Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. B. Korotkov, On one class of linear operators in L_2 , *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 1, 118–122

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.110>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.82.47.9

April 26, 2023, 10:08:17

УДК 517.983+517.968.25

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В L_2

В. Б. Коротков

Аннотация. Введен класс B_0 линейных операторов в L_2 , удовлетворяющих обобщенному условию фон Неймана; установлены различные достаточные условия принадлежности операторов классу B_0 ; рассмотрены линейные функциональные уравнения 1-го и 2-го родов в L_2 с операторами из класса B_0 .

DOI 10.33048/smzh.2019.60.110

Ключевые слова: замыкаемый оператор, предельный спектр, обобщенное условие фон Неймана, линейное функциональное уравнение 1-го или 2-го рода, интегральное уравнение 1-го или 2-го рода.

Пусть (X, μ) — пространство с мерой μ , $L_2 := L_2(X, \mu)$ — пространство всех μ -измеримых функций на X с суммируемым квадратом, $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ — норма и скалярное произведение в L_2 . Мера μ называется *сепарабельной*, если L_2 — сепарабельное пространство. *Атомом меры μ* называется множество положительной меры, не представимое в виде объединения двух непересекающихся множеств с положительными мерами. Будем говорить, что *мера μ не является чисто атомической*, если в X имеется множество e , $\mu e > 0$, не содержащее атомов меры μ . Мера μ называется *σ -конечной*, если найдутся множества X_n , $\mu X_n < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

Всюду в статье предполагается, что μ — сепарабельная σ -конечная мера, не являющаяся чисто атомической. Всем этим условиям удовлетворяет мера Лебега измеримых по Лебегу множеств евклидова пространства или вещественной оси.

Будем говорить, что 0 *принадлежит предельному спектру $\sigma_c(H)$* линейного оператора $H : D_H \subset L_2 \rightarrow L_2$, если в D_H существует ортонормированная система $\{h_n\}$ такая, что $\|Hh_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В 1935 г. фон Нейман установил следующий фундаментальный результат.

Теорема 1 [1]. Пусть S — самосопряженный оператор в L_2 . Если $0 \in \sigma_c(S)$, то S унитарно эквивалентен интегральному оператору с ядром $K(s, t)$, удовлетворяющим условию Карлемана

$$\int_X |K(s, t)|^2 d\mu(t) < \infty \quad (1)$$

для почти всех $s \in X$.

Будем говорить, что линейный оператор T в L_2 *удовлетворяет обобщенному условию фон Неймана*, если $0 \in \sigma_c(T^*)$, где T^* — сопряженный к T оператор. Совокупность всех линейных операторов в L_2 , удовлетворяющих обобщенному условию фон Неймана, обозначим через B_0 .

Теорема 1 была обобщена автором [2, 3] и Вайдманом [4].

Теорема 2 [2–4]. Пусть T — плотно определенный замыкаемый линейный оператор в L_2 . Если $T \in B_0$, то T унитарно эквивалентен интегральному оператору с ядром $K(s, t)$, удовлетворяющим условию Карлемана (1).

В связи с теоремами 1, 2 и их приложениями представляет интерес задача об условиях принадлежности операторов в L_2 классу B_0 . Ниже устанавливаются различные условия такой принадлежности.

Нам потребуются следующие определения и обозначения.

Назовем множество из L_2 *компактным по мере*, если каждая последовательность его элементов содержит подпоследовательность, сходящуюся по мере на любом множестве конечной меры.

Обозначим через $\tilde{B}(L_2)$ совокупность всех плотно определенных в L_2 замыкаемых линейных операторов, действующих в L_2 .

Пусть $H \in \tilde{B}(L_2)$ и $\overline{H}$ — замыкание H . Введем нормы

$$\|x\|_H = (\|x\|^2 + \|Hx\|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in D_H, \quad \|y\|_{\overline{H}} = (\|y\|^2 + \|\overline{H}y\|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y \in D_{\overline{H}}.$$

Имеем $\|x\|_H = \|x\|_{\overline{H}}$, если $x \in D_H$. Положим

$$K(H) := \{x \mid x \in D_H, \|x\|_H \leq 1\}, \quad K(\overline{H}) := \{y \mid y \in D_{\overline{H}}, \|y\|_{\overline{H}} \leq 1\}.$$

Тогда $K(\overline{H})$ содержится в замыкании множества $K(H)$ по норме $\|\cdot\|_{\overline{H}}$, поэтому $\overline{H}K(\overline{H})$ содержится в замыкании множества $HK(H)$ по норме L_2 . Отсюда вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $H \in \tilde{B}(L_2)$ и для некоторого множества e , $\mu e > 0$, множество $P_e HK(H)$ компактно по мере. Тогда $P_e \overline{H}K(\overline{H})$ компактно по мере; здесь P_e — оператор умножения на характеристическую функцию χ_e множества e : $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_2$.

Теорема 3. Пусть $T \in \tilde{B}(L_2)$ и множество e , $0 < \mu e < \infty$, не содержит атомов меры μ . Если множество $P_e TK(T)$ компактно по мере, то $T \in B_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\overline{T}$ — замыкание T . Имеем $\overline{T} = T^{**}$. Пользуясь полярным разложением замкнутого оператора [5, гл. VI, § 2, п. 7], представим оператор T^* в виде $T^* = US$, где S — самосопряженный оператор, U — частично изометрический оператор. Отсюда $\overline{T} = SU^*$. В силу свойств полярного разложения $S = \overline{T}U$. Покажем, что $0 \in \sigma_c(S)$. Предположим противное. Тогда 0 либо не принадлежит спектру S , либо является собственным значением S конечной кратности, изолированным от остального спектра S . Обозначим через D ортопроектор на нулевое подпространство оператора S . Пусть $[-\delta, \delta]$, $0 < \delta < 1$, — интервал, не содержащий точек спектра S , кроме, быть может, нуля. Рассмотрим оператор $S_0 = \delta D + S$. Покажем, что множество $P_e S_0 K(S_0)$ компактно по мере. Так как $P_e TK(T)$ компактно по мере, по лемме 1 $P_e \overline{T}K(\overline{T})$ компактно по мере. Пусть $x \in K(S)$. Воспользуемся равенством $S = \overline{T}U$. Имеем $\|x\|^2 + \|Sx\|^2 \leq 1$ и $Ux \in D_{\overline{T}}$. Отсюда и из $\|U\| \leq 1$ получим $\|Ux\|^2 + \|\overline{T}Ux\|^2 \leq \|x\|^2 + \|Sx\|^2 \leq 1$. Следовательно, $Ux \in K(\overline{T})$ и $Sx = \overline{T}Ux \in \overline{T}K(\overline{T})$. Значит, $SK(S) \subset \overline{T}K(\overline{T})$ и $P_e SK(S)$ компактно по мере. Отсюда и из компактности конечномерного оператора D следует, что $P_e S_0 K(S_0)$ компактно по мере. Оператор S_0 имеет обратный S_0^{-1} , отображающий единичный шар L_2 в множество

$$\frac{2}{\delta} K(S_0) := \left\{ g \mid g = \frac{2}{\delta} f, f \in K(S_0) \right\}.$$

Рассмотрим равномерно ограниченную ортонормированную последовательность функций g_n с носителями в e . В качестве $\{g_n\}$ можно взять ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{n,e}\}$ (их определение см., например, в [6, гл. 1, § 1]). Положим $f_n = S_0^{-1}g_n$. Имеем $\{f_n\} \subset \frac{2}{\delta}K(S_0)$. Значит, множество $\{P_e S_0 f_n\}$ компактно по мере. Но $P_e S_0 f_n = P_e S_0 S_0^{-1}g_n = P_e g_n = g_n$. Таким образом, множество $\{g_n\}$ компактно по мере. Так как при этом $|g_n(s)| \leq C$, $n = 1, 2, \dots$, для почти всех $s \in e$, то $\{g_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся по норме в L_2 , что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $0 \in \sigma_c(S)$. Из $T^* = US$ следует, что $0 \in \sigma_c(T^*)$ и $T \in B_0$. $\square$

Следствие. Пусть $T \in \tilde{B}(L_2)$ — интегральный оператор с ядром $K(s, t)$. Если существуют не содержащее атомов меры μ множество E , $\mu E > 0$, и измеримая почти всюду конечная почти всюду положительная на X функция $b(s)$ такие, что

$$g_E(t) := \int_E |K(s, t)| b(s) d\mu(s) \in L_2, \quad (2)$$

то $T \in B_0$.

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из L_2 . В силу (2) имеем

$$\begin{aligned} \int_X \int_X \chi_E(s) |K(s, t)| |f(t)| d\mu(t) b(s) d\mu(s) \\ = \int_X \int_E |K(s, t)| b(s) d\mu(s) |f(t)| d\mu(t) \leq \|f\| \|g_E\| < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_X \chi_E(s) |K(s, t)| |f(t)| d\mu(t) < \infty$$

для почти всех $s \in X$, так что ядро $\chi_E(s)K(s, t)$ порождает интегральный оператор T_E , определенный на всем L_2 и действующий в пространстве L_0 всех измеримых почти всюду конечных функций. По теореме I.6.2 из [6] найдется множество $e \subset E$, $\mu e > 0$, такое, что $P_e T_E : L_2 \rightarrow L_2$ — компактный оператор. Следовательно, множество $P_e T K(T) = P_e T_E K(T)$ компактно по мере. $\square$

Теорема 4. Пусть $T \in \tilde{B}(L_2)$ и существуют множества e_n , $0 < \mu e_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in K(T)} \|P_{e_n} T f\| = 0. \quad (3)$$

Тогда $T \in B_0$.

Доказательство. Пусть $T^* = US$ — полярное разложение оператора T^* и $\bar{T}$ — замыкание T . Из включения $SK(S) \subseteq \bar{T}K(\bar{T})$, полученного в доказательстве теоремы 3, следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in K(S)} \|P_{e_n} S f\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in K(\bar{T})} \|P_{e_n} \bar{T} f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in K(T)} \|P_{e_n} T f\| = 0. \quad (4)$$

Покажем, что $0 \in \sigma_c(S)$. Предположим противное и рассмотрим, как в доказательстве теоремы 3, оператор $S_0 = \delta D + S$, где D — конечномерный ортопроектор на $\ker S$, $0 < \delta < 1$, и промежуток $[-\delta, \delta]$ не содержит точек спектра S , кроме, быть может, нуля. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|f\| \leq 1} \|P_{e_n} D f\| = 0. \quad (5)$$

Из (4), (5) и включения $K(S_0) \subset 3K(S)$ получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{f \in K(S_0)} \|P_{e_n} S_0 f\| = 0. \quad (6)$$

Выберем для каждого n функцию u_n , $\|u_n\| = 1$, с носителем в e_n и положим $v_n = S_0^{-1} u_n$. Тогда в силу (6) и $v_n \in \frac{2}{\delta} K(S_0)$ будем иметь

$$1 = \|u_n\| = \|P_{e_n} u_n\| = \|P_{e_n} S_0 v_n\| \leq \frac{2}{\delta} \sup_{f \in K(S_0)} \|P_{e_n} S_0 f\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Из этого противоречия следует, что $0 \in \sigma_c(S)$. Отсюда и из $T^* = US$ вытекает, что $0 \in \sigma_c(T^*)$. $\square$

Теорема 5. Пусть $T \in \tilde{B}(L_2)$ и существуют не содержащее атомов меры μ множество e , $0 < \mu e < \infty$, и измеримая почти всюду конечная функция $\Lambda(s)$ на e такие, что для всех $f \in D_T$ и почти всех $s \in e$

$$|(Tf)(s)| \leq \Lambda(s) \|f\|_T,$$

где $\|f\|_T = (\|f\|^2 + \|Tf\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Тогда $T \in B_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем постоянную $C > 0$ так, чтобы множество $E = \{s \mid s \in e, \Lambda(s) \leq C\}$ имело положительную меру. Возьмем последовательность множеств e_n из E с убывающими к нулю положительными мерами. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{\|f\|_T \leq 1} \|P_{e_n} Tf\| \leq C \sqrt{\mu e_n} \rightarrow 0. \quad \square$$

Следствие. Пусть $T \in \tilde{B}(L_2)$ — интегральный оператор с ядром $K(s, t)$, удовлетворяющим условию Карлемана

$$K(s) := \left(\int_X |K(s, t)|^2 d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (7)$$

для почти всех $s \in X$. Тогда $T \in B_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $f \in D_T$ и почти всех $s \in X$

$$|(Tf)(s)| \leq K(s) \|f\| \leq K(s) \|f\|_T. \quad \square$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Достаточные условия принадлежности классу B_0 в теоремах 3–5 и их следствиях являются в некотором смысле и необходимыми. Действительно, пусть $T \in \tilde{B}(L_2)$ и $T \in B_0$. Тогда по теореме 2 найдется унитарный оператор V такой, что $\tau = VTV^{-1}$ — интегральный оператор с ядром $K(s, t)$, удовлетворяющим условию Карлемана (7). Нетрудно показать, что для оператора τ выполнены все условия теорем 3–5.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В связи со следствием теоремы 3 и следствием теоремы 5 возникает вопрос: верно ли, что $0 \in \sigma_c(T^*)$, где T — произвольный интегральный оператор из $\tilde{B}(L_2)$? Отрицательный ответ на этот вопрос дает

ПРИМЕР. Пусть $T_1 : L_\infty(0, 1) \subset L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ — оператор, определяемый равенством

$$T_1 f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, \frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{m E_n}} \right) w_n, \quad f \in L_\infty(0, 1),$$

где $\{w_n\}$ — ортонормированный базис Уолша, $\{E_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из $(0, 1)$ такая, что $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{m E_n} < \infty$, здесь

m — мера Лебега. Тогда T_1 — замыкаемый плотно определенный интегральный оператор в L_2 с ядром

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(s) \frac{\chi_{E_n}(t)}{\sqrt{mE_n}},$$

но $0 \notin \sigma_c(T_1^*)$, так как $\|T_1^* f\| = \|f\|$ для любого $f \in L_2(0, 1)$.

В заключение приведем в качестве приложения следующую теорему.

Теорема 6. Пусть $T \in \tilde{B}(L_2)$ и $T \in B_0$. Тогда линейное функциональное уравнение

$$\alpha x - \lambda T x = f \in L_2$$

может быть сведено линейным непрерывным обратимым преобразованием при $\alpha = 0$ к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода в L_2 с ядерным оператором, а при $\alpha \neq 0$ — к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода в L_2 с ядром Карлемана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} h_{n,\lambda}(t), \quad (8)$$

где $\{h_{n,\lambda}\} \subset L_2$, $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами.

Справедливость этой теоремы непосредственно следует из построений статьи [7]. Отметим еще, что в [8] разработаны два приближенных метода решения интегральных уравнений 2-го рода с ядрами (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Von Neumann J. Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators // Actual. Sci. Ind. Paris. 1935. N 229. P. 38–55.
2. Коротков В. Б. О характеристических свойствах интегральных операторов с ядрами карлемановского типа // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 1. С. 103–127.
3. Коротков В. Б. Классификация и характеристические свойства карлемановских операторов // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 6. С. 1274–1277.
4. Weidmann J. Carlemanoperatoren // Manuscripta Math. 1970. V. 2, N 1. P. 1–38.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
6. Коротков В. Б. Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
7. Коротков В. Б. О частично компактных по мере неограниченных линейных операторах в L_2 // Владикавк. мат. журн. 2016. Т. 18, № 1. С. 36–41.
8. Коротков В. Б. Интегральные уравнения третьего рода с неограниченными операторами // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 333–343.

Поступила в редакцию 23 августа 2018 г.

После доработки 23 августа 2018 г.

Принята к публикации 17 октября 2018 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
smz@math.nsc.ru