Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Бригаднов, Теоремы существования для краевых задач гиперупругости, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 1, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm97>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 11:17:04

УДК 517.97+539.3

И. А. Бригаднов

Теоремы существования для краевых задач гиперупругости

Рассматриваются вариационные постановки краевой задачи эластостатики для гиперупругих (потенциальных) материалов. Доказывается существование решения на пространстве $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $p > 1$, для стандартных внешних воздействий при самых общих предположениях о потенциале, имеющем сверхлинейный рост по модулю матричного аргумента. Приводятся контрпримеры неулучшаемости условия коэрцитивности. При доказательстве теорем существования не используется слабая сходимость определителей градиентов отображений для минимизирующей последовательности, что позволяет существенно обобщить результаты Дж. М. Болла. Условие сохранения ориентации (или несжимаемости) почти всюду в области для глобального минимайзера доказывается непосредственно.

Библиография: 27 названий.

Введение

Пусть твердое тело в отсчетной недеформированной конфигурации занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ . В деформированной конфигурации каждая точка $x \in \Omega$ переходит в положение $u(x) \in \mathbb{R}^3$. Здесь и далее используются материальные лагранжевы координаты. Рассматриваются локально обратимые и сохраняющие ориентацию отображения $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ с градиентом $\nabla u = \{\partial^i u_\alpha\}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ такие, что $\det \nabla u > 0$ в Ω , где $\partial^i = \partial/\partial x_i$; $i, \alpha = 1, 2, 3$; $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ – пространство вещественных матриц 3×3 . Если материал несжимаемый, тогда $\det \nabla u = 1$ в Ω .

Рассматривается следующая краевая задача. К телу прикладываются квазистатические воздействия: в Ω – массовая сила с плотностью f , на части границы Γ^2 – поверхностная сила с плотностью g , а также задается отображение u_0 части границы Γ^1 , причем $\Gamma^1 \cup \Gamma^2 = \Gamma$, $\Gamma^1 \cap \Gamma^2 = \emptyset$, $\text{area}(\Gamma^1) > 0$.

В общем случае слабое решение краевой задачи эластостатики находится как решение вариационного уравнения [1]–[3]

$$\begin{aligned} u^* = \arg \left(u \in V : \int_{\Omega} \Sigma_{\alpha}^i(x, \nabla u) \partial^i (u_{\alpha} - v_{\alpha}) dx \right. \\ \left. = \int_{\Omega} f_{\alpha} (u_{\alpha} - v_{\alpha}) dx + \int_{\Gamma^2} g_{\alpha} (u_{\alpha} - v_{\alpha}) d\gamma \quad \forall v \in V \right), \end{aligned} \quad (0.1)$$

где $V = \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3; u(x) = u_0(x), x \in \Gamma^1\}$ – множество кинематически допустимых отображений, $\Sigma: \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ – функция реакции материала (первый тензор Пиолы–Кирхгофа). Здесь и далее используется правило суммирования по

повторяющимся индексам. Для несжимаемых материалов вместо V рассматривается множество $V_1 = \{u \in V : \det \nabla u(x) = 1, x \in \Omega\}$.

Особенностью гиперупругих материалов является существование скалярной функции $W : \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\Sigma_\alpha^i(x, A) = \partial W(x, A) / \partial A_\alpha^i$ [2]–[4].

Если ограничиться рассмотрением сил $f, g = \text{const}(u, \nabla u)$, тогда в соответствии с известным подходом [3], [4] под слабым решением краевой задачи эластостатики для гиперупругого материала понимается функция, сообщающая глобальный минимум полной энергии системы (глобальный минимайзер)

$$u^* = \arg(\inf \{I(u) : u \in V\}), \quad (0.2)$$

$$I(u) = \int_{\Omega} W(x, \nabla u(x)) dx - L(u), \quad L(u) = \int_{\Omega} f_\alpha(x) u_\alpha(x) dx + \int_{\Gamma^2} g_\alpha(x) u_\alpha(x) d\gamma,$$

где $L(u)$ – работа внешних сил при отображении $u(x)$. Если материал является однородным, тогда $\Sigma, W = \text{const}(x)$.

Физическая корректность постановки краевой задачи эластостатики для гиперупругого материала в вариационной форме (0.2) обсуждается в работах [3], [4]. В рамках этого подхода решение задачи (0.1) является функцией, сообщающей стационарное значение полной энергии системы, т.е. слабой локальной экстремалью функционала $I(u)$. Например, известное свойство неединственности равновесного состояния можно трактовать следующим образом. Глобальный минимайзер (если он существует) является энергетически самым “выгодным”, хотя может быть и неединственным. Локальные экстремали с большей энергией могут быть устойчивы по отношению к малым вариациям, однако неустойчивы к конечным возмущениям.

С поставленными вариационными задачами связаны следующие проблемы:

- 1) установление условий существования и устойчивости решения задачи (0.1);
- 2) установление условий разрешимости задачи (0.2);
- 3) установление условий совпадения глобального минимайзера и локальной экстремали (для гладких отображений вопрос решен);
- 4) исследование регулярности глобального минимайзера и локальной экстремали.

Третья и четвертая проблемы, очевидно, взаимосвязаны. В настоящей работе решается вторая проблема.

В §1 формулируются и обсуждаются теоремы существования для сжимаемых и несжимаемых материалов при самых общих предположениях о потенциале (теоремы 1.1 и 1.2, соответственно).

Рассматриваются каратеодориевы потенциалы, для которых известное условие поливыпуклости [3]–[5] заменяется на более общее требование квазивыпуклости по матричному аргументу [6], существенно ослабляется условие коэрцитивности – требуется лишь сверхлинейный рост потенциала по модулю матричного аргумента. При учете сжимаемости потенциал непрерывным образом доопределяется по матричному аргументу до бесконечности вне множества сохранения ориентации.

Приводятся контрпримеры неулучшаемости условия коэрцитивности, опирающиеся на известные результаты вариационного исчисления для интегральных функционалов линейного роста [7]. В этом случае возможно либо отсутствие решения в силу неограниченности снизу функционала энергии на множестве кинематически допустимых отображений [8] (пример 1.1), либо появление решений с

разрывами типа проскальзывания по аналогии с задачами о непараметрической минимальной поверхности [9], [10] и идеальной упругопластичности [11], [12] (пример 1.2).

В §2 доказываются сформулированные теоремы, обсуждаются некоторые частные случаи и указывается способ учета силовых воздействий более общего вида. При доказательстве теорем существования не используется слабая сходимости определителей градиентов отображений для минимизирующей последовательности, что позволяет существенно обобщить известные результаты Дж. М. Болла [4]. Условие сохранения ориентации (несжимаемости) почти всюду в Ω для глобального минимайзера доказывается непосредственно.

В приложении приводятся необходимые сведения из теории функций матричного аргумента.

§1. Формулировка и обсуждение основных результатов

Относительно потенциала W , области Ω и функций f , g , u_0 сделаем следующие предположения.

- (H1) $W : \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow [0, \infty]$ – каратеодориева функция.
- (H2) $W(x, A) \rightarrow +\infty$ при $\det A \rightarrow +0$ и $W(x, A) = +\infty$, если и только если $\det A \leq 0$.
- (H3) Существуют постоянные $a_1 > 0$, $p > 1$ и функция $a_0 \in L^1(\Omega)$ такие, что для любой $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ выполняется условие коэрцитивности

$$W(x, A) \geq a_1 |A|^p + a_0(x).$$

- (H4) $W(x, A)$ квазивыпуклая по A .
- (H5) Ω связная ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ .
- (H6) $f \in L^t(\Omega, \mathbb{R}^3)$ с $t > 3p/(4p-3)$ для $1 < p < 3$ и $t \geq 1$ для $p \geq 3$.
- (H7) $g \in L^r(\Gamma^2, \mathbb{R}^3)$ с $r \geq 2p/(3p-3)$ для $1 < p < 3$ и $r \geq 1$ для $p \geq 3$.
- (H8) $u_0 \in L^p(\Gamma^1, \mathbb{R}^3)$.

Определим множество кинематически допустимых отображений для сжимаемого и несжимаемого случаев, соответственно,

$$V = \{u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3) : u(x) = u_0(x), x \in \Gamma^1\},$$

$$V_1 = \{u \in V : \det \nabla u = 1 \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

Из предположения (H8) и теоремы о следах [3] следует, что V является линейным аффинным многообразием в рефлексивном банаховом пространстве $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ с $p > 1$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если в предположениях (H1)–(H8) существует $u^1 \in V$ такая, что $I(u^1) < +\infty$, тогда задача (0.2) разрешима на V , причем глобальный минимайзер сохраняет ориентацию почти всюду в Ω .*

ТЕОРЕМА 1.2. *Если в предположениях (H1)–(H8) без (H2) существует $u^1 \in V_1$ такая, что $I(u^1) < +\infty$, тогда задача (0.2) разрешима на V_1 .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Самыми общими ограничениями, накладываемыми на потенциал, являются: $W(x, A) \geq 0$ – по физическому смыслу и $W(x, A) \rightarrow +\infty$ при $|A| \rightarrow \infty$ или $\det A \rightarrow +0$ (для сжимаемых материалов), т.е. сингулярным отображениям соответствует бесконечно большая энергия [13]. Указанные требования учитываются в гипотезах (Н1)–(Н3), причем для сжимаемых материалов в (Н2) потенциал непрерывным образом доопределяется по матричному аргументу до бесконечности вне множества сохранения ориентации.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В работах [3], [4], [14] на потенциал накладываются более жесткие ограничения, а именно, $W(x, A) \geq 0$ является каратеодориевой, поливыпуклой по A и удовлетворяет соответствующему усиленному условию коэрцитивности (см. приложение)

$$W(x, A) \geq a_1(|A|^p + |\operatorname{Cof} A|^q + |\det A|^r) + a_0$$

для любой $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ с некоторыми постоянными $a_1 > 0$, $p \geq 2$, $q \geq p/(p-1)$, $r > 1$, $a_0 \in \mathbb{R}$. Здесь и далее $\operatorname{Cof} A$ обозначает матрицу алгебраических дополнений матрицы A .

Сформулированные теоремы существенно обобщают результаты этих работ и закрывают вопрос о разрешимости задачи (0.2) на $V, V_1 \subset W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ для $1 < p < 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Дальнейшее ослабление ограничений на потенциал возможно за счет гипотезы (Н4), а именно, в случае решения проблемы Морри [6] об эквивалентности свойств квазивыпуклости и выпуклости по рангу 1. Отметим, что в настоящее время не постороено ни одного контрпримера.

Покажем неувлучшаемость условия коэрцитивности ($p > 1$).

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим следующую задачу. Пусть в абсолютно твердом теле имеется сквозное круглое отверстие длины l и радиуса b ($l \gg b$), в которое коаксиально вставлен абсолютно твердый стержень меньшего радиуса a . Свободное пространство отверстия заполнено деформируемым материалом, жестко прикрепленным по всей длине к стержню и внутренней поверхности отверстия. Стержень выдвигается вдоль оси заданной силой F . Если наполнитель однороден и изотропен, тогда в силу осевой симметрии задачи в рамках модели антиплоского сдвига [2], [15] его деформированная конфигурация описывается следующими соотношениями в отсчетных цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta, z) &= x(r(\rho), \theta, z + w(\rho)), \\ r(a) &= a, \quad r(b) = b, \quad w(b) = 0. \end{aligned}$$

Предположим, что наполнитель подчиняется сжимаемому варианту теории высокоэластичности [15], [16]

$$W(A) = 2\mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3) + h(\lambda_1\lambda_2\lambda_3),$$

где μ – модуль сдвига при малых деформациях, $\lambda_k > 0$ – собственные числа матрицы $(A_\alpha^i A_\alpha^j)^{1/2}$ (кратности главных удлинений). Если функция $h(t) \geq 0$ непрерывная и выпуклая, тогда по теореме П.3 (см. приложение) функция $W(A)$ является

квазивыпуклой. При этом она удовлетворяет условию коэрцитивности (НЗ) с постоянными $a_1 = 2\mu$, $a_0 = 0$, $p = 1$.

Вариационная задача (0.2) принимает вид

$$\begin{aligned}(r^*, w^*) &= \arg(\inf\{I(r, w) : (r, w) \in V\}), \\ V &= \{(r, w) \in (W^{1,1}(a, b))^2 : r(a) = a, r(b) = b, w(b) = 0\}, \\ I(r, w) &= \int_a^b [((\rho r)'^2 / \rho^2 + w'^2)^{1/2} + h(r' r / \rho)] \rho d\rho - qa|w(a)|,\end{aligned}$$

где $q = (4\pi\mu a l)^{-1}|F|$ – плотность приведенной касательной силы, действующей на единицу длины по поверхности контакта стержня и наполнителя.

Взяв $q > 1$ и последовательность допустимых отображений $r_m(\rho) \equiv \rho$, $w_m(\rho) = m(b - \rho)^m / (b - a)^m$ ($m \in \mathbb{N}$) легко убедиться, что функционал энергии неограничен снизу на V , т.е. $I(r_m, w_m) \rightarrow -\infty$ при $m \rightarrow +\infty$.

ПРИМЕР 1.2. Пусть в предыдущем примере задан кинематический сдвиг стержня вдоль оси на величину w_0 . Предположим, что наполнитель подчиняется несжимаемой теории высокоэластичности [16]

$$W(A) = 2\mu(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3), \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1,$$

где все величины имеют тот же смысл, что и в примере 1.1. Тогда с учетом осевой симметрии задачи в рамках модели антиплоского сдвига условие несжимаемости выполняется при отображении

$$u(\rho, \theta, z) = x(\rho, \theta, z + w(\rho)), \quad w(a) = w_0, \quad w(b) = 0.$$

Вариационная задача (0.2) принимает вид

$$\begin{aligned}w^* &= \arg(\inf\{I(w) : w \in V_1\}), \\ V_1 &= \{w \in W^{1,1}(a, b) : w(a) = w_0, w(b) = 0\}, \\ I(w) &= \int_a^b (4 + w'^2)^{1/2} \rho d\rho.\end{aligned}$$

В силу выпуклости задачи как по функционалу, так и по множеству допустимых функций, локальная экстремаль (если она существует) совпадает с глобальным минимайзером [17].

Из условия стационарности $I(w)$ находим локальную экстремаль

$$w^*(\rho) = 2c[\operatorname{arch}(b/c) - \operatorname{arch}(\rho/c)], \quad (1.1)$$

где постоянная c находится из условия $w^*(a) = w_0$. Последнее разрешимо только для $w_0 \leq w_0^* = 2a \operatorname{arch}(b/a)$. При $w_0 > w_0^*$ экстремаль не удовлетворяет краевым условиям. В этом случае вариационная задача не имеет непрерывных решений, хотя функционал, очевидно, ограничен снизу.

Функционал $I(w)$ с точностью до констант соответствует задаче о непараметрической минимальной поверхности. Известно, что решение этой задачи принадлежит пространству BV функций ограниченной вариации, которое наряду с непрерывными содержит функции, имеющие разрывы типа проскальзывания как внутри области, так и на границе. Понятие обобщенного решения и обоснование его математической и физической корректности для задачи о непараметрической минимальной поверхности дано во многих работах (см., например, [10], [17]). Обобщенное решение этой задачи совпадает с решением расширенной вариационной задачи, известной как задача Де Джорджи [17]

$$w^{**} = \arg(\inf\{I^*(w) : w \in W^{1,1}(a,b)\}),$$

$$I^*(w) = I(w) + a|w(a) - w_0| + b|w(b)|.$$

Такое решение построено в [18] и имеет следующий вид: при $w_0 \leq w_0^*$ оно совпадает с классическим решением (1.1), а при $w_0 > w_0^*$

$$w^{**}(\rho) = 2a[\operatorname{arch}(b/a) - \operatorname{arch}(\rho/a)].$$

Материал проскальзывает по поверхности стержня ($w^{**}(a) = w_0^* < w_0$).

§ 2. Доказательство основных результатов

Для доказательства теоремы 1.1 потребуются два вспомогательных результата. Первый опирается на свойства пространств Лебега, второй – на свойства измеримых функций.

ЛЕММА 2.1. Пусть на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задана слабо сходящаяся последовательность $u^m \rightharpoonup u^0$ в $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ с $1 < p < \infty$, для которой существует постоянная $C > 0$ такая, что $\|u^m\|_{1,\infty} \leq C$ ($m = 0, 1, \dots$).

Тогда $u^m \xrightarrow{*} u^0$ в $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению слабой сходимости [19], [20] $u^m \rightharpoonup u^0$ в $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ с $1 < p < \infty$ (соответственно, $\xrightarrow{*}$ при $p = \infty$), если для любой $\varphi \in W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ с $q = p/(p-1)$ (соответственно, $q = 1$ для $p = \infty$) справедливо предельное соотношение

$$\int_{\Omega} [(u_{\alpha}^m - u_{\alpha}^0)\varphi_{\alpha} + \partial^i(u_{\alpha}^m - u_{\alpha}^0)\partial^i\varphi_{\alpha}] dx \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty). \quad (2.1)$$

Возьмем любую $\varphi \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Поскольку пространство основных функций $C_0^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ всюду плотно в $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ [20], [21], существует последовательность $\{\varphi^k\} \subset C_0^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ такая, что

$$\|\varphi - \varphi^k\|_{1,1} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (2.2)$$

В силу неравенства Гёльдера [21], ограниченности в совокупности $\{u^m\}_{m=0}^{\infty}$ в $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, а также свойства нормы справедлива оценка для любых $m, k \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_{\Omega} [(u_{\alpha}^m - u_{\alpha}^0)(\varphi_{\alpha} - \varphi_{\alpha}^k) + \partial^i(u_{\alpha}^m - u_{\alpha}^0)\partial^i(\varphi_{\alpha} - \varphi_{\alpha}^k)] dx \right| \leq 2C\|\varphi - \varphi^k\|_{1,1}. \quad (2.3)$$

Сопоставляя (2.1)–(2.3) и учитывая, что $\{\varphi^k\} \subset C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \subset W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, приходим к требуемому соотношению.

Напомним, что класс измеримых (по Борелю) функций замкнут по отношению к сходимости почти всюду по отношению к арифметическим и структурным операциям, а также по отношению к операции суперпозиции [19].

ЛЕММА 2.2. *Пусть для некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ функция $W: \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow [0, +\infty]$ удовлетворяет ограничениям (H1) и (H2).*

Тогда для произвольной измеримой функции $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ справедлива импликация

$$\int_{\Omega} W(x, \xi(x)) dx < \infty \implies \det \xi > 0 \quad \text{n.в. в } \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную измеримую функцию $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ такую, что $\int_{\Omega} W(x, \xi(x)) dx < +\infty$. В силу гипотезы (H1) функция $q(x) = W(x, \xi(x)) \geq 0$ является измеримой как суперпозиция измеримых. Из интегрируемости по Лебегу на Ω следует интегрируемость на любом измеримом подмножестве $\omega \subset \Omega$, причем

$$0 \leq \int_{\omega} q(x) dx \leq \int_{\Omega} q(x) dx < +\infty. \quad (2.4)$$

Функция $A \mapsto \det A$ является непрерывной, поэтому функция $\det \xi(x)$ измерима как суперпозиция непрерывной и измеримой [19]. Это значит, что множества $\{x \in \Omega : \det \xi(x) \leq C\}$ являются измеримыми для любого $C \in \mathbb{R}$.

Предположим, что $\det \xi \leq 0$ на некотором подмножестве $\omega \subset \Omega$ с $\text{vol}(\omega) > 0$. Из гипотезы (H2) следует, что $q(x) \equiv +\infty$ на ω , поэтому

$$\int_{\omega} q(x) dx = +\infty. \quad (2.5)$$

Сопоставляя (2.4) и (2.5) приходим к противоречию. Значит, в силу измеримости ω справедливо утверждение $\text{vol}\{x \in \Omega : \det \xi(x) \leq 0\} = 0$, т.е. $\det \xi > 0$ п.в. в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Из предположений (H5)–(H7), теоремы вложения Соболева и теоремы о следах [3] следует, что функционал $u \mapsto L(u)$ является линейным и непрерывным на $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Поэтому существует постоянная $K_1 > 0$ такая, что

$$|L(u)| \leq K_1 \|u\|_{1,p}$$

для любой $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Отсюда и из условия коэрцитивности (H3) следует, что

$$I(u) \geq a_1 \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx - K_1 \|u\|_{1,p} + \text{const}. \quad (2.6)$$

В силу предположений (Н5), (Н8) и обобщенного неравенства Пуанкаре [3], [20] существует постоянная $K_2 > 0$ такая, что для любой $u \in V$ верно неравенство

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq K_2 \left[\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx + \left(\int_{\Gamma^1} |u_0(x)| d\gamma \right)^p \right].$$

Отсюда в сочетании с оценкой (2.6) следует, что для любой $u \in V$

$$I(u) \geq K_3 \|u\|_{1,p}^p - K_1 \|u\|_{1,p} + \text{const}, \quad (2.7)$$

где $K_3 = a_1/(K_2 + 1) > 0$. Эта оценка обеспечивает коэрцитивность и ограниченность снизу функционала $I(u)$ на V для любого $p > 1$.

Определим подмножество $V^\infty \subset V$, на котором функционал $I(u)$ принимает конечные значения

$$V^\infty = \{u \in V : I(u) < +\infty\}.$$

В силу предположения $I(u^1) < +\infty$ это множество является непустым. В сочетании с непрерывностью (гипотеза (Н1)) и ограниченностью снизу функционала $I(u)$ гарантируется существование конечного числа $d = \inf \{I(u) : u \in V^\infty\}$.

Пусть $\{u^k\} \subset V^\infty$ – произвольная минимизирующая последовательность, т.е. $I(u^k) \rightarrow d$ ($k \rightarrow \infty$).

Из условия коэрцитивности (2.7) и предположения $I(u^1) < +\infty$ следует ограниченность минимизирующей последовательности [22], т.е. для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\|u^k\|_{1,p} \leq \text{const}.$$

Поэтому в силу рефлексивности пространства $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ с $1 < p < \infty$ можно выбрать подпоследовательность $\{u^m\}$ такую, что $u^m \rightharpoonup u^0$ ($m \rightarrow \infty$) слабо в $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ [19]–[21].

Множество V является линейным аффинным многообразием в $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, т.е. замкнутым выпуклым, а, значит, слабо замкнутым множеством [17], поэтому $u^0 \in V$. Поскольку $I(u^0) \leq I(u^1) < +\infty$, то $u^0 \in V^\infty$.

Без потери общности можно считать, что $I(u^m) \leq I(u^1) < +\infty$ ($m = 0, 1, \dots$). Поэтому в силу леммы 2.2 и счетной аддитивности меры Лебега [19] справедливо утверждение

$$\text{vol} \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} \{x \in \Omega : \det \nabla u^m(x) \leq 0\} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Возьмем любое число $C > 0$ и рассмотрим множество

$$\Omega_C = \{x \in \Omega : |u^m(x)| \leq C, |\nabla u^m(x)| \leq C, \det \nabla u^m(x) \geq C^{-1}, m = 0, 1, \dots\}.$$

Из (2.8) и ограниченности минимизирующей последовательности в $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ следует предельное соотношение [22, с. 398]

$$\text{vol}(\Omega \setminus \Omega_C) \rightarrow 0 \quad (C \rightarrow +\infty). \quad (2.9)$$

Очевидно $\|u^m\|_{1,\infty} \leq C$ на Ω_C для $m = 0, 1, \dots$, поэтому, согласно лемме 2.1, $u^m \xrightarrow{*} u^0$ в $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ для любого $C > 0$.

В силу суммируемости и конечности значений функций $x \mapsto W(x, \nabla u^m(x))$ ($m = 0, 1, \dots$) на Ω_C , гипотезы (Н4) и теоремы П.1 из приложения для любого $C > 0$ справедливо неравенство

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega_C} W(x, \nabla u^m(x)) dx \geq \int_{\Omega_C} W(x, \nabla u^0(x)) dx. \quad (2.10)$$

Из линейности и непрерывности функционала $L(u)$ на $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, определения слабой сходимости [19] и свойства нижнего предела следует, что

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} L(u^m) = L(u^0). \quad (2.11)$$

Поэтому в силу условий $\Omega_C \subset \Omega$, $W(x, A) \geq 0$, сходимости подпоследовательности $I(u^m) \rightarrow d$ ($m \rightarrow \infty$) и соотношений (2.10), (2.11) для любого $C > 0$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega_C} W(x, \nabla u^0(x)) dx - L(u^0) \leq d. \quad (2.12)$$

Отсюда в сочетании с предельным соотношением (2.9), абсолютной непрерывностью интеграла Лебега [19] и суммируемостью $W(x, \nabla u^0(x))$ на Ω следует, что $I(u^0) \leq d$. Таким образом, $I(u^0) = d$.

И, наконец, поскольку $\nabla u^0 \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^{3 \times 3})$ – измеримая функция и $|I(u^0)| < \infty$, согласно лемме 2.2 $\det \nabla u^0(x) > 0$ для почти всех $x \in \Omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В отличие от работ [3], [4], [14] условие сохранения ориентации глобального минимайзера не учитывается в множестве кинематически допустимых отображений, а доказывается непосредственно без установления слабой сходимости определителей градиентов отображений для минимизирующей последовательности. В указанных работах последний шаг является необходимым для доказательства секвенциально слабой полунепрерывности снизу главной части функционала $I(u)$ с поливыпуклым интегрантом, т.е. для установления аналога оценки (2.10).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пусть вместо (Н3) потенциал удовлетворяет более сильному условию коэрцитивности.

(Н3') Существуют постоянные $a_1 > 0$, $p > 1$, $r \geq 1$ и функция $a_0 \in L^1(\Omega)$ такие, что для любой $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ справедлива оценка

$$W(x, A) \geq a_1(|A|^p + |\det A|^r) + a_0(x).$$

В этом случае в силу предположения $I(u^1) < +\infty$ и усиленной оценки (2.7)

$$I(u) \geq K_3 \|u\|_{1,p}^p - K_1 \|u\|_{1,p} + a_1 \|\det \nabla u\|_r^r + \text{const},$$

минимайзер будет обладать дополнительным свойством $\det \nabla u^0 \in L^r(\Omega)$.

Во многих моделях гиперупругости, изначально построенных для несжимаемых материалов, учет сжимаемости осуществляется в следующем виде [23], [24]

$$W(x, A) = W_1(x, A) + h(x, \det A).$$

Используя теоремы П.2 и П.4 из приложения, легко убедиться, что для выполнения условий (Н1)–(Н4) достаточно, чтобы функция $W_1(x, A) \geq 0$ была каратеодориевой, квазивыпуклой по A и удовлетворяла условию коэрцитивности (Н3), а функция $h(x, t) \geq 0$ была каратеодориевой, выпуклой по t , а также $h(x, t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +0$ и $h(x, t) = +\infty$, если и только если $t \leq 0$. Для выполнения дополнительного свойства $\det \nabla u^0 \in L^r(\Omega)$ достаточно, чтобы функция $h(x, t)$ удовлетворяла условию коэрцитивности

$$h(x, t) \geq b_1 t^r + b_0(x)$$

для любого $t > 0$ с некоторыми постоянными $b_1 > 0$, $r \geq 1$ и функцией $b_0 \in L^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Доказательство почти полностью повторяет доказательство теоремы 1.1 с некоторыми изменениями.

Вводится множество $V_1^\infty \subset V_1$, на котором функционал $I(u)$ принимает конечные значения. В силу предположения $I(u^1) < +\infty$ это множество является непустым. В сочетании с непрерывностью (гипотеза (Н1)) и ограниченностью снизу функционала $I(u)$ (оценка (2.7)) гарантируется существование конечного числа $d = \inf \{I(u) : u \in V_1^\infty\}$.

Берется произвольная минимизирующая последовательность $\{u^k\} \subset V_1^\infty$. В силу рефлексивности пространства $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ с $1 < p < \infty$, теоремы о компактном вложении [3], [21] и свойств пространств Лебега [19] существуют подпоследовательность $\{u^m\}$ и функция $u^0 \in V$ такие, что при $m \rightarrow \infty$ [22]

$$\begin{aligned} u^m &\rightharpoonup u^0 \quad \text{в } W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ u^m &\rightarrow u^0 \quad \text{в } L^p(\Omega, \mathbb{R}^3), \\ u^m &\rightarrow u^0 \quad \text{п.в. в } \Omega. \end{aligned}$$

Для измеримых функций $\{u^m\}_{m=0}^\infty$ выполняется соотношение $\det \nabla u^m \rightarrow \det \nabla u^0$ п.в. в Ω . По условию $\det \nabla u^m(x) = 1$ ($m = 1, 2, \dots$), поэтому $\det \nabla u^0(x) = 1$ для почти всех $x \in \Omega$ [19], т.е. $u^0 \in V_1$.

Из предположения $I(u^0) \leq I(u^1) < +\infty$ следует, что $u^0 \in V_1^\infty$. Далее воспроизводится доказательство утверждения $I(u^0) = d$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Можно рассмотреть более общие силовые воздействия $f(x, u, \nabla u)$ и $g(x, u, \nabla u)$, для которых существуют скалярные потенциалы $F(x, u, \nabla u)$ и $G(x, u, \nabla u)$ такие, что

$$\begin{aligned} L(u) &= \int_{\Omega} F(x, u, \nabla u) dx + \int_{\Gamma^2} G(x, u, \nabla u) d\gamma, \\ DL(u, v) &= \int_{\Omega} f_{\alpha}(x, u, \nabla u) v_{\alpha} dx + \int_{\Gamma^2} g_{\alpha}(x, u, \nabla u) v_{\alpha} d\gamma, \end{aligned}$$

где $DL(u, v)$ – дифференциал Гато функционала работы [2], [3]. Если функционал $L(u)$ секвенциально слабо полунепрерывен сверху в $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, тогда доказанные теоремы верны в силу справедливости оценки (2.12).

Приложение

Основные свойства многомерного интегрального функционала определяются алгебраическими свойствами интегранта как функции матричного аргумента. Напомним основные сведения для непрерывной функции $W : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$.

1) Функция W называется *выпуклой* [3]–[5], если для любых $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ и $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство Йенсена

$$W(tB + (1 - t)A) \leq tW(B) + (1 - t)W(A).$$

Если $W \in C^2(\mathbb{R}^{3 \times 3})$, тогда свойство выпуклости эквивалентно известному условию Коулмана–Нолла [2], [3]

$$[\partial^2 W(A) / \partial A_\alpha^i \partial A_\beta^j] B_\alpha^i B_\beta^j \geq 0$$

для любых $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

2) Функция W называется *выпуклой по рангу 1* [3]–[7], если неравенство Йенсена выполняется для любых $t \in (0, 1)$ и $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ с $\text{rank}(A - B) = 1$.

Если $W \in C^2(\mathbb{R}^{3 \times 3})$, тогда свойство выпуклости по рангу 1 эквивалентно известному условию эллиптичности Лежандра–Адамара [3]–[6], [25]

$$[\partial^2 W(A) / \partial A_\alpha^i \partial A_\beta^j] a_i a_j b_\alpha b_\beta \geq 0$$

для любых $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $a, b \in \mathbb{R}^3$.

3) Функция W называется *квазивыпуклой* [3]–[6], [25], если для любой (хотя бы одной [14]) ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и произвольных $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $z \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} [W(A + \nabla z(x)) - W(A)] dx \geq 0.$$

4) Функция W называется *поливыпуклой* [3]–[5], если существует выпуклая по совокупности аргументов функция $G : \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любой $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ выполняется равенство

$$W(A) = G(A, \text{Cof } A, \det A).$$

5) Функция $W : \Omega \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *каратеодориевой*, если $W(x, A)$ измерима по x для любой $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ и непрерывна по A для почти всех $x \in \Omega$.

Все приведенные определения распространяются на каратеодориевую функцию $W(x, A) \geq 0$, принимающую тождественно значение $+\infty$ на некотором множестве матричного аргумента [14] и непрерывную по множеству $\text{dom } W = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : W(x, A) < +\infty, x \in \Omega\}$. В этом случае везде, где это необходимо, предполагается, что матричный аргумент принадлежит $\text{dom } W$. На эту функцию с небольшими дополнениями можно распространить результат Морри, справедливый, как известно, для интегрантов, принимающих только конечные значения [6], [14], [20], [25], [26].

ТЕОРЕМА П.1. Пусть на открытом измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^3$ с $\text{vol}(D) < \infty$ задана каратеодориева и квазивыпуклая по матричному аргументу функция $W: D \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow [0, +\infty]$.

Пусть для последовательности

$$u^m \xrightarrow{*} u^0 \quad \text{в} \quad W^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^3)$$

функции $x \mapsto W(x, \nabla u^m(x))$ ($m = 0, 1, \dots$) являются суммируемыми и всюду принимают конечные значения на D .

Тогда справедливо неравенство

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \int_D W(x, \nabla u^m(x)) dx \geq \int_D W(x, \nabla u^0(x)) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим аппроксимацию ограниченного измеримого множества D объединением открытых непересекающихся кубов Q_n^i с длиной ребра $1/n$

$$D_n = \bigcup_{i=1}^{I_n} Q_n^i \subset D, \quad \text{vol}(D \setminus D_n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{vol}(Q_n^i) = n^{-3} \quad (i = 1, 2, \dots, I_n).$$

Воспользуемся кусочно-постоянной аппроксимацией произвольной функции $\xi \in L^\infty(D, \mathbb{R}^{3 \times 3})$ вида

$$\bar{\xi}(x) = n^3 \int_{Q_n^i} \xi(y) dy, \quad x \in Q_n^i \quad (i = 1, 2, \dots, I_n).$$

Очевидно справедливо аппроксимационное соотношение $\|\bar{\xi} - \xi\|_\infty \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому существует подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что $\bar{\xi} \rightarrow \xi$ п.в. в D при $k \rightarrow \infty$ [19]. Без потери общности можно считать $n_k = n$.

В силу непрерывности функции W по матричному аргументу, суммируемости и конечности значений функций $x \mapsto W(x, \nabla u^m(x))$ ($m = 0, 1, \dots$) существует N такое, что для $n \geq N$ равенство

$$\begin{aligned} & \int_D [W(x, \nabla u^m) - W(x, \nabla u^0)] dx \\ &= \int_{D_n} [W(x, \nabla u^m) - W(x, \nabla u^m + (\overline{\nabla u^0} - \nabla u^0))] dx \\ &+ \int_{D_n} [W(x, \overline{\nabla u^0}) - W(x, \nabla u^0)] dx + \int_{D \setminus D_n} [W(x, \nabla u^m) - W(x, \nabla u^0)] dx \\ &+ \int_{D_n} [W(x, \overline{\nabla u^0} + (\nabla u^m - \nabla u^0)) - W(x, \overline{\nabla u^0})] dx \end{aligned}$$

является корректным, поскольку в правой части все подинтегральные функции суммируемые и почти всюду принимают конечные значения.

Далее используется лемма 1.3 из [25] или шаг 2 теоремы 5.1 из [26], где стандартным образом показывается, что в силу квазивыпуклости функции W по матричному аргументу справедливо неравенство

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{I_n} \int_{Q_n^i} [W(x, \overline{\nabla u^0} + (\nabla u^m - \nabla u^0)) - W(x, \overline{\nabla u^0})] dx \geq 0$$

для любого $n \geq N$. Легко убедиться, что три остальных интеграла в правой части стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Для функций специального вида имеется простой критерий квазивыпуклости [4], [26].

ТЕОРЕМА П.2. Пусть для функции $W: \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ существует выпуклая функция $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, постоянные $S, Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ и $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$ такие, что для любой $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ выполняется равенство

$$W(A) = h(S_\alpha^i A_\alpha^i + Q_\alpha^i \text{Cof } A_\alpha^i + C_1 \det A + C_0).$$

Тогда функция W является квазивыпуклой.

В общем случае свойство квазивыпуклости трудно проверяется на практике, поскольку имеет нелокальный (интегральный) характер. Поэтому удобно пользоваться следующей диаграммой импликаций [4], [5]

$$\begin{aligned} \text{выпуклость} &\implies \text{поливывпуклость} \implies \text{квазивыпуклость} \\ &\implies \text{выпуклость по рангу 1.} \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Первая и вторая импликации являются строгими (построено много простых контрпримеров [4], [5]). Третья импликация является нестрогой. Например, для квадратичной функции с постоянными коэффициентами $W(A) = C_{\alpha\beta}^{ij} A_\alpha^i A_\beta^j$ свойства квазивыпуклости и выпуклости по рангу 1 эквивалентны [27].

В случае, если для любой $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ выполняется равенство

$$W(A) = \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (\text{П.2})$$

где $\lambda_k > 0$ – собственные числа матрицы $(A_\alpha^i A_\alpha^j)^{1/2}$, а Φ – симметричная функция λ_k , имеется простой критерий поливыпуклости [4].

ТЕОРЕМА П.3. Пусть функция $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Phi_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \Phi_2(\lambda_2 \lambda_3, \lambda_3 \lambda_1, \lambda_1 \lambda_2) + \Phi_3(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3),$$

где $\Phi_1, \Phi_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ – симметричные, непрерывные, выпуклые и неубывающие функции, $\Phi_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная и выпуклая функция.

Тогда функция $W(A)$, определенная по (П.2), является поливыпуклой.

И, наконец, на практике удобно пользоваться следующим результатом, доказательство которого элементарно и поэтому опускается.

ТЕОРЕМА П.4. Пусть имеется совокупность функций $W_r: \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ ($r = 1, 2, \dots, t$), обладающих различными видами выпуклости.

Тогда для любых чисел $C_r \geq 0$ линейная комбинация $W(A) = C_r W_r(A)$ обладает слабым из имеющихся в совокупности видом выпуклости в смысле диаграммы импликаций (П.1).

Список литературы

1. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости // ПММ. 1971. Т. 35. №3. С. 406–410.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
3. *Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992.
4. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1977. V. 63. P. 337–403.
5. *Dacorogna B.* Remarques sur les notions de polyconvexité, quasi-convexité et convexité de rang 1 // J. Math. pures et appl. 1985. V. 64. P. 403–438.
6. *Morrey C. B.* Quasiconvexity and the lower semicontinuity of multiple integrals // Pacific J. Math. 1952. V. 2. P. 25–53.
7. *Anzellotti G.* The Euler equation for functional with linear growth // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 290. №2. P. 483–501.
8. *Бригаднов И. А.* О существовании предельной нагрузки в некоторых задачах гиперупругости // Изв. АН. МТТ. 1993. №5. С. 46–51.
9. *Giaquinta M.* On the Dirichlet problem for surfaces of prescribed mean curvature // Manuscripta Math. 1974. V. 12. P. 73–86.
10. *Джустуи Э.* Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М.: Мир, 1989.
11. *Серегин Г. А.* О корректности вариационных проблем механики идеально-упругопластических сред // ДАН СССР. 1984. Т. 276. №1. С. 71–75.
12. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991.
13. *Antman S. S.* Regular and singular problems for large elastic deformations of tubes, wedges and cylinders // Arch. Rational Mech. Anal. 1983. V. 83. P. 1–52.
14. *Ball J. M., Murat F.* $W^{1,p}$ -quasiconvexity and variational problems for multiple integrals // J. Funct. Anal. 1984. V. 58. P. 225–253.
15. *Черных К. Ф., Литвиненкова З. Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
16. *Бартенев Г. М., Зеленева Ю. В.* Курс физики полимеров. Л.: Химия, 1976.
17. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
18. *Репин С. И.* Вариационно-разностный метод решения задач с функционалами линейного роста // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 1989. Т. 29. №5. С. 693–708.
19. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
20. *Morrey C. B.* Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin: Springer-Verlag, 1966.
21. *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988.
22. *Ладженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазILINEЙНЫЕ уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
23. *Ogden R. W.* Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubber-like solids // Proc. Roy. Soc. London. A. 1972. V. 328. P. 576–583.
24. *Sharda S. C., Tschoegl N. W.* A strain energy density function for compressible rubber-like materials // Trans. Soc. Rheology. 1976. V. 20. P. 361–372.
25. *Acerbi E., Fusco N.* Semicontinuity problems in the calculus of variations // Arch. Rational Mech. Anal. 1984. V. 86. №2. P. 125–145.
26. *Дакоронья Б.* Слабая непрерывность и слабая полунепрерывность снизу нелинейных функционалов // УМН. 1989. Т. 44. №4 (268). С. 35–98.
27. *Van Hove L.* Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux integrales multiples a plusieurs fonctions inconnues // Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. 1947. V. 50. P. 18–23.

Северо-Западный заочный
политехнический институт,
Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
19.01.1995