Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Гришина, Об априорных оценках и гладкости решений эллиптической в смысле Дуглиса–Ниренберга системы квазилинейных уравнений, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 1, 17–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm98>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:57:39

УДК 517.956.2

Г. В. Гришина

**Об априорных оценках и гладкости решений
эллиптической в смысле Дуглиса–Ниренберга
системы квазилинейных уравнений**

Изучается эллиптическая по Дуглису–Ниренбергу система квазилинейных уравнений. Решается задача о предельно допустимом росте нелинейных членов системы относительно их аргументов, при котором возможно получение оценок производных решения через максимум его модуля. Условия на гладкость нелинейных членов минимальные. Результаты точны. Построен пример, показывающий неулучшаемость верхней границы для показателей роста. Априорные L_p -оценки решения установлены как внутри области, так и вплоть до границы, когда решение удовлетворяет нелинейным граничным условиям типа Лопатинского. Исследуется вопрос о гладкости внутри области решений, принадлежащих некоторым пространствам Соболева. Получены оценки норм Гёльдера производных решения. Доказана теорема об устранимой точечной особенности ограниченных решений общих эллиптических систем квазилинейных уравнений. Все результаты являются новыми и для одного уравнения второго порядка.

Библиография: 18 названий.

Введение

Работа посвящена изучению эллиптических по Дуглису–Ниренбергу систем квазилинейных дифференциальных уравнений. Устанавливаются оценки производных решения через максимум его модуля, и исследуется вопрос о гладкости решений.

Как известно, оценить производные решения через максимум его модуля можно лишь при некоторых ограничениях на рост нелинейных членов уравнения относительно производных неизвестного решения. Так С. Н. Бернштейн показал [1], что для обыкновенного дифференциального уравнения

$$y'' = f(x, y, y') \quad (0.1)$$

с непрерывной правой частью оценка производной решения через максимум его модуля

$$|y'| \leq C(M), \quad M = \max |y(x)|, \quad (0.2)$$

имеет место при выполнении условия

$$|f(x, y, p)| \leq Ap^2 + B, \quad (0.3)$$

где A, B – положительные постоянные, которые могут зависеть от $\max |y(x)|$. Показатель 2 в правой части (0.3) является точным. Аналогичный результат доказан для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка [1], [2].

Заметим, что для систем уравнений второго порядка вида (0.1) условие (0.3) не является достаточным для справедливости оценки (0.2). Действительно, функции $y_1 = \cos \lambda x$, $y_2 = \sin \lambda x$ – решения системы

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -y_1(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2), \\ \ddot{y}_2 = -y_2(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) \end{cases}$$

при любом $\lambda \in \mathbb{R}$, однако оценки вида (0.2) нет.

Оценкам производных решений эллиптических уравнений посвящено много работ. В монографии О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральной [3] изложены современные результаты для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. Уравнениям высшего порядка посвящена монография И. В. Скрышника [4].

Случай одного квазилинейного уравнения произвольного порядка

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x, u, Du, \dots, D^\alpha u) \quad (0.4)$$

подробно изучен С. И. Похожаевым [5] при выполнении неравенства

$$|f(x, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2m-1})| \leq b_0(x, \xi_0, \dots, \xi_l) + \sum_{k=l+1}^{2m-1} b_k(x, \xi_0, \dots, \xi_l) |\xi_k|^{\nu_k}, \quad (0.5)$$

с положительными функциями $b_0, b_{l+1}, \dots, b_{2m-1}$, удовлетворяющими условию Каратеодори и принадлежащими некоторым пространствам L_{p_k} , $k = 0, l+1, \dots, 2m-1$. В предельном случае, когда $l = 0$, и все $p_k = \infty$, условие (0.5) принимает вид

$$|f(x, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2m-1})| \leq C(x, \xi_0) \sum_{j=1}^{2m-1} (1 + |\xi_j|^{2m/j-\varepsilon}), \quad (0.6)$$

где $C(x, \xi_0)$ – ограниченная функция, удовлетворяющая условию Каратеодори, $\varepsilon > 0$. Для решений, которые удовлетворяют линейным граничным условиям на всей границе, им доказана L_p -оценка производных решения во всей области через максимум его модуля.

Ближкие вопросы рассматривались также С. А. Аракчеевым [6]. Для уравнения (0.4) при выполнении условия (0.6) И. В. Скрышник получил оценку младших производных решения в произвольной внутренней подобласти через максимум его модуля во всей области [4], [7].

В настоящей работе изучается система уравнений вида

$$\sum_{j=1}^N l_{ij}(x, D) u_j(x) = f_i(x, D^\gamma u_j(x))_{|\gamma| \leq s_i + t_j - 1, j=1, \dots, N}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (0.7)$$

где $l_{ij}(x, D)$ – линейные дифференциальные операторы в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Изучается вопрос о предельно допустимом росте правых частей относительно производных искомого решения, при котором можно получить априорные

оценки младших производных решения во внутренних подобластях Ω' области Ω через максимум его модуля во всей области Ω .

Для уравнения (0.4) это возможно, если f – измеримая по Борелю функция, и

$$|f(x, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2m-1})| \leq C(x, \xi_0) \left(1 + F \left(\sum_{k=1}^{2m-1} |\xi_k|^{2m/k} \right) \right),$$

где $C(x, \xi_0)$, $F(t)$ – ограниченные, измеримые по Борелю функции, и $F(t) = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Построен пример, показывающий, что $o(t)$ не может быть заменено на $O(t)$. Для решений системы (0.7) получены L_p -оценки производных решения как внутри области, так и вплоть до границы, а также внутренние оценки норм Гёльдера младших производных решения через максимум его модуля во всей области.

Предполагаем, что линейные дифференциальные операторы $l_{ij}(x, D)$, входящие в систему уравнений (0.7), имеют порядок не выше, чем $s_i + t_j$, где системы целых чисел $\{s_i\}_{i=1}^N$, $\{t_j\}_{j=1}^N$, таковы, что $s_i \leq 0$, $0 \leq t_j \leq t' = \max_j t_j$; $\sum_{i=1}^N (s_i + t_i) = 2m$. Причем считаем, что $l_{ij} \equiv 0$, если $s_i + t_j < 0$. Коэффициенты $a_{\beta}^{ij}(x)$, $|\beta| = 0, \dots, s_i + t_j$, – комплекснозначные функции. Пусть $l'_{ij}(x, D)$ – оператор, содержащий только члены порядка $s_i + t_j$ оператора $l_{ij}(x, D)$. Рассмотрим его характеристический многочлен $l'_{ij}(x, \xi)$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$ и предположим, что

$$L(x, \xi) = \det(l'_{ij}(x, \xi))$$

является многочленом порядка $2m$, и для любого действительного $\xi \in \mathbb{R}^n$ и для любой точки $x \in \bar{\Omega}$:

$$A^{-1}|\xi|^{2m} \leq |L(x, \xi)| \leq A|\xi|^{2m}, \quad A = \text{Const} > 0.$$

На части $\Gamma \in C^{t'}$ границы $\partial\Omega$ области Ω могут быть заданы краевые условия

$$\sum_{j=1}^N B_{hj}(x, D)u_j(x) = \varphi_h(x, D^{\sigma}u_j(x))|_{|\sigma| \leq r_h + t_j - 1, j=1, \dots, N}, \quad h = 1, \dots, m, \quad (0.8)$$

где $B_{hj}(x, D)$ – линейные дифференциальные операторы порядка не выше, чем $r_h + t_j$ с комплексными коэффициентами $b_{\tau}^{hj}(x)$, $|\tau| = 0, \dots, r_h + t_j$, $1 \leq j \leq N$, $1 \leq h \leq m$, где число r_h соответствует h -му граничному условию. При этом считаем, что $r_h \leq \max_i s_i - 1$ и $B_{ij} \equiv 0$ при $r_h + t_j < 0$. Предполагаем, что граничные операторы удовлетворяют условиям дополненности по отношению к системе (0.7) [8], [9].

В дальнейшем относительно правых частей в (0.7), (0.8) предполагаем следующее: для каждого $i = 1, \dots, N$ функция $f_i(x, \xi_0^j, \dots, \xi_{s_i+t_j-1}^j)_{j=1, \dots, N}$, где $\xi_k^j = \{\xi_{\beta}^j : |\beta| = k\}$, определенная на

$$\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N_1^1} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_{s_i+t_1-1}^1} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_1^N} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_{s_i+t_N-1}^N}$$

с соответствующими N_k^l со значениями в $\mathbb{R}$, является измеримой по Борелю, если $s_i = 0$, и имеет непрерывные производные до порядка $-s_i$, если $s_i < 0$. Аналогично, $\varphi_h(x, \xi_0^j, \dots, \xi_{r_h+t_j-1}^j)_{j=1, \dots, N}$, $h = 1, \dots, m$, – измеримые по Борелю функции, если $r_h = 0$, и имеют непрерывные производные до порядка $-r_h$, если $r_h < 0$.

Будем использовать следующие функциональные пространства:

$L_\infty(\Omega)$ – пространство измеримых на Ω функций с нормой

$$\|u; L_\infty(\Omega)\| = \operatorname{ess\,max}_{x \in \Omega} |u(x)|;$$

$W_p^k(\Omega)$ – пространство Соболева с нормой

$$\|u; W_p^k(\Omega)\| = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{1/p};$$

$W_p^{k-1/p}(\partial\Omega)$, $p > 1$, – пространство функций φ , определенных на границе $\partial\Omega$ и являющихся граничными значениями функций v , принадлежащих $W_p^k(\Omega)$ с нормой

$$\|\varphi; W_p^{k-1/p}(\partial\Omega)\| = \inf_v \|v; W_p^k(\Omega)\|,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $v(x)$ из $W_p^k(\Omega)$, равным φ на границе;

$C^{k, \delta}(\Omega)$, $\delta \in (0, 1)$, – пространство функций, непрерывно дифференцируемых в Ω до порядка k , производные порядка k которых удовлетворяют условию Гёльдера с показателем δ , с нормой

$$\|u; C^{k, \delta}(\Omega)\| = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| + \sum_{|\alpha| = k} \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\delta}.$$

Рассматриваются решения системы (0.7) $u_j \in W_p^{t_j}(\Omega, \operatorname{loc}) \cap L_\infty(\Omega)$, $j=1, \dots, N$. Доказано, что оценку $\|u_j; W_p^{t_j}(\Omega')\|$ через $\|u; L_\infty(\Omega)\|$ для любой строго внутренней подобласти Ω' области Ω можно получить, если выполнено условие

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{0 \leq |\alpha| \leq -s_i} |D_x^\alpha f_i(x, \xi_0^j(x), \dots, \xi_{s_i+t_j-1}^j(x))_{j=1, \dots, N}| \\ & \leq C(x, \xi_0^1, \dots, \xi_0^N) \left(1 + F \left(\sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{t_j-1} |\xi_k^j|^{t_j/k} \right) \right), \quad (0.9) \end{aligned}$$

где $C(x, \xi_0^1, \dots, \xi_0^N)$, $F(t)$ – ограниченные измеримые по Борелю функции, и $F(t) = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$. При аналогичных условиях на рост φ_h в (0.8) удастся получить априорную L_p -оценку решения вплоть до границы. Доказательство L_p -оценки усложняется по сравнению с доказательствами в статье [5], так как мы не требуем выполнения граничных условий на всей границе $\partial\Omega$.

Получены результаты, уточняющие теоремы И.В. Скрыпника о гладкости обобщенных решений. А именно, доказана принадлежность решений u_j

системы (0.7) с коэффициентами $a_{\beta}^{ij} \in C^{-s_i, \sigma}(\Omega)$, где $\sigma \in (0, 1)$, пространству $C^{t_j-1, \delta}(\Omega) \forall \delta \in (0, 1), j = 1, \dots, N$, и установлены оценки решения в норме $\|\cdot; C^{t_j-1, \delta}(\Omega')\|$ через $\|u; L_{\infty}(\Omega)\|$, если в условии (0.9) $F(t) = O(t^{1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, при $t \rightarrow +\infty$ или $pt_j > n$, и $F(t) = o(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Причем выполнение условия $pt_j > n$ влечет принадлежность решений u_j пространствам $C^{t_j-1, \delta}(\Omega, \text{loc})$, $j = 1, \dots, N$, даже если $F(t) = O(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Однако, как показывает построенный пример, оценку производных решения в этом случае установить нельзя.

Доказательства основаны на применении известных L_p -оценок для линейных уравнений [9] и интерполяционных неравенств Гальярдо–Ниренберга [10], [11].

Рассматривается также вопрос об устранимости точечной особенности ограниченных решений эллиптических систем квазилинейных уравнений. Эта проблема изучалась многими авторами. Наиболее точный результат был получен В. Г. Мазья [12] для одного квазилинейного эллиптического уравнения произвольного порядка в дивергентной форме. Мы рассматриваем, в отличие от В. Г. Мазья, эллиптическую систему квазилинейных уравнений не дивергентного вида и доказываем теорему о гладкости ограниченных решений из некоторых пространств Соболева вплоть до точечной особенности.

Автор благодарит В. А. Кондратьева за постановку задачи и полезные обсуждения.

§1. Интерполяционные неравенства

Этот параграф носит вспомогательный характер. Важную роль при доказательстве изложенных результатов будут играть интерполяционные неравенства Гальярдо–Ниренберга [10], [11] и некоторые следствия из них.

ЛЕММА 1.1 [10], [11]. Пусть G – область из $\mathbb{R}^n$, и функция v принадлежит пространству $L_q(D) \cap W_r^h(G)$, $1 \leq q, r \leq \infty$. Тогда для любого целого $0 \leq j < h$ функция $D_j v$ суммируема со степенью p , и справедливо неравенство

$$\|D^j v; L_p(G)\| \leq C_1 \|D^h v; L_r(G)\|^{\theta} \|v; L_q(G)\|^{1-\theta} + C_2 \|v; L_q(G)\|, \quad (1.1)$$

где p, θ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{h}{n} \right) + (1-\theta) \frac{1}{q}, \quad \frac{j}{h} \leq \theta < 1,$$

а C_1, C_2 – положительные постоянные, причем C_2 зависит от области G .

В дальнейшем через Σ_{ρ} будем обозначать шар или полушар радиуса ρ в пространстве $\mathbb{R}^n$, а через $\mathcal{F}_{\rho}$ – плоскую часть границы полушара Σ_{ρ} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $G = \Sigma_1$ и в неравенстве (1.1) постоянная $C_2(\Sigma_1) = K_1$. Тогда, если $G = \Sigma_{\rho}$, то

$$C_2(\Sigma_{\rho}) = K_1 \rho^{-n/q+n/p-j}, \quad C_1(\Sigma_{\rho}) = C_1(\Sigma_1).$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $q = r$, $\theta = j/h$. Тогда $p = q = r$, и, следовательно, для $D = \Sigma_\rho$ неравенство (1.1) принимает вид

$$\|D^j v; L_p(\Sigma_\rho)\| \leq C_1 \|D^h v; L_r(\Sigma_\rho)\|^{j/h} \|v; L_q(\Sigma_\rho)\|^{1-j/h} + K_1 \rho^{-j} \|v; L_q(\Sigma_\rho)\|. \quad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Через $W_p^h(\Sigma_R \cup \mathcal{F}_R, \text{loc})$, будем обозначать множество функций $v \in W_p^h(G)$ для любой области $G \subset \Sigma_R$ такой, что $\partial G \cap \{\partial \Sigma_R \setminus \mathcal{F}_R\} = \emptyset$.

Для функций $v \in W_p^j(\Sigma_R, \text{loc})$, если Σ_R — шар, и $v \in W_p^j(\Sigma_R \cup \mathcal{F}_R, \text{loc})$, если Σ_R — полушар, определим

$$\|D^j v\|_t = \sup_{0 < d < R} d^{j+t} \|D^j v; L_p(\Sigma_{R-d})\|, \quad (1.3)$$

где $t \geq 0$.

ЛЕММА 1.2. Пусть функция v принадлежит $W_p^h(\Sigma_R, \text{loc}) \cap L_p(\Sigma_R)$ или $W_p^h(\Sigma_R \cup \mathcal{F}_R, \text{loc}) \cap L_p(\Sigma_R)$. Тогда существует положительная постоянная K_0 , зависящая от h, n, p , такая, что для любого целого $0 \leq j < h$ выполнено неравенство

$$\|D^j v\|_t \leq K_0 R^{t(1-j/h)} \|D^h v\|_t^{j/h} \|v; L_p(\Sigma_R)\|^{1-j/h} + K_0 R^t \|v; L_p(\Sigma_R)\|. \quad (1.4)$$

СЛЕДСТВИЕ. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого целого $0 \leq j < h$ существует положительная постоянная K' , зависящая от h, n, p , такая, что справедливо неравенство

$$\|D^j v\|_t \leq K' \varepsilon \|D^h v\|_t + K' (1 + \varepsilon^{\frac{j/h}{j/h-1}}) R^t \|v; L_p(\Sigma_R)\|. \quad (1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.2. Зафиксируем $d \in (0, R)$, для которого

$$\|D^j v\|_t \leq 2d^{j+t} \|D^j v; L_p(\Sigma_{R-d})\|. \quad (1.6)$$

Покроем Σ_{R-d} конечным числом шаров или полушаров Ξ_i радиуса $d/2$ с центром в Σ_{R-d} , если Σ_{R-d} — шар или полушар, соответственно. Применим к функции v в Ξ_i неравенство (1.2) и возведем обе его части в степень p :

$$\int_{\Xi_i} |D^j v|^p dx \leq C_2 \left(\int_{\Xi_i} |D^h v|^p dx \right)^{j/h} \left(\int_{\Xi_i} |v|^p dx \right)^{1-j/h} + C_3 d^{-pj} \int_{\Xi_i} |v|^p dx.$$

Теперь проведем суммирование по i и воспользуемся неравенством Гёльдера в следующей форме

$$\sum_i A_i B_i \leq \left(\sum_i A_i^r \right)^{1/r} \left(\sum_i B_i^s \right)^{1/s}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1,$$

положив $1/r = j/h$, $1/s = 1 - j/h$,

$$A_i = \left(\int_{\Xi_i} |D^h v|^p dx \right)^{j/h}, \quad B_i = \left(\int_{\Xi_i} |v|^p dx \right)^{1-j/h}.$$

Получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma_{R-d}} |D^j v|^p dx \\ & \leq C_4 \left(\int_{\Sigma_{R-d/2}} |D^h v|^p dx \right)^{j/h} \left(\int_{\Sigma_{R-d/2}} |v|^p dx \right)^{1-j/h} + C_5 d^{-pj} \int_{\Sigma_{R-d/2}} |v|^p dx. \end{aligned}$$

Возведем обе части последнего неравенства в степень $1/p$ и применим неравенство $(\sum_k B_k^p)^{1/p} \leq \sum_k B_k$ для $B_k \geq 0$, $p \geq 0$. Умножая затем обе части на d^{t+j} , получим

$$\begin{aligned} & d^{t+j} \left(\int_{\Sigma_{R-d}} |D^j v|^p dx \right)^{1/p} \\ & \leq C_4^{1/p} d^{(h+t)j/h + (1-j/h)t} \left(\int_{\Sigma_{R-d/2}} |D^h v|^p dx \right)^{j/hp} \left(\int_{\Sigma_{R-d/2}} |v|^p dx \right)^{1/p(1-j/h)} \\ & \quad + C_5 d^t \left(\int_{\Sigma_{R-d/2}} |v|^p dx \right)^{1/p} \\ & \leq C_4^{1/p} R^{t(1-j/h)} \|D^h v\|_t^{j/h} \|v; L_p(\Sigma_R)\|^{1-j/h} + C_5 R^t \|v; L_p(\Sigma_R)\|. \end{aligned}$$

Постоянные C_4, C_5 зависят только от размерности пространства.

Отсюда, принимая во внимание (1.6), получим (1.4). Лемма доказана.

Оценки решений сформулированной задачи будут получены на основе известных L_p -оценок для линейных систем.

ТЕОРЕМА 1.1 [9, с. 78]. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^{t'}$. Тогда, если $u_j \in W_p^{tj}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $j = 1, \dots, N$, – решения задачи (0.7), (0.8) с коэффициентами $a_{\beta}^{ij}(x) \in C^{-s_i}(\Omega)$, $0 \leq |\beta| \leq s_i + t_j$, $b_{\tau}^{hj}(x) \in C^{-r_h}(\partial\Omega)$, $0 \leq |\tau| \leq r_h + t_j$, то существует постоянная $K > 0$, зависящая от n, N, p, t', Ω , постоянной эллиптичности A , модулей непрерывности старших коэффициентов в $l_{ij}(x, D)$ и чисел, ограничивающих модули остальных коэффициентов в $l_{ij}(x, D)$, $B_{hj}(x, D)$, такая, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \|u_j; W_p^{tj}(\Omega)\| & \leq K \left(\sum_{i=1}^N \left\| \sum_{k=1}^N l_{ik} u_k; W_p^{-s_i}(\Omega) \right\| \right. \\ & \quad \left. + \sum_{h=1}^m \left\| \sum_{k=1}^N B_{hk} u_k; W_p^{-r_h-1/p}(\partial\Omega) \right\| + \sum_{k=1}^N \|u_k; L_p(\Omega)\| \right). \quad (1.7) \end{aligned}$$

§ 2. L_p -оценки решений эллиптической системы квазилинейных уравнений

В этом параграфе будет найден точный порядок роста нелинейных операторов относительно производных решения, при котором можно установить L_p -оценки решений. Во всех теоремах этого параграфа предполагаем, что коэффициенты дифференциальных операторов, входящих в (0.7), (0.8), удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Докажем сначала внутреннюю оценку.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $u = (u_1, \dots, u_N)$ – решение системы (0.7) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u_j \in W_p^{t_j}(\Omega, \text{loc}) \cap L_\infty(\Omega)$, $\|u_j; L_\infty(\Omega)\| \leq M$, $j = 1, \dots, N$. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^N \sum_{0 \leq |\alpha| \leq -s_i} |D_x^\alpha f_i(x, \xi_0^j(x), \dots, \xi_{s_i+t_j-1}^j(x))_{j=1, \dots, N}| \leq C(x, \xi_0^1, \dots, \xi_0^N) \left(1 + F \left(\sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{t_j-1} |\xi_k^j|^{t_j/k} \right) \right), \quad (2.1)$$

где $C(x, \xi_0^1, \dots, \xi_0^N)$, $F(t)$ – ограниченные, измеримые по Борелю функции, причем

$$|C(x, \xi_0^1, \dots, \xi_0^N)| \leq C_M \quad (2.2)$$

при $x \in \Omega$, $|\xi_0^j| \leq M$, и

$$F(t) = o(t) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad |F(t)| \leq C_K \quad \text{при} \quad |t| \leq K. \quad (2.3)$$

Тогда для любой строго внутренней подобласти Ω' области Ω существует функция ψ , не зависящая от u , такая, что справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^N \|u_j; W_p^{t_j}(\Omega')\| \leq \psi(M). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если области Ω и Ω' заданы, то мы можем покрыть Ω' конечным числом шаров, содержащихся в Ω вместе со своими границами. Поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда Ω и Ω' – концентрические шары малых радиусов R и r , соответственно. Не ограничивая общности можно считать, что их центры совпадают с началом координат. В доказательстве C_k , $k = 1, 2, \dots$, обозначают константы, зависящие от тех же величин, что и постоянная K в теореме 1.1.

Рассмотрим в шаре Σ_R произвольную функцию $v = (v_1, \dots, v_N)$, имеющую компактный носитель в шаре $\Sigma_{R-\delta}$, $\delta > 0$, такую, что $v_j \in W_p^{t_j}(\Sigma_R)$, $j = 1, \dots, N$. Применяя к v теорему 1.1, получим оценку

$$\sum_{j=1}^N \|v_j; W_p^{t_j}(\Sigma_R)\| \leq C_0 \left(\sum_{i=1}^N \left\| \sum_{k=1}^N l_{ik} v_k; W_p^{-s_i}(\Sigma_R) \right\| + \sum_{k=1}^N \|v_k; L_p(\Sigma_R)\| \right). \quad (2.5)$$

Определим в пространстве функций $w \in W_p^k(\Sigma, \text{loc})$

$$\|D^k w\|_t = \sup_{0 < d < R} d^{k+t} \|w; W_p^k(\Sigma_{R-d})\|, \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

Заметим, что

$$\|D^k w\|_t \leq \|D^k w\|_t. \quad (2.7)$$

Допустим, что наибольшее значение величина $\|D^{t_j} u_j\|_{t'-t_j}$ принимает для $j = 1$. Пусть d такое, что $0 < d < R$ и

$$\|D^{t_1} u_1\|_{t'-t_1} \leq 2d^{t'} \|u_1; W_p^k(\Sigma_{R-d})\|. \quad (2.8)$$

Пусть функция $\xi(x) \in C_0^\infty(\Sigma_R)$, $|\xi(x)| \leq 1$, причем $\xi \equiv 1$ при $|x| < R - d$, $\xi \equiv 0$ при $|x| > R - d/2$, и

$$|D^k \xi| \leq C d^{-k}, \quad 0 \leq k \leq t',$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от k .

Положим $v_j = \xi u_j$, $j = 1, \dots, N$. Очевидно, $v_j \in W_p^{t_j}(\Sigma_R)$ и имеют компактный носитель в $\Sigma_{R-d/2}$. Поэтому для v справедлива оценка (2.5).

Из условия (2.3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $K_\varepsilon > 0$ такое, что $|F(t)/t| < \varepsilon$ при $|t| > K_\varepsilon$, и $|F(t)| \leq C_{K_\varepsilon}$ при $|t| \leq K_\varepsilon$. Обозначим

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & |t| \leq K_\varepsilon, \\ F(t), & |t| > K_\varepsilon. \end{cases}$$

Отсюда, пользуясь условиями (2.1), (2.2) и применяя неравенство Минковского

$$\left(\int \left(\sum_i a_i \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \sum_i \left(\int a_i^p dx \right)^{1/p}$$

для $a_i \geq 0$, $p > 1$, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k=1}^N l_{ik}(u_k \xi); W_p^{-s_i}(\Sigma_R) \right\| \\ & \leq C_M \left[(1 + C_{K_\varepsilon}) \omega_n R^n + \|F_\varepsilon; L_p(\Sigma_R)\| \right] \\ & \leq C_M \left[(1 + C_{K_\varepsilon}) \omega_n R^n + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} \|D^k(u_j \xi); L_{pt_j/k}(\Sigma_R)\|^{t_j/k} \right], \end{aligned}$$

ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Из интерполяционного неравенства (1.1) следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{t_j-1} \|D^k(u_j \xi); L_{pt_j/k}(\Sigma_R)\|^{t_j/k} \\ & \leq \sum_{k=1}^{t_j-1} (C_1 \|D^{t_j}(u_j \xi); L_p(\Sigma)\| \|u_j \xi; L_\infty(\Sigma_R)\|^{t_j/k-1} \\ & \quad + C_2 R^{n/p-t_j} \|u_j \xi; L_\infty(\Sigma_R)\|^{t_j/k}). \end{aligned}$$

Пользуясь интегральным неравенством Минковского, свойствами функции ξ и оп-
ределением $\|\cdot\|$ (1.3), получим

$$\begin{aligned} \|D^{t_j}(u_j\xi); L_p(\Sigma_R)\| &= \|D^{t_j}(u_j\xi); L_p(\Sigma_{R-d/2})\| \\ &\leq \|D^{t_j}u_j; L_p(\Sigma_{R-d/2})\| + C_3 \sum_{i=1}^{t_j} \|D^i\xi D^{t_j-i}u_j; L_p(\Sigma_{R-d/2})\|^{t_j/k} \\ &\leq \|D^{t_j}u_j; L_p(\Sigma_{R-d/2})\| + C_4 \sum_{i=1}^{t_j} d^{-i} \|D^{t_j-i}u_j; L_p(\Sigma_{R-d/2})\| \\ &\leq \left(\frac{d}{2}\right)^{-t'} \left(\|D^{t_j}u_j\|_{t'-t_j} + C_5 \sum_{i=1}^{t_j} \|D^{t_j-i}u_j\| \right). \end{aligned}$$

Из неравенства (1.5) с $\varepsilon = 1/2$ и оценки (2.7) следует, что

$$\|D^{t_j}(u_j\xi); L_p(\Sigma_R)\| \leq C_6 d^{-t'} (\|D^{t_j-i}u_j\| + M) \leq C_6 d^{-t'} (\|D^{t_1}u_1\| + M).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=1}^N l_{ik}(u_k\xi); W_p^{-s_i}(\Sigma_R) \right\| \\ &\leq C_M \left[(1 + C_{K_\varepsilon}) R^n \omega_n + \varepsilon C_7 d^{-t'} (\|D^{t_1}u_1\|_{t'-t_1} + M) \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} M^{t_j/k-1} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon C_2 \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} R^{n/p-t_j} M^{t_j/k} \right] \\ &\leq d^{t'} C_8 \left[\omega_n R^{n+t'} (1 + C_{K_\varepsilon}) + \varepsilon \|D^{t_1}u_1\|_{t'-t_1} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} M^{t_j/k-1} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} M^{t_j/k} + \varepsilon \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} R^{n/p-t_j+t'} M^{t_j/k-1} \right]. \end{aligned}$$

В силу выбора d , используя (2.5), имеем

$$\begin{aligned} &\|D^{t_1}u_1\|_{t'-t_1} \leq 2d^{t'} \|u_1; W_p^{t_1}(\Sigma_{R-d})\| \leq 2d^{t'} \|u_1; W_p^{t_1}(\Sigma_R)\| \\ &\leq 2C_9 \left[(1 + C_{K_\varepsilon}) R^{t'+n} \omega_n + \varepsilon \|D^{t_1}u_1\|_{t'-t_1} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} M^{t_j/k-1} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} M^{t_j/k} + \varepsilon \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} R^{n/p-t_j+t'} M^{t_j/k-1} + M \right]. \end{aligned}$$

Возьмем $\varepsilon = (4C_9 \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} M^{t_j/k-1})^{-1}$, тогда

$$\|D^{t_1}u_1\|_{t'-t_1} \leq \psi_0(M).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \|u_j; W_p^{t_j}(\Sigma_r)\| &\leq (R-r)^{-t'} \sum_{j=1}^N \tilde{\|} D^{t_j} u_j \|_{t'-t_j} \\ &\leq N(R-r)^{-t'} \tilde{\|} D^{t_1} u_1 \|_{t'-t_1} \\ &\leq N(R-r)^{-t'} \psi_0(M) = \psi(M). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следующий пример покажет, что условие $F(t) = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$ существенно, т.е. если $F(t) = O(t)$ при $t \rightarrow \infty$, то оценка (2.4) может не иметь места для ограниченных решений.

Действительно, функции $u_\lambda(x) = \sin \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, в интервале $|x| < 1$ удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$u^{(iv)} = u[(u')^4 + u^2(u'')^2 - 2u(u')^2 u''].$$

Правая часть не превосходит по модулю $(2|u| + |u|^2)(|u'|^4 + |u''|^2)$. Решения u_λ бесконечно дифференцируемы, и $|u_\lambda(x)| \leq 1$. Из теорем вложения Соболева следует, что, если справедлива оценка (2.4), то тогда можно оценить $|u'_\lambda(0)|$ некоторой постоянной, не зависящей от u_λ . Однако $|u'_\lambda(0)| = \lambda$ неограниченно растет при $\lambda \rightarrow \infty$.

Аналогично теореме 2.1 доказываются локальные L_p -оценки решения вблизи границы.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $u = (u_1, \dots, u_N)$ – решение системы (0.7), удовлетворяющее на части Γ границы $\partial\Omega$ области Ω условиям (0.8):

$$u_j \in W_p^{t_j}(\Omega, \text{loc}) \cap L_\infty(\Omega), \quad \|u_j; L_\infty(\Omega)\| \leq M, \quad j = 1, \dots, N.$$

Предположим, что выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{0 \leq |\alpha| \leq -s_i} |D_x^\alpha f_i| + \sum_{k=1}^m \sum_{0 \leq |\beta| \leq -r_h} |D_x^\beta \varphi_h| \\ \leq C(x, \xi_0^1, \dots, \xi_0^N) \left(1 + F \left(\sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{t_j-1} |\xi_k^j|^{t_j/k} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где функции $C(x, \xi_0^1, \dots, \xi_0^N)$, $F(t)$ такие же, как и в теореме 2.1. Тогда для любой подобласти Ω' области Ω такой, что $\overline{\partial\Omega'} \cap \partial\Omega \subset \Gamma$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^N \|u_j; W_p^{t_j}(\Omega')\| \leq \psi_1(M),$$

где ψ_1 – функция, не зависящая от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.1, то наметим лишь основные его этапы.

Заметим, что теорему достаточно доказать для случая, когда $\Omega = \Sigma_R$ — полушар радиуса R , $\Gamma = \mathcal{F}_R$, а $\Omega' = \Sigma_r$, где $r < R$. Переход к произвольной области производится стандартным методом [8], [9].

Рассмотрим функции $v_j \in W_p^{tj}(\Sigma_R)$, обращающиеся в нуль вне $\Sigma_{R-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Применим к $v = (v_1, \dots, v_N)$ теорему 1.1:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \|v_j; W_p^{tj}(\Sigma_R)\| &\leq C_1 \left(\sum_{i=1}^N \left\| \sum_{k=1}^N l_{ik} v_k; W_p^{-s_i}(\Sigma_R) \right\| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{h=1}^m \left\| \sum_{k=1}^N B_{hk} v_k; W_p^{-r_h-1/p}(\mathcal{F}_R) \right\| + \sum_{k=1}^N \|v_k; L_p(\Sigma_R)\| \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Определим в пространстве функций $w \in W_p^{tj}(\Sigma_R \cup \mathcal{F}_R, \text{loc})$

$$\|D^k w\|_t = \sup_{0 < d < R} d^{k+t} \|w; W_p^k(\Sigma_{R-d})\|, \quad t \geq 0.$$

Заметим, что

$$\|D^k w\|_t \leq \tilde{\|} D^k w \|_t.$$

Допустим, что наибольшее значение величина $\tilde{\|} D^{tj} u_j \|_{t'-t_j}$ принимает для $j = 1$. Пусть d такое, что $0 < d < R$ и

$$\tilde{\|} D^{t_1} u_1 \|_{t'-t_1} \leq 2d^{t'} \|u_1; W_p^k(\Sigma_{R-d})\|.$$

Положим $v_j = \xi u_j$, $j = 1, \dots, N$, где ξ — функция, определенная в теореме 2.1. Очевидно, для $v = (v_1, \dots, v_N)$ выполнена оценка (2.10). Заметим, что

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^N B_{hk} v_k; W_p^{-r_h-1/p}(\mathcal{F}_R) \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^N B_{hk}(u_k \xi); W_p^{-r_h-1/p}(\mathcal{F}_R) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^N B_{hk}(u_k \xi); W_p^{-r_h}(\Sigma_R) \right\|. \end{aligned}$$

Далее рассуждаем так же, как при доказательстве теоремы 2.1.

Непосредственно из теоремы 1.1 и интерполяционных неравенств Гальярдо–Ниренберга следует справедливость глобальной оценки решения вплоть до границы. А именно, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть функции $u_j \in W_p^{tj}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $j = 1, \dots, N$, удовлетворяют системе (0.7) в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ и краевым условиям (0.8) на границе $\partial\Omega$ класса $C^{t'}$. Предполагаем, что $\|u_j; L_\infty(\Omega)\| \leq M$ и выполнено условие (2.9) с функциями $C(x, \xi_0, \dots, \xi_N)$ и $F(t)$, определенными в теореме 2.1. Тогда существует функция ψ_2 , не зависящая от u , такая, что справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^N \|u_j; W_p^{tj}(\Omega)\| \leq \psi_2(M).$$

§ 3. О гладкости решений внутри области

При некоторых ограничениях на гладкость коэффициентов в уравнениях на соотношения между числами t_j , p , n в зависимости от характера роста f_i относительно производных решения получим результаты о повышении гладкости решений внутри области. В ходе доказательств теорем этого параграфа будет использоваться следующая лемма об интегралах типа потенциала.

ЛЕММА 3.1 [13]. Пусть функция φ от n переменных с носителем в шаре Σ_1 принадлежит L_p , $1 < p < \infty$; рассмотрим функцию

$$g(x) = \int \frac{\varphi(y)}{|x-y|^\lambda} dy, \quad \lambda < n;$$

положим $a = n - \lambda - n/p$.

Тогда:

1. если $a < 0$, $1/q = -a/n$, то

$$\|g; L_q(\Sigma_1)\| \leq \text{Const} \|\varphi; L_p(\Sigma_1)\|;$$

2. если $a = 0$, то

$$\|g; L_q(\Sigma_1)\| \leq \text{Const} \|\varphi; L_p(\Sigma_1)\|$$

при любом конечном $q > 0$;

3. если $a > 0$ и a — не целое число, то

$$\|g; C^{[a], a-[a]}(\Sigma_1)\| \leq \text{Const} \|\varphi; L_p(\Sigma_1)\|;$$

4. если $a > 0$ — целое число, то

$$\|g; C^{a-1, b}(\Sigma_1)\| \leq \text{Const} \|\varphi; L_p(\Sigma_1)\|$$

для любого $0 \leq b < 1$.

Здесь постоянные зависят только от n , λ , p , q , b .

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть функции $u_1, \dots, u_N$ удовлетворяют в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ системе (0.1) с коэффициентами $a_{\beta}^{ij} \in C^{-s_i, \sigma}(\Omega)$, $|\beta| = 0, \dots, s_i + t_j$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq N$, где $\sigma \in (0, 1)$. Предположим, что $u_j \in W_p^{t_j}(\Omega, \text{loc}) \cap L_\infty(\Omega)$, $\|u_j; L_\infty(\Omega)\| \leq M$, $j = 1, \dots, N$, и выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{0 \leq |\alpha| \leq -s_i} |D_x^\alpha f_i(x, \xi_0^j(x), \dots, \xi_N^j(x))| \\ & \leq C(x, \xi_0^j, \dots, \xi_N^j) \left(1 + \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{k_j-1} |\xi_k^j|^{t_j/k(1-\varepsilon)} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $C(x, \xi_0^1, \dots, \xi_N^1)$ — ограниченная, измеримая по Борелю функция, такая, что

$$|C(x, \xi_0^1, \dots, \xi_N^1)| \leq C_M$$

при $x \in \Omega$, $|\xi_0^j| \leq M$.

Тогда в каждой строго внутренней подобласти Ω' области Ω ($\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$), $u_j \in C^{t_j-1,\delta}(\Omega')$, где δ – любое число из интервала $(0, 1)$, причем справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^N \|u_j; C^{t_j-1,\delta}(\Omega')\| \leq \psi(M), \quad (3.2)$$

где функция ψ не зависит от u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как все рассмотрения локальные, то можно считать, что область Ω содержится в единичном шаре Σ_1 . Не ограничивая общности предположим, что операторы $l_{ij}(x, D)$ в системе (0.1) содержат только члены порядка $s_i + t_j$. Пусть $L(x, D)$ – линейный дифференциальный оператор порядка $2m$, содержащий только старшие члены, соответствующий многочлену

$$L(x, \xi) = \det(l_{ij}(x, \xi)).$$

Для любой фиксированной точки $x_0 \in \Omega$ пусть $\Gamma(x_0, x - y)$ – фундаментальное решение оператора $L(x, D)$, коэффициенты которого взяты в точке x_0 . Известно [14], что справедливы следующие неравенства:

$$|D_x^s \Gamma(x - y)| \leq \text{Const} |x - y|^{2m-n-s} \quad (3.3)$$

в случаях: 1) $s \geq 0$ и n либо четно и больше $2m$, либо нечетно; 2) $s > 2m - n$, $n \leq 2m$ и четно. Если $n \leq 2m$ четно и $0 \leq s \leq 2m - n$, то

$$|D_x^s \Gamma(x - y)| \leq \text{Const} |x - y|^{2m-n-s} (1 + \log |x - y|). \quad (3.4)$$

Константы в (3.3), (3.4) зависят только от s, m, n , постоянной эллиптичности A .

Для функций v_j , $j = 1, \dots, N$, с компактными носителями в Ω , имеющих обобщенные производные до порядка t_j включительно, интегрируемые со степенью $p > 1$, справедливо представление [9]

$$\begin{aligned} v_j &= \int_{\Omega} \Gamma(x_0, x - y) \sum_{i=1}^N L^{ji}(x_0) \sum_{k=1}^N l_{ik}(x_0) v_k(y) dy \\ &= \int_{\Omega} \Gamma(x_0, x - y) \sum_{i=1}^N L^{ji}(x_0) \sum_{k=1}^N (l_{ik}(x_0) - l_{ik}(y)) v_k(y) dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \Gamma(x_0, x - y) \sum_{i=1}^N L^{ji}(x_0) \sum_{k=1}^N l_{ik}(y) v_k(y) dy. \end{aligned}$$

Здесь $L^{ji}(x) = L^{ji}(x, D)$ – оператор порядка $2m - s_i - t_j$ такой, что

$$\sum_{j=1}^N l_{kj} L^{ji} = \delta_i^k L,$$

где δ_i^k – символ Кронекера.

Для каждой внутренней подобласти Ω' области Ω определим неотрицательную функцию ξ с компактным носителем в Ω , бесконечно гладкую и тождественно равную 1 в Ω' . Положим $v_j = \xi u_j$, $j = 1, \dots, N$. Тогда

$$\begin{aligned} D^s(\xi(x)u_j(x)) &= \int_{\Omega} D_x^{2m-t_j+s} \Gamma(x_0, x-y) \sum_{i=1}^N b_i(x_0) D^{-s_i} \sum_{k=1}^N l_{ik}(y) (\xi(y)u_k(y)) dy \\ &+ \int_{\Omega} D_x^{2m-t_j+s} \Gamma(x_0, x-y) \sum_{i=1}^N b_i(x_0) D^{-s_i} \sum_{k=1}^N (l_{ik}(x_0) - l_{ik}(y)) (\xi(y)u_k(y)) dy \\ &+ C_{sj}(x_0) \sum_{i=1}^N b_i(x_0) D^{-s_i} \sum_{k=1}^N l_{ik}(x_0) (\xi(x)u_k(x)), \end{aligned}$$

где b_i обозначают известные функции класса $C^{0,\sigma}(\Omega')$, C_{sj} — постоянная, равная нулю при $s < t_j$, $j = 1, \dots, N$, и при $s = t_j$ интегралы берутся в смысле главного значения по Коши. Положим теперь $x_0 = x \in \Omega'$, тогда при $0 \leq s \leq t_j$

$$\begin{aligned} D^s u_j(x) &= \int_{\Omega} D_x^{2m-t_j+s} \Gamma(x, x-y) \sum_{i=1}^N b_i(x) D^{-s_i} \sum_{k=1}^N l_{ik}(y) (\xi(y)u_k(y)) dy \\ &+ \int_{\Omega} D_x^{2m-t_j+s} \Gamma(x, x-y) \sum_{i=1}^N b_i(x) D^{-s_i} \sum_{k=1}^N (l_{ik}(x) - l_{ik}(y)) (\xi(y)u_k(y)) dy \\ &+ C_{sj}(x) \sum_{i=1}^N b_i(x) D^{-s_i} \sum_{k=1}^N l_{ik}(x) u_k(x), \end{aligned}$$

где в выражения $D_x^{2m-t_j+s} \Gamma(x, x-y)$ входят дифференцирования только по второму аргументу. Запишем последнее равенство в виде:

$$D^s u_j(x) = J_{1,s}^j(x) + J_{2,s}^j(x) + J_{3,s}^j(x),$$

где

$$\begin{aligned} J_{1,s}^j(x) &= \int_{\Omega} D_x^{2m-t_j+s} \Gamma(x, x-y) \\ &\times \sum_{i=1}^N b_i(x) \xi(y) D^{-s_i} f_i(y, D^{\gamma} u_j(y)) dy \\ &+ C_{sj}(x) \sum_{i=1}^N b_i(x) D^{-s_i} f_i(x, D^{\gamma} u_j(x)), \\ J_{2,s}^j(x) &= \int_{\Omega} D_x^{2m-t_j+s} \Gamma(x, x-y) \\ &\times \sum_{i,k=1}^N b_i(x) \sum_{\substack{|\beta|+|\gamma| \leq t_k \\ |\gamma| < t_k}} C_{\beta\gamma}(y) D^{\gamma} u_k(y) D^{\beta} \xi(y) dy, \\ J_{3,s}^j(x) &= \int_{\Omega} D_x^{2m-t_j+s} \Gamma(x, x-y) \\ &\times \sum_{i,k=1}^N b_i(x) \sum_{|\beta|=t_k} (a_{\beta}^{ik}(x) - a_{\beta}^{ik}(y)) D^{\beta} (\xi(y)u_k(y)) dy, \end{aligned}$$

a_{β}^{ik} обозначают коэффициенты в операторах $l_{ik}(x, D)$. Так как $a_{\beta}^{ik} \in C^{-s_i, \sigma}$ и $-s_i \geq 0$, то

$$|a_{\beta}^{ik}(x) - a_{\beta}^{ik}(y)| \leq \text{Const } |x - y|^{\sigma}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Учитывая (3.3), (3.4), имеем оценку

$$|J_{3,s}^j(x)| \leq \text{Const} \int_{\Omega} \frac{1}{|x - y|^{n-\sigma}} \sum_{k=1}^N \sum_{|\beta|=t_k} |D^{\beta}(\xi(y)u_k(y))| dy. \quad (3.5)$$

Непосредственно из теорем вложения Соболева следует:

- 1) если $p \geq n$, то $u_j \in W_q^{t_j-1}(\Omega, \text{loc})$ для любого $q > 1$, и выполнены неравенства

$$\|u_j; W_q^{t_j-1}(\Omega')\| \leq \text{Const} \|u_j; W_p^{t_j-1}(\Omega'')\|$$

для любой $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega'' \subset \Omega$;

- 2) если $p < n$, то $u_j \in W_{p_0}^{t_j-1}(\Omega, \text{loc})$, где $p_0 = (1/p - 1/n)^{-1}$, и выполнены неравенства

$$\|u_j; W_{p_0}^{t_j-1}(\Omega')\| \leq \text{Const} \|u_j; W_p^{t_j-1}(\Omega'')\|$$

для любой $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega'' \subset \Omega$.

Заметим, что постоянные в этих неравенствах зависят от области Ω'' , но не зависят от функций u_j .

Рассмотрим производные $D^{t_j}u_j$, $j = 1, \dots, N$, в случае $p = n$. Учитывая условие (3.1) и оценки (3.3), (3.4), мы найдем по теореме Зигмунда–Кальдерона [15], что $J_{1,t_j}^j \in L_q(\Omega, \text{loc})$, $J_{2,t_j}^j \in L_q(\Omega, \text{loc})$ для любого конечного $q > 0$. Принимая во внимание (3.5), по лемме 3.1 имеем, что $J_{3,t_j}^j \in L_{q_1}(\Omega, \text{loc})$ при $1/q_1 = 1/p - \sigma/n$.

Таким образом, $u_j \in W_{q_1}^{t_j}(\Omega, \text{loc})$, $q_1 > p = n$. Далее получим, что $u_j \in W_{q_2}^{t_j}(\Omega, \text{loc})$, где

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{\sigma}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2\sigma}{n},$$

и т. д., $u_j \in W_{q_k}^{t_j}(\Omega, \text{loc})$, где $1/q_k = -a_k/n = 1/p - k\sigma/n$, и, следовательно, через конечное число шагов придем к $a_k \geq 0$. Тогда из леммы 3.1 будем иметь, что $u_j \in W_q^{t_j}(\Omega)$ для любого конечного $q > 0$, откуда, применяя теорему вложения Соболева и затем теорему 2.1, получим, что $u_j \in C^{t_j-1, \delta}(\Omega, \text{loc})$ для любого $\delta \in (0, 1)$ и выполнена оценка (3.2).

Очевидно, доказанное утверждение имеет место и для $p > n$.

Вернемся к случаю $p < n$. Докажем, что $u_j \in W_{p_1}^{t_j}(\Omega, \text{loc})$ с некоторым $p_1 > p$. Из теорем вложения следует, что $u_j \in W_{p_0}^{t_j-1}(\Omega, \text{loc})$. Пользуясь оценками (3.3), (3.4), получим, что $J_{3,t_j}^j \in L_{p'_0}(\Omega, \text{loc})$, $p'_0 = (1/p - \sigma/n)^{-1}$ по лемме 3.1, а $J_{2,t_j}^j \in L_{p_0}(\Omega, \text{loc})$ по теореме Зигмунда–Кальдерона. Из условия (3.1) и интерполяционного неравенства (1.1) мы найдем согласно теореме Зигмунда–Кальдерона,

что $J_{1,t_j}^j \in L_{q_0}(\Omega, \text{loc})$, где $q_0 = p/(1 - \varepsilon)$. Итак, $u_j \in W_{p_1}^{t_j}(\Omega, \text{loc})$, $p_1 > p$, где $p_1 = \min(q_0, p_0, p'_0)$, причем

$$\|u_j; W_{p_1}^{t_j}(\Omega')\| \leq \text{Const} \sum_k \|u_k; W_p^{t_k}(\Omega'')\|.$$

Если $p_1 > n$, то все доказано. В противном случае придем к этому за конечное число шагов. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Одновременно мы доказали, что $u_j \in W_q^{t_j}(\Omega, \text{loc})$ для любого конечного $q > 1$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть функции $u_1, \dots, u_N$ удовлетворяют в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ системе (0.7) с коэффициентами $a_{\beta}^{ij} \in C^{-s_i, \sigma}(\Omega)$, $|\beta| = 0, \dots, s_i + t_j$, $i, j = 1, \dots, N$, где $\sigma \in (0, 1)$. Предположим, что $u_j \in W_p^{t_j}(\Omega, \text{loc}) \cap L_{\infty}(\Omega)$, $\|u_j; L_{\infty}(\Omega)\| \leq M$, $t_j p > n$, $j = 1, \dots, N$. Предположим, что выполнены условия (2.1), (2.2), (2.3). Тогда $u_j \in C^{t_j-1, \delta}(\Omega, \text{loc})$, и для любой внутренней подобласти Ω' ($\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$) справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^N \|u_j; C^{t_j-1, \delta}(\Omega')\| \leq \psi_4(M),$$

где функция ψ_4 не зависит от u , δ — любое число из интервала $(0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отличие от доказательства предыдущей теоремы состоит только в несколько ином применении интерполяционного неравенства Гальярдо–Ниренберга (1.1).

Итак, пусть доказано, что $u_j \in W_{p_0}^{t_j-1}(\Omega, \text{loc})$, $j = 1, \dots, N$. Воспользуемся условиями (2.1), (2.2), (2.3). Легко видеть, что для доказательства теоремы достаточно показать принадлежность функций $|D^k u_j|^{t_j/k}$ пространству $L_{q_j}(\Omega, \text{loc})$ с $q_j > p$ при $k = 1, \dots, t_j - 1$. Из леммы 1.1 следует, что для $0 < k < t_j - 1$

$$\|D^k u_j; L_{q_j t_j/k}(\Omega')\| \leq C_1 \|D^{t_j-1} u_j; L_{p_0}(\Omega')\|^{k/(t_j-1)} M^{1-k/(t_j-1)} + C_2 M,$$

где

$$q_j = \frac{t_j - 1}{t_j} p_0.$$

Получаем, что $u_j \in W_{q_j}^{t_j}(\Omega, \text{loc})$ с показателем $q_j > p$, поскольку $t_j p > n$. Итак, $u_j \in W_{p_1}^{t_j}(\Omega, \text{loc})$, где

$$p_1 = \min_j \frac{t_j - 1}{t_j} p_0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Если в условии теоремы потребовать, чтобы выполнялось условие $F(t) = O(t)$ при $t \rightarrow \infty$, то можно утверждать, что $u_j \in C^{t_j-1, \delta}(\Omega')$. Однако, как показывает пример, приведенный в § 2, нельзя оценить $\|u_j; C^{t_j-1, \delta}(\Omega')\|$ через известные величины.

§4. Теорема об устранимой особенности

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, точка $\theta \in \Omega$. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что точка θ совпадает с началом координат. Будем использовать функциональное пространство $\mathring{H}_a^k(\Omega)$ – пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u; \mathring{H}_a^k(\Omega)\| = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} r^{2(a+|\alpha|-k)} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2},$$

где r – расстояние от $x = (x_1, \dots, x_n)$ до точки θ .

В области $\Omega \setminus \{\theta\}$ рассмотрим эллиптическую систему дифференциальных уравнений

$$\sum_{j=1}^N l_{hj}(x, D)u_j(x) = g_h(x), \quad h = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

с коэффициентами $a_\beta^{hj}(x) \in C^{0,\sigma}(\Omega)$, $\sigma \in (0, 1)$. Не ограничивая общности, можно считать, что операторы l_{hj} порядка t_j содержат только старшие члены, $t_j > 0$, $\max_j t_j = t'$, $\sum_{j=1}^N t_j = 2m$.

Будем также рассматривать систему с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^N l_{hj}(0, D)u_j(x) = g_h(x), \quad h = 1, \dots, N. \quad (4.2)$$

Пусть $(r, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ – полярные координаты, где $r = |x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$, $\omega_i = \omega_i(y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n-1$, $y_i = x_i/r$, $0 < r < \infty$, $\omega_i \in C^\infty(S_1^{n-1})$, S_1^{n-1} – $(n-1)$ -мерная сфера радиуса 1.

В полярных координатах система (4.2) запишется в форме

$$\sum_{j=1}^N r^{-t_j} \mathcal{L}_{hj}(\omega, rD_r, D_\omega)u_j(r, \omega) = g_h(r, \omega), \quad h = 1, \dots, N.$$

Введем оператор с комплексным параметром λ на сфере S_1^{n-1}

$$\mathcal{L}(\lambda) = (\mathcal{L}_{hj}(\omega, i(\lambda - it_j), D_\omega))_{h,j=1}^N.$$

Оператор $\mathcal{L}(\lambda)$ действует из пространства $\prod_{j=1}^N W_2^{t_j}(S_1^{n-1})$ в пространство $\prod_{h=1}^N L_2(S_1^{n-1})$. Рассмотрим обратный к нему оператор $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$, действующий из $\prod_{h=1}^N L_2(S_1^{n-1})$ в $\prod_{j=1}^N W_2^{t_j}(S_1^{n-1})$ и являющийся конечно-мероморфной функцией λ [16].

Будем использовать известную теорему об асимптотике решения системы (4.1) [17], [18] в следующей форме.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $u = (u_1, \dots, u_N)$ – решение системы (4.1) в $\Omega \setminus \{\theta\}$, причем $u \in \mathring{H}_a^{t'}(\Omega) = \prod_{j=1}^N \mathring{H}_a^{t_j}(\Omega)$, $g \in \mathring{H}_{a_1}^0(\Omega) = \prod_{h=1}^N \mathring{H}_{a_1}^0(\Omega)$, $\sigma > a - a_1 > 0$,

и пусть прямые $\operatorname{Im} \lambda = a + n/2 = b$ и $\operatorname{Im} \lambda = a_1 + n/2 = b_1$ не содержат полюсов оператор-функции $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$. Тогда

$$u_j(r, \omega) = \sum_{\mu=1}^K \sum_{q=0}^{p_\mu-1} r^{t_j+i\lambda_\mu} (\log r)^q \psi_{\mu,q,j}(\omega) + w_j(r, \omega), \quad 1 \leq j \leq N,$$

где λ_μ , $\mu = 1, \dots, K$, – собственные числа оператора $\mathcal{L}(\lambda)$, лежащие в полосе $b < \operatorname{Im} \lambda < b_1$, p_μ – кратность собственного числа λ_μ ; $\psi_{\mu,q,j}(\omega)$ – бесконечно-дифференцируемые функции; $w(r, \omega) = (w_1, \dots, w_N)$ – функция из пространства $\mathring{H}_{a_1}^{\vec{t}}(\Omega)$. Вектор-функция

$$v(r, \omega) = \sum_{\mu=1}^K \sum_{q=0}^{p_\mu-1} r^{\vec{t}+i\lambda_\mu} (\log r)^q \psi_{\mu,q,j}(\omega)$$

является решением однородной системы (4.2) в $\Omega \setminus \{\emptyset\}$.

Используя явный вид фундаментального решения для эллиптического оператора, покажем, что полюсы функции $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$ располагаются на мнимой оси $\operatorname{Re} \lambda = 0$ в целочисленных точках.

Как и ранее, обозначим

$$L(0, \xi) = \det(l_{hj}(0, \xi)).$$

Пусть $\Gamma(x)$ – фундаментальное решение оператора $L(0, D)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^N l_{hj} L_{hj} \Gamma(x) = \delta(x), \quad (4.3)$$

где L_{hj} – алгебраическое дополнение к l_{hj} в матрице $(l_{hj})_{h,j=1}^N$. Пусть λ_0 – полюс оператора $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$ кратности p_0 . Так как $v(r, \omega)$ – решение однородной системы (4.2) в $\Omega \setminus \{\emptyset\}$, то пользуясь теоремой о представлении функционала, сосредоточенного в точке, получим, принимая во внимание (4.3),

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N l_{hj} \sum_{q=0}^{p_0-1} r^{t_j+i\lambda_0} (\log r)^q \psi_{0,q,j}(\omega) &= \sum_{|\beta| \leq k} C_\beta D^\beta \delta(x) \\ &= \sum_{j=1}^N l_{hj} \left[\sum_{|\beta| \leq k} C_\beta D^\beta (L_{hj} \Gamma(x)) + \tilde{w}_j(x) \right], \end{aligned}$$

где $\tilde{w}(x) = (\tilde{w}_1(x), \dots, \tilde{w}_N(x))$ – гладкое решение. Следовательно,

$$\sum_{q=0}^{p_0-1} r^{t_j+i\lambda_0} (\log r)^q \psi_{0,q,j}(\omega) = \sum_{|\beta| \leq k} C_\beta D^\beta (L_{hj} \Gamma(x)) + \sum_{\gamma \geq 0} d_\gamma r^\gamma. \quad (4.4)$$

Фундаментальное решение $\Gamma(x)$ представимо в виде [14]

$$\Gamma(x) = \varphi(\omega)(r^{2m-n} + Q(r) \log r),$$

где $Q(r)$ – многочлен степени $2m - n$, если $2m \geq n$ и n – четно, и $Q \equiv 0$, если $2m < n$ или n – нечетно, а функция $\psi(\omega) \in C^\infty(S_1^{n-1})$. Отсюда и из (4.4) получим, что λ_0 может находиться только на мнимой оси $\operatorname{Re} \lambda = 0$ в точке с целочисленной координатой и иметь кратность 1 или 2.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть вектор-функция $u = (u_1, \dots, u_N)$ с компонентами $u_j \in W_p^{t_j}(\Omega \setminus \{\mathcal{O}\}, \text{loc}) \cap L_\infty(\Omega)$ – решение эллиптической системы уравнений

$$\sum_{j=1}^N l_{hj}(x, D)u_j(x) = f_h(x, D^\gamma u_j(x))_{|\gamma| \leq s_h + t_j - 1, j=1, \dots, N}, \quad h = 1, \dots, N, \quad (4.5)$$

в области $\Omega \setminus \{\mathcal{O}\}$. Предположим, что операторы l_{hj} порядка t_j с коэффициентами из $C^{0, \sigma}(\Omega)$, $\sigma \in (0, 1)$, содержат только старшие члены, и выполнено условие

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^N |f_h(x, \xi_0^j, \dots, \xi_{t_j-1}^j)_{j=1, \dots, N}| \\ \leq C(x, \xi_0^1, \dots, \xi_0^N) \left(1 + \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{t_j-1} |\xi_k^j|^{t_j(1-\varepsilon)/k} \right), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, f_h и C измеримы по Борелю функции, $|C(x, \xi)| \leq C_M$, если $|\xi| \leq M$. Тогда, если $n \geq t'$, то $u_j \in W_q^{t_j}(\Omega, \text{loc})$ для любого конечного $q > 1$, и, следовательно, $u_j \in C^{t_j-1, \delta}(\Omega)$, $j = 1, \dots, N$, для любого δ из интервала $(0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала, воспользовавшись результатом теоремы 2.1, покажем, что $u \in \overset{\circ}{H}_a^{\vec{t}}(\Omega)$ с показателем $a > t' - n/2$.

Не ограничивая общности предположим, что область Ω содержит шар радиуса 2 с центром в точке $\mathcal{O}$. Рассмотрим концентрические шаровые слои $G_\lambda = \{\lambda/2 < |x| < \lambda\}$. Из теоремы 3.1 и замечания 3.1 следует:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_{G_1} \sum_{|\alpha|=1}^{t_j} |D^\alpha u_j(x)|^2 dx \leq \psi \left(\max_{G_{1/2} \cup G_1 \cup G_2} |u_j(x)| \right) \leq \psi(M), \\ M = \|u; L_\infty(\Omega)\|. \end{aligned}$$

Здесь функция ψ не зависит от областей $G_{1/2} \cup G_1 \cup G_2$, G_1 . Перейдем теперь от G_1 к произвольному слою G_λ , $\lambda < 1$. Сделаем преобразование координат $x = \lambda y$. При этом области $G_{\lambda/2}$, G_λ , $G_{2\lambda}$ перейдут, соответственно, в $G_{1/2}$, G_1 , G_2 . Система (4.5) преобразуется следующим образом

$$\sum_{j=1}^N \sum_{|\alpha_{hj}|=t_j} a'_{\alpha_{hj}}(y) \lambda^{-t_j} D^{\alpha_{hj}} u'_j(y) = g_h(y, u'_j, \dots, D^{t_j-1} u'_j)_{j=1, \dots, N}, \quad h = 1, \dots, N,$$

где $u'_j(y) = u_j(\lambda y)$, $a'_{\alpha_{hj}}(y) = a_{\alpha_{hj}}(\lambda y)$,

$$g_h(y, u'_j, \dots, D^{t_j-1} u'_j) = f_h(\lambda y, u'_j, \dots, \lambda^{-(t_j-1)} D^{t_j-1} u'_j).$$

Умножим обе части уравнений на λ^{2m} :

$$\sum_{j=1}^N \sum_{|\alpha_{hj}|=t_j} a'_{\alpha_{hj}}(y) \lambda^{2m-t_j} D^{\alpha_{hj}} u'_j(y) = \lambda^{2m} g_h(y, u'_1, \dots, D^{t_j-1} u'_j)_{j=1, \dots, N},$$

$$h = 1, \dots, N.$$

Заметим, что соответствующий последней системе характеристический многочлен

$$L_1(y, \xi) = \det(\lambda^{2m-t_j} l_{hj}(y, \xi))$$

совпадает в соответствующих точках с характеристическим многочленом $L(x, \xi)$. Принимая во внимание, что $\lambda < 1$, из условия (4.6) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^N |\lambda^{2m} g_h(y, D^\gamma u'_j(y))| &= \sum_{h=1}^N |\lambda^{2m} f_h(\lambda y, \lambda^{-|\gamma|} D^\gamma u'_j(y))| \\ &\leq \lambda^{2m} \sum_{h=1}^N |f_h(x, D^\gamma u_j(x))| \\ &\leq \lambda^{2m} C(x, u) \left(1 + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} |D_x^k u_j|^{t_j(1-\varepsilon)/k} \right) \\ &= \lambda^{2m} C(\lambda y, u'(y)) \left(1 + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} \lambda^{-t_j(1-\varepsilon)} |D_y^k u'_j(y)|^{t_j(1-\varepsilon)/k} \right) \\ &\leq C(\lambda y, u'(y)) \left(1 + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{t_j-1} |D_y^k u'_j(y)|^{t_j(1-\varepsilon)/k} \right). \end{aligned}$$

Получили оценку (4.6) для функции $\lambda^{2m} g(y, u'_1, \dots, D^\gamma u'_j)$. Таким образом, в новых координатах (y) справедлива оценка

$$\|u'_j; W_2^{t_j}(G_1)\|^2 \leq \psi(M), \quad 1 \leq j \leq N.$$

Вернемся к координатам (x) и умножим обе части неравенств, соответственно, на $\lambda^{2(a-t_j+n/2)}$

$$\int_{G_\lambda} \sum_{|\alpha| \leq t_j} \lambda^{2(a+|\alpha|-t_j)} |D^\alpha u_j(x)|^2 dx \leq \psi(M) \lambda^{2(a-t_j+n/2)}.$$

Уменьшим λ в левой части

$$\int_{G_\lambda} \sum_{|\alpha| \leq t_j} r^{2(a+|\alpha|-t_j)} |D^\alpha u_j(x)|^2 dx \leq C_1 \psi(M) \lambda^{2(a-t_j+n/2)}.$$

Положим $\lambda = 2^{-k}$ и просуммируем последнее неравенство по $0 \leq k \leq \infty$. Таким образом,

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq t_j} r^{2(a+|\alpha|-t_j)} |D^\alpha u_j(x)|^2 dx < \infty$$

при $a > t_j - n/2$. Последнее условие выполнено для всех j при $a > t' - n/2$, где $t' = \max_j t_j$.

Аналогично докажем, что $f \in \mathring{H}_{a_1}^0$, $a_1 > t'(1 - \varepsilon) - n/2$. Действительно,

$$\int_{G_1} |D^k u_j|^{2t_j(1-\varepsilon)/k} dx \leq \psi_1(M).$$

Рассуждая тем же способом, что и выше, получим

$$\int_{G_\lambda} \lambda^{2t_j(1-\varepsilon)/k-n} |D^k u_j|^{2t_j(1-\varepsilon)/k} dx \leq \psi_1(M).$$

Умножим обе части этого неравенства на $\lambda^{2(a_1 - t_j(1-\varepsilon) + n/2)}$ и уменьшим λ в левой части

$$\int_{G_\lambda} r^{2a_1} |D^k u_j|^{2t_j(1-\varepsilon)/k} dx \leq C_2 \psi_1(M) \lambda^{2(a_1 - t_j(1-\varepsilon) + n/2)}.$$

Положив $\lambda = 2^{-i}$, просуммируем последнее неравенство по $0 \leq i \leq \infty$. Получим доказываемое.

Таким образом, на гладкость решения в точке θ влияют полюсы $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$, лежащие в полосе

$$t'(1 - \varepsilon) < a_1 + n/2 < \operatorname{Im} \lambda < a + n/2, \quad a + n/2 > t'.$$

Выберем a и a_1 так, чтобы выполнялось условие $\sigma > a - a_1 > 0$. Тогда в указанной полосе есть только один полюс $\lambda = it'$, и по теореме 4.1 решение u имеет вид

$$\begin{aligned} u_j(r, \omega) &= \sum_{q=0}^{p_1-1} r^{t_j-t'} (\log r)^q \psi_{q,j}(\omega) + w_j(r, \omega) \\ &= r^{t_j-t'} \psi_{0,j}(\omega) + r^{t_j-t'} \psi_{1,j}(\omega) \log r + w_j(r, \omega). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Покажем, что функция $w_j \in W_p^{t_j}(\Omega)$ с некоторым $p > 1$, т.е.

$$\sum_{0 \leq |\alpha| \leq t_j} \int_{\Omega} |D^\alpha w_j|^p dx < \infty, \quad j = 1, \dots, N. \quad (4.8)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в (4.8) в отдельности. Умножим и разделим подынтегральную функцию на $r^{s_\alpha^j}$ с некоторым s_α^j и применим неравенство Гёльдера с $1/p_1 + 1/q_1 = 1$

$$\int_{\Omega} |D^\alpha w_j|^p dx < \left(\int_{\Omega} |D^\alpha w_j|^{pp_1} r^{s_\alpha^j p_1} dx \right)^{1/p_1} \left(\int_{\Omega} r^{-s_\alpha^j q_1} dx \right)^{1/q_1}.$$

Так как $w_j \in \mathring{H}_{a_1}^{t_j}$, первый множитель в правой части ограничен, если $pp_1 = 2$, $p_1 s_\alpha^j = 2(a_1 + |\alpha| - t_j)$, а второй интеграл сходится при $n > s_\alpha^j q_1$. Рассмотрим цепочку неравенств

$$n > \max_{\alpha,j} s_\alpha^j q_1 = \max_{\alpha,j} s_\alpha^j \frac{2}{2-p} = \max_{\alpha,j} \frac{2p(a_1 + |\alpha| - t_j)}{2-p} > \frac{2t'(1-\varepsilon) - n}{2-p}.$$

Следовательно, $p < n/(t'(1 - \varepsilon))$, и, если $n \geq t'$, $0 < \varepsilon < 1$, то $w_j \in W_p^{t_j}(\Omega)$. На самом деле доказано, что $w_j \in W_{p_j}^{t_j}(\Omega)$, где $p_j < n/(t_j(1 - \varepsilon))$. Ввиду того, что $\varepsilon > 0$, $n \geq t_j$, существует p_j , удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{n}{t_j} < p_j < \frac{n}{t_j(1 - \varepsilon)}.$$

При $n > t'$ из условия $u_j \in \overset{\circ}{H}_a^{t_j}$, $a > t' - n/2$, следует, что $u_j \in W_{p_0}^{t_j}$ с некоторым $p_0 > 1$. Отсюда по теореме 3.1 получаем утверждение теоремы.

Пусть теперь $n = t'$. Так как $w_j \in W_{p_j}^{t_j}(\Omega)$, $p_j t_j > n$, то по теореме вложения Соболева w_j — ограниченные функции, и, следовательно, учитывая ограниченность u_j , имеем

$$u_j(r, \omega) = \begin{cases} \psi_{0,j}(\omega) + w_j(r, \omega), & t_j = t', \\ w_j(r, \omega), & t_j \neq t', \end{cases}$$

где $\psi_{0,j}(\omega) \in C^\infty(\Omega)$.

Таким образом, $u_j \in W_p^{t_j}(\Omega)$, $p > 1$, при $n = t'$, и, следовательно, теорема доказана.

Список литературы

1. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 3. М.: АН СССР, 1960.
2. Nagito M. On principally linear elliptic differential equations of second order // Osaka Math. J. 1954. V. 6. №2. P. 207–229.
3. Ладьяженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
4. Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
5. Похожаев С. И. О квазилинейных эллиптических уравнениях высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. №1. С. 115–121.
6. Аракчеев С. А. О некоторых классах линейных и квазилинейных уравнений с суммируемыми коэффициентами // Труды Всесоюзной конф. по уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию И. Г. Петровского. М., 1978. С. 299–311.
7. Скрыпник И. В. Разрешимость и свойства решений нелинейных эллиптических уравнений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1976. С. 131–237.
8. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. 1. М.: ИЛ, 1962.
9. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for the solutions of elliptic differential equations, satisfying general boundary values. II // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. №1. P. 35–92.
10. Galiardo E. Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili // Ricerche di Math. Napoli. 1959. V. 8. №1. P. 24–51.
11. Nirenberg L. On elliptic partial differential equations // Annal. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1959. V. 13. P. 115–162.
12. Мазья В. Г. Об устранимых особенностях ограниченных решений квазилинейных эллиптических уравнений любого порядка // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. 1972. Т. 27. №6. С. 116–130.
13. Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа // Матем. сб. 1938. Т. 4. №3. С. 471–497.

14. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: ИЛ, 1958.
15. *Calderon A. P., Zigmund A.* On singular integrals // Amer. J. Math. 1956. V. 78. P. 289–309.
16. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // УМН. 1964. Т. 19. № 3. С. 289–309.
17. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 27–92.
18. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nachr. 1977. V. 76. P. 29–60.

Московский государственный
технический университет им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию
16.02.1995