Общероссийский математический портал

В. А. Юрко, Обратная спектральная задача для сингулярных несамосопряженных дифференциальных систем, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 12, 123–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm869>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:55:05

УДК 517.984

В. А. Юрко

Обратная спектральная задача для сингулярных несамосопряженных дифференциальных систем

В работе исследуется обратная задача спектрального анализа для несамосопряженных систем дифференциальных уравнений на полуоси. Дана постановка обратной задачи, доказана теорема единственности, получены конструктивная процедура решения обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Библиография: 43 названия.

§ 1. Введение

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений на полуоси:

$$\ell Y(x) := Q_0 Y'(x) + Q(x)Y(x) = \rho Y(x), \quad x > 0. \quad (1.1)$$

Здесь $Y = [y_k]_{k=\overline{1,n}}^T$ – вектор-столбец (T – знак транспонирования), ρ – спектральный параметр, $Q_0 = \text{diag}[q_k]_{k=\overline{1,n}}$, $Q(x) = [q_{kj}(x)]_{k,j=\overline{1,n}}$, где $q_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, – различные комплексные числа, т.е. $q_k \neq q_j$ при $k \neq j$, и $q_{kk}(x) \equiv 0$. Матрица $Q(x)$ называется *потенциалом*. Через W_N обозначим множество функций $f(x)$, $x > 0$, таких, что $f^{(\nu)}(x)$, $\nu = \overline{0, N-1}$, абсолютно непрерывны и $f^{(\nu)}(x) \in L(0, \infty)$, $\nu = \overline{0, N}$. Будем говорить, что $\ell \in V_N$, если $q_{kj}(x) \in W_N$, $k, j = \overline{1,n}$. Будем рассматривать оператор ℓ в классах V_N , $N \geq 1$. Обозначим $B_0 = Q_0^{-1}$, т.е. $B_0 = \text{diag}[\beta_k]_{k=\overline{1,n}}$, где $\beta_k = 1/q_k$.

В настоящей статье исследуется обратная спектральная задача для системы (1.1). Обратные задачи спектрального анализа заключаются в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Такие задачи часто возникают в математике и различных областях естествознания и техники. Наиболее полные результаты в теории обратных задач известны для операторов Штурма–Лиувилля $l^0 y := -y'' + q(x)y$. Центральную роль здесь сыграл метод оператора преобразования (см. [1], [2]), который позволил дать конструктивную процедуру решения обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Обратные задачи Штурма–Лиувилля в различных постановках изучались во многих работах (см. монографии [1]–[5] и литературу в них). Много

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ (грант № Е02-1.0-186), программы “Университеты России” (грант № УР.04.01.042) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00007).

приложений теории обратных задач связано с дифференциальными операторами высших порядков вида

$$ly := y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x)y^{(k)}, \quad n > 2. \quad (1.2)$$

По сравнению с оператором Штурма–Лиувилля обратные задачи для оператора (1.2) оказались значительно более трудными для исследования. При $n > 2$ операторы преобразования имеют гораздо более сложную структуру, чем для оператора Штурма–Лиувилля, что затрудняет их применение при решении обратных задач в общем случае. Однако в случае аналитических коэффициентов операторы преобразования имеют такой же “треугольный вид”, как и для операторов Штурма–Лиувилля. В [6], [7] “треугольный” оператор преобразования использовался для исследования обратной задачи восстановления самосопряженных дифференциальных операторов на полуоси с аналитическими коэффициентами по спектральной функции и по данным рассеяния. Более эффективным и универсальным методом в теории обратных спектральных задач является метод спектральных отображений (см. [8]), связанный с идеями метода контурного интеграла. Этот метод позволяет исследовать обратные задачи для широкого класса операторов. В частности, в [9], [10] методом спектральных отображений исследовалась обратная задача восстановления оператора (1.2) с интегрируемыми коэффициентами на полуоси и на конечном интервале по заданной матрице Вейля. Обратная задача рассеяния на оси для оператора (1.2) изучалась в [11]–[14] и других работах. Отметим, что известный в теории обратных задач подход, связанный с использованием задачи Римана, фактически является частным случаем метода спектральных отображений (см., например, [12]). Некоторые аспекты спектральной теории операторов (1.2) см. в монографиях [15]–[17].

Много работ посвящено обратным задачам для систем дифференциальных уравнений (см. [4], [18]–[27] и литературу в них). Некоторые системы исследуются аналогично оператору Штурма–Лиувилля. К ним относятся системы Дирака, AKNS и их обобщения [4], [18], [21], [22], [24], [25]. Для таких систем может быть использован метод оператора преобразования и полученные результаты в основном аналогичны результатам для оператора Штурма–Лиувилля. Метод оператора преобразования может быть также применен для систем с аналитическим потенциалом аналогично случаю оператора (1.2) (см., например, [23]). Однако в общем случае решение обратных задач для систем вида (1.1) сталкивается с существенно более серьезными трудностями, аналогичными случаю оператора (1.2) с интегрируемыми коэффициентами. Существует только несколько работ, посвященных обратным задачам для таких систем, причем в основном для случая оси. Отметим важные работы [19], [20], [26], в которых с использованием задачи Римана изучалась обратная задача рассеяния для системы (1.1) на оси. Обратные задачи для системы (1.1) на полуоси и на конечном интервале в общем случае еще не исследовались.

В настоящей статье исследуется обратная задача для несамосопряженных систем вида (1.1) на полуоси в общем случае, т.е. с произвольным расположением корней характеристического многочлена и с произвольным поведением спектра. В качестве основной спектральной характеристики для (1.1) вводится и изучается так

называемая матрица Вейля, которая является аналогом матрицы Вейля, введенной в [28] для оператора (1.2). Обратная задача для систем (1.1) оказывается существенно более трудной, чем для операторов (1.2), что связано с появлением новых качественных аспектов в поведении матрицы Вейля и в исследовании основного уравнения. Развивая идеи метода спектральных отображений, мы даем конструктивную процедуру решения обратной задачи восстановления системы (1.1) по заданной матрице Вейля, доказываем теорему единственности и получаем необходимые и достаточные условия разрешимости этой нелинейной обратной задачи, что является наиболее трудной частью работы.

Отметим, что результаты и методы теории обратных спектральных задач могут быть полезны и при исследовании обратных задач для уравнений с частными производными (см. [29]). По поводу обратных задач для уравнений с частными производными см. монографии [30]–[36] и литературу в них.

Приведем постановку обратной задачи. Известно (см. [37], [38]), что ρ -плоскость можно разбить на секторы $S_j = \{\rho : \arg \rho \in (\theta_j, \theta_{j+1})\}$, $j = \overline{0, 2r-1}$, $0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{2r-1} < 2\pi$, в каждом из которых существует перестановка $i_k = i_k(S_j)$ чисел $1, \dots, n$ такая, что числа $R_k = R_k(S_j)$ вида $R_k = \beta_{i_k}$ обладают свойством

$$\operatorname{Re}(\rho R_1) < \dots < \operatorname{Re}(\rho R_n), \quad \rho \in S_j. \quad (1.3)$$

Доопределим $\theta_{j+2kr} := \theta_j$, $S_{j+2kr} := S_j$, $k \in \mathbb{Z}$, и обозначим $\Gamma_j = \{\rho : \arg \rho = \theta_j\}$. Ясно, что $\Gamma_{j+2kr} := \Gamma_j$, $k \in \mathbb{Z}$. Отметим, что число $2r$ секторов S_j зависит от расположения чисел $\{\beta_k\}_{k=\overline{1, n}}$ на комплексной плоскости, причем $1 \leq r \leq n(n-1)/2$. Например, если все β_k лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, то $r = 1$. Этот случай называется *вырожденным*.

Пусть задана матрица $h = [h_{\xi\nu}]_{\xi, \nu=\overline{1, n}}$, $\det h \neq 0$, где $h_{\xi\nu}$ – комплексные числа. Рассмотрим линейные формы $U(Y) = [U_\xi(Y)]_{\xi=\overline{1, n}}^T$ вида $U(Y) = hY(0)$, т.е. $U_\xi(Y) = [h_{\xi 1}, \dots, h_{\xi n}]Y(0)$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Omega_{mk}^0(j_1, \dots, j_m) &= \det[h_{\xi, j_\nu}]_{\xi=\overline{1, m-1}, k; \nu=\overline{1, m}}, \\ \Omega_m^0(j_1, \dots, j_m) &:= \Omega_{mm}^0(j_1, \dots, j_m), \quad \Omega_0^0 := 1. \end{aligned}$$

Пусть

$$\Omega_m^0(i_1, \dots, i_m) \neq 0, \quad m = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, 2r-1}, \quad (1.4)$$

где $i_k = i_k(S_j)$ – вышеупомянутая перестановка для сектора S_j . Условие (1.4) будем называть *условием информативности для пары* $L = (\ell, U)$. Системы, которые не удовлетворяют условию информативности, обладают качественно другими закономерностями при постановке и исследовании обратных задач и в настоящей работе не рассматриваются. Без ограничения общности можно считать, что выполняются следующие условия нормировки: $\det h = 1$ и для некоторого фиксированного сектора (для определенности для сектора S_0) $\Omega_{mm}^0(i_1, \dots, i_m) = 1$, $m = \overline{1, n-1}$. Везде в дальнейшем будем считать, что условия информативности и нормировки выполнены.

Отметим, что при любой матрице Q_0 условие информативности (1.4) выполняется для широкого класса матриц h . В самом деле, обозначим через Ω множество матриц h , у которых все миноры $\Omega_m^0(j_1, \dots, j_m)$ отличны от нуля при любых $m = \overline{1, n}$ и $j_1, \dots, j_m, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$. Ясно, что если $h \in \Omega$, то условие информативности (1.4) выполняется для любой матрицы Q_0 , т.е. для любой системы вида (1.1).

Матрица Вейля. Пусть вектор-функции $\Phi_m(x, \rho) = [\Phi_{km}(x, \rho)]_{k=\overline{1, n}}^T, m = \overline{1, n}$, являются решениями системы (1.1) при условиях $U_\xi(\Phi_m) = \delta_{\xi m}, \xi = \overline{1, m}$, а также $\Phi_m(x, \rho) = O(\exp(\rho R_m x)), x \rightarrow \infty, \rho \in S_j$, в каждом секторе S_j со свойством (1.3). Здесь и в дальнейшем $\delta_{\xi m}$ – символ Кронекера. Ниже будет показано, что эти условия однозначно определяют решения $\Phi_m(x, \rho)$. Положим $M_{m\xi}(\rho) = U_\xi(\Phi_m), \xi > m, M(\rho) = [M_{m\xi}(\rho)]_{m, \xi=\overline{1, n}}, M_{m\xi}(\rho) = \delta_{\xi m}$ при $\xi \leq m, \Phi(x, \rho) = [\Phi_1(x, \rho), \dots, \Phi_n(x, \rho)] = [\Phi_{km}(x, \rho)]_{k, m=\overline{1, n}}$. Функции $\Phi_m(x, \rho)$ и $M_{m\xi}(\rho)$ называются *решениями Вейля* и *функциями Вейля* соответственно. Матрица $M(\rho)$ называется *матрицей Вейля* (МВ) или *спектром* $L = (\ell, U)$. Отметим, что МВ является треугольной матрицей, причем $\det M(\rho) \equiv 1$.

Постановка обратной задачи. Зафиксируем матрицу Q_0 , т.е. числа $\beta_k = 1/q_k, k = \overline{1, n}$, считаем известными и фиксированными. Обратная задача ставится следующим образом: по заданной МВ $M(\rho)$ построить пару $L = (\ell, U)$.

§ 2. Свойства матрицы Вейля

По построению имеем

$$U(\Phi) = h\Phi(0) = \mathcal{N}(\rho), \quad \mathcal{N}(\rho) = M^T(\rho). \quad (2.1)$$

Пусть $C(x, \rho) = [C_{km}(x, \rho)]_{k, m=\overline{1, n}}$ – матричное решение системы (1.1) при начальных условиях $U(C) = hC(0, \rho) = E$ (здесь и далее через E обозначаем единичную матрицу соответствующей размерности или единичный оператор в соответствующем банаховом пространстве). Другими словами, вектор-столбцы $C_m(x, \rho) = [C_{km}(x, \rho)]_{k=\overline{1, n}}^T, m = \overline{1, n}$, являются решениями (1.1) при начальных условиях $U_\xi(C_m) = \delta_{\xi m}, \xi, m = \overline{1, n}$. Функции $C_{km}(x, \rho)$ являются целыми по ρ при каждом фиксированном x . Ясно, что

$$\Phi(x, \rho) = C(x, \rho)\mathcal{N}(\rho), \quad \text{или} \quad \Phi_m(x, \rho) = C_m(x, \rho) + \sum_{k=m+1}^n M_{mk}(\rho)C_k(x, \rho), \quad (2.2)$$

$$\det C(x, \rho) = \det \Phi(x, \rho) = \exp(\rho(\beta_1 + \dots + \beta_n)x). \quad (2.3)$$

В ρ -плоскости проведем разрезы вдоль лучей Γ_j и обозначим через $\Gamma_j^\pm = \{\rho : \arg \rho = \theta_j \pm 0\}$ берега разрезов. Положим $\overline{S}_j = S_j \cup \Gamma_j^+ \cup \Gamma_{j+1}^-$ и обозначим через $\Sigma = \mathbb{C} \setminus (\bigcup_{j=0}^{2r-1} \Gamma_j) = \bigcup_{j=0}^{2r-1} S_j$ ρ -плоскость без разрезов вдоль лучей Γ_j , а через $\overline{\Sigma} = \bigcup_{j=0}^{2r-1} \overline{S}_j$ – замыкание Σ (различаем берега разрезов).

Зафиксируем $j = \overline{0, 2r-1}$. При $\rho \in \Gamma_j$ строгие неравенства в (1.3) в некоторых местах превращаются в равенства. Пусть $m_i = m_i(j)$, $p_i = p_i(j)$, $i = \overline{1, s}$, таковы, что при $\rho \in \Gamma_j$

$$\operatorname{Re}(\rho R_{m_i-1}) < \operatorname{Re}(\rho R_{m_i}) = \dots = \operatorname{Re}(\rho R_{m_i+p_i}) < \operatorname{Re}(\rho R_{m_i+p_i+1}), \quad i = \overline{1, s},$$

где $R_k = R_k(S_j)$. Обозначим

$$N_j := \{m : m = \overline{m_1, m_1 + p_1 - 1}, \dots, \overline{m_s, m_s + p_s - 1}\},$$

$$J_m := \{j : m \in N_j\}, \quad \gamma_m = \bigcup_{j \in J_m} \Gamma_j.$$

Пусть $\Sigma_m = \mathbb{C} \setminus \gamma_m$ — ρ -плоскость без разрывов вдоль лучей из γ_m , а $\overline{\Sigma}_m$ — замыкание Σ_m (различаем берега разрывов). Ясно, что область $\Sigma_m = \bigcup_{\nu} S_{m\nu}$ состоит из секторов $S_{m\nu}$, каждый из которых является объединением нескольких секторов S_j с одним и тем же набором $\{R_\xi\}_{\xi=\overline{1, m}}$.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $n = 4$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = -i$. Пусть $\rho = \sigma + i\tau$. Тогда $r = 4$, $\Gamma_0 = \{\rho : \tau = \sigma, \sigma > 0\}$, $\Gamma_1 = \{\rho : \tau = 2\sigma, \sigma > 0\}$, $\Gamma_2 = \{\rho : \tau = 3\sigma, \sigma > 0\}$, $\Gamma_3 = \{\rho : \sigma = 0, \tau > 0\}$, $\Gamma_4 = \{\rho : \tau = \sigma, \sigma < 0\}$, $\Gamma_5 = \{\rho : \tau = 2\sigma, \sigma < 0\}$, $\Gamma_6 = \{\rho : \tau = 3\sigma, \sigma < 0\}$, $\Gamma_7 = \{\rho : \sigma = 0, \tau < 0\}$, $N_0 = N_6 = \{1\}$, $N_1 = N_5 = \{2\}$, $N_2 = N_4 = \{3\}$, $N_3 = \{1, 2\}$, $N_7 = \{2, 3\}$, $J_1 = \{0, 3, 6\}$, $J_2 = \{1, 3, 5\}$, $J_3 = \{2, 4, 7\}$, $\gamma_1 = \Gamma_0 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_6$, $\gamma_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5$, $\gamma_3 = \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_7$.

ТЕОРЕМА 2.1. i) *Функции Вейля $M_{mk}(\rho)$, $k > t$, являются аналитическими в Σ_m за исключением не более чем счетного ограниченного множества Λ'_m полюсов и непрерывны в $\overline{\Sigma}_m$ (т.е. они непрерывны в каждом секторе $\overline{S}_{m\nu}$) за исключением ограниченного множества Λ_m . Точнее, при $j \in J_m$, $\rho \in \Gamma_j \setminus \Lambda_m$ существуют конечные пределы $M_{mk}^\pm(\rho) = \lim_{z \rightarrow \rho} M_{mk}(z)$, $z \in \Sigma_m$, $\pm(\arg z - \theta_j) > 0$. На γ_m функции $M_{mk}(\rho)$ имеют разрывы.*

ii) *Если $\ell \in V_N$, $N \geq 1$, то при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{S}_j$, имеем*

$$M_{mk}(\rho) = \sum_{\nu=0}^N \frac{\mu_{mk}^\nu}{\rho^\nu} + o\left(\frac{1}{\rho^N}\right), \quad (2.4)$$

где

$$\mu_{mk}^0 = \frac{\Omega_{mk}^0(i_1, \dots, i_m)}{\Omega_m^0(i_1, \dots, i_m)}, \quad i_k = i_k(S_j), \quad (2.5)$$

и коэффициенты $\mu_{mk}^\nu = \mu_{mk}^\nu(S_j)$ зависят от j , h и $Q^{(i)}(0)$, $i = \overline{0, \nu-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\ell \in V_N$, $N \geq 1$. Зафиксируем $\alpha \geq 0$. Известно (см. [39], [40]), что при $x \geq 0$, $\rho \in \overline{\Sigma}$, $\rho \geq \rho_\alpha$ ($\rho_\alpha = O(\max_{k,j} \|q_{kj}(x)\|_{L(\alpha, \infty)})$) существует фундаментальная система решений (ФСР) $\mathcal{D}_\alpha = \{Y_k(x, \rho)\}_{k=\overline{1, n}}$ системы (1.1) со следующими свойствами:

- 1) $Y_k(x, \rho)$ непрерывны при $x \geq 0$, $\rho \in \overline{S_j}$, $|\rho| \geq \rho_\alpha$ при каждом $j = \overline{0, 2r-1}$;
- 2) $Y_k(x, \rho)$ аналитичны при $\rho \in S_j$, $|\rho| \geq \rho_\alpha$ при каждом $j = \overline{0, 2r-1}$, $x \geq 0$;
- 3) для $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{S_j}$, равномерно по $x \geq \alpha$

$$Y_k(x, \rho) = \exp(\rho \beta_k x) \left(\sum_{\mu=0}^N \frac{g_{\mu k}(x)}{\rho^\mu} + o\left(\frac{1}{\rho^N}\right) \right), \quad g_{0k}(x) \equiv [\delta_{\nu k}]_{\nu=\overline{1, n}}^T. \quad (2.6)$$

Зафиксируем $j = \overline{0, 2r-1}$. Пусть $\rho \in \overline{S_j}$, $\alpha = 0$. Обозначим

$$\Delta_{mk}^0(\rho) = \det[U_\xi(Y_{i_\nu})]_{\xi=\overline{1, m-1}, k; \nu=\overline{1, m}}. \quad (2.7)$$

С помощью ФСР $\mathcal{D}_\alpha$ запишем представление

$$\Phi_m(x, \rho) = \sum_{k=1}^n d_{mk}(\rho) Y_k(x, \rho), \quad m = \overline{1, n}.$$

Используя краевые условия на $\Phi_m(x, \rho)$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_m(x, \rho) &= \sum_{k=1}^m d_{m, i_k}(\rho) Y_{i_k}(x, \rho), \\ \sum_{k=1}^m d_{m, i_k}(\rho) U_\xi(Y_{i_k}) &= \delta_{\xi m}, \quad \xi = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Поэтому

$$d_{m, i_k}(\rho) = \frac{(-1)^{m+k}}{\Delta_{mm}^0(\rho)} \det[U_\xi(Y_{i_\nu})]_{\xi=\overline{1, m-1}, \nu=\overline{1, m} \setminus k}. \quad (2.9)$$

В частности, из (2.6), (2.8) и (2.9) вытекает, что при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{S_j}$, равномерно по $x \geq 0$

$$\Phi_m(x, \rho) = \sum_{k=1}^m \exp(\rho R_k x) \left([\delta_{m, i_k} d_{m, i_k}^0]_{k=\overline{1, n}}^T + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right), \quad (2.10)$$

где

$$d_{m, i_k}^0 = \frac{(-1)^{m+k}}{\Omega_m^0(i_1, \dots, i_m)} \det[h_{\xi, i_\nu}]_{\xi=\overline{1, m-1}, \nu=\overline{1, m} \setminus k}, \quad i_k = i_k(S_j).$$

В частности, это дает

$$d_{m, i_m}^0 = \frac{\Omega_{m-1}^0(i_1, \dots, i_{m-1})}{\Omega_m^0(i_1, \dots, i_m)} \neq 0. \quad (2.11)$$

Так как $M_{mk}(\rho) = U_k(\Phi_m)$, то из (2.8) и (2.9) имеем

$$M_{mk}(\rho) = \frac{\Delta_{mk}^0(\rho)}{\Delta_{mm}^0(\rho)}.$$

Отсюда с учетом (2.6) и (2.7) приходим к (2.4).

Фиксируем $\alpha \geq 0$, $m = \overline{1, n-1}$. Известным методом (см., например, [9], [10]) можно доказать, что существует ФСР $\mathcal{D}_{\alpha m} = \{Y_{km}^0(x, \rho)\}_{k=\overline{1, n}}$, $x \geq 0$, $\rho \in \overline{\Sigma}$, $|\rho| \geq \rho_\alpha$ системы (1.1) со свойствами:

- 1) $Y_{km}^0(x, \rho) = Y_{i_k}(x, \rho)$, $k = \overline{m+1, n}$, $i_k = i_k(S_j)$;
- 2) при $k = \overline{1, m}$ функции $Y_{km}^0(x, \rho)$ аналитичны при $\rho \in \Sigma_m$, $|\rho| \geq \rho_\alpha$ и непрерывны при $x \geq 0$, $\rho \in \overline{\Sigma}_m$, $|\rho| \geq \rho_\alpha$;
- 3) $Y_{km}^0(x, \rho) = O(\exp(\rho R_m x))$, $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{\Sigma}_m$, равномерно по $x \geq 0$.

Таким образом, решения $Y_{km}^0(x, \rho)$, $k = \overline{1, m}$, аналитичны в секторах $S_{m\nu}$, более широких, чем S_j . Повторяя предыдущие рассуждения для ФСР $\mathcal{D}_{\alpha m}$, получаем

$$M_{mk}(\rho) = \frac{\Delta_{mk}^1(\rho)}{\Delta_{mm}^1(\rho)}, \quad \Delta_{mk}^1(\rho) := \det[U_\xi(Y_{\nu m}^0)]_{\xi=\overline{1, m-1}, k; \nu=\overline{1, m}}. \quad (2.12)$$

Функции $\Delta_{mk}^1(\rho)$ аналитичны при $\rho \in \Sigma_m$, $|\rho| \geq \rho_\alpha$ и непрерывны при $\rho \in \overline{\Sigma}_m$, $|\rho| \geq \rho_\alpha$. Отсюда, используя (2.12), (2.4) и произвольность α , получаем утверждение i) теоремы 2.1.

Отметим, что из (2.4) и (2.10) вытекают следующие оценки:

$$\begin{aligned} |M_{mk}(\rho)| &\leq C, \quad |\Phi_{km}(x, \rho)| \leq C |\exp(\rho R_m x)|, \\ \rho &\in \overline{\Sigma}_j, \quad |\rho| \geq \rho_0, \quad R_m = R_m(S_j). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Обозначим $\Lambda' = \bigcup_m \Lambda'_m$, $\Lambda = \bigcup_m \Lambda_m$.

Рассмотрим дифференциальную систему и линейные формы $L^* = (\ell^*, U^*)$ вида

$$\begin{aligned} \ell^* Z(x) &:= -Z'(x)Q_0 + Z(x)Q(x) = \rho Z(x), \\ U^*(Z) &= Z(0)h^*, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $Z = [z_k]_{k=\overline{1, n}}$ – вектор-строка, $h^* = [h_{k\xi}^*]_{k, \xi=\overline{1, n}} := Q_0 h^{-1}$. Тогда $U^*(Z) = [U_n^*(Z), \dots, U_1^*(Z)]$, где $U_{n-\xi+1}^*(Z) = Z(0)[h_{k\xi}^*]_{k=\overline{1, n}}^T$. Ясно, что

$$Z(x)\ell Y(x) - \ell^* Z(x)Y(x) = \frac{d}{dx}(Z(x)Q_0 Y(x)), \quad (2.15)$$

$$Z(0)Q_0 Y(0) = U^*(Z)U(Y) = \sum_{\xi=1}^n U_{n-\xi+1}^*(Z)U_\xi(Y). \quad (2.16)$$

Кроме того, из (2.15) вытекает, что если $\ell Y(x, \rho) = \rho Y(x, \rho)$, $\ell^* Z(x, \mu) = \mu Z(x, \mu)$, то

$$(\rho - \mu)Z(x, \mu)Y(x, \rho) = \frac{d}{dx}(Z(x, \mu)Q_0 Y(x, \rho)). \quad (2.17)$$

Обозначим $R_m^* := -R_{n-m+1}$. Пусть вектор-функции

$$\Phi_m^*(x, \rho) = [\Phi_{km}^*(x, \rho)]_{k=\overline{1, n}}, \quad m = \overline{1, n},$$

являются решениями системы (2.14) при условиях $U_\xi^*(\Phi_m^*) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1, m}$, а также $\Phi_m^*(x, \rho) = O(\exp(\rho R_m^* x))$, $x \rightarrow \infty$, $\rho \in S_j$, в каждом секторе S_j со свойством (1.3). Эти условия однозначно определяют решения $\Phi_m^*(x, \rho)$. Положим $\Phi^*(x, \rho) = [\Phi_{n-m+1}^*(x, \rho)]_{m=\overline{1, n}}^T = [\Phi_{n-m+1, k}^*(x, \rho)]_{m, k=\overline{1, n}}$, $M_{mk}^*(\rho) = U_k(\Phi_m^*)$, $M^*(\rho) = [M_{n-\xi+1, n-k+1}^*(\rho)]_{k, \xi=\overline{1, n}}$, $\mathcal{N}^*(\rho) = (M^*)^T(\rho)$. Тогда

$$\Phi^*(0, \rho)h^* = U^*(\Phi^*) = \mathcal{N}^*(\rho). \quad (2.18)$$

Обозначим $\gamma_m^* = \gamma_{n-m}$, $\Sigma_m^* = \Sigma_{n-m}$, $\Lambda_m^* = \Lambda_{n-m}$, $\Lambda_m'^* = \Lambda_{n-m}'$. Свойства матрицы $M^*(\rho)$ аналогичны свойствам матрицы $M(\rho)$. В частности, функции $M_{mk}^*(\rho)$, $k > m$, аналитичны в Σ_m^* за исключением множества $\Lambda_m'^*$ полюсов и непрерывны в $\overline{\Sigma_m^*}$ за исключением множества Λ_m^* . На γ_m^* функции $M_{mk}^*(\rho)$ имеют разрывы. При $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{S_j}$

$$M_{mk}^*(\rho) = \sum_{\nu=0}^N \frac{\mu_{mk}^{*, \nu}}{\rho^\nu} + o\left(\frac{1}{\rho^N}\right), \quad (2.19)$$

где коэффициенты $\mu_{mk}^{*, \nu} = \mu_{mk}^{*, \nu}(S_j)$ зависят от j , h и $Q^{(i)}(0)$, $i = \overline{0, \nu-1}$. Кроме того,

$$|M_{mk}^*(\rho)| \leq C, \quad |\Phi_{mk}^*(x, \rho)| \leq C|\exp(\rho R_m^* x)|, \quad \rho \in \overline{S_j}, \quad |\rho| \geq \rho_0. \quad (2.20)$$

Пусть $C^*(x, \rho) = [C_{n-m+1}^*(x, \rho)]_{m=\overline{1, n}}^T$, где векторы $C_m^*(x, \rho) = [C_{mk}^*(x, \rho)]_{k=\overline{1, n}}$ являются решениями системы (2.14) при начальных условиях $U_\xi^*(C_m^*) = \delta_{\xi m}$, $\xi, m = \overline{1, n}$, т.е. $U^*(C^*) = C^*(0, \rho)h^* = E$. Функции $C_{mk}^*(x, \rho)$ являются целыми по ρ при каждом фиксированном x . Ясно, что

$$\Phi^*(x, \rho) = \mathcal{N}^*(\rho)C^*(x, \rho), \quad \text{или}$$

$$\Phi_{n-m}^*(x, \rho) = C_{n-m}^*(x, \rho) + \sum_{k=n-m+1}^n M_{n-m, k}^*(\rho)C_k^*(x, \rho), \quad (2.21)$$

$$\det C^*(x, \rho) = \det \Phi^*(x, \rho) = (\det Q_0)^{-1} \exp(-\rho(\beta_1 + \dots + \beta_n)x).$$

ЛЕММА 2.1. *Справедливы соотношения*

$$\Phi^*(x, \rho) = (Q_0 \Phi(x, \rho))^{-1}, \quad (2.22)$$

$$M^*(\rho) = M^{-1}(\rho), \quad \mathcal{N}^*(\rho) = \mathcal{N}^{-1}(\rho), \quad (2.23)$$

$$\left. \begin{aligned} C(x, \rho) &= \Phi(x, \rho)\mathcal{N}^*(\rho) \iff \\ C_\nu(x, \rho) &= \Phi_\nu(x, \rho) + \sum_{k=\nu+1}^n M_{n-k+1, n-\nu+1}^*(\rho)\Phi_k(x, \rho), \\ C^*(x, \rho) &= \mathcal{N}(\rho)\Phi^*(x, \rho) \iff \\ C_{n-\nu}^*(x, \rho) &= \Phi_{n-\nu}^*(x, \rho) + \sum_{k=n-\nu+1}^n M_{n-k+1, \nu+1}(\rho)\Phi_k^*(x, \rho). \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $Z = (Q_0\Phi)^{-1}$. Так как $ZQ_0\Phi = E$, то $Z'Q_0\Phi + ZQ_0\Phi' = 0$, или $Q_0\Phi' = -Z^{-1}Z'Q_0\Phi$. Так как Φ удовлетворяет (1.1), то имеем $\rho\Phi - Q\Phi = -Z^{-1}Z'Q_0\Phi$, или $-Z^{-1}Z'Q_0 + Q = \rho E$. Таким образом,

$$\ell^* Z(x, \rho) = \rho Z(x, \rho). \quad (2.25)$$

Пусть $Z(x, \rho) = [Z_k(x, \rho)]_{k=\overline{1, n}}^T$, где $Z_k(x, \rho)$, $k = \overline{1, n}$, — строки матрицы $Z(x, \rho)$. Используя (2.16), вычисляем

$$E = Z(0, \rho)Q_0\Phi(0, \rho) = \sum_{\xi=1}^n U_{n-\xi+1}^*(Z)U_\xi(\Phi),$$

или

$$\sum_{\xi=1}^n U_{n-\xi+1}^*(Z_k)U_\xi(\Phi_m) = \delta_{mk}, \quad k, m = \overline{1, n}. \quad (2.26)$$

Последовательно выбирая в (2.26) $m = n, n-1, \dots, 1$ и учитывая соотношения $U_\xi(\Phi_m) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1, m}$, получаем

$$U_{n-\xi+1}^*(Z_k) = \delta_{\xi k}, \quad \xi = \overline{k, n}. \quad (2.27)$$

Кроме того, в силу (2.13) имеем

$$|Z_k(x, \rho)| \leq C |\exp(\rho R_{n-k+1}^* x)|. \quad (2.28)$$

Из (2.25), (2.27) и (2.28) вытекает, что $Z_k(x, \rho) = \Phi_{n-k+1}^*(x, \rho)$, т.е. $Z(x, \rho) = \Phi^*(x, \rho)$, и (2.22) доказано. Далее, используя (2.22), (2.16), (2.1) и (2.18), выводим

$$E = \Phi^*(0, \rho)Q_0\Phi(0, \rho) = U^*(\Phi^*)U(\Phi) = \mathcal{N}^*(\rho)\mathcal{N}(\rho),$$

т.е. верно (2.23). Теперь, в силу (2.2) и (2.21) соотношения (2.24) становятся очевидными.

ЛЕММА 2.2. *Справедливы соотношения*

$$\Phi^*(0, \mu)Q_0\Phi(0, \rho) = \mathcal{N}^*(\mu)\mathcal{N}(\rho), \quad (2.29)$$

$$\frac{\Phi^*(x, \mu)Q_0\Phi(x, \rho)}{\rho - \mu} = \frac{\mathcal{N}^*(\mu)\mathcal{N}(\rho)}{\rho - \mu} + \int_0^x \Phi^*(t, \mu)\Phi(t, \rho) dt. \quad (2.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.1) и (2.18) имеем

$$\mathcal{N}^*(\mu)\mathcal{N}(\rho) = \Phi^*(0, \mu)h^*h\Phi(0, \rho) = \Phi^*(0, \mu)Q_0\Phi(0, \rho),$$

т. е. (2.29) доказано. Соотношение (2.30) является следствием (2.17) и (2.29).

Установим теперь так называемые структурные свойства МВ, которые играют весьма важную роль при решении обратной задачи. При $\xi = \overline{0, n-2}$ построим функции $B_{mk}^\xi(\rho)$, $m = \overline{1, n-\xi-1}$, $k = m + \xi + 1, n$, по следующим рекуррентным формулам:

$$B_{mk}^0(\rho) = M_{mk}(\rho), \quad B_{mk}^\xi(\rho) = B_{mk}^{\xi-1}(\rho) - B_{m, m+\xi}^{\xi-1}(\rho)B_{m+\xi, k}^0(\rho). \quad (2.31)$$

Используя (2.31), можно записать явные формулы для $B_{mk}^\xi(\rho)$:

$$B_{mk}^\xi(\rho) = M_{mk}(\rho) + \sum_{\nu=1}^{\xi} (-1)^\nu \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\nu \leq \xi} M_{m, m+j_1}(\rho) M_{m+j_1, m+j_2}(\rho) \cdots M_{m+j_\nu, k}(\rho).$$

ЛЕММА 2.3. *Функции $B_{mk}^\xi(\rho)$ аналитичны в $\Sigma_{m+\xi} \setminus \Lambda'_{m+\xi}$, непрерывны в $\overline{\Sigma}_{m+\xi} \setminus \Lambda_{m+\xi}$ и имеют разрезы на $\gamma_{m+\xi}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.23) при $k = m + \xi + 1$ имеем

$$B_{m, m+\xi+1}^\xi(\rho) = -M_{n-m-\xi, n-m+1}^*(\rho). \quad (2.32)$$

Это дает утверждение леммы при $k = m + \xi + 1$. Для $k > m + \xi + 1$ меняем местами линейные формы U_k и $U_{m+\xi+1}$ и повторяем предыдущие рассуждения.

ТЕОРЕМА 2.2. *Функции*

$$B_{\nu k}^{m-\nu}(\rho) \text{ аналитичны на } \Gamma_j \setminus \Lambda'_m \text{ при } j \notin J_m, \quad (2.33)$$

$$1 \leq \nu \leq m \leq n-1, \quad m+1 \leq k \leq n.$$

В самом деле, так как $j \notin J_m$, то $\Gamma_j \subset \Sigma_m$, и, следовательно, (2.33) вытекает из леммы 2.3.

ПРИМЕР 2.2. Пусть $n = 4$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 3$, $\beta_4 = -i$ (см. пример 2.1). Тогда (2.33) принимает вид: функции $M_{1k}(\rho) - M_{12}(\rho)M_{2k}(\rho)$, $k = 3, 4$, аналитичны на $\Gamma_0, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_6, \Gamma_7$ без Λ'_2 , а функции $M_{24}(\rho) - M_{23}(\rho)M_{34}(\rho)$, $M_{14}(\rho) - M_{12}(\rho)M_{24}(\rho) - M_{13}(\rho)M_{34}(\rho) + M_{12}(\rho)M_{23}(\rho)M_{34}(\rho)$ аналитичны на $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5, \Gamma_6$ без Λ'_3 . Отметим, что согласно теореме 2.1 функции $M_{1k}(\rho)$ имеют разрезы на $\Gamma_0, \Gamma_3, \Gamma_6$, функции $M_{2k}(\rho)$ имеют разрезы на $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_5$, а функция $M_{34}(\rho)$ имеет разрез на $\Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_7$.

§ 3. Единственность решения обратной задачи

Наряду с $L = (\ell, U)$ рассмотрим пару $\tilde{L} = (\tilde{\ell}, \tilde{U})$ того же вида, но с другими матрицами $\tilde{Q}, \tilde{h}$ (напомним, что матрица Q_0 известна априори и фиксирована). Везде в дальнейшем считаем, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к L , то $\tilde{\alpha}$ обозначает аналогичный объект, относящийся к $\tilde{L}$, и $\hat{\alpha} := \alpha - \tilde{\alpha}$. Пусть $\ell, \tilde{\ell} \in V_N$, $N \geq 1$. Определим матрицу $\mathcal{P}(x, \rho) = [\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho)]_{\xi, k = \overline{1, n}}$ по формуле

$$\mathcal{P}(x, \rho) = \Phi(x, \rho) \tilde{\Phi}^{-1}(x, \rho). \quad (3.1)$$

Другими словами,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho) &= (\det \tilde{\Phi}(x, \rho))^{-1} \\ &\times \det[\tilde{\Phi}_{1\nu}(x, \rho), \dots, \tilde{\Phi}_{k-1, \nu}(x, \rho), \Phi_{\xi\nu}(x, \rho), \tilde{\Phi}_{k+1, \nu}(x, \rho), \dots, \tilde{\Phi}_{n\nu}(x, \rho)]_{\nu = \overline{1, n}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Перепишем (3.1) в виде

$$\mathcal{P}(x, \rho) \tilde{\Phi}(x, \rho) = \Phi(x, \rho). \quad (3.3)$$

Отметим, что идея использования отображений пространств решений дифференциальных уравнений для исследования обратных задач принадлежит Лейбензону [41].

ЛЕММА 3.1. i) При $|\rho| \geq \rho_0$ равномерно по $x \geq 0$

$$|\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho)| \leq C, \quad \xi, k = \overline{1, n}. \quad (3.4)$$

ii) При $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in S_j$, $\arg \rho = \text{const}$, равномерно по $x \geq 0$

$$\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho) = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \xi \neq k, \quad \mathcal{P}_{kk}(x, \rho) = \mathcal{P}_k^j + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \xi, k = \overline{1, n}, \quad (3.5)$$

где

$$\mathcal{P}_k^j := \frac{\Omega_{k-1}^0(i_1, \dots, i_{k-1})}{\Omega_k^0(i_1, \dots, i_k)} \cdot \frac{\tilde{\Omega}_k^0(i_1, \dots, i_k)}{\tilde{\Omega}_{k-1}^0(i_1, \dots, i_{k-1})}, \quad i_k = i_k(S_j). \quad (3.6)$$

Если $h = \tilde{h}$, то (3.5) верно при $\rho \in \overline{S_j}$ и $\mathcal{P}_k^j = 1$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, 2r-1}$.

Утверждения леммы вытекают из (3.2) ввиду (2.10), (2.11) и (2.13). Докажем теперь теорему единственности решения обратной задачи восстановления L по МВ.

ТЕОРЕМА 3.1. Если $M(\rho) = \tilde{M}(\rho)$, то $L = \tilde{L}$. Таким образом, задание МВ $M(\rho)$ однозначно определяет потенциал $Q(x)$ и матрицу h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем матрицу $\mathcal{P}(x, \rho)$, используя (3.1) и (2.2). При выполнении условий теоремы имеем

$$\mathcal{P}(x, \rho) = \Phi(x, \rho) \tilde{\Phi}^{-1}(x, \rho) = C(x, \rho) \mathcal{N}(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^{-1}(\rho) \tilde{C}^{-1}(x, \rho) = C(x, \rho) \tilde{C}^{-1}(x, \rho).$$

Поэтому из (2.3) вытекает, что при каждом фиксированном $x \geq 0$ матрица-функция $\mathcal{P}(x, \rho)$ является целой по ρ . Используя (3.4) и теорему Лиувилля [42], выводим, что $\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho) \equiv \mathcal{P}_{\xi k}(x)$, т.е. функции $\mathcal{P}_{\xi k}$ не зависят от ρ . Вместе с (3.5) это дает $\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho) \equiv 0$ при $\xi \neq k$ и $\mathcal{P}_{kk}(x, \rho) \equiv \mathcal{P}_k$. С другой стороны, $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k^j$, где $\mathcal{P}_k^j$ определены в (3.6). Так как h и $\tilde{h}$ удовлетворяют условиям нормировки, то для сектора S_0 получаем, что $\Omega_k^0(i_1, \dots, i_k) = \tilde{\Omega}_k^0(i_1, \dots, i_k)$, $k = \overline{0, n}$, и, следовательно, $\mathcal{P}_k = 1$, $k = \overline{1, n}$. Таким образом, $\mathcal{P}(x, \rho) \equiv E$, где E – единичная матрица. Вместе с (3.3) это дает $\Phi(x, \rho) \equiv \tilde{\Phi}(x, \rho)$ и, следовательно, $Q(x) = \tilde{Q}(x)$. В силу (2.1) имеем $h\Phi(0, \rho) = \mathcal{N}(\rho)$, поэтому $h = \tilde{h}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Задание чисел $\mu_{mk}^0 = \mu_{mk}^0(S_j)$ вида (2.5) при всех m, k, j однозначно определяет матрицу линейных форм $h = [h_{\xi\nu}]_{\xi, \nu = \overline{1, n}}$.

В самом деле, если $Q(x) \equiv 0$, то $M_{mk}(\rho) \equiv \mu_{mk}^0(S_j)$, $\rho \in \overline{S_j}$, при всех m, k, j , и наше утверждение следует из теоремы 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Матрицу h можно конструктивно построить по заданным числам $\{\mu_{mk}^0(S_j)\}$. В самом деле, так как следствие 3.1 верно, в частности, и в вырожденном случае, а числа $\{\mu_{mk}^0(S_j)\}$ не зависят от $\{\beta_k\}$, то для построения h достаточно взять $\{\mu_{mk}^0(S_j)\}$ только для двух секторов S_0 и S_r : $\{\mu_{mk}^0(S_0)\}$ и $\{\mu_{mk}^0(S_r)\}$. Вместе с условиями нормировки это дает n^2 соотношений для построения n^2 чисел $h_{\xi\nu}$, $\xi, \nu = \overline{1, n}$. Нетрудно увидеть, что эти нелинейные уравнения могут быть сведены к линейной алгебраической системе относительно $h_{\xi\nu}$, $\xi, \nu = \overline{1, n}$, определитель которой в силу следствия 3.1 отличен от нуля.

§ 4. Решение обратной задачи

Центральным местом при решении обратной задачи является получение и исследование так называемого основного уравнения, которое является особым линейным интегральным уравнением (см. (4.22)). В этом параграфе дается вывод основного уравнения и доказывается его однозначная разрешимость в соответствующем банаховом пространстве. Опираясь на решение основного уравнения, мы получим явные формулы для построения L по заданной МВ.

Рассмотрим пары $L = (\ell, U)$ и $\tilde{L} = (\tilde{\ell}, \tilde{U})$, где $\ell, \tilde{\ell} \in V_N$ при некотором $N \geq 1$, причем

$$\widehat{M}(\rho) = O(\rho^{-1}), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

т.е. $\mu_{mk}^0(S_j) = \tilde{\mu}_{mk}^0(S_j)$ при всех m, k, j . Согласно (2.4) и следствию 3.1 условие (4.1) равносильно условию $h = \tilde{h}$. В ρ -плоскости рассмотрим контур $\omega = \omega^0 \cup \omega^+ \cup \omega^-$ (с обходом против часовой стрелки), где ω^0 – ограниченный замкнутый контур, охватывающий множество $\Lambda \cup \tilde{\Lambda} \cup \{0\}$, т.е. $\Lambda \cup \tilde{\Lambda} \cup \{0\} \subset \text{int } \omega^0$, и $\omega^\pm = \bigcup_{j=0}^{2r-1} \omega_j^\pm$, $\omega_j^\pm = \Gamma_j^\pm \setminus \text{int } \omega^0$. Обозначим $J_\omega = \{\rho : \rho \notin \omega \cup \text{int } \omega^0\}$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Справедливы соотношения*

$$\tilde{\Phi}(x, \rho) = \Phi(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Phi(x, \mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu, \quad \rho \in J_{\omega}, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \rho)}{\rho - \theta} - \frac{\tilde{\Phi}^*(x, \theta) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\rho - \theta} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{(\mu - \theta)(\rho - \mu)} d\mu, \quad \rho, \theta \in J_{\omega}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В (4.2) (и везде в дальнейшем, где это необходимо) интеграл понимается в смысле главного значения [43].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\omega_R = (\omega \cap \{\rho : |\rho| \leq R\}) \cup \{\rho : |\rho| \leq R\}$. По теореме Коши [42] имеем

$$\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho) - \delta_{\xi k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_R} \frac{\mathcal{P}_{\xi k}(x, \mu) - \delta_{\xi k}}{\rho - \mu} d\mu, \quad \rho \in J_{\omega} \cap \{\xi : \xi < R\}, \quad \xi, k = \overline{1, n}. \quad (4.4)$$

Так как $h = \tilde{h}$, то согласно лемме 3.1 получаем $\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho) - \delta_{\xi k} = O(\rho^{-1})$ при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\xi, k = \overline{1, n}$ и, следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=R} \frac{\mathcal{P}_{\xi k}(x, \mu) - \delta_{\xi k}}{\rho - \mu} d\mu = 0.$$

Поэтому при $R \rightarrow \infty$ (4.4) дает

$$\mathcal{P}_{\xi k}(x, \rho) - \delta_{\xi k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\mathcal{P}_{\xi k}(x, \mu)}{\rho - \mu} d\mu, \quad \rho \in J_{\omega}, \quad \xi, k = \overline{1, n},$$

или, что то же самое,

$$\mathcal{P}(x, \rho) = E + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\mathcal{P}(x, \mu)}{\rho - \mu} d\mu, \quad \rho \in J_{\omega}. \quad (4.5)$$

Аналогично вычисляем

$$\frac{\mathcal{P}(x, \rho) - \mathcal{P}(x, \theta)}{\rho - \theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\mathcal{P}(x, \mu)}{(\mu - \theta)(\rho - \mu)} d\mu, \quad \rho, \theta \in J_{\omega}. \quad (4.6)$$

Используя (4.5) и (3.3), выводим

$$\Phi(x, \rho) = \tilde{\Phi}(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\mathcal{P}(x, \mu) \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\rho - \mu} d\mu.$$

Учитывая (3.1), получаем

$$\Phi(x, \rho) = \tilde{\Phi}(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Phi(x, \mu) \tilde{\Phi}^{-1}(x, \mu) \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\rho - \mu} d\mu.$$

Вместе с (2.22) это дает (4.2). Покажем, что

$$\Phi^*(x, \theta)Q_0(\mathcal{P}(x, \rho) - \mathcal{P}(x, \theta))\tilde{\Phi}(x, \rho) = \Phi^*(x, \theta)Q_0\Phi(x, \rho) - \tilde{\Phi}^*(x, \theta)Q_0\tilde{\Phi}(x, \rho). \quad (4.7)$$

В самом деле, согласно (3.1) имеем

$$(\Phi(x, \theta))^{-1}\mathcal{P}(x, \theta) = (\tilde{\Phi}(x, \theta))^{-1},$$

следовательно,

$$(Q_0\Phi(x, \theta))^{-1}Q_0\mathcal{P}(x, \theta) = (Q_0\tilde{\Phi}(x, \theta))^{-1}Q_0.$$

Используя (2.22), получаем $\Phi^*(x, \theta)Q_0\mathcal{P}(x, \theta) = \tilde{\Phi}^*(x, \theta)Q_0$. Вместе с (3.3) это дает (4.7).

Из (4.6) и (4.7) вытекает, что

$$\frac{\Phi^*(x, \theta)Q_0\Phi(x, \rho)}{\rho - \theta} - \frac{\tilde{\Phi}^*(x, \theta)Q_0\tilde{\Phi}(x, \rho)}{\rho - \theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Phi^*(x, \theta)Q_0\mathcal{P}(x, \mu)\tilde{\Phi}(x, \rho)}{(\mu - \theta)(\rho - \mu)} d\mu, \\ \rho, \theta \in J_{\omega}.$$

Ввиду (3.1) и (2.22) это дает (4.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Подынтегральные выражения в (4.2) и (4.3) на каждом разрезе $\omega_j^{\pm}$ устроены очень удачно: они, как легко видеть, состоят из слагаемых двух типов. Слагаемые первой группы имеют разрез на Γ_j , но они убывают на бесконечности и после соответствующих преобразований дадут абсолютно сходящиеся интегралы. Слагаемые второй группы аналитичны на Γ_j и одновременно они содержат растущие на бесконечности экспоненты. Слагаемые второй группы в силу их аналитичности могут быть уничтожены за счет склейки берегов ω_j^+ и ω_j^- (и они должны быть уничтожены, чтобы убрать растущие экспоненты). Именно этим мы сейчас и займемся.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 4.1. *При $\nu = \overline{1, n-1}$, $\xi = \overline{0, n-\nu}$ имеют место соотношения*

$$\Phi_{\nu}(x, \rho) - \sum_{k=\nu+1}^{\nu+\xi} B_{\nu k}^{k-\nu-1}(\rho)\Phi_k(x, \rho) = C_{\nu}(x, \rho) + \sum_{k=\nu+\xi+1}^n B_{\nu k}^{\xi}(\rho)C_k(x, \rho). \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по ξ . При $\xi = 0$ равенство (4.8) совпадает с (2.2). Предположим, что при некотором s (4.8) верно для $\xi = \overline{0, s-1}$. Умножая (4.8) при $\xi = 0$ на $B_{m, m+\nu}^{\nu-1}(\rho)$ и вычитая полученное соотношение из (4.8) для $\xi = s-1$, приходим к (4.8) при $\xi = s$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *При $\nu = \overline{1, n-1}$, $\xi = \overline{0, n-\nu}$ справедливы соотношения*

$$\Phi_{\nu}(x, \rho) - \sum_{k=\nu+1}^{\nu+\xi} M_{n-k+1, n-\nu+1}^*(\rho)\Phi_k(x, \rho) = C_{\nu}(x, \rho) + \sum_{k=\nu+\xi+1}^n B_{\nu k}^{\xi}(\rho)C_k(x, \rho). \quad (4.9)$$

Соотношение (4.9) является следствием (4.8) и (2.32).

ЛЕММА 4.2. *Фиксируем $j = \overline{0, 2r-1}$. Пусть $\overline{m, m+p-1} \in N_j$, $m-1, m+p \notin N_j$. Обозначим*

$$C_\nu^0(x, \rho) = \Phi_\nu(x, \rho) + \sum_{k=\nu+1}^{m+p} M_{n-k+1, n-\nu+1}^*(\rho) \Phi_k(x, \rho), \quad \nu = \overline{m, m+p-1},$$

$$C_{n-\nu}^{0,*}(x, \rho) = \Phi_{n-\nu}^*(x, \rho) + \sum_{k=n-\nu+1}^{n-m+1} M_{n-k+1, \nu+1}(\rho) \Phi_k^*(x, \rho), \quad \nu = \overline{m, m+p-1}.$$

Тогда вектор-функции $C_\nu^0(x, \rho)$ и $C_{n-\nu}^{0,*}(x, \rho)$, $\nu = \overline{m, m+p-1}$, являются аналитическими на $\Gamma_j \setminus \Lambda'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (4.9)

$$C_\nu^0(x, \rho) = C_\nu(x, \rho) + \sum_{k=m+p+1}^n B_{\nu k}^{m+p-\nu}(\rho) C_k(x, \rho).$$

Так как $m+p \notin N_j$, то согласно теореме 2.2 функции $B_{\nu k}^{m+p-\nu}(\rho)$ являются аналитическими на $\Gamma_j \setminus \Lambda'$ и, следовательно, вектор-функции $C_\nu^0(x, \rho)$ аналитичны на $\Gamma_j \setminus \Lambda'$. Вектор-функции $C_{n-\nu}^{0,*}(x, \rho)$ изучаются аналогично.

Определим матрицы $A(\rho) = [a_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$ и $\tilde{A}(\rho) = [\tilde{a}_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$ по формулам

$$A(\rho) = \mathcal{N}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho) = -\widehat{\mathcal{N}}^*(\rho) \widetilde{\mathcal{N}}(\rho), \quad \tilde{A}(\rho) = \widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho) = -\widehat{\mathcal{N}}^*(\rho) \mathcal{N}(\rho).$$

Очевидно, что $a_{mk}(\rho) = 0, \tilde{a}_{mk}(\rho) = 0$ при $m \leq k$, а при $m > k$ имеем

$$\begin{aligned} a_{mk}(\rho) &= \sum_{\xi=k+1}^m M_{n-m+1, n-\xi+1}^*(\rho) \widehat{M}_{k\xi}(\rho) \\ &= - \sum_{\xi=k}^{m-1} \widehat{M}_{n-m+1, n-\xi+1}^*(\rho) \widetilde{M}_{k\xi}(\rho), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{mk}(\rho) &= \sum_{\xi=k+1}^m \widetilde{M}_{n-m+1, n-\xi+1}^*(\rho) \widehat{M}_{k\xi}(\rho) \\ &= - \sum_{\xi=k}^{m-1} \widetilde{M}_{n-m+1, n-\xi+1}^*(\rho) M_{k\xi}(\rho). \end{aligned} \quad (4.11)$$

ЛЕММА 4.3. *Матрицы-функции*

$$\Phi(x, \rho) \widetilde{\Phi}^*(x, \rho) - \Phi(x, \rho) A(\rho) \widetilde{\Phi}^*(x, \rho)$$

и

$$\widetilde{\Phi}(x, \rho) \Phi^*(x, \rho) - \widetilde{\Phi}(x, \rho) \tilde{A}(\rho) \Phi^*(x, \rho)$$

являются целыми по ρ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (2.24) и (2.23), вычисляем

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, \rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho) &= C(x, \rho) \mathcal{N}(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho) \\
 &= C(x, \rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho) + C(x, \rho) \widetilde{\mathcal{N}}(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho) \\
 &= \Phi(x, \rho) \mathcal{N}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho) + C(x, \rho) \tilde{C}^*(x, \rho) \\
 &= \Phi(x, \rho) A(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho) + C(x, \rho) \tilde{C}^*(x, \rho).
 \end{aligned}$$

Так как $C(x, \rho) \tilde{C}^*(x, \rho)$ является целой по ρ , то матрица-функция $\Phi(x, \rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho) - \Phi(x, \rho) A(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho)$ также является целой по ρ . Аналогично доказывается и второе утверждение леммы.

Фиксируем $j = \overline{0, 2r-1}$. Пусть $N_j = \{\overline{m_1, m_1 + p_1 - 1}, \dots, \overline{m_s, m_s + p_s - 1}\}$, $m_i - 1, m_i + p_i \notin N_j, i = \overline{1, s}$. Введем матрицы $A^{(j)}(\rho) = [a_{k\xi}^{(j)}(\rho)]_{k, \xi = \overline{1, n}}$, $\tilde{A}^{(j)}(\rho) = [\tilde{a}_{k\xi}^{(j)}(\rho)]_{k, \xi = \overline{1, n}}$, $\rho \in \Gamma_j^\pm$, где

$$\begin{aligned}
 a_{k\xi}^{(j)}(\rho) &= \begin{cases} a_{k\xi}(\rho) & \text{при } m_i \leq \xi < k \leq m_i + p_i, i = \overline{1, s}; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\
 \tilde{a}_{k\xi}^{(j)}(\rho) &= \begin{cases} \tilde{a}_{k\xi}(\rho) & \text{при } m_i \leq \xi < k \leq m_i + p_i, i = \overline{1, s}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.4. *Матрицы-функции*

$$\Phi(x, \rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho) - \Phi(x, \rho) A^{(j)}(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho)$$

и

$$\tilde{\Phi}(x, \rho) \Phi^*(x, \rho) - \tilde{\Phi}(x, \rho) \tilde{A}^{(j)}(\rho) \Phi^*(x, \rho)$$

являются аналитическими на $\Gamma_j \setminus \Lambda'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 4.4 аналогично доказательству леммы 4.3, но вместо (2.24) используется лемма 4.2 и вычисления проводятся по блокам, соответствующим $\overline{m_i, m_i + p_i - 1} \in N_j, i = \overline{1, s}$.

Для $\rho \in \omega$ введем матрицы $A_0(\rho), \tilde{A}_0(\rho), F(x, \rho) = [F_{\nu k}(x, \rho)]_{\nu, k = \overline{1, n}}$ по формулам

$$\begin{aligned}
 A_0(\rho) &= \begin{cases} A^{(j)}(\rho), & \rho \in \omega_j^\pm; \\ A(\rho), & \rho \in \omega^0, \end{cases} \quad \tilde{A}_0(\rho) = \begin{cases} \tilde{A}^{(j)}(\rho), & \rho \in \omega_j^\pm; \\ \tilde{A}(\rho), & \rho \in \omega^0, \end{cases} \\
 F(x, \rho) &= \Phi(x, \rho) A_0(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho). \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

Из (2.13), (2.20) и (4.10) вытекает, что

$$|F_{\nu k}(x, \rho)| \leq C\delta(\rho), \quad x \geq 0, \quad \rho \in \omega^\pm, \quad \nu, k = \overline{1, n}, \tag{4.13}$$

где

$$\delta(\rho) = \max_{m,k} |\widehat{M}_{mk}(\rho)|. \quad (4.14)$$

Используя леммы 4.3 и 4.4, перепишем соотношения (4.2) и (4.3) в виде

$$\widetilde{\Phi}(x, \rho) = \Phi(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{F(x, \mu) Q_0 \widetilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu, \quad \rho \in J_{\omega}, \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \rho)}{\theta - \rho} - \frac{\widetilde{\Phi}^*(x, \theta) Q_0 \widetilde{\Phi}(x, \rho)}{\theta - \rho} \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 F(x, \mu) Q_0 \widetilde{\Phi}(x, \rho)}{(\theta - \mu)(\mu - \rho)} d\mu = 0, \quad \rho, \theta \in J_{\omega}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Из (4.1), (4.13) и (4.14) вытекает, что интегралы в (4.15) и (4.16) сходятся абсолютно. Таким образом, мы убрали растущие экспоненты.

Определим матрицу $\Omega(\mu, \rho) = [\omega_{km}(\mu, \rho)]_{k,m=\overline{1,n}}$ по формуле

$$\Omega(\mu, \rho) = A_0(\mu) \widetilde{\mathcal{N}}^*(\mu) \widetilde{\mathcal{N}}(\rho). \quad (4.17)$$

Очевидно, что $\omega_{km}(\mu, \rho) \equiv 0$ при $k \leq m$. Из (2.29), (4.12) и (4.15) при $x = 0$ вытекает, что

$$\Phi(0, \rho) = \widetilde{\Phi}(0, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Phi(0, \mu) \Omega(\mu, \rho)}{\rho - \mu} d\mu.$$

Умножая это равенство слева на вектор-строку $[h_{\xi 1}, \dots, h_{\xi n}]$ и учитывая соотношение $h = \widetilde{h}$, вычисляем

$$U_{\xi}(\Phi_m(x, \rho)) = \widetilde{U}_{\xi}(\widetilde{\Phi}_m(x, \rho)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \left(\sum_{k=m+1}^n U_{\xi}(\Phi_k(x, \mu)) \omega_{km}(\mu, \rho) \right) \frac{d\mu}{\rho - \mu}. \quad (4.18)$$

ЛЕММА 4.5. *Справедливо соотношение*

$$\widetilde{A}_0(\rho) A_0(\rho) = A_0(\rho) \widetilde{A}_0(\rho) = \widetilde{A}_0(\rho) - A_0(\rho), \quad \rho \in \omega. \quad (4.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\rho \in \omega^0$ имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_0(\rho) A_0(\rho) &= \widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho) \mathcal{N}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho) = \widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho) - \mathcal{N}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho) \\ &= \widetilde{A}_0(\rho) - A_0(\rho), \\ A_0(\rho) \widetilde{A}_0(\rho) &= \mathcal{N}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho) \widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho) = \widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho) - \mathcal{N}^*(\rho) \widehat{\mathcal{N}}(\rho) \\ &= \widetilde{A}_0(\rho) - A_0(\rho), \end{aligned}$$

и (4.19) доказано. При $\rho \in \omega_j^{\pm}$ вычисления аналогичны и проводятся по блокам, соответствующим структуре множеств N_j .

Перейдем теперь непосредственно к выводу основного уравнения обратной задачи. При этом будем опираться на (4.15) (соотношение (4.16) будет использоваться для доказательства разрешимости основного уравнения). В контуре ω удобнее склеить берега разрезов. Для этого в ρ -плоскости рассмотрим контур $\omega^* := \omega^0 \cup \omega^1$, где $\omega^1 = \bigcup_{j=0}^{2r-1} \omega_j^1$, $\omega_j^1 := \{\rho : \rho \in \Gamma_j \setminus \omega^0\}$, причем ω_j^1 ориентирован в сторону возрастания модуля ρ . Из (2.30) вытекает, что

$$\Phi^{*\mp}(x, \rho) Q_0 \Phi^\pm(x, \rho) \equiv \mathcal{N}^{*\mp}(\rho) \mathcal{N}^\pm(\rho), \quad \Phi^{*\pm}(x, \rho) Q_0 \Phi^\pm(x, \rho) \equiv E, \quad \rho \in \omega^1. \quad (4.20)$$

При $\rho \in \omega^*$ определим матрицы $\varphi(x, \rho)$, $\tilde{\varphi}(x, \rho)$, $G(x, \rho)$, $\tilde{G}(x, \rho)$, $S(\rho)$ и $\tilde{S}(\rho)$ по формулам

$$\begin{aligned} \varphi(x, \rho) &= \begin{cases} [\Phi^+(x, \rho), \Phi^-(x, \rho)], & \rho \in \omega^1; \\ \Phi(x, \rho), & \rho \in \omega^0, \end{cases} \\ \tilde{\varphi}(x, \rho) &= \begin{cases} [\tilde{\Phi}^+(x, \rho), \tilde{\Phi}^-(x, \rho)], & \rho \in \omega^1; \\ \tilde{\Phi}(x, \rho), & \rho \in \omega^0, \end{cases} \\ G(x, \rho) &= \begin{bmatrix} -(\tilde{A}_0(\rho) \Phi^*(x, \rho))^+ Q_0 \\ (\tilde{A}_0(\rho) \Phi^*(x, \rho))^- Q_0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}(x, \rho) = \begin{bmatrix} -(A_0(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho))^+ Q_0 \\ (A_0(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho))^- Q_0 \end{bmatrix} \quad \rho \in \omega^1, \\ G(x, \rho) &= \tilde{A}_0(\rho) \Phi^*(x, \rho) Q_0, \quad \tilde{G}(x, \rho) = A_0(\rho) \tilde{\Phi}^*(x, \rho) Q_0, \quad \rho \in \omega^0, \\ S(\rho) &= E + \frac{1}{2} \tilde{A}_0(\rho), \quad \tilde{S}(\rho) = E - \frac{1}{2} A_0(\rho), \quad \rho \in \omega^0, \\ S(\rho) &= \begin{bmatrix} E + \frac{1}{2} \tilde{A}_0^+(\rho) & -\frac{1}{2} (\tilde{A}_0(\rho) \mathcal{N}^*(\rho))^+ \mathcal{N}^-(\rho) \\ -\frac{1}{2} (\tilde{A}_0(\rho) \mathcal{N}^*(\rho))^- \mathcal{N}^+(\rho) & E + \frac{1}{2} \tilde{A}_0^-(\rho) \end{bmatrix}, \quad \rho \in \omega^1, \\ \tilde{S}(\rho) &= \begin{bmatrix} E - \frac{1}{2} A_0^+(\rho) & \frac{1}{2} (A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^+ \tilde{\mathcal{N}}^-(\rho) \\ \frac{1}{2} (A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^- \tilde{\mathcal{N}}^+(\rho) & E - \frac{1}{2} A_0^-(\rho) \end{bmatrix}, \quad \rho \in \omega^1. \end{aligned}$$

Здесь и далее $f^\pm := f|_{\omega^\pm}$. Обозначим

$$r(x, \mu, \rho) = \frac{G(x, \mu) \varphi(x, \rho)}{\mu - \rho}, \quad \tilde{r}(x, \mu, \rho) = \frac{\tilde{G}(x, \mu) \tilde{\varphi}(x, \rho)}{\mu - \rho}, \quad \rho, \mu \in \omega^*.$$

Из (4.20) следует, что матрицы-функции

$$\mathcal{D}(\rho) := G(x, \rho) \varphi(x, \rho), \quad \tilde{\mathcal{D}}(\rho) := \tilde{G}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \rho) \quad (4.21)$$

не зависят от x .

ТЕОРЕМА 4.2. *Справедливы соотношения*

$$\tilde{\varphi}(x, \rho) = \varphi(x, \rho) \tilde{S}(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} \varphi(x, \mu) \tilde{r}(x, \mu, \rho) d\mu, \quad \rho \in \omega^*, \quad (4.22)$$

$$r(x, \theta, \rho) \tilde{S}(\rho) - S(\theta) \tilde{r}(x, \theta, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} r(x, \theta, \mu) \tilde{r}(x, \mu, \rho) d\mu = 0, \quad \rho, \theta \in \omega^*. \quad (4.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (2.30), (4.12), (4.20) и формулы Сохоцкого [43], из (4.15) получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(x, \rho) &= \Phi(x, \rho) \left(E - \frac{1}{2} A_0(\rho) \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{F(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu, \quad \rho \in \omega^0, \\ \tilde{\Phi}^{\pm}(x, \rho) &= \Phi^{\pm}(x, \rho) \pm \frac{1}{2} ((\Phi(x, \rho) A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^{-} - (\Phi(x, \rho) A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^{+}) \tilde{\mathcal{N}}^{\pm}(\rho) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{F(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}^{\pm}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu, \quad \rho \in \omega^1.\end{aligned}$$

Переходя к контуру ω^* , перепишем эти соотношения в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(x, \rho) &= \Phi(x, \rho) \left(E - \frac{1}{2} A_0(\rho) \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^0} \frac{\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^1} \frac{((\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu))^{-} - (\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu))^{+}) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu, \\ &\quad \rho \in \omega^0, \\ \tilde{\Phi}^{\pm}(x, \rho) &= \Phi^{\pm}(x, \rho) \left(E - \frac{1}{2} A_0^{\pm}(\rho) \right) + \frac{1}{2} (\Phi(x, \rho) A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^{\mp} \tilde{\mathcal{N}}^{\pm}(\rho) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^0} \frac{\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}^{\pm}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^1} \frac{((\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu))^{-} - (\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu))^{+}) Q_0 \tilde{\Phi}^{\pm}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu, \\ &\quad \rho \in \omega^1,\end{aligned}$$

т.е. приходим к (4.22). Аналогично, используя (2.30), (4.12), (4.20) и формулы Сохоцкого, из (4.16) получаем

$$\begin{aligned}&\frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \rho)}{\theta - \rho} \left(E - \frac{1}{2} A_0(\rho) \right) - \frac{\tilde{\Phi}^*(x, \theta) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\theta - \rho} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \mu)}{\theta - \mu} \cdot \frac{A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu = 0, \\ &\quad \rho \in \omega^0, \quad \theta \in J_{\omega}, \\ &\frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi^{\pm}(x, \rho)}{\theta - \rho} - \frac{\tilde{\Phi}^*(x, \theta) Q_0 \tilde{\Phi}^{\pm}(x, \rho)}{\theta - \rho} \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 ((\Phi(x, \rho) A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^{-} - (\Phi(x, \rho) A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^{+}) \tilde{\mathcal{N}}^{\pm}(\rho)}{\theta - \rho} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \mu)}{\theta - \mu} \cdot \frac{A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}^{\pm}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu = 0, \\ &\quad \rho \in \omega^1, \quad \theta \in J_{\omega}.\end{aligned}$$

Применяя теперь формулы Сохоцкого по θ , вычисляем

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \rho)}{\theta - \rho} \left(E - \frac{1}{2} A_0(\rho) \right) - \frac{\tilde{\Phi}^*(x, \theta) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\theta - \rho} \\
& + \frac{1}{2} \frac{A_0(\theta) \tilde{\Phi}^*(x, \theta) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\theta - \rho} \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^1} (\Phi^*(x, \theta) Q_0 ((\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu))^- \\
& \quad - (\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu))^+) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)) \frac{d\mu}{(\theta - \mu)(\mu - \rho)} \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^0} \Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho) \frac{d\mu}{(\theta - \mu)(\mu - \rho)} = 0, \\
& \rho, \theta \in \omega^0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi^\pm(x, \rho)}{\theta - \rho} - \frac{\tilde{\Phi}^*(x, \theta) Q_0 \tilde{\Phi}^\pm(x, \rho)}{\theta - \rho} + \frac{1}{2} \frac{A_0(\theta) \tilde{\Phi}^*(x, \theta) Q_0 \tilde{\Phi}^\pm(x, \rho)}{\theta - \rho} \\
& \pm \frac{1}{2} \frac{\Phi^*(x, \theta) Q_0 ((\Phi(x, \rho) A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^- - (\Phi(x, \rho) A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^+) \tilde{\mathcal{N}}^\pm(\rho)}{\theta - \rho} \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^1} (\Phi^*(x, \theta) Q_0 ((\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu))^- \\
& \quad - (\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu))^+) Q_0 \tilde{\Phi}^\pm(x, \rho)) \frac{d\mu}{(\theta - \mu)(\mu - \rho)} \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^0} \Phi^*(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}^\pm(x, \rho) \frac{d\mu}{(\theta - \mu)(\mu - \rho)} = 0, \\
& \rho \in \omega^1, \quad \theta \in \omega^0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi^{*\pm}(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \rho)}{\theta - \rho} \left(E - \frac{1}{2} A_0(\rho) \right) - \frac{\tilde{\Phi}^{*\pm}(x, \theta) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\theta - \rho} \\
& \mp \frac{1}{2} \mathcal{N}^{*\pm}(\theta) \frac{((\mathcal{N}(\theta) A_0(\theta) \tilde{\Phi}^*(x, \theta))^- - (\mathcal{N}(\theta) A_0(\theta) \tilde{\Phi}^*(x, \theta))^+) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\theta - \rho} \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^1} (\Phi^{*\pm}(x, \theta) Q_0 ((\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu))^- \\
& \quad - (\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu))^+) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)) \frac{d\mu}{(\theta - \mu)(\mu - \rho)} \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^0} \Phi^{*\pm}(x, \theta) Q_0 \Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho) \frac{d\mu}{(\theta - \mu)(\mu - \rho)} = 0, \\
& \rho \in \omega^0, \quad \theta \in \omega^1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Phi^{*\pm}(x, \theta) Q_0 \Phi^\pm(x, \rho)}{\theta - \rho} - \frac{\tilde{\Phi}^{*\pm}(x, \theta) Q_0 \tilde{\Phi}^\pm(x, \rho)}{\theta - \rho} \\
& \pm \frac{1}{2} \frac{\Phi^{*\pm}(x, \theta) Q_0 ((\Phi(x, \rho) A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^- - (\Phi(x, \rho) A_0(\rho) \tilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^+) \tilde{\mathcal{N}}^\pm(\rho)}{\theta - \rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mp \frac{1}{2} \mathcal{N}^{*\pm}(\theta) \frac{((\mathcal{N}(\theta)A_0(\theta)\tilde{\Phi}^*(x, \theta))^- - (\mathcal{N}(\theta)A_0(\theta)\tilde{\Phi}^*(x, \theta))^+)Q_0\tilde{\Phi}^\pm(x, \rho)}{\theta - \rho} \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^1} (\Phi^{*\pm}(x, \theta)Q_0((\Phi(x, \mu)A_0(\mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu))^- - \\
& \quad - (\Phi(x, \mu)A_0(\mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu))^+)Q_0\tilde{\Phi}^\pm(x, \rho)) \frac{d\mu}{(\theta - \mu)(\mu - \rho)} \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^0} \Phi^{*\pm}(x, \theta)Q_0\Phi(x, \mu)A_0(\mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu)Q_0\tilde{\Phi}^\pm(x, \rho) \frac{d\mu}{(\theta - \mu)(\mu - \rho)} = 0, \\
& \rho, \theta \in \omega^1.
\end{aligned}$$

Умножая эти соотношения слева на $\tilde{A}_0^\pm(\theta)$ при $\theta \in \omega^1$ и на $\tilde{A}_0(\theta)$ при $\theta \in \omega^0$ соответственно и используя лемму 4.5, приходим к (4.23).

Меняя местами $L = (\ell, U)$ и $\tilde{L} = (\tilde{\ell}, \tilde{U})$, получаем симметрично к (4.22):

$$\varphi(x, \rho) = \tilde{\varphi}(x, \rho)S(\rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} \tilde{\varphi}(x, \mu)r(x, \mu, \rho) d\mu, \quad \rho \in \omega^*. \quad (4.24)$$

Соотношение (4.22) называется *основным уравнением обратной задачи*. В обратной задаче надо построить пару $L = (\ell, U)$ по заданной МВ $M(\rho)$. Для этого сначала выберем “модельную” пару $\tilde{L} = (\tilde{\ell}, \tilde{U})$ (например, с потенциалом $\tilde{Q}(x) \equiv 0$) так, чтобы выполнялось (4.1). Тогда для каждого фиксированного $x \geq 0$ соотношение (4.22) является линейным интегральным уравнением относительно $\varphi(x, \rho)$.

Перейдем теперь к исследованию разрешимости основного уравнения (4.22). Для этого введем банаховы пространства

$$\mathcal{B}_{p,\alpha} := \{f(\rho) : f(\rho)\rho^{-\alpha} \in L_p(\omega^*)\}, \quad p > 1, \quad \alpha \geq 0,$$

с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{B}_{p,\alpha}} := \|f(\rho)\rho^{-\alpha}\|_{L_p(\omega^*)}.$$

Положим $\mathcal{B}_p := \mathcal{B}_{p,1}$. Рассмотрим оператор

$$Hf(\rho) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} \frac{f(\mu)H_1(\mu)H_2(\rho)}{\mu^\alpha(\mu - \rho)} d\mu, \quad \rho \in \omega^*, \quad \alpha \geq 0,$$

где H_1 и H_2 — ограниченные функции.

ЛЕММА 4.6. *Оператор H является линейным ограниченным оператором из $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ в $\mathcal{B}_{p,\beta}$ при $p > 1$, $\beta \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(\rho) \in \mathcal{B}_{p,\alpha}$. Тогда $f(\rho)H_1(\rho)\rho^{-\alpha} \in L_p(\omega^*)$ и, следовательно, $F(\rho) := Hf(\rho) \in L_p(\omega^*)$ и $\|F\|_{L_p} \leq C\|f\|_{\mathcal{B}_{p,\alpha}}$. Так как $F \in L_p$, то $F \in \mathcal{B}_{p,\beta}$, $\beta \geq 0$, и $\|F\|_{\mathcal{B}_{p,\beta}} \leq C\|F\|_{L_p}$. Таким образом, для любой функции $f \in \mathcal{B}_{p,\alpha}$ имеем $Hf \in \mathcal{B}_{p,\beta}$ и $\|Hf\|_{\mathcal{B}_{p,\beta}} \leq C\|f\|_{\mathcal{B}_{p,\alpha}}$.

Определим матрицу $D(x, \rho)$, $\rho \in \omega^*$, $x \geq 0$, следующим образом: при $\rho \in \omega^0$ $D(x, \rho) = \text{diag}[D_k(x, \rho)]_{k=1, \overline{n}}$, $D_k(x, \rho) = \exp(-\rho R_k x)$, $R_k = R_k(S_j)$; при $\rho \in \omega_j^1$

$D(x, \rho) = \text{diag}[D_k(x, \rho)]_{k=\overline{1, 2n}}$, $D_k(x, \rho) = \exp(-\rho R_k x)$, $k \leq n$, и $D_k(x, \rho) = \exp(-\rho R_{k-n} x)$, $k > n$; $R_k = R_k(S_j)$. Обозначим

$$\begin{aligned}\psi(x, \rho) &= \varphi(x, \rho)D(x, \rho), & S^0(x, \rho) &= D^{-1}(x, \rho)S(\rho)D(x, \rho), \\ G^0(x, \rho) &= D^{-1}(x, \rho)G(x, \rho), \\ \tilde{\psi}(x, \rho) &= \tilde{\varphi}(x, \rho)D(x, \rho), & \tilde{S}^0(x, \rho) &= D^{-1}(x, \rho)\tilde{S}(\rho)D(x, \rho), \\ \tilde{G}^0(x, \rho) &= D^{-1}(x, \rho)\tilde{G}(x, \rho), \\ r^0(x, \mu, \rho) &= D^{-1}(x, \mu)r(x, \mu, \rho)D(x, \rho), & \tilde{r}^0(x, \mu, \rho) &= D^{-1}(x, \mu)\tilde{r}(x, \mu, \rho)D(x, \rho).\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$r^0(x, \mu, \rho) = \frac{G^0(x, \mu)\psi(x, \rho)}{\mu - \rho}, \quad \tilde{r}^0(x, \mu, \rho) = \frac{\tilde{G}^0(x, \mu)\tilde{\psi}(x, \rho)}{\mu - \rho}.$$

Из (2.13), (2.20), (4.10) и (4.11) вытекает, что для элементов матриц ψ , $\tilde{\psi}$, G^0 , $\tilde{G}^0$ имеют место оценки

$$|\psi_{k\nu}(x, \rho)|, |\tilde{\psi}_{k\nu}(x, \rho)| \leq C, \quad x \geq 0, \quad \rho \in \omega^*, \quad k, \nu = \overline{1, n}, \quad (4.25)$$

$$|G_{k\nu}^0(x, \rho)|, |\tilde{G}_{k\nu}^0(x, \rho)| \leq C\delta(\rho), \quad x \geq 0, \quad \rho \in \omega^*, \quad k, \nu = \overline{1, n}, \quad (4.26)$$

где $\delta(\rho)$ определена в (4.14).

При фиксированном $x \geq 0$ рассмотрим операторы

$$\begin{aligned}B^0 f(\rho) &= f(\rho)S^0(x, \rho) - B^1 f(\rho), \quad B^1 f(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} f(\mu)r^0(x, \mu, \rho) d\mu, \quad \rho \in \omega^*, \\ \tilde{B}^0 f(\rho) &= f(\rho)\tilde{S}^0(x, \rho) + \tilde{B}^1 f(\rho), \quad \tilde{B}^1 f(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} f(\mu)\tilde{r}^0(x, \mu, \rho) d\mu, \quad \rho \in \omega^*,\end{aligned}$$

где

$$f(\rho) = \begin{cases} [f^+(\rho), f^-(\rho)], & \rho \in \omega^1; \\ f^0(\rho), & \rho \in \omega^0, \end{cases}$$

и $f^0(\rho)$, $f^\pm(\rho)$ — $(n \times n)$ -матрицы-функции.

ЛЕММА 4.7. Пусть при некотором $\alpha \geq 1$

$$\widehat{M}(\rho) = O(\rho^{-\alpha}), \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (4.27)$$

Тогда при каждом фиксированном $x \geq 0$ операторы B^1 , $\tilde{B}^1$ являются линейными ограниченными операторами из $\mathcal{B}_{p, \alpha}$ в $\mathcal{B}_{p, \beta}$ при $p > 1$, $\beta \geq 0$, а B^0 , $\tilde{B}^0$ являются линейными ограниченными операторами из $\mathcal{B}_{p, \alpha}$ в $\mathcal{B}_{p, \alpha}$ при $p > 1$. Кроме того, $\tilde{B}^0 B^0 = B^0 \tilde{B}^0 = E$, где E — единичный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченность B^1 , $\tilde{B}^1$ следует из (4.25)–(4.27), (4.14) и леммы 4.6. Кроме того, в силу (4.27)

$$S^0(x, \rho) - E = \tilde{S}^0(x, \rho) - E = O(\rho^{-\alpha}), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad (4.28)$$

и, следовательно, B^0 , $\tilde{B}^0$ являются линейными ограниченными операторами из $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ в $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ при $p > 1$. Зафиксируем $x \geq 0$. Пусть $f(\rho) \in \mathcal{B}_{p,\alpha}$, $z(\rho) = f(\rho)D^{-1}(x, \rho)$,

$$\begin{aligned} \tilde{B}z(\rho) &:= z(\rho)\tilde{S}(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} z(\mu)\tilde{r}(x, \mu, \rho) d\mu, \quad \rho \in \omega^*, \\ Bz(\rho) &:= z(\rho)S(\rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} z(\mu)r(x, \mu, \rho) d\mu, \quad \rho \in \omega^*. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\tilde{B}Bz(\rho) = B\tilde{B}z(\rho) = z(\rho).$$

В самом деле, используя лемму 2.2 и формулу замены порядка интегрирования в особом интеграле [43], вычисляем

$$\begin{aligned} \tilde{B}Bz(\rho) &= z(\rho)S(\rho)\tilde{S}(\rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} z(\theta)(r(x, \theta, \rho)\tilde{S}(\rho) - S(\theta)\tilde{r}(x, \theta, \rho)) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} z(\theta)r(x, \theta, \mu) d\theta \right) \tilde{r}(x, \mu, \rho) d\mu \\ &= z(\rho)\xi(\rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} z(\theta) \left(r(x, \theta, \rho)\tilde{S}(\rho) - S(\theta)\tilde{r}(x, \theta, \rho) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} r(x, \theta, \mu)\tilde{r}(x, \mu, \rho) d\mu \right) d\theta, \end{aligned}$$

где $\xi(\rho) = S(\rho)\tilde{S}(\rho) - \mathcal{D}(\rho)\tilde{\mathcal{D}}(\rho)/4$, а матрицы $\mathcal{D}(\rho)$ и $\tilde{\mathcal{D}}(\rho)$ определены в (4.21). В силу (4.23) интеграл равен нулю и, следовательно,

$$\tilde{B}Bz(\rho) = z(\rho)\xi(\rho), \quad \rho \in \omega^*. \quad (4.29)$$

Покажем, что $\xi(\rho) \equiv E$ — единичная матрица. При $\rho \in \omega^0$, используя леммы 2.2 и 4.5, получаем

$$\begin{aligned} \xi(\rho) &= \left(E + \frac{1}{2} \tilde{A}_0(\rho) \right) \left(E - \frac{1}{2} A_0(\rho) \right) - \frac{1}{4} \tilde{A}_0(\rho) A_0(\rho) \\ &= E + \frac{1}{2} (\tilde{A}_0(\rho) - A_0(\rho) - \tilde{A}_0(\rho) A_0(\rho)) = E, \quad \rho \in \omega^0. \end{aligned}$$

При $\rho \in \omega^1$ имеем

$$\begin{aligned} \xi(\rho) = & \begin{bmatrix} E + \frac{1}{2} \tilde{A}_0^+(\rho) & -\frac{1}{2}(\tilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho))^+ \mathcal{N}^-(\rho) \\ -\frac{1}{2}(\tilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho))^- \mathcal{N}^+(\rho) & E + \frac{1}{2} \tilde{A}_0^-(\rho) \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} E - \frac{1}{2} A_0^+(\rho) & \frac{1}{2}(A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^+ \widetilde{\mathcal{N}}^-(\rho) \\ \frac{1}{2}(A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^- \widetilde{\mathcal{N}}^+(\rho) & E - \frac{1}{2} A_0^-(\rho) \end{bmatrix} \\ & - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\tilde{A}_0^+(\rho) & -(\tilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho))^+ \mathcal{N}^-(\rho) \\ (\tilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho))^- \mathcal{N}^+(\rho) & \tilde{A}_0^-(\rho) \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} -A_0^+(\rho) & -(A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^+ \widetilde{\mathcal{N}}^-(\rho) \\ (A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^- \widetilde{\mathcal{N}}^+(\rho) & A_0^-(\rho) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\xi(\rho) = \begin{bmatrix} \xi_{11}(\rho) & \xi_{12}(\rho) \\ \xi_{21}(\rho) & \xi_{22}(\rho) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \xi_{11}(\rho) &= \xi_{22}(\rho) \equiv E, \\ 2\xi_{12}(\rho) &= (A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^+ \widetilde{\mathcal{N}}^-(\rho) - (\tilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho))^+ \mathcal{N}^-(\rho) \\ &\quad + (\tilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho))^+ \mathcal{N}^-(\rho) A_0^-(\rho), \\ 2\xi_{21}(\rho) &= (A_0(\rho)\widetilde{\mathcal{N}}^*(\rho))^- \widetilde{\mathcal{N}}^+(\rho) - (\tilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho))^- \mathcal{N}^+(\rho) \\ &\quad + (\tilde{A}_0(\rho)\mathcal{N}^*(\rho))^- \mathcal{N}^+(\rho) A_0^+(\rho). \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что $\xi_{12}(\rho) = \xi_{21}(\rho) \equiv 0$. Этот же факт можно получить и опираясь на (4.22) и (4.24). В самом деле, так как $\tilde{\varphi}(x, \rho) = \tilde{B}\varphi(x, \rho)$, $\varphi(x, \rho) = B\tilde{\varphi}(x, \rho)$, то из (4.29) вытекает, что $\tilde{\varphi}(x, \rho) = \tilde{B}\varphi(x, \rho) = \tilde{B}B\tilde{\varphi}(x, \rho) = \tilde{\varphi}(x, \rho)\xi(\rho)$ и, следовательно,

$$[\tilde{\Phi}^+(x, \rho), \tilde{\Phi}^-(x, \rho)] \begin{bmatrix} \xi_{11}(\rho) - E & \xi_{12}(\rho) \\ \xi_{21}(\rho) & \xi_{22}(\rho) - E \end{bmatrix} \equiv 0, \quad \rho \in \omega^1.$$

Так как $\xi_{11}(\rho) = \xi_{22}(\rho) \equiv E$, то $\tilde{\Phi}^+(x, \rho)\xi_{12}(\rho) \equiv 0$, $\tilde{\Phi}^-(x, \rho)\xi_{21}(\rho) \equiv 0$, поэтому $\xi_{12}(\rho) = \xi_{21}(\rho) \equiv 0$, $\rho \in \omega^1$.

Таким образом, мы доказали, что $\xi(\rho) \equiv E$, $\rho \in \omega^*$. Вместе с (4.29) это дает $\tilde{B}Bz(\rho) = z(\rho)$. Соотношение $B\tilde{B}z(\rho) = z(\rho)$ доказывается аналогично. Так как

$$\begin{aligned} \tilde{B}^0 B^0 f(\rho) &= \tilde{B}Bz(\rho)D(x, \rho) = z(\rho)D(x, \rho) = f(\rho), \\ B^0 \tilde{B}^0 f(\rho) &= B\tilde{B}z(\rho)D(x, \rho) = z(\rho)D(x, \rho) = f(\rho), \end{aligned}$$

то имеем $\tilde{B}^0 B^0 = B^0 \tilde{B}^0 = E$. Лемма 4.7 доказана.

Следующая теорема является очевидным следствием леммы 4.7.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $M(\rho)$ – МВ для пары $L = (\ell, U)$. Пусть пара $\tilde{L} = (\tilde{\ell}, \tilde{U})$ выбрана так, что выполняется (4.1). Тогда для каждого фиксированного $x \geq 0$ основное уравнение (4.22) имеет единственное решение $\varphi(x, \rho)$ в классе $\varphi(x, \rho)D(x, \rho) \in \mathcal{B}_p$ при каждом $p > 1$, причем $\sup_{x \geq 0} \|\varphi(x, \rho)D(x, \rho)\|_{\mathcal{B}_p} < \infty$.

Получим теперь явные формулы для построения потенциала $Q(x)$. Для простоты предположим, что (4.27) верно при $\alpha = 2$, т.е.

$$\widehat{M}(\rho) = O(\rho^{-2}), \quad |\rho| \rightarrow \infty. \quad (4.30)$$

Обозначим

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} (\Phi(x, \mu)A_0(\mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu)Q_0 - Q_0\Phi(x, \mu)A_0(\mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu)) d\mu. \quad (4.31)$$

В силу (4.30) интеграл в (4.31) сходится абсолютно.

ЛЕММА 4.8. Справедливы соотношения

$$Q(x) = \tilde{Q}(x) + \varepsilon(x), \quad h = \tilde{h}. \quad (4.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя (4.15) по x и учитывая (4.12) и (2.17), вычисляем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}'(x, \rho) &= \Phi'(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Phi'(x, \mu)A_0(\mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu)Q_0\tilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \Phi(x, \mu)A_0(\mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu)\tilde{\Phi}(x, \rho) d\mu. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Так как $\Phi(x, \rho)$ является решением системы (1.1), то $\Phi'(x, \rho) = (\rho B_0 - B(x))\Phi(x, \rho)$, где $B_0 = Q_0^{-1}$, $B(x) = B_0Q(x)$. Поэтому (4.33) можно записать в виде

$$\begin{aligned} (\rho B_0 - \tilde{B}(x))\tilde{\Phi}(x, \rho) &= (\rho B_0 - B(x))\Phi(x, \rho) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{(\mu B_0 - B(x))\Phi(x, \mu)A_0(\mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu)Q_0\tilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \Phi(x, \mu)A_0(\mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu)\tilde{\Phi}(x, \rho) d\mu. \end{aligned}$$

Заменяя здесь $\Phi(x, \rho)$ из (4.15), вычисляем

$$\begin{aligned} \widehat{B}(x)\tilde{\Phi}(x, \rho) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} B_0\Phi(x, \mu)A_0(\mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu)Q_0\tilde{\Phi}(x, \rho) d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \Phi(x, \mu)A_0(\mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu)\tilde{\Phi}(x, \rho) d\mu. \end{aligned}$$

Умножая это соотношение слева на Q_0 и используя (4.31), получаем $\widehat{Q}(x)\tilde{\Phi}(x, \rho) = \varepsilon(x)\tilde{\Phi}(x, \rho)$ и, следовательно, $Q(x) = \tilde{Q}(x) + \varepsilon(x)$.

Далее, положим $x = 0$ в (4.15). Используя (2.1) и (2.29), получаем

$$\tilde{h}^{-1}\tilde{\mathcal{N}}(\rho) = h^{-1}\mathcal{N}(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{h^{-1}\mathcal{N}(\mu)A_0(\mu)\tilde{\mathcal{N}}^*(\mu)\tilde{\mathcal{N}}(\rho)}{\mu - \rho} d\mu.$$

В силу (2.23) это дает

$$h\tilde{h}^{-1} - E = \widehat{\mathcal{N}}(\rho)\tilde{\mathcal{N}}^*(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\mathcal{N}(\mu)A_0(\mu)\tilde{\mathcal{N}}^*(\mu)}{\mu - \rho} d\mu$$

и, следовательно, $h = \tilde{h}$.

Отметим, что лемма 4.8 остается верной и в более общем случае, когда вместо (4.30) мы имеем (4.1), но тогда интеграл в (4.31), вообще говоря, не будет абсолютно сходящимся. Отметим также, что в силу следствия 3.1 равенство $h = \tilde{h}$ вытекает и непосредственно из (4.1).

Приведем теперь *процедуру* решения обратной задачи. Пусть задана МВ $M(\rho)$ пары $L = (\ell, U)$.

- 1) Выберем “модельную” пару $\tilde{L} = (\tilde{\ell}, \tilde{U})$ так, чтобы выполнялось (4.30).
- 2) Построим матрицы-функции $\tilde{\varphi}(x, \rho)$, $\tilde{S}(\rho)$, $\tilde{r}(x, \mu, \rho)$, $x \geq 0$, $\mu, \rho \in \omega^*$.
- 3) Решая основное уравнение (4.22), находим $\varphi(x, \rho)$ при $x \geq 0$, $\rho \in \omega^*$, т.е. находим $\Phi(x, \rho)$ при $x \geq 0$, $\rho \in \omega$.
- 4) Вычисляем матрицу-функцию $\varepsilon(x)$ по формуле (4.31).
- 5) Строим пару $L = (\ell, U)$ по формулам (4.32).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. При $N \geq 2$ выбор “модельной” пары $\tilde{L}$ является тривиальной задачей и сводится к подбору коэффициентов асимптотики: $\tilde{\mu}_{mk}^{\nu} = \mu_{mk}^{\nu}$, $\nu = 0, 1$. При $N = 1$ выбор $\tilde{L}$ является более трудным и представляет собой самостоятельную задачу. С другой стороны, как было показано выше, при выборе $\tilde{L}$ вместо (4.30) достаточно ограничиться более слабым условием (4.1), которое равносильно условию $\tilde{h} = h$. В этом случае пп. 1)–3) процедуры остаются без изменения, интеграл в (4.31) не сходится абсолютно, но функция $\varepsilon(x)$ существует. Кроме того, вместо пп. 4), 5) процедуры для построения L можно использовать решения $\Phi(x, \rho)$ системы (1.1), а именно: $Q(x) = \rho - Q_0\Phi'(x, \rho)\Phi^{-1}(x, \rho)$.

§ 5. Необходимые и достаточные условия

В этом параграфе приводятся необходимые и достаточные условия разрешимости нелинейной обратной задачи восстановления пары $L = (\ell, U)$ по МВ $M(\rho)$. Пусть задана матрица Q_0 , т.е. числа $\beta_k = 1/q_k$ известны априори и фиксированы. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество функций $M(\rho) = [M_{mk}(\rho)]_{m,k=\overline{1,n}}$ со свойствами:

- 1) $M_{mk}(\rho) \equiv \delta_{mk}$ при $m \geq k$;
- 2) функции $M_{mk}(\rho)$, $k > m$, аналитичны в Σ_m за исключением не более чем счетного ограниченного множества Λ'_m полюсов и непрерывны в $\overline{\Sigma}_m$ за исключением ограниченного множества Λ_m (множества Λ'_m и Λ_m , вообще говоря, свои для каждой матрицы $M(\rho)$ из $\mathcal{M}$);
- 3) функции $B_{\nu k}^{m-\nu}(\rho)$, определенные по (2.31), являются аналитическими на $\Gamma_j \setminus \Lambda'_m$ при $j \notin J_m$, $1 \leq \nu \leq m \leq n-1$, $m+1 \leq k \leq n$, т.е. верно (2.33).

Отметим, что из теорем 2.1 и 2.2 вытекает, что если $M(\rho)$ – МВ для пары $L = (\ell, U)$, то $M(\rho) \in \mathcal{M}$.

Зафиксируем $N \geq 1$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Для того чтобы матрица $M(\rho) \in \mathcal{M}$ была МВ для некоторой пары $L = (\ell, U)$, $\ell \in V_N$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

- 1) (асимптотика) существует пара $\tilde{L} = (\tilde{\ell}, \tilde{U})$ такая, что верно (4.30);
- 2) (условие Р) при каждом фиксированном $x \geq 0$ основное уравнение (4.22) имеет единственное решение $\varphi(x, \rho)$ в классе $\varphi(x, \rho)D(x, \rho) \in \mathcal{B}_p$, $p > 1$, причем $\sup_{x \geq 0} \|\varphi(x, \rho)D(x, \rho)\|_{\mathcal{B}_p} < \infty$;
- 3) $\varepsilon(x) \in W_N$, где $\varepsilon(x)$ определена в (4.31).

При выполнении этих условий пара $L = (\ell, U)$ строится по формулам (4.32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость теоремы 5.1 доказана выше. Докажем достаточность. В силу (4.30) при каждом фиксированном $x \geq 0$ оператор $\tilde{B}^0$ является линейным ограниченным оператором в $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ при $p > 1$, $0 \leq \alpha \leq 2$. Кроме того, $\tilde{B}^0$ обратим в $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ при $p > 1$, $0 \leq \alpha \leq 2$, $x \geq 0$. В самом деле, пусть $f(\rho) \in \mathcal{B}_{p,2}$ и $\tilde{B}^0 f(\rho) = 0$, т.е.

$$f(\rho)\tilde{S}^0(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} f(\mu)\tilde{r}^0(x, \mu, \rho) d\mu = 0.$$

Отсюда легко видеть, что $f(\rho) \in \mathcal{B}_p$ и в силу условия Р теоремы 5.1 $f(\rho) = 0$.

Пусть $\varphi(x, \rho)$ – решение основного уравнения (4.22). Известным методом (см., например, [9], [10]) можно доказать, что $\varphi(x, \rho)$ абсолютно непрерывна по x . Покажем, что

$$\rho^{-1}\varphi'(x, \rho)D(x, \rho) \in \mathcal{B}_p, \quad x \geq 0. \quad (5.1)$$

В самом деле, дифференцируя (4.22) по x , получаем

$$\tilde{\varphi}'(x, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} \varphi(x, \mu)\tilde{r}'(x, \mu, \rho) d\mu = \varphi'(x, \rho)\tilde{S}(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} \varphi'(x, \mu)\tilde{r}(x, \mu, \rho) d\mu. \quad (5.2)$$

Следовательно, $\tilde{B}^0 y(x, \rho) = P(x, \rho)$, где $y(x, \rho) = \varphi'(x, \rho)D(x, \rho)$,

$$P(x, \rho) = \tilde{\varphi}'(x, \rho)D(x, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} \psi(x, \mu)D^{-1}(x, \mu)\tilde{r}'(x, \mu, \rho)D(x, \rho) d\mu.$$

Очевидно, что $P(x, \rho) \in \mathcal{B}_{p,2}$, и, следовательно, $y(x, \rho) \in \mathcal{B}_{p,2}$, т.е. (5.1) доказано.

Построим матрицу $\Phi(x, \rho)$ по формуле

$$\Phi(x, \rho) = \tilde{\Phi}(x, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Phi(x, \mu)A_0(\mu)\tilde{\Phi}^*(x, \mu)Q_0\tilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu, \quad \rho \in J_{\omega}. \quad (5.3)$$

Матрица-функция $\Phi(x, \rho)$ является аналитической при $\rho \in J_\omega$. Кроме того, как и при доказательстве теоремы 4.2, получаем, что

$$\varphi(x, \rho) = \begin{cases} [\Phi^+(x, \rho), \Phi^-(x, \rho)], & \rho \in \omega^1; \\ \Phi(x, \rho), & \rho \in \omega^0. \end{cases}$$

Построим пару $L = (\ell, U)$ по формулам (4.32), где $\varepsilon(x)$ определена в (4.31). Ясно, что $\ell \in V_N$.

ЛЕММА 5.1. *Справедливы соотношения*

$$\ell\varphi(x, \rho) = \rho\varphi(x, \rho), \quad \rho \in \omega^*, \quad \ell\Phi(x, \rho) = \rho\Phi(x, \rho), \quad \rho \in J_\omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4.22) и (5.2) вытекает, что

$$\begin{aligned} \ell\tilde{\varphi}(x, \rho) &= \ell\varphi(x, \rho)\tilde{S}(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} \ell\varphi(x, \mu)\tilde{r}(x, \mu, \rho) d\mu \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} Q_0\varphi(x, \mu)\tilde{r}'(x, \mu, \rho) d\mu. \end{aligned}$$

Так как $\ell\tilde{\varphi}(x, \rho) = \tilde{\ell}\tilde{\varphi}(x, \rho) + \widehat{Q}(x)\tilde{\varphi}(x, \rho) = \rho\tilde{\varphi}(x, \rho) + \widehat{Q}(x)\tilde{\varphi}(x, \rho)$, то последнее равенство принимает вид

$$\begin{aligned} \rho\tilde{\varphi}(x, \rho) &= \ell\varphi(x, \rho)\tilde{S}(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} \ell\varphi(x, \mu)\tilde{r}(x, \mu, \rho) d\mu \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} Q_0\varphi(x, \mu)\tilde{r}'(x, \mu, \rho) d\mu - \widehat{Q}(x)\tilde{\varphi}(x, \rho). \end{aligned}$$

В левой части этого равенства вместо $\tilde{\varphi}(x, \rho)$ подставим выражение из (4.22). Ввиду (4.32) получаем

$$(\ell\varphi(x, \rho) - \rho\varphi(x, \rho))\tilde{S}(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} (\ell\varphi(x, \mu) - \mu\varphi(x, \mu))\tilde{r}(x, \mu, \rho) d\mu + J(x, \rho), \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned} J(x, \rho) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} \varphi(x, \mu)(\mu - \rho)\tilde{r}(x, \mu, \rho) d\mu \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} Q_0\varphi(x, \mu)\tilde{r}'(x, \mu, \rho) d\mu - \varepsilon(x)\tilde{\varphi}(x, \rho). \end{aligned}$$

Учитывая (2.17), нетрудно проверить, что $J(x, \rho) \equiv 0$. Обозначим $y(x, \rho) := \ell\varphi(x, \rho) - \rho\varphi(x, \rho)$. Тогда соотношение (5.4) принимает вид

$$y(x, \rho)\tilde{S}(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} y(x, \mu)\tilde{r}(x, \mu, \rho) d\mu = 0, \quad (5.5)$$

отсюда

$$f(x, \rho) \tilde{S}^0(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega^*} f(x, \mu) \tilde{r}^0(x, \mu, \rho) d\mu = 0, \quad (5.6)$$

где $f(x, \rho) = y(x, \rho)D(x, \rho)$. В силу (5.1) и условия Р теоремы 5.1 $\rho^{-1}f(x, \rho) \in \mathcal{B}_p$ при каждом $p > 1$, т.е. $f(x, \rho) \in \mathcal{B}_{p,2}$. Так как при каждом фиксированном $x \geq 0$ оператор $\tilde{B}^0$ является линейным ограниченным оператором в $\mathcal{B}_{p,\alpha}$ при $p > 1$, $0 \leq \alpha \leq 2$, то из (5.6) вытекает, что $f(x, \rho) = 0$, т.е. $y(x, \rho) = 0$ и $\ell\varphi(x, \rho) = \rho\varphi(x, \rho)$, $\rho \in \omega^*$. Далее, дифференцируя (5.3) по x и учитывая (2.17), вычисляем

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}'(x, \rho) &= \Phi'(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Phi'(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) \tilde{\Phi}(x, \rho) d\mu \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \ell\tilde{\Phi}(x, \rho) &= \ell\Phi(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\ell\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} Q_0 \Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) \tilde{\Phi}(x, \rho) d\mu. \end{aligned}$$

Так как $\ell\tilde{\Phi}(x, \rho) = \tilde{\ell}\tilde{\Phi}(x, \rho) + \hat{Q}(x)\tilde{\Phi}(x, \rho) = \rho\tilde{\Phi}(x, \rho) + \varepsilon(x)\tilde{\Phi}(x, \rho)$, то получаем

$$\begin{aligned} \rho\tilde{\Phi}(x, \rho) &= \ell\Phi(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\ell\Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} Q_0 \Phi(x, \mu) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) \tilde{\Phi}(x, \rho) d\mu - \varepsilon(x)\tilde{\Phi}(x, \rho). \end{aligned}$$

В левой части этого равенства вместо $\tilde{\Phi}(x, \rho)$ подставим выражение из (5.3). Тогда получим

$$\ell\Phi(x, \rho) - \rho\Phi(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{(\ell\Phi(x, \mu) - \mu\Phi(x, \mu)) A_0(\mu) \tilde{\Phi}^*(x, \mu) Q_0 \tilde{\Phi}(x, \rho)}{\mu - \rho} d\mu.$$

Так как $\ell\varphi(x, \rho) = \rho\varphi(x, \rho)$ при $\rho \in \omega^*$, то имеем $\ell\Phi(x, \mu) - \mu\Phi(x, \mu) = 0$ при $\mu \in \omega$ и, следовательно, $\ell\Phi(x, \rho) = \rho\Phi(x, \rho)$.

ЛЕММА 5.2. Матрица $\Phi(x, \rho)$ является решением Вейля для $L = (\ell, U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.29) и (5.3) при $x = 0$ вытекает, что

$$\Phi(0, \rho) = \tilde{\Phi}(0, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\Phi(0, \mu) \Omega(\mu, \rho)}{\rho - \mu} d\mu,$$

где $\Omega(\mu, \rho)$ определена в (4.17). Умножая это равенство слева на вектор-строку $[h_{\xi 1}, \dots, h_{\xi n}]$ и учитывая соотношение $h = \tilde{h}$, вычисляем

$$U_{\xi}(\Phi_m(x, \rho)) = \tilde{U}_{\xi}(\tilde{\Phi}_m(x, \rho)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \left(\sum_{k=m+1}^n U_{\xi}(\Phi_k(x, \mu)) \omega_{km}(\mu, \rho) \right) \frac{d\mu}{\rho - \mu}. \quad (5.7)$$

Последовательно выбирая $m = n, n-1, \dots, 1$ в (5.7) и учитывая, что $\tilde{U}_{\xi}(\tilde{\Phi}_m) = \delta_{\xi m}$, $\xi = \overline{1, m}$, находим, что

$$U_{\xi}(\Phi_m) = \delta_{\xi m}, \quad \xi = \overline{1, m}. \quad (5.8)$$

Перепишем (5.3) в виде

$$\Phi_m(x, \rho) = \tilde{\Phi}_m(x, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{F(x, \mu) Q_0}{\mu - \rho} d\mu \tilde{\Phi}_m(x, \rho), \quad \rho \in J_{\omega}, \quad (5.9)$$

где $F(x, \mu)$ определена в (4.12). Используя (2.20), (4.10), (4.30) и условие Р теоремы 5.1, получаем

$$|F_{\nu k}(x, \mu)| \leq C |\mu|^{-2} \exp(ax), \quad a > 0, \quad \mu \in \omega, \quad \nu, k = \overline{1, n}. \quad (5.10)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. В ρ -плоскости рассмотрим область $G_{\varepsilon} := \{\rho \in J_{\omega} : \text{dist}(\rho, \omega) \geq \varepsilon\}$. Из (5.9) ввиду (5.10) и (2.13) вытекает, что

$$|\Phi_{km}(x, \rho)| \leq C \exp(ax) |\exp(\rho R_m x)|, \quad x \geq 0, \quad \rho \in G_{\varepsilon}.$$

Обозначим через $\Phi^0(x, \rho) = [\Phi_{km}^0(x, \rho)]_{k, m = \overline{1, n}}$ решение Вейля для пары $L = (\ell, U)$ и определим матрицу $\Psi(x, \rho) = [\Psi_{km}(x, \rho)]_{k, m = \overline{1, n}} = [\Psi_{km}(x, \rho)]_{k = \overline{1, n}}^T$ по формуле $\Psi(x, \rho) = \Phi(x, \rho) - \Phi^0(x, \rho)$. Тогда матрица-функция $\Psi(x, \rho)$ является аналитической в J_{ω} , причем

$$|\Psi_{km}(x, \rho)| \leq C \exp(ax) |\exp(\rho R_m x)|, \quad x \geq 0, \quad \rho \in G_{\varepsilon}. \quad (5.11)$$

Покажем, что $\Psi(x, \rho) \equiv 0$. В самом деле, так как вектор-функции $\Phi_m^0(x, \rho) = [\Phi_{km}^0(x, \rho)]_{k = \overline{1, n}}^T$ образуют ФСР для системы (1.1), то имеем

$$\Psi_m(x, \rho) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu m}(\rho) \Phi_{\nu}^0(x, \rho).$$

Применяя последовательно линейные формы $U_1, \dots, U_m$ и учитывая (5.8), находим, что $\alpha_{\nu m}(\rho) = 0$ при $\nu = \overline{1, m}$. Таким образом,

$$\Psi_m(x, \rho) = \sum_{\nu=m+1}^n \alpha_{\nu m}(\rho) \Phi_{\nu}^0(x, \rho)$$

и функции $\alpha_{\nu m}(\rho)$ аналитичны при $\rho \in J_\omega$. Предположим, что при некотором s ($m+1 \leq s \leq n$) имеем $\alpha_{sm}(\rho) \not\equiv 0$, $\alpha_{\nu m}(\rho) \equiv 0$, $\nu = \overline{s+1, n}$. Выберем $\rho^* \in \overline{G_\varepsilon}$ так, чтобы $\alpha_{sm}(\rho^*) \neq 0$ и $\operatorname{Re}(\rho^*(R_s - R_{s-1})) > a$. Тогда

$$\Phi_s^0(x, \rho^*) = \frac{1}{\alpha_{sm}(\rho^*)} \left(\Psi_m(x, \rho^*) - \sum_{\nu=m+1}^{s-1} \alpha_{\nu m}(\rho^*) \Phi_\nu^0(x, \rho^*) \right).$$

Поэтому ввиду (5.11) получаем $|\Phi_{ks}^0(x, \rho^*)| \leq C^* \exp(ax) |\exp(\rho^* R_{s-1} x)|$. С другой стороны, из (2.10) имеем $\max_k |\Phi_{ks}^0(x, \rho^*)| > C_1^* |\exp(\rho^* R_s x)|$. Это противоречие доказывает, что $\alpha_{\nu m}(\rho) \equiv 0$ при $\nu = \overline{m+1, n}$, т.е. $\Psi_m(x, \rho) \equiv 0$, $m = \overline{1, n}$. Следовательно, $\Phi(x, \rho) \equiv \Phi^0(x, \rho)$, т.е. матрица $\Phi(x, \rho)$ является решением Вейля для пары $L = (\ell, U)$.

ЛЕММА 5.3. Матрица $M(\rho)$ является MB для $L = (\ell, U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $M^0(\rho) = [M_{m\xi}^0(\rho)]_{m, \xi=\overline{1, n}}$ MB для L . Согласно (5.7) имеем

$$M_{m\xi}^0(\rho) = \widetilde{M}_{m\xi}(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_\omega \left(\sum_{k=m+1}^{\xi} M_{k\xi}^0(\mu) \omega_{km}(\mu, \rho) \right) \frac{d\mu}{\rho - \mu}, \quad \rho \in J_\omega. \quad (5.12)$$

Введем матрицу $\Omega^0(\mu, \rho) = [\omega_{km}^0(\mu, \rho)]_{k, m=\overline{1, n}}$ по формуле

$$\Omega^0(\mu, \rho) = A_0^0(\mu) \widetilde{\mathcal{N}}^*(\mu) \widetilde{\mathcal{N}}(\rho),$$

где $A_0^0(\rho)$ имеет тот же вид, что и $A_0(\rho)$, но с $M^0(\rho)$ вместо $M(\rho)$. По необходимости ввиду (4.18) имеем

$$M_{m\xi}^0(\rho) = \widetilde{M}_{m\xi}(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_\omega \left(\sum_{k=m+1}^{\xi} M_{k\xi}^0(\mu) \omega_{km}^0(\mu, \rho) \right) \frac{d\mu}{\rho - \mu}, \quad \rho \in J_\omega. \quad (5.13)$$

Используя (5.12) и (5.13), покажем индукцией по ξ , что

$$M_{m\xi}^0(\rho) \equiv M_{m\xi}(\rho), \quad \xi > m.$$

1) Пусть $\xi = m+1$. Из (5.12) и (5.13) вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\omega \frac{\omega_{m+1, m}(\mu, \rho) - \omega_{m+1, m}^0(\mu, \rho)}{\rho - \mu} d\mu = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m^0 \cup \omega^0} \frac{M_{m, m+1}(\mu) - M_{m, m+1}^0(\mu)}{\rho - \mu} d\mu = 0, \quad \rho \in J_\omega, \quad (5.14)$$

где $\gamma_m^0 := \gamma_m \setminus \text{int } \omega^0$. Используя аналитические свойства $M_{m,m+1}(\rho)$ и $M_{m,m+1}^0(\rho)$ и очевидную оценку $|M_{m,m+1}(\rho) - M_{m,m+1}^0(\rho)| \leq C|\rho|^{-1}$, получаем из (5.14), что $M_{m,m+1}(\rho) \equiv M_{m,m+1}^0(\rho)$. Следовательно,

$$a_{m+1,m}(\rho) \equiv a_{m+1,m}^0(\rho), \quad \omega_{m+1,m}(\mu, \rho) \equiv \omega_{m+1,m}^0(\mu, \rho).$$

2) Предположим, что

$$M_{mj}^0(\rho) \equiv M_{mj}(\rho), \quad j = \overline{m+1, \xi-1}. \quad (5.15)$$

Тогда $\omega_{jm}(\mu, \rho) \equiv \omega_{jm}^0(\mu, \rho)$, $j = \overline{m+1, \xi-1}$. Отсюда и из (5.12), (5.13) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\omega} \frac{\omega_{\xi m}(\mu, \rho) - \omega_{\xi m}^0(\mu, \rho)}{\rho - \mu} d\mu = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{m\xi} \cup \omega^0} \frac{M_{m\xi}(\mu) - M_{m\xi}^0(\mu)}{\rho - \mu} d\mu = 0, \quad \rho \in J_{\omega}, \quad (5.16)$$

где γ_{mj} определяются по рекуррентным формулам

$$\gamma_{mj} = \gamma_{m,j-1} \cap \gamma_{m+1,j}, \quad \gamma_{m,m+1} := \gamma_m^0.$$

Используя (5.15) и структурные свойства (2.33), получаем, что функции $M_{m\xi}(\rho) - M_{m\xi}^0(\rho)$ аналитичны на $\gamma_m^0 \setminus \gamma_{m\xi}$. Поэтому контур в (5.16) может быть заменен на $\gamma_m^0 \cup \omega^0$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_m^0 \cup \omega^0} \frac{M_{m\xi}(\mu) - M_{m\xi}^0(\mu)}{\rho - \mu} d\mu = 0, \quad \rho \in J_{\omega}. \quad (5.17)$$

Используя аналитические свойства $M_{m\xi}(\rho)$ и $M_{m\xi}^0(\rho)$ и очевидную оценку

$$|M_{m\xi}(\rho) - M_{m\xi}^0(\rho)| \leq C|\rho|^{-1},$$

выводим из (5.17), что $M_{m\xi}(\rho) \equiv M_{m\xi}^0(\rho)$. Лемма 5.3 доказана.

Таким образом, теорема 5.1 полностью доказана.

Список литературы

1. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
2. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
3. Агранович З. С., Марченко В. А. Обратная задача теории рассеяния. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1960.
4. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
5. Freiling G., Yurko V. A. Inverse Sturm–Liouville problems and their applications. New York: NOVA Science Publ., 2001.
6. Сажнович Л. А. Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами // Матем. сб. 1958. Т. 46(88). № 1. С. 61–76.

7. *Хачатрян И. Г.* О некоторых обратных задачах для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси // Функци. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. № 1. С. 40–52.
8. *Yurko V. A.* Method of spectral mappings in the inverse problem theory. Utrecht: VSP, 2002. (Inverse and Ill-posed Probl. Ser.).
9. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for differential operators and their applications. Amsterdam: Gordon and Breach, 2000.
10. *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Саратовского пединститута, 2001.
11. *Beals R.* The inverse problem for ordinary differential operators on the line // Amer. J. Math. 1985. V. 107. P. 281–366.
12. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and inverse scattering on the line. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988. (Math. Surveys Monogr. V. 28.)
13. *Deift P., Zhou X.* Direct and inverse scattering on the line with arbitrary singularities // Comm. Pure Appl. Math. 1991. V. 44. P. 485–533.
14. *Суханов В. В.* Обратная задача для самосопряженного дифференциального оператора на оси // Матем. сб. 1988. Т. 137 (179). № 2. С. 242–259.
15. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
16. *Костюченко А. Г., Саргсян И. С.* Распределение собственных значений. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1979.
17. *Фадеев М. К., Нагнибида Н. И.* Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов. Новосибирск: Наука, 1987.
18. *Amour L.* Inverse spectral theory for the AKNS system with separated boundary conditions // Inverse Problems. 1993. V. 9. № 5. P. 507–523.
19. *Beals R., Coifman R. R.* Scattering and inverse scattering for first order systems // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V. 37. P. 39–90.
20. *Beals R., Coifman R. R.* Scattering and inverse scattering for first-order systems. II // Inverse Problems. 1987. V. 3. № 4. P. 577–593.
21. *Гасымов М. Г., Левитан Б. М.* Обратная задача для системы Дирака // Докл. АН СССР. 1966. Т. 167. С. 967–970.
22. *Hinton D. B., Jordan A. K., Klaus M., Shaw J. K.* Inverse scattering on the line for a Dirac system // J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 11. P. 3015–3030.
23. *Маламуд М. М.* Вопросы единственности в обратных задачах для систем дифференциальных уравнений на конечном интервале // Труды ММО. 1999. Т. 60. С. 199–258.
24. *Sakhnovich L. A.* Spectral theory of canonical differential systems. Method of operator identities. Basel: Birkhäuser, 1999. (Oper. Theory Adv. Appl. V. 107.)
25. *Шабат А. Б.* Обратная задача рассеяния // Дифферен. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1824–1834.
26. *Zhou, Xin.* Direct and inverse scattering transforms with arbitrary spectral singularities // Comm. Pure Appl. Math. 1989. V. 42. P. 895–938.
27. *Юрко В. А.* Обратная задача для систем дифференциальных уравнений с нелинейной зависимостью от спектрального параметра // Дифферен. уравнения. 1997. Т. 33. № 3. С. 390–395.
28. *Юрко В. А.* Восстановление несамосопряженных дифференциальных операторов на полуоси по матрице Вейля // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 3. С. 431–456.
29. *Юрко В. А.* Обратная задача для пучков дифференциальных операторов // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 10. С. 137–160.
30. *Бухгейм А. Л.* Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука, 1988.
31. *Denisov A. M.* Elements of the theory of inverse problems. Utrecht: VSP, 1999. (Inverse and Ill-posed Probl. Ser.)
32. *Кабанихин С. И.* Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука, 1988.
33. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Киев: Наукова думка, 1991.

34. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000. (Pure Appl. Math. V. 231.)
35. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
36. *Romanov V. G., Kabanikhin S. I.* Inverse problems for Maxwell's equations. Utrecht: VSP, 1994. (Inverse and Ill-posed Probl. Ser.)
37. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград: тип. М. П. Фроловой, 1917.
38. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла. М.: Наука, 1964.
39. *Вагабов А. И.* Об уточнении одной асимптотической теоремы Тамаркина // Дифферен. уравнения. 1993. Т. 29. № 1. С. 41–49.
40. *Rykhlov V. S.* Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order // Results Math. 1999. V. 36. № 3–4. P. 342–353.
41. *Лейбензон З. Л.* Обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов высших порядков // Труды ММО. 1966. Т. 15. С. 70–144.
42. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967.
43. *Гихов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

Поступила в редакцию
29.08.2003