Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. V. Kuznetsov, Absence of nontrivial symmetries to the heat equation in Goursat groups of dimension at least 4, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 1, 141–147

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.112>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 34.239.49.27

April 26, 2023, 14:43:42

УДК 512.813.52+514.763.85

ОТСУТСТВИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ГРУППАХ ГУРСА РАЗМЕРНОСТИ 4 И ВЫШЕ М. В. Кузнецов

Аннотация. При помощи метода продолжений исследованы однопараметрические группы симметрий уравнения теплопроводности $\partial_t p = \Delta p$, где $\Delta = X_1^2 + X_2^2$ — сублапласиан, построенный по распределению Гурса $\text{span}(\{X_1, X_2\})$ в $\mathbb{R}^n$, где векторные поля X_1 и X_2 удовлетворяют коммутационным соотношениям $[X_1, X_j] = X_{j+1}$ (с обозначением $X_{n+1} = 0$) и $[X_j, X_k] = 0$ при $j \geq 1$ и $k \geq 1$. Показано, что при $n \geq 4$ их не существует (за исключением линейных преобразований решений, допускаемых любым линейным уравнением).

DOI 10.33048/smzh.2019.60.112

Ключевые слова: сублапласиан, нильпотентные группы Ли, метод продолжений.

1. Введение

В римановой геометрии известно, что спектр оператора Лапласа — Бельтрами содержит некоторую, хотя и не всю информацию о геометрических инвариантах многообразия, на котором он задан (например, однозначно восстанавливаются размерность, тензор кривизны, для компактных многообразий — объем, для многообразий с краем — площадь края). Для получения этой информации применяются асимптотики фундаментального решения уравнения теплопроводности при малых значениях времени. Одной из важнейших работ в этом направлении является статья [1], идеи которой использовались во многих исследованиях по смежным вопросам.

Часть этих результатов удалось с существенными ограничениями перенести (например, в [2, 3]) на субримановы многообразия, где в роли аналога оператора Лапласа — Бельтрами выступает *сублапласиан* $\Delta_\mu = \sum_{j=1}^m (X_j^2 + \text{div}_\mu(X_j)X_j)$, m — размерность горизонтального распределения $\text{span}(\{X_j : 1 \leq j \leq m\})$ (для простоты считаем, что векторные поля $\{X_j : 1 \leq j \leq m\}$ линейно независимы, удовлетворяют условию Хермандера и порождают один и тот же вектор роста во всех точках), μ — нигде не обращающаяся в нуль гладкая дифференциальная форма степени, равной размерности многообразия (форма объема), оператор div_μ (называемый *дивергенцией*) сопоставляет векторному полю X гладкую функцию, определяемую по формуле $\text{div}_\mu(X) \cdot \mu = d(i_X(\mu))$, где i_X — оператор внутреннего произведения дифференциальных форм (действующий

Работа частично выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (грант № 1.12875.2018/12.1).

подстановкой векторного поля X в первый аргумент формы), d — оператор внешнего дифференцирования. Среди трудностей, возникающих при попытке описания геометрических характеристик субримановых многообразий, можно указать: 1) отсутствие эллиптичности сублапласиана, 2) возможное наличие аномальных геодезических, 3) несовпадение алгебраической, хаусдорфовой и геодезической размерностей, 4) проблемы с определением кривизны, 5) требование условия Хермандера и значительное усложнение структуры многообразия в случае его невыполнения либо выполнения с различными векторами роста и т. д.

Знание какой-либо формулы (пусть даже не в элементарных функциях) для фундаментального решения, обычно получаемой при помощи понижения порядка уравнения теплопроводности (или, точнее, его преобразования Фурье, которое обычно выглядит намного проще исходного уравнения), существенно помогло бы в деле поиска нужных асимптотик, но такую формулу далеко не всегда удастся получить.

В настоящей статье мы исследуем проблему поиска таких формул для одного важного класса групп Ли — так называемых групп Гурса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Группой Гурса размерности n будем называть нильпотентную группу Ли в $\mathbb{R}^n$ с двумерным левоинвариантным распределением H_1 (называемым *распределением Гурса*), которое имеет вектор роста $(2, 3, \dots, n-1, n)$ (т. е. $\dim H_k = k+1$ при $1 \leq k \leq n-1$, где $H_{k+1} = H_k + [H_k, H_k]$).

Операцию умножения в группе Гурса можно записать так:

$$\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j \star \sum_{k=1}^n y_k \mathbf{e}_k = (x_1 + y_1) \mathbf{e}_1 + \sum_{j=2}^n \left(x_j + \sum_{k=2}^j \left(\frac{x_1^{j-k}}{(j-k)!} y_k \right) \right) \mathbf{e}_j,$$

причем $\mathbf{0} = \sum_{j=1}^n 0 \mathbf{e}_j$ — нейтральный элемент.

Будем пользоваться следующим координатным представлением для распределения H_1 :

$$H_1 = \text{span}(\{X_1, X_2\}), \quad X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x_1^k}{k!} \partial_{k+2}.$$

Можно проверить, что $(\mathbb{R}^n, \star, \mathbf{0})$ действительно является группой, а векторные поля X_1 и X_2 инвариантны относительно левых сдвигов по операции $\star$, а также что H_1 имеет вектор роста $(2, 3, \dots, n-1, n)$. Вводя на группе Гурса n -мерную меру Лебега (которая также является мерой Хаара для этой группы) и соответствующую форму объема, определим сублапласиан: $\Delta = X_1^2 + X_2^2$ (вследствие унимодулярности группы Гурса и левой инвариантности векторных полей X_1 и X_2 дивергентные слагаемые равны нулю, так что индекс μ писать не будем). Уравнение $\partial_t p(t, x) = \Delta p(t, x)$ будем называть *уравнением теплопроводности*, а его решение при (обобщенном) начальном условии $p(0, x) = \delta_0(x)$ — *фундаментальным решением*.

Как выясним далее, справедлива

Теорема 1. В группах Гурса при $n \geq 4$ понизить порядок уравнения теплопроводности невозможно; иначе говоря, оно не допускает однопараметрических групп симметрий, отличных от (допустимых любым линейным уравнением) групп линейных преобразований решений.

Однако при $n = 3$ (т. е. в случае группы Гейзенберга) это сделать можно. Более того, для фундаментального решения уравнения $\partial_t p = \Delta p$ в группе Гейзенберга есть явная формула (см., например, [4], где она получена как раз при помощи понижения порядка).

Отметим заранее, что в ходе доказательства даже не потребуется начальное условие: поиск нетривиальных симметрий уравнения уже приводит к переопределенной системе.

2. Предварительные упрощения

Применяя преобразование Фурье к уравнению $\partial_t p = \Delta p$ по переменным x_k при $k \geq 2$ (двойственная к x_k переменная обозначена через y_k), получим уравнение относительно $\hat{p}$:

$$\partial_t \hat{p} = \partial_1^2 \hat{p} - \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{x_1^k}{k!} y_{k+2} \right)^2 \hat{p}.$$

Это уравнение значительно проще исходного, так как дифференцирование в нем происходит лишь по t и x_1 ; переменные $(y_k)_{2 \leq k \leq n}$ можно считать параметрами. Многочлен в правой части имеет степень $2n - 4$.

Чтобы упростить обозначения, будем писать вместо x_1 просто x , вместо $\partial_1 - \partial_x$, неизвестную функцию будем обозначать через p вместо $\hat{p}$ (рассматривая преобразованное уравнение как бы отдельно от исходного уравнения теплопроводности), а $\left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{x_1^k}{k!} y_{k+2} \right)^2$ — через $Q(x)$; уравнение переписется в виде $\partial_t p = \partial_x^2 p - Qp$.

Как выясним далее, то, что Q — многочлен специального вида, на окончательный результат никак не повлияет; важно лишь, что это многочлен по переменной x , не зависящий ни от t , ни от p , и что его степень равна $2n - 4$.

3. Метод продолжений

Используемый в настоящей статье метод описан в очень общем виде в [5]. Там приведены все основные определения, необходимые для его применения, и некоторые полезные формулы, которые будут использоваться в нижеследующих выкладках, составляющих доказательство теоремы 1.

Ключевая идея этого метода состоит в том, что неизвестная функция и ее производные всех необходимых порядков объявляются (вместе с исходными независимыми переменными) переменными большего (так называемого *продолженного*) пространства, или *пространства струй*. Под *струей порядка k* в некоторой точке понимается класс эквивалентности функций, имеющих в этой точке одно и то же разложение Тейлора до степени k включительно; пространство струй $J^k M$ получается дизъюнктивным объединением множеств струй во всех точках многообразия-базы M независимых переменных. Сопоставляя исходной функции p поверхность P , состоящую из струй этой функции во всех точках, можно преобразовать дифференциальное уравнение в алгебраическое уравнение в пространстве струй, которому должны удовлетворять все точки P . Если исходное уравнение допускало группу симметрий, порождаемую некоторым векторным полем S , то уравнение в продолженном пространстве будет допускать группу симметрий, инфинитезимальным генератором которой является его *продолжение* на пространство струй. Симметрии ищутся исходя из

того, что действие продолженного поля на алгебраическое уравнение, полученное из исходного дифференциального, должно давать тождество на решениях дифференциального уравнения. Если было известно какое-либо решение исходного дифференциального уравнения, то его можно перенести вдоль S — это и есть понижение порядка.

Применительно к рассматриваемой задаче это означает следующее. В нашем случае $M = \mathbb{R}^2$ (независимых переменных две); в качестве продолженного пространства возьмем $J^2\mathbb{R}^2$, так как исходное уравнение имеет второй порядок. Пусть

$$S = \tau(t, x, p)\partial_t + \xi(t, x, p)\partial_x + \psi(t, x, p)\partial_p$$

— инфинитезимальный генератор какой-либо однопараметрической группы симметрий уравнения $\partial_t p = \partial_x^2 p - Qp$. Его продолжение в $J^2\mathbb{R}^2$ запишется в виде

$$\begin{aligned} S_2 = & \tau(t, x, p)\partial_t + \xi(t, x, p)\partial_x + \psi(t, x, p)\partial_p \\ & + \psi_{(1,0)}(t, x, p, p_t)\partial_{p_t} + \psi_{(0,1)}(t, x, p, p_x)\partial_{p_x} + \psi_{(2,0)}(t, x, p, p_t, p_{t,t})\partial_{p_{t,t}} \\ & + \psi_{(1,1)}(t, x, p, p_t, p_x, p_{t,x})\partial_{p_{t,x}} + \psi_{(0,2)}(t, x, p, p_x, p_{x,x})\partial_{p_{x,x}}. \end{aligned}$$

Здесь буквой p с индексами обозначены переменные производных неизвестной функции по аргументам, соответствующим этим индексам, а коэффициенты $\psi_{(\alpha,\beta)}$, стоящие при базисных операторах дифференцирования по $\underbrace{p_t \dots t}_{\alpha \text{ штук}} \underbrace{x \dots x}_{\beta \text{ штук}}$

(ради простоты обозначений эту переменную будем сокращенно писать в виде $p_{t^\alpha x^\beta}$), вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} \psi_{(0,0)} &= \psi, \\ \psi_{(\alpha+1,\beta)} &+ = D_t \psi_{(\alpha,\beta)} - (p_{t^{\alpha+1}x^\beta} D_t \tau + p_{t^\alpha x^{\beta+1}} D_t \xi), \\ \psi_{(\alpha,\beta+1)} &= D_x \psi_{(\alpha,\beta)} - (p_{t^{\alpha+1}x^\beta} D_x \tau + p_{t^\alpha x^{\beta+1}} D_x \xi), \end{aligned}$$

в которых через D_z (здесь z — одна из независимых переменных, т. е. t или x) обозначен формальный оператор «полного» дифференцирования по переменной z :

$$D_z = \partial_z + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} p_{t^\alpha x^\beta, z} \partial_{p_{t^\alpha x^\beta}}.$$

На самом деле все применения этого оператора приводят к конечным суммам, поскольку функции, к которым он применяется в рекуррентных формулах, зависят лишь от конечного числа переменных вида $p_{t^\alpha x^\beta}$.

Для вывода этих формул асимптотику группы симметрий, параметризованной вещественным числом a , при $a \rightarrow 0$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_a(t, x, p) &= t + a\tau(t, x, p) + o(a), \\ \mathfrak{X}_a(t, x, p) &= x + a\xi(t, x, p) + o(a), \\ \mathfrak{P}_a(t, x, p) &= p + a\psi(t, x, p) + o(a), \end{aligned}$$

а затем вычислить производные преобразованной неизвестной функции по преобразованным переменным с точностью до первого порядка по a . Тогда $\psi_{(\alpha,\beta)}$ находится из того, что при $a \rightarrow 0$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} \mathfrak{P}_a}{\partial^\alpha \mathfrak{T}_a \partial^\beta \mathfrak{X}_a} = p_{t^\alpha x^\beta} + a\psi_{(\alpha,\beta)}(t, x, (p_{t^\kappa x^\lambda})_{0 \leq \kappa \leq \alpha, 0 \leq \lambda \leq \beta}) + o(a).$$

В общей ситуации продолжение векторного поля именно так и определяется. Рекуррентную формулу для его коэффициентов, записанную в векторном виде, читатель может найти в [5, гл. I, § 4, формула (8.4)].

Воспользовавшись формулами для вычисления $\psi_{(\alpha,\beta)}$, найдем

$$\begin{aligned} S_2(p_{x,x} - Qp - p_t) = & K_0 + K_1p_t + K_2p_x + K_3p_t^2 + K_4p_tp_x + K_5p_x^2 \\ & + K_6p_tp_x^2 + K_7p_x^3 + K_8p_{t,x} + K_9p_{x,x} + K_{10}p_xp_{t,x} + K_{11}p_tp_{x,x} + K_{12}p_xp_{x,x}, \end{aligned}$$

где коэффициенты, обозначенные буквой K с индексами, таковы (через Q' обозначена производная многочлена Q по переменной x):

$$\begin{aligned} K_0 = -\xi p Q' - \psi Q - \partial_t \psi + \partial_x^2 \psi, \quad K_1 = \partial_t \tau - \partial_p \psi - \partial_x^2 \tau, \quad K_2 = \partial_t \xi - \partial_x^2 \xi + 2\partial_p \partial_x \psi, \\ K_3 = \partial_p \tau, \quad K_4 = \partial_p \xi - 2\partial_p \partial_x \tau, \quad K_5 = -2\partial_p \partial_x \xi + \partial_p^2 \psi, \quad K_6 = -\partial_p^2 \tau, \\ K_7 = -\partial_p^2 \xi, \quad K_8 = -2\partial_x \tau, \quad K_9 = -2\partial_x \xi + \partial_p \psi, \\ K_{10} = -2\partial_p \tau, \quad K_{11} = -\partial_p \tau, \quad K_{12} = -3\partial_p \xi. \end{aligned}$$

Выражение $S_2(p_{x,x} - Qp - p_t)$ должно быть тождественно равно нулю при условии, что p — решение (при этом условии p_t исключается при помощи уравнения $p_t = p_{x,x} - Qp$, а $p_{t,x}$ исключается, если исходное дифференциальное уравнение продифференцировать по x и обозначить производные переменными продолженного пространства, т. е. $p_{t,x} = p_{x,x,x} - Q'p - Qp_x$). Выражая эти «зависимые» производные через «независимые» (т. е. p , p_x , $p_{x,x}$ и $p_{x,x,x}$), получим

$$\begin{aligned} S_2(p_{x,x} - Qp - p_t)|_{p-\text{решение}} = & (K_0 - K_1pQ + K_3p^2Q^2 - K_8pQ') \\ & + (K_2 - K_4pQ - K_8Q - K_{10}pQ')p_x + (K_5 - K_6pQ - K_{10}Q)p_x^2 + K_7p_x^3 \\ & + (K_1 - 2K_3pQ + K_9 - K_{11}pQ)p_{x,x} + (K_4 + K_{12})p_{x,x}p_x + K_6p_{x,x}p_x^2 \\ & + (K_3 + K_{11})p_{x,x}^2 + K_8p_{x,x,x} + K_{10}p_{x,x,x}p_x = 0. \end{aligned}$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при мономах, состоящих из производных (первого и выше порядков) от неизвестной функции, получим *систему определяющих уравнений с частными производными* на функции τ , ξ и ψ . Сразу исключим $K_6 = K_7 = K_8 = K_{10} = 0$ из других ее уравнений, а также заметим, что $K_3 = -\frac{K_{10}}{2} = 0$ и $K_{11} = \frac{K_{10}}{2} = 0$; кроме того, одно из уравнений ($K_3 + K_{11} = 0$) будет выполнено тождественно. Имеем

$$\begin{cases} K_0 - K_1pQ = 0, \\ K_2 - K_4pQ = 0, \\ K_5 = 0, \\ K_1 + K_9 = 0, \\ K_4 + K_{12} = 0. \end{cases}$$

Из $K_8 = K_{10} = 0$ можно лишь получить, что τ зависит только от t ; $K_6 = 0$ не дает по сравнению с этим никакой новой информации. С учетом этого из $K_4 + K_{12} = 0$ имеем $\partial_p \xi = 0$, т. е. ξ — функция от t и x (и уравнение $K_7 = 0$ также не добавляет ничего нового). Далее, из $K_5 = 0$ следует, что $\partial_p^2 \psi = 0$, откуда можно заключить, что $\psi = pA_1(t, x) + B_1(t, x)$ с некоторыми функциями A_1 и B_1 , а из $K_1 + K_9 = 0$ следует $\partial_t \tau = 2\partial_x \xi$, что после дифференцирования

по x превращается с учетом того, что τ зависит только от t , в $\partial_x^2 \xi = 0$. Это означает, что $\xi = xA_2(t) + B_2(t)$ с некоторыми функциями A_2 и B_2 , а общее решение для τ принимает вид $\tau(t) = 2 \int A_2(t) dt$.

Выполнив эти упрощения, перепишем оставшиеся неиспользованными уравнения в терминах новых функций:

$$\begin{aligned} & -(xA_2 + B_2)pQ' - (pA_1 + B_1)Q - \partial_t(pA_1 + B_1) \\ & \quad + \partial_x^2(pA_1 + B_1) - pQ(2A_2 - A_1) = 0, \\ & \partial_t(xA_2 + B_2) + 2\partial_x A_1 = 0. \end{aligned}$$

Второе уравнение в этой системе можно проинтегрировать:

$$-2A_1(t, x) = \frac{x^2}{2} \partial_t A_2(t) + x \partial_t B_2(t) + C(t)$$

с некоторой функцией C . Подставим это выражение для A_1 в первое уравнение; оно примет вид $pY + Z = 0$, где Y и Z зависят только от t и x , так что $Y = 0$ и $Z = 0$. Так как $Z = \partial_x^2 B_1 - \partial_t B_1 - B_1 Q$, уравнение $Z = 0$ не дает никакой информации, кроме той, что B_1 — решение исходного дифференциального уравнения (как увидим далее, отсюда получится тривиальная симметрия, которой обладает вообще любое линейное уравнение). Нетривиальные симметрии могут получиться лишь из уравнения $Y = 0$, которое в развернутом виде запишется так:

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \partial_t^2 A_2 + x \partial_t^2 B_2 + \partial_t C \right) + \frac{1}{2} \partial_t A_2 = -(2QA_2 + Q'(xA_2 + B_2)).$$

Это уравнение полиномиально по x , причем степень многочлена в левой части равна двум, а степень многочлена в правой части равна $2n - 4$. При $n \geq 4$ это означает, что $A_2 = 0$ и $B_2 = 0$ (так как степень Q' равна $2n - 5$, что все равно больше двух при $n \geq 4$), откуда $\xi = 0$, $\tau = \text{const}$. Уравнение $Y = 0$ превращается в $C = \text{const}$, т. е. $A_1 = \text{const}$, что в точности означает, что исходное дифференциальное уравнение линейно, но эта тривиальная симметрия, конечно, не позволяет понизить порядок.

Таким образом, доказали следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2. Если Q — многочлен по переменной x степени, большей двух, то уравнение $\partial_t p(t, x) = \partial_x^2 p(t, x) - Q(x)p(t, x)$ не допускает однопараметрических групп симметрий, отличных от (допустимых любым линейным уравнением) групп линейных преобразований решений.

Поскольку исходное уравнение теплопроводности в группе Гурса отличается от исследованного выше уравнения лишь преобразованием Фурье, которое записывается в виде интеграла, теорема 1 является следствием теоремы 2.

Заметим еще, что, как показано в [6], применение некоммутативного преобразования Фурье (в отличие от обычного преобразования Фурье, которым пользовались в разд. 2) не упрощает получающегося в окончательном результате уравнения (по крайней мере при $n = 4$): в нем по-прежнему остается многочлен четвертой степени.

4. Заключение

Полученный в настоящей статье результат можно трактовать по-разному. С одной стороны, причина неинтегрируемости исследованного уравнения может быть сочтена чисто алгебраической (степень многочлена Q больше двух);

с другой стороны, этому явлению можно придать геометрический смысл. Дело в том, что группа Гурса при $n = 4$ есть не что иное, как группа Энгеля, в которой, как известно, существуют аномальные геодезические; есть они и в группах больших размерностей. Из-за этих геодезических возникают следующие особенности: 1) сублапласиан хоть и остается гипоеллиптическим оператором, теряет, однако, аналитическую гипоеллиптичность по их направлениям, 2) сферы в метрике Карно — Каратеодори (в окрестности концов аномальных геодезических) не задаются неравенствами с аналитическими функциями. Интуитивно кажется понятным, что если бы порядок уравнения теплопроводности понижался, то оно бы решалось в интегралах от «достаточно простых» элементарных функций, что не согласуется с отсутствием аналитической гипоеллиптичности сублапласиана; здесь же неинтегрируемость уравнения теплопроводности доказана вполне строгими методами.

Всех этих трудностей не наблюдается в группе Гейзенберга. Если написать аналогичные определяющие уравнения и свести их точно таким же образом к уравнению относительно A_2 , B_2 и C с многочленом Q степени 2, система, полученная приравниванием коэффициентов при x^2 , x^1 и x^0 к нулю, уже не будет переопределенной и фундаментальное решение находится при помощи переноса стационарного решения вдоль найденного векторного поля, задающего симметрию.

Вследствие всего вышеизложенного можно предположить, что исследование асимптотик фундаментального решения потребует (в случае наличия аномальных геодезических) поиска не самого решения, а каких-либо его аппроксимаций с последующим доказательством их «равномерности» (в том смысле, что предельный переход от аппроксимаций к решению можно поменять местами с переходом $t \rightarrow 0$). Возможно, в будущем эта проблема будет решена.

Автор выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук Л. В. Локуциевскому за оказанную помощь в изучении теоретических материалов по групповому анализу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Minakshisundaram S., Pleijel Å. Some properties of eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds // Can. J. Math. 1949. V. 1. P. 242–256.
2. Ben Arous G. Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1988. V. 21, N 3. P. 307–331.
3. Ben Arous G. Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique sur la diagonale // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1989. V. 39, N 1. P. 73–99.
4. Craddock M., Lennox K. Lie group symmetries as integral transforms of fundamental solutions // J. Differ. Equ. 2007. V. 232. P. 652–674.
5. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. Boscain U., Gauthier J.-P., Rossi F. Hypoelliptic heat kernel over 3-step nilpotent Lie groups // J. Math. Sci. 2014. V. 199, N 6. P. 614–628.

Поступила в редакцию 9 апреля 2018 г.

После доработки 18 июля 2018 г.

Принята к публикации 17 августа 2018 г.

Кузнецов Михаил Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
misha0123456789@mail.ru