Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Климов, Функциональные неравенства и обобщенные емкости, *Матем. сб.*, 1996, том 187, номер 1, 41–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm99>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:51:21

УДК 517.518.235

В. С. Климов

Функциональные неравенства и обобщенные емкости

В статье найдены критерии справедливости функционального неравенства вида $\|f; Q\| \leq C \|\nabla f; P\|$, где P, Q – нормированные идеальные пространства функций на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, константа C одинакова для удовлетворяющих условию Липшица финитных функций f . Приведены условия согласования норм в пространствах P, Q , при выполнении которых исследуемое функциональное неравенство равносильно геометрическому неравенству, связывающему Q -нормы индикаторов и P -емкости компактных подмножеств области Ω . Даны оценки и изучены общие свойства емкостей.

Библиография: 20 названий.

В статье найдены критерии справедливости функционального неравенства вида

$$\|f; Q\| \leq C \|\nabla f; P\|, \quad (1)$$

где P, Q – нормированные идеальные пространства функций на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, константа C одинакова для всех финитных функций f , удовлетворяющих условию Липшица. В предположении некоторого согласования норм в пространствах P, Q неравенство (1) равносильно геометрическому неравенству, связывающему Q -нормы индикаторов и P -емкости компактных подмножеств Ω . Приведены условия согласования соответствующих норм, даны оценки и изучены общие свойства емкостей. Основное внимание уделено случаю, когда P совпадает с пространством Орлича.

Для $P = L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $Q = L^q(\Omega)$ аналогичные результаты получены ранее в работах В. Г. Мазья [1], [2]. Основное содержание данной статьи связано с распространением результатов В. Г. Мазья на более общие функциональные пространства. С этой целью введено и изучено понятие мажорирования $Q \prec P$, выражающее некоторое условие согласования норм в идеальных пространствах P, Q и связанное с определениями σ -супераддитивности и σ -субаддитивности (см. ниже).

1. Пусть (X, μ) – измеримое пространство с полной σ -конечной непрерывной мерой μ ; $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел со скалярным произведением $a \cdot b$ и нормой $|a| = \sqrt{a \cdot a}$ ($a, b \in \mathbb{R}^n$); $S(X, \mathbb{R}^n)$ – линейное метрическое пространство μ п.в. (почти всюду) конечных μ -измеримых функций на X со значениями в $\mathbb{R}^n$. Пространство $S(X, \mathbb{R})$ обозначается далее через $S(X)$, аналогичные сокращения используются и для других пространств скалярных функций.

Линейное пространство $E = E(X, \mathbb{R}^n)$ функций класса $S(X, \mathbb{R}^n)$ называют нормированным идеальным пространством (НИП), если из соотношений $y \in E$, $\alpha \in S(X)$, $|\alpha(x)| \leq 1$ п.в. следует, что $\alpha y \in E$ и $\|\alpha y; E\| \leq \|y; E\|$. Если НИП

E полно относительно нормы $\|\cdot; E\|$, то его называют банаховым идеальным пространством (БИП). Теории БИП и связанному с ней выпуклому анализу посвящены многие публикации (см., например, работы [3]–[11] и приведенную в них библиографию).

Опишем некоторые способы конструирования НИП. Обозначим через $\beta(\mathbb{R}^n)$ класс выпуклых [9] четных функций $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$. Пусть $H = H(X)$ – НИП скалярных функций. Сопоставим H и функции Ψ из $\beta(\mathbb{R}^n)$ совокупность функций класса $S(X, \mathbb{R}^n)$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|y; H^\Psi\| = \inf \left\{ k > 0 : \left\| \Psi \left(\frac{y}{k} \right); H \right\| \leq 1 \right\}.$$

Как нетрудно проверить, $H^\Psi(X, \mathbb{R}^n)$ есть НИП. Если $H = L^1(X)$ – пространство суммируемых по мере μ функций, то $H^\Psi(X, \mathbb{R}^n)$ обозначают символом $L^\Psi(X, \mathbb{R}^n)$ и называют пространством Орлика; соответствующая норма $\|\cdot; L^\Psi\|$ совпадает с нормой Люксембурга [3, с. 150], [10, с. 95], [11, с. 202].

Пусть $F = F(X, \mathbb{R}^n)$ есть НИП, $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – квазивогнутая [4, с. 70] функция. Обозначим через $F_\psi = F_\psi(X, \mathbb{R}^n)$ часть $S(X, \mathbb{R}^n)$, состоящую из функций y , для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|y; F_\psi\| = \sup \left\{ \frac{1}{\psi(\mu(D))} \|1_D y; F\|, 0 < \mu(D) < \infty \right\};$$

здесь и далее 1_D – индикатор (характеристическая функция) множества D . Если $F = L^1(X, \mathbb{R}^n)$, то F_ψ совпадает с пространством Марцинкевича $M_\psi(X, \mathbb{R}^n)$ [4, с. 154]. НИП $H^\Psi(X, \mathbb{R}^n)$, $F_\psi(X, \mathbb{R}^n)$ будут далее использоваться в ряде иллюстрирующих примеров.

Пусть $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Банахово пространство $\sigma = \sigma(\mathbb{Z})$ последовательностей $a = (a_i)$ ($i \in \mathbb{Z}$) называют [4, с. 213] симметричным, если из условий $a = (a_i) \in \sigma$, $|b_i| \leq |a_{h(i)}|$, $b = (b_i)$ ($i \in \mathbb{Z}$, h – биекция множества $\mathbb{Z}$) следует, что $b \in \sigma$ и $\|b; \sigma\| \leq \|a; \sigma\|$. Через $\ell_M = \ell_M(\mathbb{Z})$ ниже обозначается пространство последовательностей $a = (a_i)$ ($i \in \mathbb{Z}$), порожденное выпуклой четной непрерывной в нуле функцией $M: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty] = \mathbb{R}_+$, $M(0) = 0$, $M(s) > 0$ при $s > 0$, с нормой

$$\|a; \ell_M\| = \inf \left\{ k > 0, \sum_{i \in \mathbb{Z}} M \left(\frac{a_i}{k} \right) \leq 1 \right\}.$$

Пространство $\ell_M = \ell_M(\mathbb{Z})$ симметрично; при $M(s) = |s|^p$ ($1 \leq p < \infty$) оно обозначается символом $\ell_p = \ell_p(\mathbb{Z})$.

Функциональную последовательность y_i из $S(X, \mathbb{R}^n)$ ($i \in \mathbb{Z}$) назовем *дизъюнктой*, если $|y_i(x)| |y_j(x)| = 0$ μ п.в. при $i \neq j$. Пусть $\sigma = \sigma(\mathbb{Z})$ – симметричное пространство (СП). НИП $E = E(X, \mathbb{R}^n)$ назовем σ -*супераддитивным* (σ -*субаддитивным*), если для каждой дизъюнктой последовательности $y_i \in E$ ($i \in \mathbb{Z}$) имеет место оценка $\|y; E\| \geq \|a; \sigma\|$ (соответственно, $\|y; E\| \leq \|a; \sigma\|$), где

$$a = (a_i), \quad a_i = \|y_i; E\| \quad (i \in \mathbb{Z}), \quad y = \sum_{i \in \mathbb{Z}} y_i;$$

при этом считается, что если $y \notin E$, то $\|y; E\| = \infty$, аналогичное соглашение относится и к $\|a; \sigma\|$.

Пространство $L^p(X, \mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$) одновременно ℓ_p -супераддитивно и ℓ_p -субаддитивно. В случае $\sigma = \ell_p$ ($1 \leq p < \infty$) понятия, близкие к σ -субаддитивности и σ -супераддитивности, вводились многими авторами (библиография может быть найдена в обзорах [5], [6]).

Пусть $P = P(X, \mathbb{R}^n)$, $Q = Q(X_1, \mathbb{R}^m)$ два НИП. Скажем, что P мажорирует Q ($Q \prec P$), если существуют такие симметричные пространства $\sigma = \sigma(\mathbb{Z})$, $\tau = \tau(\mathbb{Z})$, что P — σ -супераддитивное пространство, Q — τ -субаддитивное пространство и σ непрерывно вложено в τ . Точная нижняя грань норм операторов вложения $J: \sigma \rightarrow \tau$, вычисляемая по всем подобным парам σ, τ , обозначается символом $\nu(P, Q)$. Требование $Q \prec P$ выражает определенную согласованность норм в пространствах P, Q . Константа $\nu(P, Q)$ в некотором смысле характеризует степень этой согласованности.

2. Приведем несколько иллюстрирующих примеров.

ЛЕММА 1. Пусть $\Phi \in \beta(\mathbb{R}^n)$, $M: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ — выпуклая четная функция, $M(0) = 0$, $M(s) > 0$ ($s > 0$), $M(1) = 1$ и

$$\Phi(t\xi) \geq \Phi(\xi)M(t) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq 1).$$

Тогда пространство Орлича $L^\Phi(X, \mathbb{R}^n)$ ℓ_M -супераддитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть y_i ($i \in \mathbb{Z}$) — дизъюнктивная последовательность элементов пространства $L^\Phi(X, \mathbb{R}^n)$,

$$a_i = \|y_i; L^\Phi\|, \quad a = (a_i), \quad y = \sum_{i \in \mathbb{Z}} y_i, \quad \|y; L^\Phi\| < 1.$$

Из условий леммы легко выводится непрерывность на $L^\Phi(X, \mathbb{R}^n)$ функционала $I_\Phi(\cdot) = \|\Phi(\cdot); L^1\|$. В частности, если $a_i > 0$, то $I_\Phi(y_i/a_i) = 1$. Ввиду этого имеем

$$1 \geq I_\Phi(y) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} I_\Phi(y_i) \geq \sum_{a_i > 0} I_\Phi\left(\frac{y_i}{a_i}\right) M(a_i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} M(a_i).$$

Следовательно, $\|a; \ell_M\| \leq 1$ как только $\|y; L^\Phi\| < 1$, а это означает ℓ_M -супераддитивность пространства Орлича $L^\Phi(X, \mathbb{R}^n)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть пространство $H = H(X)$ есть БИП. $\Psi \in \beta(\mathbb{R}^n)$, $M(t) = \sup\{\Psi(t\xi)/\Psi(\xi), \xi \neq 0\}$. Тогда пространство $H^\Psi(X, \mathbb{R}^n)$ ℓ_M -субаддитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть y_i, a_i, y, a имеют тот же смысл, что и в лемме 1, причем $\|a; \ell_M\| < 1$. Если $0 < \lambda < 1$, то

$$\begin{aligned} \|\Psi(\lambda y); H\| &= \left\| \sum_{a_i > 0} \Psi\left(a_i \frac{\lambda y_i}{a_i}\right); H \right\| \\ &\leq \sum_{a_i > 0} M(a_i) \left\| \Psi\left(\lambda \frac{y_i}{a_i}\right); H \right\| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} M(a_i) < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|y; H^\Psi\| \leq 1$, если только $\|a; \ell_M\| < 1$, а это влечет ℓ_M -субаддитивность пространства H^Ψ . Лемма доказана.

Двойственным к СП $\sigma = \sigma(\mathbb{Z})$ называют пространство $\sigma' = \sigma'(\mathbb{Z})$, состоящее из таких последовательностей $b = (b_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, для которых имеет смысл и конечна норма $\|b; \sigma'\| = \sup\{a \cdot b, \|a; \sigma\| \leq 1\}$, где $a \cdot b = \sum a_i b_i$ ($i \in \mathbb{Z}$). Двойственное к пространству Орлича $\ell_N = \ell_N(\mathbb{Z})$ совпадает с пространством Орлича $(\ell)_{N^*}$, порожденным сопряженной к N функцией N^* [9, с. 120] и наделенным так называемой нормой Орлича $\|b; (\ell)_{N^*}\| = \sup\{a \cdot b, \|a; \ell_N\| \leq 1\}$.

Аналогично, но несколько более сложно, НИП $E = E(X, \mathbb{R}^n)$ можно сопоставить двойственное к нему $E' = E'(X, \mathbb{R}^n)$ [8]. Пространство E' всегда полно. Если $y \in E$, $z \in E'$, то [8]

$$\langle y, z \rangle = \int_X y(x) \cdot z(x) d\mu(x) < \infty, \quad \|z; E'\| = \sup\{\langle y, z \rangle, \|y; E\| \leq 1\}.$$

Далее будут использоваться вытекающие из определений двойственных пространств варианты неравенства Гёльдера

$$a \cdot b \leq \|a; \sigma\| \|b; \sigma'\|, \quad \langle y, z \rangle \leq \|y; E\| \|z; E'\|,$$

где $a \in \sigma$, $b \in \sigma'$, $y \in E$, $z \in E'$.

ЛЕММА 3. Пусть $F = F(X, \mathbb{R}^n)$ есть БИП, $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — квазивогнутая функция. Пусть $(\ell)_{N^*}$ — пространство, двойственное к пространству Орлича ℓ_N . Если $\psi^{-1}(ts) \geq \psi^{-1}(s)N(t)$ ($s \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$), то пространство $F_\psi(X, \mathbb{R}^n)$ $(\ell)_{N^*}$ -субаддитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть y_i , a_i , y , a определены так же, как и в леммах 1, 2; в частности, $a_i = \|y_i; F_\psi\|$ ($i \in \mathbb{Z}$), $a = (a_i)$. Обозначим через X_i носитель $\text{supp } |y_i|$ функции $|y_i|$ [3, с. 137]. Фиксируем измеримое множество D ($0 < \mu(D) < \infty$) и положим $s = \psi(\mu(D))$, $t_i = \psi(\mu(D \cap X_i))/s$ ($i \in \mathbb{Z}$). Очевидно, что $\mu(D) = \psi^{-1}(s)$, $\mu(D \cap X_i) = \psi^{-1}(t_i s)$ и

$$\|1_D y_i; F\| \leq a_i \psi(\mu(D \cap X_i)) = a_i t_i s \quad (i \in \mathbb{Z}),$$

следовательно,

$$\|1_D y; F\| \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|1_D y_i; F\| \leq s \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i t_i.$$

Поскольку $N(t_i) \leq \psi^{-1}(t_i s)/\psi^{-1}(s) = \mu(D \cap X_i)/\mu(D)$, то

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} N(t_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mu(D \cap X_i)/\mu(D) \leq 1.$$

Таким образом, $t = (t_i) \in \ell_N$ и $\|t; \ell_N\| \leq 1$.

Объединяя установленные выше оценки, получаем

$$\|1_D y; F\| \leq s a \cdot t \leq s \|a; (\ell)_{N^*}\| \|t; \ell_N\| \leq \|a; (\ell)_{N^*}\| \psi(\mu(D)),$$

т.е. $\|y; F_\psi\| \leq \|a; (\ell)_{N^*}\|$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – возрастающая строго вогнутая функция, $\varphi(0) = 0$,

$$\psi(t) = \frac{t}{\varphi(t)} (t > 0), \quad \psi(0) = 0, \quad M(t) = \sup \left\{ \frac{\varphi^{-1}(|t|s)}{\varphi^{-1}(s)}, s > 0 \right\}.$$

Тогда для любого БИП $F = F(X, \mathbb{R}^n)$ пространство $F_\psi(X, \mathbb{R}^n)$ $(\ell)_M$ -субаддитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – функция, обратная к φ . В силу определения функции M выполняется неравенство $\Phi(ts) \leq \Phi(s)M(t)$ ($s \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$). Положим $M(t) = t_1$, $\Phi(s) = s_1$. Тогда последнее неравенство влечет оценку $M^{-1}(t_1) \leq \varphi(t_1 s_1) / \varphi(s_1)$ ($s_1 > 0$, $0 \leq t_1 \leq 1$). Так как $(M^*)^{-1}(t_1)M^{-1}(t_1) \geq t_1$ [10, с. 25], то

$$\frac{t_1}{(M^*)^{-1}(t_1)} \leq \frac{\varphi(t_1 s_1)}{\varphi(s_1)} = \frac{\psi(s_1)t_1}{\psi(s_1 t_1)}.$$

Сокращая данное неравенство на t_1 и полагая $(M^*)^{-1}(t_1) = t_2$, $\psi(s_1) = s_2$, получаем неравенство

$$\psi^{-1}(s_2)M^*(t_2) \leq \psi^{-1}(t_2 s_2) \quad (s_2 \geq 0, \quad 0 \leq t_2 \leq 1).$$

Поскольку $(M^*)^* = M$, то требуемый результат вытекает из леммы 3. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях леммы 4 пространство Марцинкевича $M_\psi(X, \mathbb{R}^n)$ $(\ell)_M$ -субаддитивно.

ЛЕММА 5. Пусть E есть σ -супераддитивное (σ -субаддитивное) НИП, E' и σ' – двойственные к E и σ пространства. Тогда E' есть σ' -субаддитивное (σ' -супераддитивное) пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E есть σ -супераддитивное пространство, v_i ($i \in \mathbb{Z}$) – дизъюнктивная последовательность функций из E' , $v = \sum v_i$ ($i \in \mathbb{Z}$), $b_i = \|v_i; E'\|$, $b = (b_i)$, $u \in E$, $\|u; E\| \leq 1$. Будем считать, что $b \in \sigma'$. Обозначим через X_i носитель $\text{supp } |v_i|$ функции $|v_i|$ [3, с. 137] и положим $u_i = u1_{X_i}$, $a_i = \|u_i; E\|$, $a = (a_i)$. Так как E есть σ -супераддитивное пространство, то $a \in \sigma$ и $\|a; \sigma\| \leq \|u; E\| \leq 1$. Справедливы соотношения

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \langle u_i, v_i \rangle \leq a \cdot b \leq \|a; \sigma\| \|b; \sigma'\| \leq \|b; \sigma'\|.$$

Отсюда вытекает неравенство $\|u; E'\| \leq \|b; \sigma'\|$, означающее σ' -субаддитивность пространства E' .

Вторая часть леммы устанавливается аналогично. Лемма доказана.

Комбинируя лемму 5 с леммами 1–4, можно сформулировать условия супераддитивности (субаддитивности) пространств, двойственных к $H^\Psi(X, \mathbb{R}^n)$, $F_\psi(X, \mathbb{R}^n)$ и $L^\Phi(X, \mathbb{R}^n)$. Например, в условиях леммы 4 пространство Лоренца $\Lambda_\psi(X, \mathbb{R}^n)$ [4, с. 145–159] ℓ_{M^*} -супераддитивно.

ЛЕММА 6. Пусть $\Phi \in \beta(\mathbb{R}^n)$, $\Psi \in \beta(\mathbb{R}^m)$ и

$$\Phi(t\xi)\Psi(\eta) \geq \Phi(\xi)\Psi(t\eta) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^m, 0 \leq t \leq 1). \quad (2)$$

Тогда $H^\Psi(X_1, \mathbb{R}^m) \prec L^\Phi(X, \mathbb{R}^n)$ для любого БИП $H = H(X_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 6 вытекает из лемм 1, 2.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\Phi \in \beta(\mathbb{R}^n)$, $\Psi_p(\eta) = |\eta|^p$ ($\eta \in \mathbb{R}^m$, $1 < p < \infty$). Если при каждом ξ из $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функция $\Phi(s\xi)s^{-p}$ ($s > 0$) убывает на $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, то $H^{\Psi_p}(X_1, \mathbb{R}^m) \prec L^\Phi(X, \mathbb{R}^n)$ для любого БИП $H = H(X_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно заметить, что убывание функции $s \rightarrow \Phi(s\xi)s^{-p}$ на $\mathbb{R}_+$ влечет оценку (2) в случае $\Psi = \Psi_p$.

Обозначим через $\beta_0(\mathbb{R}^n)$ часть $\beta(\mathbb{R}^n)$, состоящую из функций $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих оценке $\Phi(2\xi) \leq k_0\Phi(\xi)$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$, $k_0 < \infty$). Как нетрудно видеть, удовлетворяющая оценке (2) функция Φ входит в класс $\beta_0(\mathbb{R}^n)$. Если ξ^* — субградиент функции Φ в точке ξ , то [9, с. 230] $\xi \cdot \xi^* \leq \Phi(2\xi) - \Phi(\xi) \leq k_0\Phi(\xi)$. Отсюда следует, что при любом $p > k_0$ и $\xi \neq 0$ функция $s \rightarrow \Phi(s\xi)s^{-p}$ убывает на $\mathbb{R}_+$. В частности, включение $\Phi \in \beta_0(\mathbb{R}^n)$ гарантирует соотношение $H^{\Psi_p}(X_1, \mathbb{R}^m) \prec L^\Phi(X, \mathbb{R}^n)$ при достаточно большом p .

3. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $P = P(\Omega, \mathbb{R}^n)$ — НИП измеримых относительно n -мерной лебеговой меры mes_n функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$. Предполагается, что $1_{\mathcal{K}}a \in P(\Omega, \mathbb{R}^n)$ для любого компакта $\mathcal{K} \subset \Omega$ и любого вектора a из $\mathbb{R}^n$. Используются обозначения: $\mathring{\text{Lip}}(\Omega)$ — пространство финитных функций, удовлетворяющих условию Липшица в Ω , $U(\mathcal{K}) = \{f \in \mathring{\text{Lip}}(\Omega), f(x) \geq 1 \text{ при } x \in \mathcal{K}\}$.

Каждому компакту $\mathcal{K} \subset \Omega$ сопоставим число

$$c_P(\mathcal{K}) = \inf \{ \|\nabla f\|, f \in U(\mathcal{K}) \},$$

называемое далее P -емкостью компакта $\mathcal{K}$. Удобно положить $c_P(\emptyset) = 0$. В случае $P = L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$) аналогичные характеристики множеств использовались многими авторами (см., например, [2], [12]–[14]).

В этом пункте в терминах P -емкости формулируется критерий справедливости функционального неравенства (1) для всех f из $\mathring{\text{Lip}}(\Omega)$. Ниже $Q = Q(\Omega)$ — НИП измеримых относительно меры mes_n функций. Наименьшую из констант C , для которых имеет место оценка (1), обозначим через $C(P, Q)$. При условии $Q \prec P$ постоянную $C(P, Q)$ удастся оценить через постоянную $A(P, Q)$, определяемую как минимальную из констант a_0 , для которых имеет место оценка

$$\|1_{\mathcal{K}}; Q\| \leq a_0 c_P(\mathcal{K}), \quad (3)$$

где a_0 не зависит от компакта $\mathcal{K} \subset \Omega$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $Q \prec P$. Тогда неравенство (1) справедливо в том и только том случае, если $A(P, Q) < \infty$; при этом $A(P, Q) \leq C(P, Q) \leq 4\nu(P, Q)A(P, Q)$, следовательно, функциональное неравенство (1) эквивалентно геометрическому неравенству (3) с некоторой константой a_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеет место неравенство (1). Если $f \in U(\mathcal{K})$, то $f(x) \geq 1$ ($x \in \mathcal{K}$) и $\|f; Q\| \geq \|1_{\mathcal{K}}; Q\|$. В силу (1) $\|1_{\mathcal{K}}; Q\| \leq C\|\nabla f; P\|$ ($f \in U(\mathcal{K})$), поэтому минимизируя по всем f из $U(\mathcal{K})$, получаем $\|1_{\mathcal{K}}; Q\| \leq Cc_P(\mathcal{K})$. Отсюда вытекает оценка

$$A(P, Q) \leq C(P, Q).$$

Предположим, что $A(P, Q) < \infty$. Фиксируем постоянную $\nu > \nu(P, Q)$ и СП σ , τ , удовлетворяющие условиям: пространство P σ -супераддитивно, пространство Q τ -субаддитивно, $\sigma \subset \tau$ и норма оператора вложения $J: \sigma \rightarrow \tau$ не превосходит ν . Установим неравенство (1) для произвольной функции f из $\text{Lip}(\Omega)$.

Пусть $N_i = \{x \in \Omega, |f(x)| \geq 2^i\}$ ($i \in \mathbb{Z}$), $t_+ = \max\{0, t\}$, $\alpha(t) = \min\{1, t_+\}$. Если $N_i \neq \emptyset$, то функция $f_i(x) = \alpha(2^{1-i}(|f(x)| - 2^{i-1}))$ принадлежит $U(N_i)$, поэтому $\|\nabla f_i; P\| \geq c_P(N_i)$. Как нетрудно видеть, последовательность функций $y_i = 2^{i-1}\nabla f_i$ дизъюнктна, $\|y_i; P\| \geq 2^{i-1}c_P(N_i)$ и $\sum y_i = \nabla |f|$. Из проведенных рассуждений вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\nabla f; P\| &\geq \|a; \sigma\|, & a &= (a_i), \\ a_i &= 2^{i-1}c_P(N_i), & i &\in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Последовательность функций $w_i = 2^{i+1}(1_{N_i} - 1_{N_{i+1}})$ ($i \in \mathbb{Z}$) дизъюнктна, $\|w_i; Q\| \leq 2^{i+1}\|1_{N_i}; Q\|$ и $\sum w_i \geq |f|$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|f; Q\| &\leq \|b; \tau\|, & b &= (b_i), \\ b_i &= 2^{i+1}\|1_{N_i}; Q\|, & i &\in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу определения константы $A(P, Q)$ имеем

$$\|1_{N_i}; Q\| \leq A(P, Q)c_P(N_i).$$

Объединяя соотношения (4), (5), получаем

$$\begin{aligned} \|f; Q\| &\leq \|b; \tau\| \leq \nu\|b; \sigma\| \leq 4\nu A(P, Q)\|a; \sigma\| \\ &\leq 4\nu A(P, Q)\|\nabla f; P\|. \end{aligned}$$

Тем самым установлены неравенство (1) и оценка $C(P, Q) \leq 4\nu A(P, Q)$. Ввиду произвольности $\nu > \nu(P, Q)$ справедливо неравенство $C(P, Q) \leq 4\nu(P, Q)A(P, Q)$. Неравенство (3) равносильно оценке $a_0 \geq A(P, Q)$. Теорема доказана.

Условие $Q \prec P$ использовалось лишь при доказательстве достаточности оценки (3) для выполнения неравенства (1). Оно не может быть опущено; обсуждение этого вопроса для пространств $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ содержится в [2, с. 107, 172].

Остановимся на некоторых следствиях теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Φ, Ψ — функции из $\beta(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющие неравенству (2), $P = L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$, H — БИП функций на Ω , измеримых относительно меры mes_n , $Q = H^\Psi(\Omega)$. Тогда неравенство (1) справедливо в том и только том случае, если имеет место неравенство (3).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\Phi \in \beta(\mathbb{R}^n)$, $\Phi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – строго выпуклая четная функция, $\Phi_1(0) = 0$ и

$$\Phi(t\xi)\Phi_1(s) \geq \Phi(\xi)\Phi_1(ts) \quad (\xi \in \mathbb{R}^n, s \geq 0, 0 \leq t \leq 1). \quad (6)$$

Пусть $P = L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$, F – БИП функций на Ω , измеримых относительно меры mes_n , $Q = F_\psi$, где $\psi(t) = t/\varphi(t)$, $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ – функция, обратная к сужению Φ_1 на $\mathbb{R}_+$. Тогда справедливо заключение следствия 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $1 \leq p_i \leq q_j$ ($i, j = 1, \dots, n$), $P = L_{p_1 \dots p_n}(\Omega)$, $Q = L_{q_1 \dots q_n}(\Omega)$ есть пространства со смешанными нормами [15, с. 9]. Тогда справедливо заключение следствия 1.

Следствия 1–3 вытекают из теоремы 1 и установленных выше признаков мажорируемости идеальных пространств.

4. Установим непрерывный вариант неравенства (4), близкий к сильным емкостным неравенствам [2, с. 98, 162]. Пусть $V = V(\mathbb{R}_+, \mu)$ – симметричное пространство [4, с. 225] функций $v: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, измеримых относительно меры μ , инвариантной относительно растяжений и нормированной условием $\mu([1, 2]) = 1$. Дискретизацией V назовем пространство dV таких последовательностей $a = (a_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, для которых имеет смысл конечна норма $\|a; dV\| = \|v_a; V\|$, где $v_a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, определенная равенством $v_a(t) = a_i$ ($2^i \leq t < 2^{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $P = P(\Omega, \mathbb{R}^n)$ есть dV -супераддитивное НИП, $f \in \overset{\circ}{\text{Lip}}(\Omega)$, $A_t = \{x \in \Omega, |f(x)| \geq t\}$, $w(t) = tc_P(A_t)$ ($t \in \mathbb{R}_+$). Тогда

$$\|w; V\| \leq 4\|\nabla f; P\|. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства (4) $\|\nabla f; P\| \geq \|a; dV\|$, где $a = (a_i)$, $a_i = 2^{i-1}c_P(A_{2^i})$, $i \in \mathbb{Z}$. Поскольку функция $t \rightarrow c_P(A_t)$ убывает на $\mathbb{R}_+$, то $4v_a(t) \geq w(t)$ ($t \in \mathbb{R}_+$), следовательно, $4\|a; dV\| = 4\|v_a; V\| \geq \|w; V\|$. Объединяя эту оценку с (4), приходим к (7). Теорема доказана.

Теорема 1 принимает более обозримую форму в случае, когда $Q = Q(\Omega)$ есть симметричное относительно меры mes_n пространство. В этом случае $\|1_{\mathcal{K}}; Q\| = \varphi_Q(\text{mes}_n \mathcal{K})$, где φ_Q – так называемая фундаментальная функция пространства Q [4, с. 137]. Сопоставим пространству $P = P(\Omega, \mathbb{R}^n)$ функцию, определенную на интервале $(0, m_0)$, $m_0 = \text{mes}_n \Omega$, равенством $\nu_P(t) = \inf \{c_P(\mathcal{K}), \mathcal{K} \text{ – компактное подмножество области } \Omega, \text{mes}_n \mathcal{K} > t\}$. При $P = L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ аналогичные ν_P функции изучались в работах [1], [2].

ТЕОРЕМА 3. Если НИП $P = P(\Omega, \mathbb{R}^n)$ мажорирует СП $Q = Q(\Omega)$, то неравенство (1) эквивалентно неравенству $\varphi_Q(t) \leq a_0 \nu_P(t)$ ($0 < t < m_0$, $a_0 < \infty$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема 3 есть следствие теоремы 1.

Приведем оценку функции ν_P в случае, когда P совпадает с пространством Орлича $L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Напомним некоторые определения. Измеримой по Лебегу функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ можно сопоставить ее перестановку $\bar{f}$ в убывающем порядке, определяемую [4, с. 83], [17, с. 332] равенством $\bar{f}(s) = \inf\{t: \mu(f, t) \leq s\}$ ($0 < s < m_0$), в котором $\mu(f, t) = \text{mes}_n\{x: |f(x)| > t\}$. Если $f \in \text{Lip}(\Omega)$, то функция $\bar{f}$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (0, m_0)$ и $\bar{f}(s) = 0$ ($s \geq s_0$, $s_0 < m_0$) [18], [19].

Пусть $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая четная функция, $\Psi(0) = 0$ и при любом $h > 0$ множество $\{\xi \in \mathbb{R}^n, \Psi(\xi) \leq h\}$ компактно и телесно. Функции Ψ можно сопоставить выпуклую четную функцию одного переменного, называемую [19] округлением функции Ψ и характеризующую условием:

$$\text{mes}_n\{\xi \in \mathbb{R}^n: \Psi(\xi) \leq h\} = \text{mes}_n\{\xi \in \mathbb{R}^n, \Psi^0(|\xi|) \leq h\}$$

при любом $h > 0$.

ЛЕММА 7. Пусть Φ^0 — округление функции Φ из $\beta(\mathbb{R}^n)$, $P = L^\Phi(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $H = H(0, m_0)$ — двойственное к $L^{\Phi^0}(0, m_0)$ пространство. Тогда

$$\nu_P(t) \geq \left\| 1_{[t, m_0]} \frac{1}{\lambda}; H \right\|^{-1} \quad (0 < t < m_0), \quad (8)$$

где $\lambda(s) = k_n s^{1-1/n}$, $k_n > 0$ — постоянная, зависящая лишь от n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на вытекающей из [18], [19] оценке

$$\|\nabla f; L^\Phi\| \geq \left\| \frac{d\bar{f}}{ds} \lambda(s); L^{\Phi^0}(0, m_0) \right\|, \quad (9)$$

в которой $\bar{f}$ — перестановка функции f из $\text{Lip}(\Omega)$. Пусть $\mathcal{K}$ — компактное подмножество Ω , $\text{mes}_n \mathcal{K} > t > 0$, $\bar{f}$ — перестановка функции f из $U(\mathcal{K})$ и $\bar{f}(s) = 0$ при $s \geq s_0$. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 1 \leq \bar{f}(t) - \bar{f}(s_0) &= \int_t^{s_0} \left(-\frac{d\bar{f}}{ds} \right) ds \\ &\leq \left\| 1_{[t, m_0]} \frac{1}{\lambda}; H \right\| \left\| \frac{d\bar{f}}{ds} \lambda; L^{\Phi^0}(0, m_0) \right\| \\ &\leq \left\| 1_{[t, m_0]} \frac{1}{\lambda}; H \right\| \|\nabla f; L^\Phi\|. \end{aligned}$$

Здесь последовательно используются неравенство $\bar{f}(t) \geq 1$, вытекающее из определения $\bar{f}$ и оценки $\text{mes}_n \mathcal{K} > t$, равенство $\bar{f}(s_0) = 0$, формула Ньютона–Лейбница, применяемая к абсолютно непрерывной на отрезке $[t, s_0]$ функции $\bar{f}$, неравенство Гёльдера для НИП и оценка (9). Таким образом,

$$\|\nabla f; L^\Phi\| \geq \left\| 1_{[t, m_0]} \frac{1}{\lambda}; H \right\|^{-1} \quad (0 < t < m_0).$$

Минимизируя по всем функциям f из $U(\mathcal{K})$ и компактным множествам $\mathcal{K} \subset \Omega$, приходим к оценке (8). Лемма доказана.

В работах [18], [19] содержатся варианты оценки (9), возникающие при замене пространства Орлича произвольным симметричным пространством векторных функций. На их основе можно сформулировать соответствующие обобщения леммы 7.

Возвращаясь к обсуждению теоремы 3, заметим, что близкие к ней утверждения верны и для некоторых пространств со смешанной нормой. В частности, если $P = L_{p_1 \dots p_n}(\Omega)$, $Q = L_{q_1 \dots q_n}(\Omega)$, то при условиях $q_{m+1} = \dots = q_n = \infty$, $q_j = q \geq p_i \geq 1$ ($j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$) неравенство (1) равносильно неравенству $\text{mes}_m^{1/q}(\Pi \mathcal{K}) \leq a_0 c_P(\mathcal{K})$, в котором Π – оператор ортогонального проектирования $\mathbb{R}^n$ на пространство $\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}$. Данное замечание легко распространяется на более общие пространства и нелинейные операторы проектирования. Оно предоставляет интерес при сравнении P -емкостей с наглядными геометрическими характеристиками компактов типа хаусдорфовых и поперечных мер [2], [20].

5. Далее изучаются общие свойства P -емкости. Как полагает автор, эти свойства полезны не только в связи с применениями теоремы 1 к теории вложения, но и при исследовании краевых и вариационных задач с нелинейностями нестепенного характера.

Напомним некоторые определения теории емкостей [12]–[14]. Пусть $\mathfrak{K}(\Omega)$ – совокупность компактных подмножеств отделимого топологического пространства Ω , $\mathfrak{M}(\Omega)$ – система всех подмножеств множества Ω . *Емкостью Шоке* в Ω называют функцию $\mathfrak{C}: \mathfrak{K}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям:

- 1) если $\mathcal{K}_i \in \mathfrak{K}(\Omega)$ ($i = 1, 2$) и $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_1$, то $\mathfrak{C}(\mathcal{K}_2) \leq \mathfrak{C}(\mathcal{K}_1)$;
- 2) для каждого компакта $\mathcal{K}_0 \subset \Omega$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность G компакта $\mathcal{K}_0$, что из включений $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}(\Omega)$, $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K} \subset G$ вытекает неравенство $\mathfrak{C}(\mathcal{K}) - \mathfrak{C}(\mathcal{K}_0) < \varepsilon$;
- 3) для любых $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ из $\mathfrak{K}(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\mathfrak{C}(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) + \mathfrak{C}(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2) \leq \mathfrak{C}(\mathcal{K}_1) + \mathfrak{C}(\mathcal{K}_2).$$

Условия 1)–3) именуют аксиомами возрастания, непрерывности справа и сильной субаддитивности [13, с. 64]. *Обобщенной емкостью* в Ω называют [13, с. 71] функцию $c: \mathfrak{M}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющую условиям:

- I) если $A_1 \subset A_2 \subset \Omega$, то $c(A_1) \leq c(A_2)$;
- II) для любой возрастающей последовательности A_i ($i = 1, 2, \dots$) подмножеств Ω выполняется равенство $c(\cup A_i) = \sup c(A_i)$;
- III) для любой убывающей последовательности $\mathcal{K}_i$ ($i = 1, 2, \dots$) компактов из Ω выполняется равенство $c(\cap \mathcal{K}_i) = \inf c(\mathcal{K}_i)$.

Ниже Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с относительной топологией, $\Phi \in \beta(\mathbb{R}^n)$. На множестве $\mathfrak{K}(\Omega)$ определим функции $\mathfrak{C}$, γ равенствами

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\mathcal{K}) &= \inf \{ I_\Phi(\nabla f), f \in U(\mathcal{K}) \}, \\ \gamma(\mathcal{K}) &= \inf \{ \|\nabla f; L^\Phi\|, f \in U(\mathcal{K}) \}. \end{aligned}$$

Величины $\mathfrak{C}(\mathcal{K})$, $\gamma(\mathcal{K})$ представляют характеристики массивности компакта $\mathcal{K}$. Первая из них может быть изучена стандартными для теории емкостей методами.

ЛЕММА 8. *Функция $\mathfrak{C}: \mathfrak{K}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ есть емкость Шоке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аксиома возрастания очевидна. Для доказательства непрерывности справа фиксируем $\mathcal{K}_0$ из $\mathfrak{K}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ и функцию f из $U(\mathcal{K}_0)$, для которой $I_\Phi(\nabla f) < \mathfrak{C}(\mathcal{K}_0) + \varepsilon$. Пусть $\alpha(t) = \min\{1, t_+\}$, $\lambda_m(t) = \alpha((1 + 1/m)t)$ ($m = 1, 2, \dots; t \in \mathbb{R}$), $f_m = \lambda_m \circ f$. Очевидно, $f_m \in \text{Lip}(\Omega)$, $I_\Phi(\nabla f_m) < \mathfrak{C}(\mathcal{K}_0) + \varepsilon$ при больших m ($m \geq m_0$), функция f_m равна 1 на некоторой окрестности $\mathcal{G}$ компакта $\mathcal{K}_0$. Если $\mathcal{K} \in \mathfrak{K}(\Omega)$, $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{G}$, то $f_m \in U(\mathcal{K})$, поэтому $\mathfrak{C}(\mathcal{K}) \leq I_\Phi(\nabla f_m) < \mathfrak{C}(\mathcal{K}_0) + \varepsilon$. Непрерывность справа функции $\mathfrak{C}$ доказана.

Пусть $\mathcal{K}_i \in \mathfrak{K}(\Omega)$, $f_i \in U(\mathcal{K}_i)$ ($i = 1, 2$). Тогда функции $g_1 = \max\{f_1, f_2\}$, $g_2 = \min\{f_1, f_2\}$ принадлежат $U(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2)$ и $U(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2)$, соответственно. Сильная субаддитивность функции $\mathfrak{C}$ обычным образом [1], [12] вытекает из равенства $I_\Phi(\nabla g_1) + I_\Phi(\nabla g_2) = I_\Phi(\nabla f_1) + I_\Phi(\nabla f_2)$. Лемма доказана.

Введем аналоги внутренней и внешней емкостей [13, с. 68–70], порождаемых функциями $\mathfrak{C}$ и γ . Положим

$$\mathfrak{C}_*(A) = \sup\{\mathfrak{C}(\mathcal{K}), \mathcal{K} \subset A\}, \quad \gamma_*(A) = \sup\{\gamma(\mathcal{K}), \mathcal{K} \subset A\},$$

считаем $\mathfrak{C}_*(\emptyset) = \gamma_*(\emptyset) = 0$; пусть

$$\mathfrak{C}^*(A) = \inf\{\mathfrak{C}_*(\mathcal{G}), \mathcal{G} \supset A\}, \quad \gamma^*(A) = \inf\{\gamma_*(\mathcal{G}), \mathcal{G} \supset A\},$$

где инфимум берется по всем открытым множествам $\mathcal{G} \subset \Omega$, содержащим A . Из теории емкостей Шоке [12]–[14] следует, что функция $\mathfrak{C}^*: \mathfrak{M}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ есть обобщенная емкость и $\mathfrak{C}^*(\mathcal{K}) = \mathfrak{C}(\mathcal{K})$ ($\mathcal{K} \in \mathfrak{K}(\Omega)$).

ЛЕММА 9. 1) Если $\gamma_*(A) < 1$, то $\mathfrak{C}_*(A) \leq \gamma_*(A)$.

2) Если $\gamma^*(A) < 1$, то $\mathfrak{C}^*(A) \leq \gamma^*(A)$.

3) Если $\mathfrak{C}^*(A) < 1$, то $\gamma^*(A) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma_*(A) < \delta < 1$. Для любого компакта $\mathcal{K} \subset A$ найдется функция f из $U(\mathcal{K})$, для которой $I_\Phi(\nabla f/\delta) < 1$. Так как $I_\Phi(\nabla f) \leq \delta I_\Phi(\nabla f/\delta) < \delta$, то $\mathfrak{C}(\mathcal{K}) < \delta$. Следовательно, $\mathfrak{C}_*(A) \leq \delta$, что доказывает утверждение 1).

Если $\gamma^*(A) < \delta < 1$, то существует открытое множество $\mathcal{G} \supset A$, $\mathcal{G} \subset \Omega$, для которого $\gamma_*(\mathcal{G}) < \delta$. В силу уже доказанного $\mathfrak{C}_*(\mathcal{G}) \leq \gamma_*(\mathcal{G}) < \delta$, поэтому $\mathfrak{C}^*(A) \leq \mathfrak{C}_*(\mathcal{G}) < \delta$, т.е. утверждение 2) также верно.

Пусть $\mathfrak{C}^*(A) < 1$. Найдется такое открытое множество $\mathcal{G} \supset A$, $\mathcal{G} \subset \Omega$, что $\mathfrak{C}_*(\mathcal{G}) < \delta < 1$. Для каждого компакта $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$ существует функция f из $U(\mathcal{K})$, для которой $I_\Phi(\nabla f) < \delta$. Но тогда $\gamma(\mathcal{K}) \leq 1 \quad \forall \mathcal{K} \subset \mathcal{G}$, поэтому $\gamma^*(A) \leq \gamma_*(\mathcal{G}) \leq 1$. Лемма доказана.

Множество $A \subset \Omega$ называют $\mathfrak{C}$ -измеримым (γ -измеримым), если $\mathfrak{C}^*(A) = \mathfrak{C}_*(A)$ ($\gamma^*(A) = \gamma_*(A)$). Поскольку $\mathfrak{C}^*$ есть обобщенная емкость, то (см., например, [12], [13, с. 71–74], [14, с. 11]) все аналитические множества $\mathfrak{C}$ -измеримы. Через $\mathfrak{C}_\lambda^*$, $\mathfrak{C}_\lambda^*$ ниже обозначаются аналоги функций $\mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{C}_*$, возникающие при замене функции $\Phi(\xi)$ функцией $\Phi_\lambda(\xi) = \Phi(\lambda\xi)$ ($\lambda > 0$).

ТЕОРЕМА 4. Если $\mathfrak{C}_\lambda^*(A) = \mathfrak{C}_*^\lambda(A) \quad \forall \lambda > 0$, то множество A γ -измеримо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathfrak{C}_\lambda^*(A) = \mathfrak{C}_*^\lambda(A) \quad \forall \lambda > 0$, но $\gamma_*(A) < \gamma^*(A)$. Заменяя в случае необходимости функцию Φ функцией Φ_λ , можно добиться выполнения неравенств $\gamma_*(A) < 1 < \gamma^*(A)$. В силу леммы 9 $\mathfrak{C}_*(A) \leq \gamma_*(A) < 1$. Но тогда $\mathfrak{C}^*(A) = \mathfrak{C}_*(A) < 1$ и согласно лемме 9 $\gamma^*(A) \leq 1$. Противоречие влечет равенство $\gamma^*(A) = \gamma_*(A)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Функция $\gamma^*: \mathfrak{M}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ есть обобщенная емкость; если $B_i \subset \Omega$ ($i = 1, 2, \dots$), то

$$\gamma^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^*(B_i). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим условия I)–III). Условие I) выполнено очевидным образом. Для проверки условия II) фиксируем возрастающую последовательность множеств $A_i \subset \Omega$ ($i = 1, 2, \dots$). Если $A = \bigcup A_i$, то $A_i \subset A$, $\gamma^*(A_i) \leq \gamma^*(A)$, поэтому $\sup \gamma^*(A_i) \leq \gamma^*(A)$.

Предположим, что $\sup \gamma^*(A_i) < \gamma^*(A)$. Без ограничения общности считаем, что $\gamma^*(A_i) < \delta < 1 < \gamma^*(A)$. В силу леммы 9 $\mathfrak{C}^*(A_i) \leq \delta \quad \forall i$, а поскольку $\mathfrak{C}^*$ есть обобщенная емкость, то $\mathfrak{C}^*(A) \leq \delta < 1$. Снова используя лемму 9, получаем $\gamma^*(A) \leq 1$. Противоречие влечет II).

Пусть $\mathcal{K}_i \in \mathfrak{K}(\Omega)$ ($i = 1, 2, \dots$), $\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \dots \supset \mathcal{K}_i \supset \dots$ и $F = \bigcap \mathcal{K}_i$. Тогда $F \subset \mathcal{K}_i$, поэтому $\gamma^*(F) \leq \inf \gamma^*(\mathcal{K}_i)$. Если $\gamma^*(F) < \inf \gamma^*(\mathcal{K}_i)$, то, не уменьшая общности, можно считать, что $\gamma^*(F) < \delta < 1 < \gamma^*(\mathcal{K}_i)$ (в противном случае можно заменить функцию Φ функцией Φ_λ). Согласно лемме 9 $\mathfrak{C}^*(F) \leq \gamma^*(F) < \delta$. Поскольку $\mathfrak{C}^*(F) = \mathfrak{C}(F)$ и $\mathfrak{C}$ есть емкость Шоке, то существует такая окрестность $\mathcal{G}$ компакта F , что $\mathfrak{C}(\mathcal{K}) < \delta$ для любого компакта $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$, $F \subset \mathcal{K}$. Так как $F = \bigcap \mathcal{K}_i$, то $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{G} \quad \forall i \geq i_0$. Следовательно, $\mathfrak{C}(\mathcal{K}_i) < \delta \quad \forall i \geq i_0$ и в силу леммы 9 $\gamma^*(\mathcal{K}_i) \leq 1 \quad \forall i \geq i_0$. Полученное противоречие влечет III). Первое утверждение теоремы доказано.

Доказательство неравенства (10) достаточно провести в случае, когда ряд в правой части (10) сходится. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого натурального числа найдем открытое множество $\mathcal{G}_i \supset B_i$, удовлетворяющее требованию $\gamma_*(\mathcal{G}_i) < \gamma^*(B_i) + \varepsilon/2^i$. Если компакт $\mathcal{K}$ принадлежит $\bigcup \mathcal{G}_i$, то $\mathcal{K} \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{G}_i$ при некотором N . Поэтому найдутся такие компакты $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_N$, что $\mathcal{K}_i \subset \mathcal{G}_i$ ($i = 1, \dots, N$) и $\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{K}_i$ [13, с. 68]. Фиксируем функцию f_i из $U(\mathcal{K}_i)$, для которой

$$\|\nabla f_i; L^\Phi\| < \gamma(\mathcal{K}_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \quad (i = 1, \dots, N).$$

Функция $f = |f_1| + \dots + |f_N|$ принадлежит $U(\mathcal{K})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \gamma(\mathcal{K}) &\leq \|\nabla f; L^\Phi\| \leq \sum_{i=1}^N \|\nabla |f_i|; L^\Phi\| < \sum_{i=1}^N \left(\gamma(\mathcal{K}_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left(\gamma_*(\mathcal{G}_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) < \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^*(B_i) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности компакта $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$ справедлива оценка

$$\gamma_*(\mathcal{G}) < \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^*(B_i) + 2\varepsilon.$$

Так как $\bigcup B_i \subset \mathcal{G}$, то из последней оценки вытекает неравенство (10). Теорема доказана.

Каждая из теорем 4, 5 влечет γ -измеримость аналитических множеств. Обе теоремы без труда переносятся на случай “переменной” функции $\Phi = \Phi(x, \xi)$ [11, с. 202]. Аналогичное замечание относится к основным результатам пунктов 2, 3. Такого рода обобщения представляют интерес для приложений к вариационным и краевым задачам с анизотропными и вырождающимися нелинейностями.

Неравенство (10) выражает свойство полуаддитивности функции γ^* . Остановимся на одном его обобщении.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $H = H(\Omega, \mathbb{R}^n)$ есть ℓ_p -субаддитивное НИП ($1 \leq p < \infty$), $c: \mathfrak{M}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – внешняя емкость, определяемая как стандартное продолжение на $\mathfrak{M}(\Omega)$ H -емкости c_H . Пусть $B_i \subset \Omega$, $b_i = c(B_i)$, $b = (b_i)$, $B = \bigcup B_i$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда

$$c(B) \leq \|b; \ell_p\|. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$, $\mathcal{K}_i \in \mathfrak{K}(\Omega)$, $f_i \in U(\mathcal{K}_i)$ и $\|\nabla f_i; H\| < c_H(\mathcal{K}_i) + \varepsilon$ ($i = 1, 2$). Положим

$$f = \max\{f_1, f_2\}, \quad D = \{x \in \Omega : f_1(x) \geq f_2(x)\}, \quad \mathcal{G} = \Omega \setminus D.$$

Тогда $f \in U(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2)$, $\nabla f = 1_D \nabla f_1 + 1_{\mathcal{G}} \nabla f_2$. Функции $1_D \nabla f_1$, $1_{\mathcal{G}} \nabla f_2$ дизъюнкты, следовательно,

$$\begin{aligned} c_H(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) &\leq \|\nabla f; H\| \leq (\|\nabla f_1; H\|^p + \|\nabla f_2; H\|^p)^{1/p} \\ &\leq (c_H^p(\mathcal{K}_1) + c_H^p(\mathcal{K}_2))^{1/p} + \sqrt[p]{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Устремляя ε к нулю и используя метод математической индукции, получаем для произвольных компактов $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_N$ неравенство

$$c_H(\mathcal{K}_1 \cup \dots \cup \mathcal{K}_N) \leq (c_H^p(\mathcal{K}_1) + \dots + c_H^p(\mathcal{K}_N))^{1/p}.$$

Если компакт $\mathcal{K}$ содержится в объединении последовательности открытых множеств B_i ($i = 1, 2, \dots$), то найдутся такие компакты $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_N$, что $\mathcal{K}_i \subset B_i$ ($i = 1, \dots, N$) и $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \dots \cup \mathcal{K}_N$ [13, с. 68]. Отсюда вытекает (11) для произвольных открытых множеств B_i ($i = 1, 2, \dots$). Общий случай получается теперь путем внешней аппроксимации произвольных множеств открытыми. Теорема доказана.

Суммируем элементы новизны статьи: 1) введено и изучено понятие мажорируемости для НИП; 2) исследованы ранее неизвестные характеристики компактов; 3) установлены новые емкостные неравенства; 4) расширен класс пространств, для которых функциональные неравенства типа теорем вложения эквивалентны геометрическим неравенствам. Общие результаты позволяют получить принципиально новые теоремы вложения для пространств со смешанной нормой и анизотропных пространств Орлича.

Список литературы

1. *Мазья В. Г.* О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных // Проблемы мат. анализа. №3. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. С. 33–68.
2. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
4. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
5. *Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 24. М.: ВИНТИ, 1986. С. 3–163.
6. *Митягин Б. С., Шварц А. С.* Функторы в категориях банаховых пространств // УМН. 1964. Т. 19, №2. С. 65–130.
7. *Забрейко П. П.* Идеальные пространства вектор-функций // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31, №4. С. 298–301.
8. *Забрейко П. П., Нгуен Хонг Тхай.* Теория двойственности идеальных пространств вектор-функций // ДАН СССР. 1990. Т. 311, №6. С. 1296–1299.
9. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
10. *Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
11. *Левин В. Л.* Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. М.: Наука, 1985.
12. *Choquet G.* Theory of capacities // Ann. Inst. Fourier. 1953. V. 5. P. 131–295.
13. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1964.
14. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств. М.: Мир, 1971.
15. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
16. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
17. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
18. *Климов В. С.* О перестановках дифференцируемых функций // Матем. заметки. 1971. Т. 9, №6. С. 629–638.
19. *Климов В. С.* Теоремы вложения и геометрические неравенства // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40, №3. С. 645–671.
20. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. Л.: Наука, 1980.

Орловский государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
09.12.1994