2$, где $O_i = V_i \cup f^{-1}(G_i)$,

$K = C \cup f^{-1}(h_{x_0}^{-1}(C))$. Множества O_i открыты в R по определению резольвенты и не пересекаются. Значит, дополнение в $f^{-1}(Ox_0)$ к их объединению замкнуто в $f^{-1}(Ox_0)$. Но это дополнение по определению равно K . Таким образом, (O_1, K, O_2) есть перегородка в $f^{-1}(Ox_0)$. Возьмем замкнутую в X окрестность Γ точки x_0 , лежащую в Ox_0 . Положим $W_i = f^{-1}(\Gamma) \cap O_i$ и $E = f^{-1}(\Gamma) \cap K$. Поскольку $F_i \cap f^{-1}(x_0) \subset O_i$, (W_1, E, W_2) есть перегородка в $f^{-1}(\Gamma)$ между $F_1 \cap f^{-1}(x_0)$ и $F_2 \cap f^{-1}(x_0)$. По лемме 1.25 существует такая замкнутая в $f^{-1}(\Gamma)$ окрестность Φ множества $f^{-1}(x_0)$, что $\varphi = (\Phi \cap W_1, \Phi \cap E, \Phi \cap W_2)$ есть перегородка в Φ между $\Phi \cap F_1$ и $\Phi \cap F_2$. В силу замкнутости отображения f существует такая замкнутая окрестность H точки x_0 , что $f^{-1}(H) \subset \Phi$. След перегородки φ на $f^{-1}(H)$ и будет искомой перегородкой. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.27. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — замкнутое монотонное отображение на Y , и пусть F_1 и F_2 — такие замкнутые подмножества пространства X , что $f(F_1) \cap f(F_2) = \emptyset$. Предположим, что $(U_1, f^{-1}(\Gamma), U_2)$ — перегородка в X между F_1 и F_2 . Тогда $(f(U_1), \Gamma, f(U_2))$ является перегородкой в Y между $f(F_1)$ и $f(F_2)$, а $U_i = f^{-1}(f(U_i))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $X \setminus f^{-1}(\Gamma) = U_1 \cup U_2$ получаем, что $Y \setminus \Gamma = f^\#(X \setminus f^{-1}(\Gamma)) = f^\#(U_1 \cup U_2) =$ (в силу монотонности отображения f и дизъюнктивности множеств U_1 и U_2) $= f^\#(U_1) \cup f^\#(U_2)$. Из той же дизъюнктивности вытекают равенства $U_i = f^{-1}(f(U_i))$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.28. Пусть пространство X представлено в виде объединения замкнутых подпространств X_1 и X_2 , и пусть A, B — замкнутые непересекающиеся подмножества пространства X . Предположим, что (U_1, C, V_1) является перегородкой в X_1 между $A \cap X_1$ и $B \cap X_1$, а D — перегородка в X между $(A \cup (U_1 \cup C)) \cap X_2$ и B . Тогда $C \cup D$ содержит перегородку в X между A и B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения перегородок C и D вытекает, что

$$(C \cup D) \cap B = \emptyset. \quad (1.2)$$

Возьмем какое-нибудь представление $p = (U_2, D, V_2)$ перегородки D . Ясно, что $A \subset U \equiv U_1 \cup U_2$. Проверим, что множество U открыто в X . Но множества U_2 и $U_1 \setminus X_2$ открыты в X . Поэтому для доказательства открытости множества U достаточно установить, что

$$U \setminus U_2 \subset U_1 \setminus X_2. \quad (1.3)$$

Из определения перегородки p вытекает, что $U_1 \cap X_2 \subset U_2$. Следовательно,

$$U_1 \setminus U_2 \subset U_1 \setminus U_1 \cap X_2 = U_1 \setminus X_2.$$

Итак, условие (1.3), а вместе с ним и открытость множества U проверены.

Теперь покажем, что

$$\text{Bd } U \subset C \cup D. \quad (1.4)$$

Очевидно, что $\text{Bd}(Y \cup Z) \subset \text{Bd } Y \cup \text{Bd } Z$ для любых подпространств Y и Z пространства X . Ясно также, что $\text{Bd } U_1 \subset C \cup (U_1 \cap X_2)$. Как уже отмечено выше, $U_1 \cap X_2 \subset U_2$. Поэтому справедливость включения (1.4) установлена. По определению множества U оно не пересекается с B . Поэтому из (1.2) и (1.4) вытекает, что $\text{Bd } U$ есть искомая перегородка между A и B . Лемма доказана.

ЛЕММА 1.29. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – замкнутое отображение на Y . Пусть (F, F_0) и (Φ, Φ_0) – такие замкнутые пары в пространствах X и Y соответственно, что $f(F) = \Phi$, $f(F_0) = \Phi_0$ и $F \setminus F_0 = f^{-1}(\Phi \setminus \Phi_0)$. Предположим, что N – такое замкнутое подмножество множества F , что $N \cap f^{-1}(\Phi_0) = F_0$. Тогда множество $N_1 = F_0 \cup f^{-1}(f(N \setminus F_0))$ замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in F \setminus N_1$. Тогда $f(x) \in f(F \setminus N_1) =$ (поскольку $F \setminus N_1 = f^{-1}(f(F \setminus N_1)) = f(F) \setminus f(N_1) = f(F) \setminus f(N)$). В силу замкнутости отображения f множество $f(N)$ замкнуто. Следовательно, $f^{-1}(Y \setminus f(N))$ есть окрестность точки x , не пересекающаяся с N_1 . Поэтому из включения $N_1 \subset F$ вытекает замкнутость множества N_1 . Лемма доказана.

Следующие утверждения достаточно очевидны.

ЛЕММА 1.30. Пусть C – перегородка в X между замкнутыми множествами A и B . Тогда всякое замкнутое множество $D \supset C$, не пересекающееся с $A \cup B$, также будет перегородкой в X между A и B .

ЛЕММА 1.31. Образ перегородки при монотонном неприводимом отображении является перегородкой.

ЛЕММА 1.32. Если некоторая компонента связности K открытого подмножества U континуума X бикомпактна, то $K = U = X$.

§ 2. Основной результат

ПРИМЕР. Существует сепарабельный бикомпакт B с 1-й аксиомой счетности размерности $2 = \dim B < \text{Dg } B = 3 < \text{ind } B = 4 = \text{Ind } B$.

Пусть $\varphi: (0, \pi] \rightarrow T^2$ – “половина” иррациональной обмотки тора после гомеоморфного отождествления полуинтервала $(0, \pi]$ с полупрямой $(-\infty, 0]$. При таком отображении всякий компакт $K \subset (0, \pi]$ гомеоморфно отображается на свой образ $\varphi(K)$, который, следовательно, нигде не плотен в T^2 . Значит, для всякого положительного $a \leq \pi$

$$\text{множество } \varphi((0, a]) \text{ всюду плотно в } T^2. \quad (2.1)$$

Для произвольной точки $s \in S^2$ определим отображение $h_s: S^2 \setminus \{s\} \rightarrow T^2$ следующим образом:

$$h_s(t) = \varphi(\rho(s, t)),$$

где ρ – внутренняя метрика на сфере $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$. Из определения отображения h_s и свойства (2.1) непосредственно вытекает следующее свойство:

$$\begin{aligned} &\text{для всякой окрестности } U \subset S^2 \text{ точки } s \text{ и всякого непустого} \\ &\text{открытого множества } V \subset T^2 \text{ множество } U \cap h_s^{-1}(V) \text{ содержит} \\ &\text{непустое открытое сферическое кольцо с центром в точке } s. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Обозначим через B резольвенту $R(S^2)$ относительно семейства $Y_s = T^2$ и h_s , а через $\pi: B \rightarrow S^2$ – проектирование резольвенты. Пространство B является бикомпактом с 1-й аксиомой счетности (см. предложения 1.13 и 1.16). По предложению 1.12 отображение π вполне замкнуто. Следовательно, $\dim B = 2$ согласно теореме 1.11. Далее, из свойства (2.2) и предложения 1.23 вытекает, что

$$\text{отображение } \pi \text{ является кольцевым.} \quad (2.3)$$

Поэтому согласно предложению 1.22 бикомпакт B сепарабелен.

Докажем, что $\text{Dg } B = 3$. Сначала проверим неравенство

$$3 \leq \text{Dg } B. \quad (2.4)$$

Для этого достаточно показать, что если $C \subset B$ есть разрез между $\pi^{-1}(s_1)$ и $\pi^{-1}(s_2)$, где $s_1, s_2 \in S^2$ – различные точки, то $C \supset \pi^{-1}(s)$ для некоторой точки $s \in S^2$. По предложению 1.24 множество $\pi(C)$ является разрезом между s_1 и s_2 . Тогда $\pi(C)$ есть перегородка между s_1 и s_2 согласно следствию 1.2. Следовательно, компакт $\pi(C)$ содержит невырожденный континуум K , поскольку сфера является (канторовым) 2-многообразием и поэтому не содержит нульмерных перегородок. Значит, $\pi^{-1}(K) \subset C$ в силу предложения 1.19. Неравенство (2.4) проверено.

Для дальнейшего нам потребуются несколько вспомогательных понятий и утверждений. Компакт $K \subset S^2$ назовем *сходящейся последовательностью окружностей* (кратко *спо-множеством*), если он состоит из точки $s \in S^2$ и сходящейся к ней последовательности окружностей S_i^1 со сферическим центром s . Точка s называется *центром спо-множества* K .

Компакт $K \subset S^2$ будем называть *окружностно трансверсальным*, если существует такое $\varepsilon > 0$, что множество $K \cap S$ конечно для любой окружности $S \subset S^2$, $\text{diam } S < \varepsilon$.

ЛЕММА 2.1. *Для любых двух непересекающихся замкнутых множеств $D, E \subset S^2$ существует перегородка C между ними, являющаяся одномерным окружностно трансверсальным полиэдром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольно точку $s \in S^2 \setminus D \cup E$. Пусть $\sigma: S^2 \setminus \{s\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ – стереографическая проекция. В плоскости $\mathbb{R}^2$ существует прямолинейный 1-полиэдр P , являющийся перегородкой между $\sigma(D)$ и $\sigma(E)$. Легко видеть, что компакт $C = \sigma^{-1}(P)$ и будет искомой окружностно трансверсальной перегородкой между D и E .

Компакт $M \subset S^2$ назовем *специальным*, если $M = K_1 \cup \dots \cup K_n \cup L$, где $\{K_i\}$ – дизъюнктное семейство спо-множеств, а L – окружностно трансверсальный 1-полиэдр, пересекающийся с каждым множеством K_i лишь по конечному множеству.

ЛЕММА 2.2. *Пусть $M \subset S^2$ – специальный компакт и $F_1, F_2 \subset \pi^{-1}(M)$ – непересекающиеся замкнутые множества. Тогда в $\pi^{-1}(M)$ существует разрез C между F_1 и F_2 , являющийся метризуемым компактом размерности $\dim C \leq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем представление $M = K_1 \cup \dots \cup K_n \cup L$ из определения специального компакта. Поскольку полиэдр L окружностно трансверсален, конечное множество $L \cap K_i$ не содержит центра спо-компакта K_i . Значит, множество $L \cap K_i$ лежит в объединении конечного числа окружностей из K_i . Обозначим это объединение через K_i^L и положим

$$K_i^0 = K_i \setminus K_i^L, \quad L_1 = K_1 \cup \dots \cup K_n \cup L.$$

Тогда M является дизъюнктной суммой компактов L_1 и K_i^0 , $i = 1, \dots, n$. При этом каждое K_i^0 является спо-множеством, а L_1 , как легко видеть, – окружностно трансверсальным полиэдром. Поэтому согласно лемме 1.5 при доказательстве леммы 2.2 достаточно рассмотреть два случая:

- 1) M есть спо-множество,
- 2) M – окружностно трансверсальный связный полиэдр.

1) В силу той же леммы 1.5 и леммы 1.10 достаточно рассмотреть случай $\pi(F_1) \cap \pi(F_2) = \{s\}$, где s – центр спо-множества $M = K$. По определению отображения h_s множество $h_s(K \setminus \{s\})$ счетно. Поэтому в множестве $\pi^{-1}(s) = \{s\} \times T^2$ существует полиэдральная перегородка C между $F_1 \cap \pi^{-1}(s)$ и $F_2 \cap \pi^{-1}(s)$, не пересекающаяся с множеством $h_s(K \setminus \{s\})$ (такую перегородку можно составить из конечного числа отрезков параллелей и меридианов тора T^2). Значит, $h_s^{-1}(C) \cap K = \emptyset$. Следовательно, применяя лемму 1.26 для отображения $f = \pi|_{\pi^{-1}(M)}$, которое также является резольвентой в силу предложения 1.14, находим такую сферическую окрестность H точки s в K , что C есть перегородка в $\pi^{-1}(H)$ между $F_1 \cap \pi^{-1}(H)$ и $F_2 \cap \pi^{-1}(H)$. Снова применяя лемму 1.5, можно уменьшить множество K и считать, что $K = H$. Тогда C и есть искомый одномерный разрез между F_1 и F_2 .

2) Пусть

$$\pi(F_1) \cap \pi(F_2) = \{s_1, \dots, s_m\}. \quad (2.5)$$

Обозначим через S_i сферический круг с центром в s_i , удовлетворяющий определению окружностной трансверсальности компакта M . Положим $R_i = S_i \cap M$. Уменьшив радиус, можно считать, что семейство $R_1, \dots, R_m$ дизъюнктно. Пусть (U_i, C_i, V_i) – перегородка в $\pi^{-1}(s_i)$ между $F_1 \cap \pi^{-1}(s_i)$ и $F_2 \cap \pi^{-1}(s_i)$, состоящая из отрезков параллелей и меридианов тора $\{s_i\} \times T^2$. По определению отображения h_{s_i} множество $\{s_i\} \cup h_{s_i}^{-1}(C_i) = K_i$ является спо-компактом с центром в s_i . Как и при рассмотрении случая 1), согласно лемме 1.26 и предложению 1.14 находим такую замкнутую сферическую окрестность H_i точки s_i , что $H_i \cap M \subset R_i$ и множество

$$D_i = C_i \cup \pi^{-1}(M \cap H_i \cap h_{s_i}^{-1}(C_i)) \quad (2.6)$$

есть перегородка в $\pi^{-1}(M \cap H_i)$ между $F_1 \cap \pi^{-1}(H_i)$ и $F_2 \cap \pi^{-1}(H_i)$.

Пусть G_i – такая открытая сферическая окрестность точки s_i в компакте M , что $\text{Cl}(G_i) \subset H_i$. Положим $M_0 = H \cap M$, где $H = H_1 \cup \dots \cup H_m$, и $M_1 = M \setminus G$, где $G_1 \cup \dots \cup G_m$. Имеем

$$\pi(F_1) \cap \pi(F_2) \cap M_1 = \{s_1, \dots, s_m\} \cap M_1 = \emptyset. \quad (2.7)$$

Согласно (2.6) и лемме 1.5 имеем, что

$$\begin{aligned} &\text{множество } D = D_1 \cup \dots \cup D_m \text{ является перегородкой в } \pi^{-1}(M_0) \\ &\text{между } F_1 \cap \pi^{-1}(M_0) \text{ и } F_2 \cap \pi^{-1}(M_0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Пусть D имеет представление (U_1, D, U_2) . Положим $\Sigma = \{s_1, \dots, s_m\}$. Поскольку след перегородки является перегородкой, из (2.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\text{тройка } (U_1 \setminus \pi^{-1}(\Sigma), D \setminus \pi^{-1}(\Sigma), U_2 \setminus \pi^{-1}(\Sigma)) \text{ является} \\ &\text{перегородкой в множестве } \pi^{-1}(M_0 \setminus \Sigma) \text{ между} \\ &F_1 \cap \pi^{-1}(M_0 \setminus \Sigma) \text{ и } F_2 \cap \pi^{-1}(M_0 \setminus \Sigma). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из леммы 1.27 и (2.9) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\text{тройка } (\pi(U_1) \setminus \Sigma, \pi(D) \setminus \Sigma, \pi(U_2) \setminus \Sigma) \text{ есть перегородка в } M_0 \setminus \Sigma \\ &\text{между } \pi(F_1) \cap (M_0 \setminus \Sigma) \text{ и } \pi(F_2) \cap (M_0 \setminus \Sigma). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Вновь переходя к следу перегородки на множестве и учитывая (2.7), получаем, что

$$\text{тройка } (\pi(U_1) \cap M_1, \pi(D) \cap M_1, \pi(U_2) \cap M_1) \text{ есть перегородка} \quad (2.11) \\ \text{в } M_0 \cap M_1 \text{ между } \pi(F_1) \cap M_0 \cap M_1 \text{ и } \pi(F_2) \cap M_0 \cap M_1.$$

Согласно (2.11) множество $\pi(U_1 \cup D) \cap M_1$ не пересекается с $\pi(F_2)$. Поэтому в 1-полиэдре M существует конечная перегородка T между $(\pi(F_1) \cap M_1) \cup (\pi(U_1 \cup D) \cap M_1)$ и $\pi(F_2)$. Тогда

$$\pi^{-1}(T) \text{ есть перегородка в } \pi^{-1}(M) \quad (2.12) \\ \text{между } (F_1 \cup U_1 \cup D) \cap \pi^{-1}(M_1) \text{ и } F_2.$$

Из (2.8) и леммы 1.28 вытекает, что множество $P = \pi^{-1}(T) \cup D$ содержит перегородку N в $\pi^{-1}(M)$ между F_1 и F_2 . Поскольку компакт M окружностно трансверсален, он пересекается с каждой окружностью, лежащей в пространстве K_i , по конечному множеству. Из связности компакта M вытекает, что только конечное число окружностей из K_i может вообще не пересекаться с M . Поэтому компакт $\pi(D_i) = \{s_i\} \cup (M \cap H_i \cap h_{s_i}^{-1}(C_i))$ представляет собой последовательность, сходящуюся к точке s_i . Для каждой точки $s \in \pi(N \cap D_i) \setminus \{s_i\}$ выберем произвольно точку $b(s) \in \pi^{-1}(s) \cap N$ и положим $E_i = C_i \cup \{b(s) : s \in \pi(N \cap D_i) \setminus \{s_i\}\}$. Из изолированности точек s в компакте $\pi(D_i)$ вытекает замкнутость множества E_i в D_i . Следовательно, E_i является бикомпактом. Этот бикомпакт метризуем и одномерен, поскольку он получается из одномерного компакта $C_i \subset T^2$ добавлением счетного числа точек $b(s)$. В множестве $N \cap \pi^{-1}(T)$ выберем произвольно множество Q , взаимно однозначно отображающееся на множество $\pi(N) \cap T$ посредством отображения π ($Q = \{b(s) : s \in \pi(N) \cap T\}$), и положим

$$C = Q \cup E_1 \cup \dots \cup E_m.$$

Остается показать, что C есть разрез между F_1 и F_2 . Пусть $A \subset \pi^{-1}(M)$ – континуум, пересекающийся и с F_1 , и с F_2 . Если $\pi(A)$ состоит из одной точки, то этой точкой является одна из точек s_i . Тогда континуум A пересекается с множеством $C_i \subset E_i \subset C$, являющимся перегородкой в $\pi^{-1}(s_i)$ между $\pi^{-1}(s_i) \cap F_1$ и $\pi^{-1}(s_i) \cap F_2$.

Предположим теперь, что $\pi(A)$ – невырожденный континуум. Выше (см. (2.3)) было отмечено, что π – кольцевое отображение. Следовательно,

$$A = \pi^{-1}(\pi(A)) \quad (2.13)$$

согласно предложению 1.19. Если снова континуум $\pi(A)$ содержит одну из точек s_i , то $A \supset \pi^{-1}(s_i) \supset C_i$.

Пусть теперь $\pi(A) \cap \Sigma = \emptyset$. Положим $N_1 = C_1 \cup \dots \cup C_m \cup \pi^{-1}(\pi(N) \setminus \Sigma)$. Согласно лемме 1.29 множество N_1 замкнуто. Кроме того, ясно, что $N_1 \cap (F_1 \cup F_2) = \emptyset$. Поэтому множество N_1 , будучи допустимым увеличением перегородки N , является перегородкой между F_1 и F_2 в компакте $\pi^{-1}(M)$ согласно лемме 1.30. По своему строению множество $N_1 \setminus \pi^{-1}(\Sigma)$ есть полный прообраз множества $\pi(N_1) \setminus \Sigma$. Поэтому из (2.5), леммы 1.27 и того, что N_1 является перегородкой в $\pi^{-1}(M)$ между F_1 и F_2 , вытекает, что $\pi(N_1) \setminus \Sigma$ есть перегородка в $M \setminus \Sigma$ между $\pi(F_1) \setminus \Sigma$ и $\pi(F_2) \setminus \Sigma$. Следовательно, континуум $\pi(A) \subset M \setminus \Sigma$ пересекается с перегородкой $\pi(N_1) \setminus \Sigma$. Пусть s – некоторая точка этого пересечения. Тогда $C \ni b(s) \in \pi^{-1}(s) \subset \pi^{-1}(\pi(A)) = (2.13) = A$. Значит, континуум A пересекается с множеством C . Лемма 2.2 доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть $M \subset S^2$ – специальный компакт, а $Y \subset \pi^{-1}(M)$ – замкнутое множество. Тогда $\text{Dg } Y \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $\text{Dg} = \dim$ для метризуемых компактов и леммы 2.2 вытекает неравенство $\text{Dg } \pi^{-1}(M) \leq 2$. Применение свойства монотонности размерности Dg по замкнутым подмножествам завершает доказательство.

ЛЕММА 2.4. Пусть $F_1, F_2 \subset B$ – замкнутые непересекающиеся множества. Тогда в B существует такая перегородка N между F_1 и F_2 , что $\pi(N)$ является подмножеством специального компакта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используются элементы конструкции из доказательства леммы 2.2 (случай 2)) с заменой компакта M на S^2 . Пусть $\pi(F_1) \cap \pi(F_2) = \{s_1, \dots, s_m\} = \Sigma$. Далее, пусть C_i – такая перегородка в $\pi^{-1}(s_i)$ между $F_1 \cap \pi^{-1}(s_i)$ и $F_2 \cap \pi^{-1}(s_i)$, что множество $\{s_i\} \cup h_{s_i}^{-1}(C_i) = K_i$ является спок-компактом с центром в точке s_i , а $H_i \subset S^2$ – такая замкнутая сферическая окрестность точки s_i , что множество $D_i = C_i \cup \pi^{-1}(H_i \cap h_{s_i}^{-1}(C_i))$ есть перегородка в $\pi^{-1}(H_i)$ между $F_1 \cap \pi^{-1}(H_i)$ и $F_2 \cap \pi^{-1}(H_i)$. Уменьшая H_i , можно считать, что семейство $\{H_1, \dots, H_m\}$ дизъюнктно. Пусть G_i – такая открытая сферическая окрестность точки s_i в S^2 , что $\text{Cl}(G_i) \subset H_i$. Положим $M_0 = H_1 \cup \dots \cup H_m$ и $M_1 = S^2 \setminus G_1 \cup \dots \cup G_m$. Как и в (2.8), множество $D = D_1 \cup \dots \cup D_m$ является перегородкой в $\pi^{-1}(M_0)$ между $F_1 \cap \pi^{-1}(M_0)$ и $F_2 \cap \pi^{-1}(M_0)$. Берем какое-нибудь представление (U_1, D, U_2) перегородки D . Как и в (2.11), тройка $(\pi(U_1) \cap M_1, \pi(D) \cap M_1, \pi(U_2) \cap M_1)$ есть перегородка в $M_0 \cap M_1$ между $\pi(F_1) \cap M_0 \cap M_1$ и $\pi(F_2) \cap M_0 \cap M_1$. Следовательно, множество $\pi(U_1 \cup D) \cap M_1$ не пересекается с $\pi(F_2)$. Поэтому согласно лемме 2.1 в S^2 существует перегородка T между $\Phi_1 = \pi(F_1 \cup U_1 \cup D) \cap M_1$ и $\pi(F_2)$, являющаяся окружностью трансверсальным 1-полиэдром.

Тогда множество $T \cup \pi(D)$ будет специальным компактом. Из аналога свойства (2.8) и леммы 1.28 вытекает, что множество $P = \pi^{-1}(T) \cup D$ содержит перегородку в B между F_1 и F_2 . Лемма доказана.

Из лемм 2.3 и 2.4 вытекает, что $\text{Dg } B \leq 3$. Поэтому с учетом неравенства (2.4) получаем $\text{Dg } B = 3$.

Для доказательства неравенства $\text{Ind } B \leq 4$ в силу леммы 2.4 достаточно проверить, что

$$\text{Ind } \pi^{-1}(M) \leq 3 \quad (2.14)$$

для любого специального компакта $M \subset S^2$. Но при доказательстве леммы 2.2 для непересекающихся замкнутых множеств $F_1, F_2 \subset \pi^{-1}(M)$ была построена такая перегородка N между ними, что компакт $\pi(N)$ счетен. Следовательно, множество $\pi^{-1}(\pi(N))$ является суммой счетного числа компактов, гомеоморфных тору T^2 , откуда неравенство (2.14) и вытекает.

Для завершения проверки свойств бикompакта B достаточно доказать справедливость неравенства

$$4 \leq \text{ind } B. \quad (2.15)$$

А для этого, в свою очередь, достаточно установить, что

$$3 \leq \text{ind } \pi^{-1}(M), \quad (2.16)$$

где $M \subset S^2$ – произвольный невырожденный континуум.

В самом деле, пусть $b \in B$ и $s \in S^2 \setminus \{\pi(b)\}$. Возьмем произвольно перегородку P в B между точкой b и множеством $\pi^{-1}(s)$. Тогда согласно неприводимости отображения π (см. (2.3) и предложение 1.20) и лемме 1.31 множество $\pi(P)$ будет перегородкой в S^2 . Такая перегородка содержит невырожденный континуум M . При этом можно считать, что $\pi(b) \notin M$, поскольку в непустом открытом подмножестве невырожденного континуума содержится невырожденный континуум. Но если $M \subset \pi(P)$, то $\pi^{-1}(M) \subset P$ согласно предложению 1.19. Таким образом, установив (2.16), мы получим $3 \leq \text{ind } P$, что влечет (2.15).

Применяя аналогичные рассуждения, можно показать, что для проверки неравенства (2.16) достаточно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 2.5. Пусть $M \subset S^2$ – невырожденный континуум, $s_1, s_2 \in M$, и пусть P – перегородка в $\pi^{-1}(M)$ между $\pi^{-1}(s_1)$ и $\pi^{-1}(s_2)$. Тогда существует такая точка $s \in \pi(P)$, что $\pi^{-1}(s) \subset P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (G_1, P, G_2) – некоторое представление перегородки P . Без ограничения общности можем считать, что P является общей границей множеств G_1 и G_2 в $\pi^{-1}(M)$. Положим $F = \pi(P)$, $H_i = \pi^\# G_i$. Тогда (H_1, F, H_2) будет перегородкой в M между точками s_1 и s_2 согласно предложению 1.24. В силу сделанного выше замечания о тонкости перегородки P и неприводимости отображения $\pi|_{\pi^{-1}(M)}$ можно считать, что

$$F \text{ является общей границей множеств } H_1 \text{ и } H_2 \text{ в } M. \quad (2.17)$$

Предположим, что утверждение леммы 2.5 не выполняется. Тогда

$$\pi^{-1}(s) \setminus P \neq \emptyset \text{ для любой точки } s \in F. \quad (2.18)$$

Пусть $\{U_m\}$ и $\{V_n\}$ – счетные базы компактов S^2 и T^2 соответственно. Положим

$$F_i^{m,n} = \{s \in F : O(U_m, s, V_n) \cap \pi^{-1}(M) \subset G_i\}.$$

Из (2.18) вытекает, что

$$F = \left(\bigcup_{m,n} F_1^{m,n} \right) \cup \left(\bigcup_{m,n} F_2^{m,n} \right).$$

Как и при получении основного результата в [15] (см. также [16]), несложно показать, что множества $F_i^{m,n}$ замкнуты. По теореме Бэра одно из них, пусть $F_1^{m,n}$, имеет непустую внутренность в F . Следовательно, существует такая точка $s \in F$, что для некоторой ее сферической ε -окрестности Os имеем

$$F \cap Os \subset F_1^{m,n}. \quad (2.19)$$

Из (2.17) вытекает, что $Os \cap H_2 \neq \emptyset$. Учитывая кольцевую структуру множества $\pi^\# O(U_m, s, V_n)$ и включение $\pi^\# O(U_m, s, V_n) \cap M \subset H_1$, можно считать (уменьшив в случае необходимости радиус окрестности Os), что $S \cap H_2 = \emptyset$, где $S = \text{Bd } Os$.

Следовательно, окрестность Os содержит некоторую компоненту связности L множества H_2 . Положим $K = \text{Cl } L$. Тогда

$$K \cap F \neq \emptyset. \quad (2.20)$$

В самом деле, в противном случае $K \subset H_2$ и, следовательно, $K = L$. Значит, компакт K является компонентой связности открытого подмножества H_2 континуума M , что противоречит лемме 1.32. Итак, условие (2.20) проверено.

Возьмем произвольно точку $t \in K \cap F$. Из (2.19) получаем

$$t \in F_1^{m,n} \cap \text{Cl } L.$$

Поэтому все окружности R достаточно малого радиуса со сферическим центром в точке t пересекают множество $L \subset H_2$, что невозможно, поскольку по определению множества $F_1^{m,n}$ многие из этих окружностей содержатся в множестве $\pi^\# O(U_m, t, V_n)$, которое не пересекается с H_2 . Полученное противоречие завершает доказательство леммы 2.5.

Итак, все свойства бикompакта B проверены.

Список литературы

1. Brouwer L. E. J. Über den natulichen Dimensionbegriff // J. Reine Angew. Math. 1913. V. 142. P. 145–152.
2. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: ИЛ, 1948.
3. Федорчук В. В., Левин М., Щепин Е. В. О брауэровском определении размерности // УМН. 1999. Т. 54. №2. С. 193–194.
4. Fedorchuk V. V., van Mill J. Dimensionsgrad for locally connected Polish spaces // Fund. Math. 2000. V. 163. №1. P. 77–82.
5. Федорчук В. В. О брауэровской размерности бикompактов // Матем. заметки. 2003. Т. 73. №2. С. 295–304.
6. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
7. Engelking R., Sieklucki K. Topology. A geometric approach. Berlin: Heldermann, 1992.
8. van Mill J. The infinite-dimensional topology of function spaces. Amsterdam: Elsevier, 2001.
9. Mazurkiewicz S. O arytmetyzacji continuow // C. R. Varsovie. 1913. V. 10. P. 171–177.
10. Федорчук В. В. Об отображениях, не понижающих размерность // Докл. АН СССР. 1968. Т. 185. №1. С. 54–57.
11. Федорчук В. В. О сильно замкнутых отображениях // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. №1. С. 47–49.
12. Савинов Н. В. О вполне замкнутых отображениях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1975. №3. С. 39–45.
13. Федорчук В. В. О бикompактах с несовпадающими размерностями // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182. №2. С. 275–277.
14. Федорчук В. В. Бикompакты без промежуточных размерностей // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. №4. С. 795–797.
15. Федорчук В. В. Пример однородного бикompакта с несовпадающими размерностями // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198. №6. С. 1283–1286.
16. Чатырко В. А. О змеевидных бикompактах // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. №4. С. 15–19.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: vitaly@gtopol.math.msu.su

Поступила в редакцию
31.07.2003