Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Ганзбург, Точные значения величины наилучшего приближения для комплекснозначных периодических функций, *Матем. сб.*, 2018, том 209, номер 3, 138–149

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8881>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 04:57:51

УДК 517.538.5

М. И. Ганзбург

Точные значения величины наилучшего приближения для комплекснозначных периодических функций

Теорема Секефальви-Надя о наилучшем приближении тригонометрическими полиномами в метрике L_1 обобщается на случай приближения некоторых комплекснозначных периодических функций. Полученный результат применяется для нахождения точных констант наилучшего приближения в метриках L_1 и L_∞ на некоторых комплексных классах сверток. Для классов вещественнозначных сверток эти величины были найдены С. М. Никольским. В качестве примера данные результаты применяются для ядра Шварца и соответствующих классов сверток.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: тригонометрический полином, комплекснозначная функция, наилучшее приближение, теорема Секефальви-Надя, классы сверток.

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8881>

§ 1. Введение

В настоящей работе мы обобщаем ряд результатов о наилучшем приближении комплекснозначных периодических функций тригонометрическими полиномами в метриках L_1 и L_∞ .

Обозначения. Для комплексного числа z функция $\operatorname{sgn} z$ определяется следующим образом: $\operatorname{sgn} z = z/|z|$ при $z \neq 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Пусть $\mathcal{T}_n$ – множество всех тригонометрических полиномов $T_n(x) = \sum_{m=-n}^n c_m e^{imx}$ степени не более n с комплексными коэффициентами, а L_p – пространство всех измеримых 2π -периодических функций $f: (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in (-\pi, \pi]} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Далее, для $f \in L_p$ величина наилучшего приближения этой функции в метрике L_p полиномами из класса $\mathcal{T}_n$ определяется стандартным образом:

$$E_n(f)_p := \inf_{T_n \in \mathcal{T}_n} \|f - T_n\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Через $\Gamma(z)$ и $F(a, b; c; z)$ мы будем обозначать соответственно гамма-функцию и гипергеометрическую функцию.

Аппроксимация в метрике L_1 вещественнозначных функций. Задача нахождения точной величины наилучшего приближения для заданной функции всегда играла важную роль в теории приближений. Несмотря на то, что оценки наилучшего приближения сверху и снизу в метрике L_p при $1 \leq p \leq \infty$ известны для многих классов функций (см., например, [18; гл. 7], [5], [6]), точные значения величины наилучшего приближения были найдены лишь для $p = 1, 2, \infty$. В частности, теорема типа А. А. Маркова (см. [13; теорема 3, с. 205], [1; § 50]) и результат Б. Секефальви-Надя [14] об L_1 -аппроксимации вещественнозначных периодических функций позволили найти точные значения величины наилучшего приближения в метрике L_1 для многих классов функций (см. [18; п. 2.11.5]). Эти результаты были также использованы при нахождении точных констант в задачах наилучшего приближения в метриках L_1 и L_∞ на некоторых классах свертки (см. [16], [10], [1; §§ 101, 103]). Теоремы типа А. А. Маркова и Б. Секефальви-Надя были обобщены в [15], [1; §§ 87, 88], [7] на приближения вещественнозначных функций целыми функциями экспоненциального типа в метрике $L_1(\mathbb{R})$.

Автору настоящей работы не известны аналоги этих результатов для комплекснозначных функций.

Начиная с 1980-х годов данный круг задач получил новое развитие в работах Дж. Ваалера, Э. Карнейро, Ф. Литмана и др. (см. работы [8], [19], [12], [3], [2] и приведенные в них ссылки). В этих работах были найдены новые методы получения точных значений величин наилучшего приближения вещественнозначных функций тригонометрическими полиномами и целыми функциями экспоненциального типа в метрике L_1 . Некоторые из полученных в этой области результатов нашли применение при решении задач теории чисел.

Аппроксимация в метрике L_1 комплекснозначных периодических функций. Полином $T_n \in \mathcal{T}_n$ называется *полиномом наилучшего приближения в метрике L_p* для функции f , если $E_n(f)_p = \|f - T_n\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Следующий результат является частным случаем критерия, полученного Б. Крипке и Т. Ривлиным (см. [11; следствие 1.4]); альтернативное доказательство было предложено И. Зингером (см. [17; теорема 1.7]).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $f \in L_1$ – комплекснозначная функция.

(а) Если для полинома $T_n \in \mathcal{T}_n$ выполнено условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x) \operatorname{sgn}[\overline{f(x) - T_n(x)}] dx = 0, \quad Q_n \in \mathcal{T}_n, \quad (1.1)$$

то T_n является полиномом наилучшего приближения функции f в метрике L_1 .

(б) Если T_n – полином наилучшего приближения функции f в метрике L_1 такой, что $f(x) - T_n(x) \neq 0$ для почти всех точек $x \in (-\pi, \pi]$, то выполнено условие (1.1).

Следующая теорема типа А. А. Маркова является непосредственным следствием утверждения (а) теоремы 1.1.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть ψ и f – комплекснозначные функции из L_1 , и пусть функция ψ удовлетворяет условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x) \operatorname{sgn}[\overline{\psi(x)}] dx = 0, \quad Q_n \in \mathcal{T}_n. \quad (1.2)$$

Тогда если найдется полином $T_n \in \mathcal{T}_n$ такой, что для почти всех $x \in (\pi, \pi]$

$$\operatorname{sgn}[f(x) - T_n(x)] = \operatorname{sgn}[\psi(x)], \quad (1.3)$$

то T_n – полином наилучшего приближения функции f в метрике L_1 . При этом

$$E_n(f)_1 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sgn}[\overline{\psi(x)}] dx. \quad (1.4)$$

Основные результаты. Мы рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \psi_{n+1}(x) := ae^{i(n+1)x} + be^{-i(n+1)x}, \quad (1.5)$$

свойства которой исследуются в § 2, и применим к ней следствие 1.2. В частности, для функции $\psi_{n+1}(x)$ будут вычислены ее коэффициенты Фурье.

Для заданного неотрицательного целого числа s мы будем говорить, что последовательность $\{b_p\}_{p=0}^{\infty}$ вещественных чисел s -монотонная при $p \geq N$, если

$$\Delta^q b_p := \sum_{l=0}^q (-1)^l \binom{q}{l} b_{p+l} \geq 0$$

при $0 \leq q \leq s$ и $p \geq N$.

Имеет место следующий комплексный вариант теоремы Секефальви-Надя.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть n – неотрицательное целое число, и пусть $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $|b| \leq a$. Далее, пусть

$$f(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p e^{ipx} \quad (1.6)$$

– функция с вещественными коэффициентами Фурье, удовлетворяющими следующим условиям:

1) последовательность $\{a_p\}_{p=0}^{\infty}$ 3-монотонна при $p \geq n+1$, если $b > 0$, и 2-монотонна при $p \geq n+1$, если $b \leq 0$;

2) коэффициенты Фурье в (1.6) удовлетворяют соотношению

$$a_{-p} = \frac{b}{a} a_p + \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \sum_{l=0}^{\infty} a_{2(l+1)(n+1)+p} \left(-\frac{b}{a}\right)^l, \quad p = n+1, n+2, \dots, \quad (1.7)$$

где $a_{-p} = -a_p$, $p = n+1, n+2, \dots$, при $a = -b$.

Рассмотрим полином $T_n(x)$, определенный при $a \neq -b$ формулой

$$T_n(x) := \sum_{p=-n}^n (a_p - ad_{n+1-p} - bd_{n+1+p}) e^{ipx}, \quad (1.8)$$

где

$$d_m := \frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} a_{(2l+1)(n+1)+m} \left(-\frac{b}{a} \right)^l, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (1.9)$$

а при $a = -b$ определенной формулой

$$T_n(x) := \sum_{p=-n}^n \left(a_p - \sum_{l=1}^{\infty} (a_{2l(n+1)-p} - a_{2l(n+1)+p}) \right) e^{ipx}.$$

Тогда T_n — полином наилучшего приближения функции f в метрике L_1 ; при этом

$$\operatorname{sgn}[f(x) - T_n(x)] = \operatorname{sgn}[ae^{i(n+1)x} + be^{-i(n+1)x}] \quad (1.10)$$

для почти всех $x \in (-\pi, \pi]$ и

$$E_n(f)_1 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sgn}[ae^{-i(n+1)x} + be^{i(n+1)x}] dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{(2k+1)(n+1)} c_{2k+1}(a, b), \quad (1.11)$$

где $c_{2k+1}(a, b)$, $k \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье функции $\operatorname{sgn}[ae^{ix} + be^{-ix}]$, которые могут быть вычислены по формулам (2.2)–(2.6), приведенным в лемме 2.1 ниже.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Если $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ и $|a| \leq b$, то, меняя местами a и b , мы получаем аналог теоремы 1.3 для функции $f(-x)$.

Применим теорему 1.3 к нахождению величины $\sup_{g \in C_p(f)} E_n(g)_p$ при $p = 1$ и $p = \infty$, где $f \in L_1$ — ядро и

$$C_p(f) := \left\{ g \in L_p : g(x) = (f * \varphi)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \varphi(x-t) dt, \|\varphi\|_p \leq 1 \right\}$$

— класс сверток.

Для начала мы обобщим некоторые общие результаты на случай комплекснозначных функций.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$\sup_{g \in C_1(f)} E_n(g)_1 = E_n(f)_1.$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Мы говорим, что ядро $f \in L_1$ удовлетворяет условию A_n^* , если найдутся такие натуральное число $n^* \geq n+1$ и тригонометрический полином $T_n^* \in \mathcal{T}_n$, что при почти всех $x \in (-\pi, \pi]$ функция $h^*(x) := \operatorname{sgn}[f(x) - T_n^*(x)]$ удовлетворяет соотношению

$$h^*\left(x + \frac{\pi}{n^*}\right) = -h^*(x). \quad (1.12)$$

ТЕОРЕМА 1.6. Если функция f удовлетворяет условию A_n^* , то

$$\sup_{g \in C_{\infty}(f)} E_n(g)_{\infty} = E_n(f)_1. \quad (1.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Для аппроксимации четных ($a = b$) и нечетных ($a = -b$) функций в метрике L_1 результат теоремы 1.3 с $a^2 = b^2$ был установлен Б. Секефальви-Надем (см. [14]); для вещественнозначных функций теоремы 1.5 и 1.6 были получены С. М. Никольским (см. [16], [10; п. 4.3]). Доказательства теорем 1.3, 1.5, 1.6 аналогичны рассуждениям при доказательстве теорем Б. Секефальви-Надя и С. М. Никольского.

СЛЕДСТВИЕ 1.8. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $|b| \leq a$, — фиксированные числа, и пусть $f(x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p e^{ipx}$ — ядро с вещественными коэффициентами Фурье, удовлетворяющими условиям 1) и 2) теоремы 1.3. Тогда

$$\sup_{g \in C_1(f)} E_n(g)_1 = \sup_{g \in C_\infty(f)} E_n(g)_\infty = E_n(f)_1 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{(2k+1)(n+1)} c_{2k+1}(a, b),$$

где $c_{2k+1}(a, b)$, $k \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье функции $\operatorname{sgn}[ae^{ix} + be^{-ix}]$, вычисляемые по формулам (2.2)–(2.6) из леммы 2.1.

Утверждение следствия 1.8 вытекает непосредственно из теорем 1.3, 1.5, 1.6 с учетом равенства (1.11) и того факта, что согласно (1.10) функция f удовлетворяет условию A_n^* для $n^* = n + 1$ и $T_n^* = T_n$, где полином T_n определен в теореме 1.3.

§ 2. Свойства функции $\psi_1(x)$

В следующей лемме приведены свойства функции $\psi_1(x)$, определенной в (1.5).

ЛЕММА 2.1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $|a| + |b| \neq 0$.

(а) При $x \in (-\pi, \pi]$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} h(x) &:= \operatorname{sgn}[\psi_1(x)] = \operatorname{sgn}[ae^{ix} + be^{-ix}] \\ &= \begin{cases} \frac{(a+b)\cos x + i(a-b)\sin x}{\sqrt{(a+b)^2 \cos^2 x + (a-b)^2 \sin^2 x}}, & a^2 \neq b^2, \\ \operatorname{sgn}[(a+b)\cos x], & a = b, \\ i \operatorname{sgn}[(a-b)\sin x], & a = -b, \end{cases} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k+1}(a, b) e^{i(2k+1)x}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\{c_m(a, b)\}_{m=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты Фурье функции h , которые могут быть найдены по формулам, приведенным ниже.

Если $|a| < |b|$ и $k \geq 0$, то

$$\begin{aligned} c_{2k+1}(a, b) &= \operatorname{sgn} b (-1)^k \left(\frac{a}{b}\right)^{k+1} \frac{\Gamma(k+1/2)}{(\sqrt{\pi} k!)} \left[F\left(\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}; k+1; \left(\frac{a}{b}\right)^2\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k+1/2}{k+1} F\left(\frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}; k+2; \left(\frac{a}{b}\right)^2\right) \right] \\ &= \frac{\operatorname{sgn} b (-1)^k (a/b)^{k+1} \Gamma(k+1/2)}{2\sqrt{\pi} (k+1)! \sqrt{1 - (b/a)^2}} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; k+2; \frac{(a/b)^2}{(a/b)^2 - 1}\right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если $|a| > |b|$ и $k \geq 0$, то

$$\begin{aligned} c_{2k+1}(a, b) &= \operatorname{sgn} a (-1)^k \left(\frac{b}{a}\right)^k \frac{\Gamma(k+1/2)}{\sqrt{\pi} k!} \\ &\times \left[F\left(\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}; k+1; \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) - \frac{(b/a)^2(k+1/2)}{k+1} F\left(\frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}; k+2; \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \right] \\ &= \frac{\operatorname{sgn} a (-1)^k (b/a)^k \Gamma(k+1/2) \sqrt{1 - (b/a)^2}}{\sqrt{\pi} k!} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; k+1; \frac{(b/a)^2}{(b/a)^2 - 1}\right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если $a = b$ и $k \geq 0$, то

$$c_{2k+1}(a, a) = \lim_{b \rightarrow a} c_{2k+1}(a, b) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn} a (-1)^k (2k+1)^{-1}. \quad (2.4)$$

Если $a = -b$ и $k \geq 0$, то

$$c_{2k+1}(a, -a) = \lim_{b \rightarrow -a} c_{2k+1}(a, b) = \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn} a (2k+1)^{-1}. \quad (2.5)$$

Если $k < 0$, то

$$c_{2k+1}(a, b) = c_{2|k|-1}(b, a). \quad (2.6)$$

(b) Справедливо следующее соотношение:

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x) \operatorname{sgn}[ae^{-i(n+1)x} + be^{i(n+1)x}] dx = 0, \quad Q_n \in \mathcal{T}_n. \quad (2.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Равенство $c_{2k+1}(a, \pm a) = \lim_{b \rightarrow \pm a} c_{2k+1}(a, b)$ вытекает из представлений (2.4)–(2.6), при этом значения $c_{2k+1}(a, \pm a)$, $k \in \mathbb{Z}$, хорошо известны (см. [1; § 55]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. (а) Сначала предположим, что $a^2 \neq b^2$. Поскольку в силу представления (2.1) функция h бесконечно дифференцируема на полуинтервале $(-\pi, \pi]$, имеем $h(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(a, b) e^{imx}$, $x \in (-\pi, \pi]$. Коэффициенты Фурье функции h найдем непосредственными вычислениями. Так как $|\psi_1|$ является четной функцией на $(-\pi, \pi]$, то при $m \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{aligned} c_m(a, b) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{-imx} dx \\ &= \frac{1 + (-1)^{m+1}}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(a+b) \cos x \cos mx + (a-b) \sin x \sin mx}{\sqrt{(a+b)^2 \cos^2 x + (a-b)^2 \sin^2 x}} dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда вытекает, что

$$c_{2k}(a, b) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.9)$$

$$c_{2k+1}(a, b) = \frac{1}{2\pi \max\{|a|, |b|\}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a \cos kx + b \cos(k+1)x}{\sqrt{1 + 2\lambda \cos x + \lambda^2}} dx, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.10)$$

где

$$\lambda := \begin{cases} \frac{a}{b}, & |b| > |a|, \\ \frac{b}{a}, & |b| < |a|. \end{cases}$$

Теперь, применяя формулу (10) из [4; п. 2.4] к интегралу из (2.10), мы можем выразить коэффициенты $c_{2k+1}(a, b)$, $k \in \mathbb{Z}$, через гипергеометрические функции. Действительно, в случае $|a| < |b|$ и $k \geq 0$ выполнено первое равенство в (2.2), а в случае $|a| > |b|$ и $k \geq 0$ имеет место первое равенство в (2.3).

Далее, используя известные формулы для гипергеометрических функций, мы можем преобразовать первые равенства в (2.2) и (2.3) для коэффициентов $c_{2k+1}(a, b)$ к более компактному виду. При $|a| < |b|$ и $k \geq 0$ второе равенство в (2.2) получается, если мы сначала воспользуемся формулой (3) из [4; п. 2.9], а затем применим формулу (35) из [4; п. 2.8]. Аналогично, в случае $|a| > |b|$ и $k \geq 0$ второе неравенство в (2.3) получается, если мы воспользуемся сначала формулой (3) из [4; § 2.9], а затем применим формулу (38) из [4; п. 2.8].

Для доказательства представлений (2.4) и (2.5) в случае $a^2 = b^2$ воспользуемся следующими асимптотическими соотношениями для $z \in (-1, 1)$ при $z^2 \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; k+2; \frac{z^2}{1-z^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left[C_1 \left(\frac{z^2}{1-z^2} \right)^{-3/2} \ln \left(\frac{z^2}{1-z^2} + C_2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\Gamma(k+2)\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)\Gamma(k+3/2)} \left(\frac{z^2}{1-z^2} \right)^{-1/2} \right] (1 + o(1)) \\ &= \frac{(k+1)!}{\sqrt{\pi}\Gamma(k+3/2)} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-z^2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; k+1; \frac{z^2}{1-z^2}\right) \\ &= \sqrt{1-z^2} \left[C_3 \left(\frac{z^2}{1-z^2} \right)^{-1/2} \ln \left(\frac{z^2}{1-z^2} + C_4 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(k+3/2)} \left(\frac{z^2}{1-z^2} \right)^{1/2} \right] (1 + o(1)) \\ &= \frac{k!}{\sqrt{\pi}\Gamma(k+3/2)} (1 + o(1)), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где константы C_p , $1 \leq p \leq 4$, не зависят от z . Отметим, что первые асимптотики в соотношениях (2.11) и (2.12) вытекают из результатов п. 2.3.2 и формулы (7) из п. 2.10 в монографии [4].

Теперь представление (2.4) вытекает из второго равенства в (2.2) и (2.11), а (2.5) следует из второго равенства в (2.3) и (2.12). Равенство (2.6) очевидно. Утверждение (а) доказано.

Утверждение (б) непосредственно вытекает из разложения в ряд Фурье

$$\operatorname{sgn}[ae^{-i(n+1)x} + be^{i(n+1)x}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k+1}(a, b) e^{-i(n+1)(2k+1)x},$$

которое в свою очередь следует из (2.1).

§ 3. Доказательства основных результатов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. В случае $a = -b$ теорема 1.3 была установлена Б. Секефальви-Надем в [14]. Таким образом, будем считать, что $a \neq -b$. Покажем, что найдется полином $T_n \in \mathcal{T}_n$ такой, что

$$f(x) - T_n(x) = [ae^{i(n+1)x} + be^{-i(n+1)x}]F(x), \quad (3.1)$$

где F – интегрируемая 2π -периодическая функция на $(-\pi, \pi]$, удовлетворяющая следующим условиям: $F(x) \geq 0$ на $(-\pi, \pi]$ и $F(x) \neq 0$ для почти всех $x \in (-\pi, \pi]$. Тогда $f \in L_1$ и для определенной в (1.5) функции ψ выполнены условия следствия 1.2. Действительно, условие (1.2) доказано в утверждении (b) леммы 2.1, а условие (1.3) выполнено для почти всех $x \in (-\pi, \pi]$ в силу (3.1). Теперь утверждение теоремы 1.3 при $a \neq -b$ вытекает из следствия 1.2.

Остается найти функцию $F(x)$ из (3.1). Рассмотрим тригонометрический ряд $d_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} d_m \cos mx$, где $\{d_m\}_{m=0}^{\infty}$ – 2-монотонная последовательность при $m \geq 0$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = 0$. Тогда всюду на $(-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ этот ряд сходится к неотрицательной интегрируемой функции $F(x)$, при этом он является рядом Фурье функции F (см. [20; теорема 5.1.5]). Более того, так как $\Delta^2 d_m \geq 0$, $m = 0, 1, \dots$, и

$$F(x) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \Delta^2 d_m K_m(x)$$

(см. [20; формула (5.1.7)]), где $K_m(x) \geq 0$ – ядро Фейера, то множество нулей функции F или пусто, или конечно.

Далее, полагая $N := n+1$, имеем

$$\begin{aligned} (ae^{iNx} + be^{-iNx})F(x) &= \sum_{p=-N+1}^{N-1} (ad_{N-p} + bd_{N+p})e^{ipx} \\ &+ \sum_{p=N}^{\infty} (ad_{p-N} + bd_{p+N})e^{ipx} + \sum_{p=N}^{\infty} (bd_{p-N} + ad_{p+N})e^{-ipx}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Определим d_m , $m = 0, 1, \dots$, по формуле (1.9). Отметим, что при $|b| < a$ ряд из (1.9), очевидно, сходится и $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = 0$. При этом, поскольку последовательность $\{a_p\}_{p=N}^{\infty}$ является убывающей по условию 1) теоремы 1.3 и $\lim_{p \rightarrow \infty} a_p = 0$, ряд в (1.9) является сходящимся и $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m = 0$ также при $a = b$. Более того, последовательность $\{d_m\}_{m=0}^{\infty}$ является 2-монотонной по условию 1) теоремы 1.3. Непосредственные вычисления дают

$$ad_{p-N} + bd_{p+N} = a_p, \quad p = N, N+1, \dots \quad (3.3)$$

Далее, по формуле (1.7) условия 2) теоремы 1.3 имеем

$$bd_{p-N} + ad_{p+N} = a_{-p}, \quad p = N, N+1, \dots \quad (3.4)$$

Как следствие, (3.1) вытекает из (1.8), (3.2), (3.3) и (3.4); при этом функция F удовлетворяет всем требуемым условиям.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Используя соотношение двойственности для наилучших приближений (ср. с [18; п. 2.10.3])

$$E_n(g)_1 = \sup_{h \in H_\infty^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x) h(x) dx \right|,$$

где

$$H_\infty^n := \left\{ h \in L_\infty : \|h\|_\infty \leq 1, \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{ipx} dx = 0, -n \leq p \leq n \right\},$$

имеем

$$\begin{aligned} \sup_{g \in C_1(f)} E_n(g)_1 &= \sup_{\|\varphi\|_1 \leq 1} \sup_{h \in H_\infty^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \varphi(t) dt \right) h(x) dx \right| \\ &= \sup_{h \in H_\infty^n} \sup_{\|\varphi\|_1 \leq 1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} h(x) f(x-t) dx \right) \varphi(t) dt \right| \\ &= \sup_{h \in H_\infty^n} \sup_{t \in (-\pi, \pi)} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) h(x+t) dx \right| \\ &= \sup_{h \in H_\infty^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) h(x) dx \right| = E_n(f)_1. \end{aligned}$$

Это доказывает теорему 1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.6. Для любой функции $g = f * \varphi \in C_\infty(f)$ имеем

$$E_n(g) \leq \inf_{T_n \in \mathcal{T}_n} \|(f - T_n) * \varphi\|_\infty \leq E_n(f)_1. \quad (3.5)$$

Предположим, что функция $h^*(x) := \operatorname{sgn}[\overline{f(x) - T_n^*(x)}]$ удовлетворяет условию (1.12) при некоторых $n_* \in \mathbb{N}$, $T_n^* \in \mathcal{T}_n$ и почти всех $x \in (-\pi, \pi]$. Тогда h^* является $2\pi/n^*$ -периодической функцией и $\int_{-\pi}^{\pi} h^*(x) dx = 0$. Поэтому $\int_{-\pi}^{\pi} h^*(x) Q_n(x) dx = 0$ при любом $Q_n \in \mathcal{T}_n$. Далее, покажем, что T_n^* — полином наилучшего приближения функции f в метрике L_1 . Действительно, для любого $Q_n \in \mathcal{T}_n$ имеем

$$\|f - Q_n\|_1 \geq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - Q_n(x)) \operatorname{sgn}[\overline{f(x) - T_n^*(x)}] dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n^*(x)| dx.$$

Так как функция $h^{**}(x) := h^*(-x)$ также удовлетворяет условию (1.12), а функция $g_0 = f * h^{**}$ принадлежит классу $C_\infty(f)$, то с учетом (1.12) получаем

$$g_0\left(\frac{2k\pi}{n^*}\right) = g_0(0) = E_n(f)_1, \quad g_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{n^*}\right) = g_0\left(-\frac{\pi}{n^*}\right) = -E_n(f)_1,$$

$k = 0, \pm 1, \dots$ Как следствие,

$$g_0\left(\frac{p\pi}{n^*}\right) = (-1)^p \|g_0\|_\infty, \quad -n^* + 1 \leq p \leq n^*. \quad (3.6)$$

Тогда для любого многочлена $Q_n \in \mathcal{T}_n$ и для множества $M := \{p\pi/n^*\}_{p=-n^*+1}^{n^*}$ выполнено неравенство

$$\max_{x \in M} \operatorname{Re}[\overline{Q_n(x)} g_0(x)] \geq 0. \quad (3.7)$$

Действительно, если (3.7) не выполнено, то по (3.6) найдется нетривиальный вещественнозначный полином $Q_n^* \in \mathcal{T}_n$ такой, что

$$\max_{x \in M} Q_n^*(x) g_0(x) < 0. \quad (3.8)$$

Из (3.6) и (3.8) имеем $\operatorname{sgn}[Q_n^*(p\pi/n^*)] = (-1)^{p+1}$, $-n^* + 1 \leq p \leq n^*$. Это влечет, что полином Q_n^* имеет не менее чем $2n^* - 1$ нулей, однако это невозможно, так как $n^* \geq n + 1$. Неравенство (3.7) доказано.

Используя критерий Колмогорова (см. [9], а также [17; теорема 1.9] и [1; § 47]), из (3.7) получаем, что 0 является полиномом наилучшего приближения для g_0 в метрике L_∞ . Таким образом, $E_n(g_0)_\infty = E_n(f)_1$ и по (3.5)

$$E_n(f)_1 = E_n(g_0)_\infty \leq \sup_{g \in C_\infty(f)} E_n(g)_\infty \leq E_n(f)_1,$$

что доказывает (1.13).

§ 4. Пример

Пусть $a = 1$, $b \in [-1, 1]$, и пусть $n \in \mathbb{N}$ и $r \in (0, 1)$ – фиксированные числа. Далее, положим

$$a_0 := \frac{1}{2}, \quad a_p := r^p, \quad a_{-p} := \frac{b + r^{2n+2}}{1 + br^{2n+2}} r^p, \quad p = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Тогда выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.3 и значение наилучшего приближения $E_n(f)_1$ может быть найдено по формуле (1.11).

Если положить $b = -r^{2n+2}$ в (4.1), то функция

$$f(x) = f_r(x) := \sum_{p=0}^{\infty} a_p e^{ipx} = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} r^p e^{ipx} = \frac{1 + re^{ix}}{2(1 - re^{ix})} \quad (4.2)$$

является ядром в следующем варианте интегральной формулы Шварца:

$$G(re^{ix}) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) f_r(x - t) dt, \quad x \in (-\pi, \pi), \quad (4.3)$$

где G – голоморфная функция на замкнутом единичном круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, $G(0) = 0$, а $\varphi(t) := (2\pi)^{-1} G(e^{it})$. Формулу (4.3) можно распространить на более широкий класс функций G . В частности, при фиксированном числе $r \in (0, 1)$ класс $C_p(f_r)$ состоит из функций $g \in L_p$, являющихся ограничениями на окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ функций G , $G(0) = 0$, голоморфных на открытом единичном круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих равенству (4.3) для $\varphi(t) = (2\pi)^{-1} \lim_{R \rightarrow 1-} G(Re^{it})$, причем $\|\varphi\|_p \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$.

Так как ядро f_r , определенное в (4.2), удовлетворяет всем условиям теоремы 1.3 при $a = 1$ и $b = -r^{2n+2}$, то из следствия 1.8, второго равенства в (2.3) и формул (4.1) имеем

$$\begin{aligned} \sup_{g \in C_1(f_r)} E_n(g)_1 &= \sup_{g \in C_\infty(f_r)} E_n(g)_\infty = E_n(f_r)_1 \\ &= 2\sqrt{\pi(1-r^{4(n+1)})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(n+1)(4k+1)} \Gamma(k+1/2)}{k!} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; k+1; \frac{r^{4(n+1)}}{r^{4(n+1)}-1}\right). \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, 2-е изд., Наука, М., 1965, 407 с.; англ. пер. 1-го изд.: N. I. Achieser, *Theory of approximation*, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1956, x+307 pp.
- [2] E. Carneiro, F. Littmann, “Entire approximations for a class of truncated and odd functions”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **19**:5 (2013), 967–996.
- [3] E. Carneiro, J. D. Vaaler, “Some extremal functions in Fourier analysis. III”, *Constr. Approx.*, **31**:2 (2010), 259–288.
- [4] Г. Бэйтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1: *Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1965, 294 с.; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. 1, Based, in part, on notes left by H. Bateman, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1953, xxvi+302 pp.
- [5] M. I. Ganzburg, “Best approximation of functions like $|x|^\lambda \exp(-A|x|^{-\alpha})$ ”, *J. Approx. Theory*, **92**:3 (1998), 379–410.
- [6] M. Ganzburg, “Moduli of smoothness and best approximation of functions with singularities”, *Comput. Math. Appl.*, **40**:1 (2000), 81–93.
- [7] M. I. Ganzburg, “ L -approximation to non-periodic functions”, *J. Concr. Appl. Math.*, **8**:2 (2010), 208–215.
- [8] S. W. Graham, J. D. Vaaler, “A class of extremal functions for the Fourier transform”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **265**:1 (1981), 283–302.
- [9] А. Н. Колмогоров, “Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции”, *УМН*, **3**:1(23) (1948), 216–221.
- [10] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, М., 1976, 320 с.
- [11] B. R. Kripke, T. J. Rivlin, “Approximation in the metric of $L^1(X, \mu)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **119**:1 (1965), 101–122.
- [12] Xian-Jin Li, J. D. Vaaler, “Some trigonometric extremal functions and the Erdős–Turán inequalities”, *Indiana Univ. Math. J.*, **48**:1 (1999), 183–236.
- [13] А. А. Марков, “О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием”, Зап. Имп. Академии наук по физ.-матем. отд. Сер. 8, **6**, № 5, Изд-во АН, СПб, 1898, 69 с.; фр. пер.: A. Markoff, “Recherches sur les valeurs extrêmes des intégrales et sur l’interpolation”, *Acta Math.*, **28**:1 (1904), 243–301.
- [14] B. v. Sz. Nagy, “Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall”, *Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl.*, **90** (1938), 103–134.
- [15] B. v. Sz. Nagy, “Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. II. Nichtperiodischer Fall”, *Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl.*, **91** (1939), 3–24.

- [16] С. М. Никольский, “Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **10**:3 (1946), 207–256.
- [17] I. Singer, *The theory of best approximation and functional analysis*, CBMS–NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., **13**, SIAM, Philadelphia, PA, 1974, vii+95 pp.
- [18] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, М., 1960, 624 с.; англ. пер.: A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable*, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, **34**, A Pergamon Press Book The Macmillan Co., New York, 1963, xii+631 pp.
- [19] J. D. Vaaler, “Some extremal functions in Fourier analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **12**:2 (1985), 183–216.
- [20] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965, 615 с.; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1959, xii+383 pp.

Михаил Иосифович Ганзбург
(Michael I. Ganzburg)
Department of Mathematics,
Hampton University, Hampton, VA, USA
E-mail: michael.ganzburg@hamptonu.edu

Поступила в редакцию
13.12.2016 и 14.04.2017