Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. G. Pyatkov, On some inverse problems for first order operator-differential equations, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 1, 183–193

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.115>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 35.173.137.237

April 26, 2023, 17:29:11

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

С. Г. Пятков

Аннотация. Изучаются вопросы разрешимости обратных задач об определении неизвестной функции, входящей в нелинейную правую часть операторно-дифференциального уравнения первого порядка, рассматриваемого в некотором банаховом пространстве. Уравнение дополняется данными Коши, а в качестве условий переопределения берется значение некоторого оператора от решения. Получены локальные по времени теоремы существования и единственности решений этих обратных задач.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.115

Ключевые слова: операторно-дифференциальное уравнение, задача Коши, обратная задача, существование решений, единственность.

1. Введение

Мы рассматриваем обратную задачу об определении неизвестной функции $p(t) \in L_p(0, T; Y_0)$ (Y_0 — некоторое банахово пространство), входящей в правую часть операторно-дифференциального уравнения вида

$$L(t)u = u_t - A(t)u - B(t)u = f(t, u, p(t)), \quad (1)$$

где $\{A(t)\}_{t \in [0, T]}$, $\{B(t)\}_{t \in [0, T]}$ — семейства линейных определенных в некотором банаховом пространстве X операторов и $f(t, u, p(t))$ — некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор. Предполагается, что при каждом t оператор $A(t)$ является генератором аналитической полугруппы. Уравнение дополняется начальным условием и условием переопределения:

$$u(0) = u_0, \quad (2)$$

$$\Psi(t)(u(t)) = \psi(t) \in W_q^1(0, T; Y_0), \quad (3)$$

где $\Psi(t) \in C^1([0, T]; L(X, Y_0))$ — некоторое семейство операторов, зависящих от параметра t .

Задачи вида (1)–(3) возникают в теории тепломассопереноса, диффузии, фильтрации и во многих других областях как задачи об определении функции источника и задачи об определении параметров среды [1–9]. Большое число задач, входящих в вышеприведенный класс для параболических систем, рассмотрено в работе автора [10].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18–01–00620а).

Обратным задачам для операторно-дифференциальных уравнений посвящено довольно много работ. Наибольшее внимание уделено так называемой задаче с финальным переопределением (см. [11, гл. 7]), которая, по существу, совпадает с задачей о полной управляемости в той или иной формулировке (см. библиографию в [12]). Имеется большое число работ, посвященных граничному управлению (см., например, [13, 14]).

Постановка задачи совпадает с приведенной в монографии А. И. Прилепко (см. [11, § 6.6, 6.7; 15]). Результаты, полученные в монографии [11], основаны на теории полугрупп, поэтому далеко не всегда условия на данные задачи оптимальны. Имеются завышенные требования гладкости самих операторов (требуется их гёльдеровость), гладкости функции $\psi(t)$ и самого отображения $\Psi(t)$, начальных данных, правой части (она должна допускать некоторые специальные представления). Примеры применения полученных в [11] результатов приведены в [11, § 9.4], где описаны необходимые условия на данные. Однако подобные условия не возникают при исследовании обратных задач этого вида для параболических систем уравнений, если их изучать отдельно, без ссылок на результат в [11] (см., например, [16]).

Цель настоящей работы — получить оптимальные условия разрешимости задачи (1)–(3) в смысле требований к данным, в том числе в смысле неулучшаемости в применении к обратным задачам для параболических систем.

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Пусть X, Y — банаховы пространства. Через $L(X, Y)$ обозначим пространство линейных непрерывных операторов, определенных на X , со значениями в Y . Если $X = Y$, то используем обозначение $L(X)$. Пусть $A : X \rightarrow X$ — замкнутый линейный оператор в X с плотной областью определения $D(A)$. Область значений оператора A обозначается через $R(A)$. Соответственно $\sigma(A)$, $\rho(A)$ суть спектр и резольвентное множество A . Пусть $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ ($\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$) и $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta\}$.

Далее используем операторы $A : X \rightarrow X$ (X — банахово пространство), являющиеся генераторами аналитических полугрупп (см. определения в [17]). В этом случае предполагаем, что $\rho(A) \supset \overline{\Sigma_\theta}$ для некоторого $\theta \geq \pi/2$ и

$$\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}\|_{L(X)} < M \quad \forall \lambda \in \overline{\Sigma_\theta},$$

где $M > 0$ — некоторая постоянная и I — тождественный оператор.

Пространство $L_p(0, T; X)$ (X — банахово пространство) определяется как пространство сильно измеримых определенных на $[0, T]$ функций со значениями в X таких, что $\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty$. Определения пространств Соболева $W_p^s(0, T; X)$ могут быть найдены, например, в [18, 19]. Пространство непрерывных (непрерывно дифференцируемых) функций на $[0, T]$ со значениями в X обозначается через $C([0, T]; X)$ ($C^1([0, T]; X)$).

Банахово пространство X называется UMD-пространством (или ζ -выпуклым, или HT-пространством), если преобразование Гильберта

$$Pf = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t-y|>\varepsilon} \frac{f(t)}{t-y} dt$$

продолжимо до оператора класса $L(L_p(R, X))$ для некоторого (или, что эквивалентно, для каждого) $p \in (1, \infty)$. Все подпространства и фактор-пространства

$L_q(G, \mu)$ при $1 < q < \infty$ являются UMD-пространствами. Можно сказать, что пространства Соболева, Харди и другие классические пространства суть UMD-пространства при условии, что они рефлексивны.

Семейство операторов $\tau \subset L(X, Y)$ (X, Y — банаховы пространства) называется R -ограниченным, если найдется постоянная C_p такая, что (см. [20])

$$\left(\sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N \in \{-1, 1\}} \left\| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j T_j x_j \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \left(\sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N \in \{-1, 1\}} \left\| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j x_j \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

для всех $N, T_1, T_2, \dots, T_N \in \tau$ и $x_1, x_2, \dots, x_N \in X$. Наименьшая постоянная C_p в этом неравенстве обозначается через $R(\tau)$ и называется R -оценкой семейства τ (см. эквивалентные определения в [21–24]). Отметим, что это определение не зависит от p .

Вообще говоря, мы рассматриваем обратную задачу, используя известные результаты о разрешимости прямой задачи. Однако полученные ранее результаты в неавтономном случае пока не оптимальны. Приведем некоторые утверждения о разрешимости прямой задачи, которые будем использовать при исследовании обратной задачи.

Предполагаем, что существует банахово пространство $D \subset X$ такое, что выполнены сформулированные ниже условия (I1), (I2).

(I1) $A(t) \in C([0, T]; L(D, X))$, $D(A(t)) \subset D$, операторы $A(t) : X \rightarrow X$ суть генераторы аналитических полугрупп, X — UMD-пространство, семейство $\tau = \{\lambda(-A(t) + \lambda I)^{-1} : \lambda \in \overline{\Sigma}_{\theta_0}\}$ R -ограничено для некоторого $\theta_0 \geq \pi/2$ и $R(\tau) \leq M$, где постоянная M не зависит от $t \in [0, T]$.

Определим пространство $H_q(a, b) = L_q(a, b; D) \cap W_q^1(a, b; X)$. Введем в нем норму

$$\|u\|_{H_q(a, b)}^q = \int_a^b \|u_t(t)\|_X^q + \|u(t)\|_D^q dt.$$

(I2) $B(t) \in L_1(0, T; L(D, X)) \cap L(H_q(0, T), L_q(0, T; X))$. Существует непрерывная функция $\beta(\xi) : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такая, что $\beta(0) = 0$ и

$$\|B(t)u(t)\|_{L_q(a, b; X)} \leq \beta(b-a)\|u(t)\|_{H_q(a, b)}$$

для всех $u \in H_q(a, b)$ таких, что $u(a) = 0$, и всех $0 \leq a < b \leq T$.

При выполнении условий (I1), (I2) справедлива

Теорема 1 [25, лемма 5.1]. Пусть выполнены условия (I1), (I2) и область определения операторов $A(t)$ не зависит от t , т. е. $D(A(t)) = D$. Тогда для любых $f \in L_q(0, T; X)$, $u_0 \in B_q^{1-1/q} = (D, X)_{1/q, q}$ существует единственное решение задачи

$$u_t = A(t)u + B(t)u + f, \quad u(0) = u_0$$

из класса $H_q(0, T)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{H_q(0, T)} \leq c(\|f\|_{L_q(0, T; X)} + \|u_0\|_{B_q^{1-1/q}}).$$

Второй результат, на который сошлемся, получен в [26].

Приведем условия на операторы. В целом они аналогичны введенным выше, однако появляются дополнительные условия, связанные с тем, что $D(A(t))$ задается с помощью некоторого граничного оператора.

Дополнительно к условиям (I1), (I2) потребуем выполнения введенных ниже условий (I3)–(I5).

(I3) Существуют банахово пространство Y и семейство линейных операторов $Q(t) : D \rightarrow Y$ такие, что $Q(t) \in C([0, T]; L(D, Y))$ и область определения $A(t)$ задается равенством $D(A(t)) = D \cap \ker Q(t)$.

Фиксируем $\varepsilon \in (0, T)$ и для данной функции $g(t)$ ($t \in [0, T]$) определим функцию

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} g(t - \varepsilon), & t \in [\varepsilon, T], \\ 0, & t \in [0, \varepsilon]. \end{cases}$$

Также предположим, что найдется банахово пространство $Z \subset L_q(0, T; Y)$, для которого выполнено следующее условие.

(I4) Отображения $Q : u(t) \rightarrow Q(t)u(t)$, $Q_\tau : u(t) \rightarrow Q(\tau)u(t)$ ($\tau \in [0, T]$) принадлежат классу $L(H_q(0, T), Z)$, нормы $\|Q_\tau\|_{L(H_q(0, T), Z)}$ равномерно ограничены, и отображение Q_τ сюръективно для каждого $\tau \in [0, T]$.

(I5) Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\|(Q_{\tau_1} - Q_{\tau_2})u\|_Z \leq \varepsilon \|u\|_{H_q(0, T)}$$

для всех $u \in H_q(0, T)$ и $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ таких, что $|\tau_2 - \tau_1| < \delta$;

$$\|(Q - Q_\tau)u\|_Z \leq \varepsilon \|u\|_{H_q(0, T)}$$

для всех $u \in H_q(0, T)$, τ, b таких, что $\text{supp } u \subset [\tau, b]$ ($u(0) = 0$ при $\tau = 0$), $0 \leq \tau < b \leq T$, $b - \tau < \delta$;

$$((Q - Q_0)v)_{\varepsilon_0} \in Z, \quad \|((Q - Q_0)u)_{\varepsilon_0}\|_Z \leq \varepsilon \|u(t)\|_{H_q(0, T)}$$

для всех $v \in H_q(0, T)$, некоторого $\varepsilon_0 \in (0, T)$ и каждого $u \in H_q(0, T)$ такого, что $\text{supp } u \subset [0, b]$ с $b < \delta$ и $u(0) = 0$.

Пусть $g(t) \in Z$. Фиксируем $\varepsilon \in (0, T)$ и определим пространство $Z_q(0, T)$ как подпространство функций $g \in Z$ таких, что $g_\varepsilon \in Z$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Условия согласования имеют вид

$$g(t) - Qv(t) \in Z_q(0, T), \quad g(t) \in Z,$$

где $v(t) \in H_q(0, T)$ — произвольная функция такая, что $v(0) = u_0$ (такие функции, конечно, существуют, см. [27, теорема 1.8.3]).

Теорема 2. Предположим, что $f \in L_q(0, T; X)$, $u_0 \in B_q^{1-1/q}$ и выполнены условия (I1)–(I5) и условия согласования. Тогда существует единственное решение $u \in H_q(0, T)$ задачи

$$u_t = A(t)u + B(t)u + f, \quad Q(t)u(t) = g(t), \quad u(0) = u_0.$$

Следующая теорема — аналог теоремы 1 в случае, когда $D(A(t))$ может зависеть от времени.

Теорема 3. Предположим, что $f \in L_q(0, T; X)$, $u_0 \in (D(A(0)), X)_{1/q, q}$ и выполнены условия (I1)–(I5). Тогда существует единственное решение $u \in H_q(0, T)$ задачи

$$u_t = A(t)u + B(t)u + f, \quad u(0) = u_0$$

такое, что $u(t) \in D(A(t))$ для почти всех $t \in [0, T]$ (последнее эквивалентно условию $Q(t)u(t) = 0$). Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{H_q(0, T)} \leq c(\|f\|_{L_q(0, T; X)} + \|u_0\|_{(D(A(0)), X)_{1/q, q}}). \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что теоремы 2, 3 применимы к обычным параболическим задачам при классических условиях гладкости на коэффициенты, т. е. коэффициенты старшей части оператора непрерывны, а младшие коэффициенты содержатся в некотором пространстве L_p .

3. Основные результаты

Пусть выполнены условия (I1), (I2). Положим $B_q^s = (D, X)_{1-s, q}$. Прежде всего потребуем выполнения условия

(I6) Найдется $s < 1 - 1/q$ такое, что при почти всех $t \in (0, T)$ отображение $(u, p) \rightarrow f(t, u, p)$ непрерывно и ограничено как отображение из $B_q^s \times Y_0$ в X , отображение $(u(t), p(t)) \rightarrow f(t, u(t), p(t))$ из $C([0, T]; B_q^s) \times L_q(0, T; Y_0)$ в $L_q(0, T; X)$ ограничено, принадлежит классу C^1 (т. е. непрерывно дифференцируемо по Фреше и производная непрерывна); отображения $(u(t), p(t)) \rightarrow f_p(t, u(t), p(t))$ и $(u(t), p(t)) \rightarrow f_u(t, u(t), p(t))$ из $C([0, T]; B_q^s) \times L_q(0, T; Y_0)$ соответственно в $L(L_q(0, T; Y_0), L_q(0, T; X))$ и $L(C([0, T]; B_q^s), L_q(0, T; X))$ ограничены, где f_p, f_u — частные производные отображения f . Кроме того, потребуем, что если $B \subset L_q(0, T; Y_0)$ — ограниченное множество, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $\delta > 0$ такая, что при $\|v(t) - u_0\|_{C([0, T]; B_q^s)} < \delta$

$$\|f_p(t, u_0, p) - f_p(t, v, p)\|_{L(L_q(0, T; Y_0), L_q(0, T; X))} < \varepsilon$$

для всех $p \in B$ (последнее условие выполнено, если, например, отображение f_p удовлетворяет условию Гёльдера по второй переменной).

Построим функцию Φ как решение задачи

$$\Phi_t - A(t)\Phi - B(t)\Phi = f(t, u_0, 0) \in L_q(0, T; X), \quad \Phi(0) = u_0.$$

Далее предполагаем, что выполнены условия одной из теорем 1 или 3 и соответственно $u_0 \in (D(A(0)), X)_{1/q, q} \subset B_q^s$. Следовательно, включение $f(t, u_0, 0) \in L_q(0, T; X)$ вытекает из условия (I6).

Рассмотрим уравнение

$$F(t, p) = \Psi(t)(f(t, u_0, p) - f(t, u_0, 0)) = r(t). \quad (5)$$

Оставшиеся условия имеют следующий вид.

(I7) Найдутся $R_0 > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что для любой функции $r \in B_{R_0} = \{r(t) \in L_q(0, t_0; Y_0) : \|r - r_0\|_{L_q(0, t_0; Y_0)} \leq R_0\}$, где $r_0 = \psi_t - (\Psi(\Phi))_t$, уравнение (5) имеет единственное решение $p \in L_q(0, t_0; Y_0)$ и обратное отображение $F^{-1} : B_{R_0} \rightarrow L_q(0, t_0; Y_0)$ удовлетворяет условию Липшица.

(I8) Для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $c(\varepsilon)$ такая, что

$$\|\Psi(t)(A(t)u)\|_{L_q(0, T; Y_0)} \leq \varepsilon \|u\|_{L_q(0, T; D)} + c(\varepsilon) \|u\|_{L_q(0, T; X)}$$

для всех $u \in L_q(0, T; D)$.

Теорема 4. Пусть условия (I6)–(I8) выполнены, $\psi(t) \in W_q^1(0, T; Y_0)$, $\psi(0) = \Psi(0)(u_0)$, $u_0 \in (D(A(0)), X)_{1/q, q}$ и выполнены условия теорем 1 или 3 (т. е. выполнены условия (I1), (I2) и условие независимости области определения $D(A(t))$ от t или условия (I1)–(I5)). Тогда найдется $\gamma_0 > 0$ такое, что на промежутке $[0, \gamma_0]$ существует единственное решение (u, p) , $u \in L_q(0, \gamma_0; D) \cap W_q^1(0, \gamma_0; X)$, $p \in L_q(0, \gamma_0; Y_0)$, задачи (1)–(3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (I6) гарантирует, что функция $f(t, u, p)$ удовлетворяет условию Липшица в том смысле, что для любого ограниченного множества $B \subset C([0, T]; B_q^s) \times L_q(0, T; Y_0)$ найдется постоянная $c_B > 0$ такая, что

$$\|f(t, u_1, p_1) - f(t, u_2, p_2)\|_{L_q(0, T; X)} \leq c_B (\|u_1 - u_2\|_{C([0, T]; B_q^s)} + \|p_1 - p_2\|_{L_q(0, T; Y_0)}). \quad (6)$$

Это неравенство и возможность продолжения функций из класса $C([0, \tau]; B_q^s)$ (соответственно $L_q(0, \tau; Y_0)$) на весь промежуток $[0, T]$ с сохранением нормы гарантируют также оценку

$$\|f(t, u_1, p_1) - f(t, u_2, p_2)\|_{L_q(0, \tau; X)} \leq c_B (\|u_1 - u_2\|_{C([0, \tau]; B_q^s)} + \|p_1 - p_2\|_{L_q(0, \tau; Y_0)}), \quad (7)$$

где $0 < \tau \leq T$ — произвольная постоянная. Сделаем замену неизвестной функции $u = v + \Phi$. Уравнение (1) преобразуется к виду

$$Lv = v_t - A(t)v - B(t)v = f(t, v + \Phi, p(t)) - f(t, u_0, 0). \quad (8)$$

Данные задачи перепишутся в виде

$$v(0) = 0, \quad (9)$$

$$\Psi(t)(v(t)) = \psi(t) - \Psi(t)(\Phi). \quad (10)$$

Пусть $r(t) \in B_{R_0}$ (см. (I7)). Тогда

$$\|p - p_0\|_{L_q(0, t_0; Y_0)} = \|F^{-1}(r) - F^{-1}(r_0)\|_{L_q(0, t_0; Y_0)} \leq c_1 \|r - r_0\|_{L_q(0, t_0; Y_0)} \leq c_1 R_0.$$

Таким образом, прообраз шара B_{R_0} содержится в шаре $B_0 = \{p \in L_q(0, t_0; Y_0) : \|p - p_0\| \leq c_1 R_0 = R_1\}$ (см. условие (I7)). Условие (6) и теорема 1 (или теорема 3) гарантируют локальную по времени разрешимость задачи (8), (9). Доказательства разрешимости задачи Коши для квазилинейных операторно-дифференциальных уравнений содержатся во многих работах и монографиях (см., например, [17, гл. 7; 28, гл. 4, 5]). Кроме того, утверждение может быть получено и с использованием абстрактных теорем типа теоремы об обратном отображении. В силу специфики наших условий на правую часть в (7) наметим схему доказательства с использованием теоремы о неподвижной точке. Считаем, что $p \in B_0 \subset L_q(0, T; Y_0)$. Уравнение (8) может быть переписано в виде (используем теорему 1 или 3)

$$v = L^{-1}(f(t, v + \Phi, p(t)) - f(t, u_0, 0)) = S(v). \quad (11)$$

Рассматриваем оператор S как оператор, заданный на пространстве $H_\tau = \{v \in L_q(0, \tau; D) : v_t \in L_q(0, \tau; X), v(0) = 0\}$, со значениями в H_τ . Соответствующим образом определяем норму как $\|v\|_{H_\tau} = \|v\|_{L_q(0, \tau; D)} + \|v_t\|_{L_q(0, \tau; X)}$. Теорема III 4.10.2 в [29] гарантирует, что $v, \Phi \in C([0, \tau]; B_q^{1-1/q}) \subset C([0, \tau]; B_q^s)$. Более того, имеет место оценка

$$\|v\|_{C([0, \tau]; B_q^{1-1/q})} \leq c_0 \|v\|_{H_\tau}, \quad (12)$$

где без ограничения общности можем считать, что постоянная c_0 не зависит от $\tau \in (0, T]$. Таким образом, правая часть в (10) определена корректно. Возьмем $R = 2 \max_{p \in B_0} \|F_0\|_{H_{t_0}}$, $F_0 = L^{-1}(f(t, \Phi, p(t)) - f(t, u_0, 0))$. Ищем функцию v в шаре $B_R = \{v \in H_\tau : \|v\|_{H_\tau} \leq R\}$. Используя теорему 1 или 3 и неравенство (7), имеем

$$\begin{aligned} \|S(v_1) - S(v_2)\|_{H_\tau} &\leq c \|f(t, v_1 + \Phi, p) - f(t, v_2 + \Phi, p)\|_{L_q(0, T; X)} \\ &\leq c_B \|v_1 - v_2\|_{C([0, T]; B_q^s)}. \end{aligned} \quad (13)$$

С помощью интерполяционных неравенств вида $\|\varphi\|_{B_q^s} \leq c \|\varphi\|_{B_q^{1-1/q}}^\beta \|\varphi\|_X^{1-\beta}$ ($\beta = s/(1-1/q)$) и (12), получим

$$c_B \|v_1 - v_2\|_{C([0, T]; B_q^s)} \leq c_1 \|v_1 - v_2\|_{H_\tau}^\beta \|v_1 - v_2\|_{C([0, T]; X)}^{1-\beta},$$

где постоянная c_1 не зависит от τ . Согласно формуле Ньютона — Лейбница $v(t) = \int_0^t v_t(\tau) d\tau$ правая часть в предыдущем неравенстве оценивается через $c_2 \|v_1 - v_2\|_{H_\tau} \tau^{(1-\beta)(1-1/q)}$. Таким образом, справедлива оценка

$$\|S(v_1) - S(v_2)\|_{H_\tau} \leq c_2 \|v_1 - v_2\|_{H_\tau} \tau^{(1-\beta)(1-1/q)}, \quad (14)$$

которая гарантирует, что оператор S сжимающий, если $c_2 \tau^{(1-\beta)(1-1/q)} < 1$. Постоянная c_2 здесь не зависит от τ и $p \in B_0$. Далее считаем, что $\tau \leq \tau_0 \leq t_0$, $c_2 \tau_0^{(1-\beta)(1-1/q)} \leq 1/2$. При таких τ имеем

$$\|S(v) - S(0)\|_{L_q(0,\tau)} = \|S(v) - F_0\|_{L_q(0,\tau)} \leq c_2 \|v\|_{H_\tau} \tau^{(1-\beta)(1-1/q)} \leq \frac{R}{2},$$

и тогда определение величины R гарантирует, что оператор переводит шар B_R в себя. По теореме о неподвижной точке уравнение (11) имеет единственное решение в этом шаре. Предположим, что рассматриваются два решения v_1, v_2 уравнения (11), отвечающие двум различным параметрам $p_1, p_2 \in B_0$. Согласно (11) получим

$$v_1 - v_2 = L^{-1}(f(t, v_1 + \Phi, p_1(t)) - f(t, v_2 + \Phi, p_2)). \quad (15)$$

Оценим норму правой части. Как и ранее,

$$\begin{aligned} \|L^{-1}(f(t, v_1 + \Phi, p_1(t)) - f(t, v_2 + \Phi, p_2))\|_{L_q(0,\tau;X)} \\ \leq c_B(\|v_1 - v_2\|_{C([0,T];B_q^s)} + \|p_1 - p_2\|_{L_q(0,\tau;Y_0)}). \end{aligned}$$

Оценивая первое слагаемое в правой части, как и ранее при получении оценки (14), и используя неравенство $\tau \leq \tau_0$, получим

$$\|v_1 - v_2\|_{L_q(0,\tau;X)} \leq 2c_B \|p_1 - p_2\|_{L_q(0,\tau;Y_0)}. \quad (16)$$

Оценка справедлива для всех $p_i \in B_0$ ($i = 1, 2$).

Перейдем к доказательству существования решения обратной задачи. Применяя отображение Ψ к (1), в силу (3) получим

$$\psi_t - (\Psi(t)(\Phi))_t - \Psi_t(t)(v) - \Psi(t)(A(t)v + B(t)v) = \Psi(t)(f(t, v + \Phi, p) - f(t, u_0, 0)). \quad (17)$$

Перепишем (17) в виде

$$\begin{aligned} F(t, p) = r_0(t) - \Psi(t)(A(t)v + B(t)v) - \Psi_t(t)(v) \\ + \Psi(t)(f(t, u_0, p) - f(t, v + \Phi, p)) = r_0(t) + S_1(v, p). \end{aligned} \quad (18)$$

Это уравнение можно рассматривать как уравнение для нахождения функции $p(t) \in B_0$, где $v = v(p) \in B_R$ — решение уравнения (11) (или, что одно и то же, решение задачи (8), (9)). В силу условий (I8), (I2) и оценок из теорем 1, 3 имеем

$$\begin{aligned} \|\Psi(t)(A(t)v + B(t)v)\|_{L_q(0,\tau;Y_0)} \\ \leq \varepsilon \|v\|_{L_q(0,\tau;D)} + c(\varepsilon) \|v\|_{L_q(0,\tau;X)} + c_2 \beta(\tau) \|v\|_{H_q(0,\tau)} \\ \leq \|v\|_{H_q(0,\tau)} (\varepsilon + c(\varepsilon)\tau + \beta(\tau)), \\ \|\Psi_t(t)(v)\|_{L_q(0,\tau;Y_0)} \leq c \|v\|_{L_q(0,\tau;X)} \leq \tau c \|v\|_{H_q(0,\tau)}. \end{aligned}$$

Здесь воспользовались неравенством $\|v\|_{L_q(0,\tau;X)} \leq \tau \|v_t\|_{L_q(0,\tau;X)}$. Тем самым для любого наперед заданного $\varepsilon_1 > 0$ можем найти $\tau_1 \leq \tau_0$ такое, что

$$\|\Psi(t)(A(t)v + B(t)v) + \Psi_t(t)(v)\|_{L_q(0,\tau;Y_0)} \leq \varepsilon_1 \|v\|_{H_q(0,\tau)} \quad \forall \tau \leq \tau_1. \quad (19)$$

Аналогично, воспользовавшись неравенством (7), получим

$$\begin{aligned} & \|\Psi(t)(f(t, u_0, p) - f(t, v + \Phi, p))\|_{L_q(0, \tau; Y_0)} \\ & \leq c\|v + \Phi - u_0\|_{C([0, \tau]; B_q^s)} \leq c_1 \tau^{(1-\beta)(1-1/q)}, \quad \beta = s/(1-1/q). \end{aligned}$$

Таким образом, найдется $\tau_1 \leq \tau_0$ такое, что

$$\|S_1(v, p)\|_{L_q(0, \tau; Y_0)} \leq R_0 \quad \forall \tau \leq \tau_1, \quad p \in B_0. \quad (20)$$

Без ограничения общности считаем, что $\tau_1 \leq t_0$ (см. условие (I7)). Тогда уравнение (18) можно записать в виде

$$p = F^{-1}(r_0(t) + S_1(v, p)) = S_2(p). \quad (21)$$

Из определения величины R_1 и (20) получим, что оператор S_2 переводит шар B_0 в себя при $\tau \leq \tau_1$. Покажем, что применима теорема о неподвижной точке. Пусть $p_1, p_2 \in B_0$, v_1, v_2 — соответствующие решения уравнения (11) и $\tau \leq \tau_1$. В силу (I7)

$$\|S_2(p_1) - S_2(p_2)\|_{L_q(0, \tau; Y_0)} \leq c\|S_1(v_1, p_1) - S_1(v_2, p_2)\|_{L_q(0, \tau; Y_0)}. \quad (22)$$

Оценим правую часть. Как и при выводе (19),

$$\begin{aligned} & \|\Psi(t)(A(t)(v_1 - v_2) + B(t)(v_1 - v_2)) + \Psi_t(t)(v_1 - v_2)\|_{L_q(0, \tau; Y_0)} \\ & \leq \varepsilon_1 \|v_1 - v_2\|_{H_q(0, \tau)} \quad (23) \end{aligned}$$

при наперед заданном ε_1 и достаточно малом τ . Оценим оставшиеся слагаемые в правой части (22). Пусть $S_0(v, p) = f(t, u_0, p) - f(t, v + \Phi, p)$. Имеем

$$\begin{aligned} & S_0(v_2, p_2) - S_0(v_1, p_1) \\ & = \int_0^1 (f_p(t, u_0, p_1 + r\Delta p) - f_p(t, v_1 + r\Delta v + \Phi, p + r\Delta p)) \Delta p \, dr \\ & \quad - \int_0^1 f_v(t, v_1 + r\Delta v + \Phi, p + r\Delta p) \Delta v \, dr = J_1 - J_2, \end{aligned}$$

где $\Delta p = p_2 - p_1$, $\Delta v = v_2 - v_1$. В силу условия (I6) и сходимости

$$\|v_1 + r\Delta v + \Phi - u_0\|_{C(0, \tau; B_q^s)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0$$

для данного $\varepsilon_2 > 0$ найдется $\tau_2 \leq \tau_1$ такое, что

$$\|J_1\|_{L_q(0, \tau; X)} \leq \varepsilon_2 \|\Delta p\|_{L_q(0, \tau; Y_0)} \quad \forall \tau \leq \tau_2. \quad (24)$$

Для второго слагаемого имеем оценку (так же, как при выводе (14))

$$\|J_2\|_{L_q(0, \tau; X)} \leq c(R, R_0) \|\Delta v\|_{L_q(0, \tau; B_q^s)} \leq c_2 \|\Delta v\|_{H_\tau} \tau^{(1-\beta)(1-1/q)}.$$

В силу (16) выводим, что для данного $\varepsilon > 0$ существует $\tau_2 \leq \tau_1$ такое, что

$$\|S_0(v_2, p_2) - S_0(v_1, p_1)\|_{L_q(0, \tau; X)} \leq \varepsilon \|p_1 - p_2\|_{L_q(0, \tau; Y_0)} \quad \forall \tau \leq \tau_2. \quad (25)$$

Неравенства (23), (25) гарантируют существование такого $\tau_2 \leq \tau_1$, что при $\tau \leq \tau_2$

$$\|S_2(p_1) - S_2(p_2)\|_{L_q(0, \tau; Y_0)} \leq \frac{1}{2} \|p_1 - p_2\|_{L_q(0, \tau; Y_0)}, \quad (26)$$

а это означает, что оператор S_2 сжимающий. Из теоремы о неподвижной точке вытекает, что уравнение (21) имеет решение из $L_q(0, \tau; Y_0)$ при всех $\tau \leq \tau_2$. По найденной функции p можно определить v как решение уравнения (11). Покажем, что построенная функция v удовлетворяет условию (10). Действительно, применяя оператор Ψ к уравнению (8), получим

$$\Psi(v_t) - \Psi(A(t)v + B(t)v) = \Psi(f(t, v + \Phi, p) - f(t, u_0, 0)).$$

Вычитая отсюда уравнение (17), придем к равенству

$$\Psi(v_t) = \psi_t - (\Psi(t)(\Phi))_t - \Psi_t(v).$$

Таким образом,

$$\Psi(t)(v(t)) = \psi(t) - \Psi(t)(\Phi) + y_0.$$

Из условий согласования, взяв $t = 0$, имеем

$$0 = \psi(0) - \Psi(0)(u_0) + y_0,$$

т. е. $y_0 = 0$ и выполнено условие (10).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы рассмотрели довольно регулярный случай $\Psi \in C([0, T]; L(X, Y_0))$. Сингулярный случай, когда, вообще говоря, оператор Ψ неограниченный, также легко может быть рассмотрен. Естественно, что в этом случае потребуются некоторые дополнительные условия.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $A(t) + B(t)$ — эллиптический оператор второго порядка, определенный в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда в качестве f можно взять, например, выражение вида

$$f = \sum_{i=1}^k f_i(t, x, u, \nabla u) p_i(t) + g(t, x),$$

а в качестве условий переопределения — набор условий вида

$$\int_G u(t, x) \varphi_i(t, x) dx = \psi_i \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Неизвестными являются само решение u и функции $p_i(t)$. В качестве основного пространства X берем $L_q(G)$ ($q > n + 2$). Функции f такого вида в случае зависимости от градиента решения вообще не входят в класс уравнений, рассмотренный в [11, § 6.3, 6.6], при любых условиях гладкости. Наши условия на старшую часть оператора A — это непрерывность старших коэффициентов и некоторые дополнительные условия, которые выполнены, например, если эти коэффициенты удовлетворяют условиям Гёльдера по пространственным переменным; достаточно, чтобы младшие коэффициенты принадлежали пространству $L_q(Q)$ ($Q = G \times (0, T)$). Пример применения абстрактных результатов к уравнениям второго порядка приведен в [11, § 9.4]. Легко видеть, что условия гладкости на данные в [11] значительно сильнее (даже с учетом того, что решение $\vec{p}(t) = (p_1, \dots, p_k)$ ищется в [11] в классе гёльдеровых функций, см. [11, следствие 9.4.3]). Наши условия на данные практически минимальны, если задача рассматривается в пространствах L_q (собственно говоря, это вытекает из общей теории параболических задач). Условия разрешимости в нашем случае могут быть легко сформулированы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ozisik M. N., Orlando H. A. B. Inverse heat transfer. New York: Taylor & Francis, 2000.
2. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов А. В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус-К, 2009.
3. Alifanov O. M. Inverse heat transfer problems. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1994.
4. Marchuk G. I. Mathematical models in environmental problems. Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1986. V. 16.
5. Mamonov A. V., Tsai Y.-H. R. Point source identification in nonlinear advection-diffusion-reaction systems // Inverse Probl. 2013. V. 29, N 3. (035009).
6. Boano F., Revelli R., Ridolfi L. Source identification in river pollution problems: a geostatistical approach // Water Resources Res. 2005. V. 41. W07023.
7. Hamdi A. Identification of point sources in two dimensional advection-diffusion-reaction equation: application to pollution sources in a river. Stationary case // Inverse Probl. Sci. Eng. 2007. V. 15, N 8. P. 855–870.
8. Badia A. El, Hamdi A. Inverse source problem in an advection-dispersion-reaction system: application to water pollution // Inverse Probl. 2007. V. 23, N 5. P. 2103–2120.
9. Badia A. El, Ha-Duong T. Inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2002. V. 10, N 6. P. 585–599.
10. Пятков С. Г., Самков М. Л. О некоторых классах коэффициентных обратных задач для параболических систем уравнений // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 1. С. 155–177.
11. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
12. Balachandran K., Dauer J. P. Controllability of nonlinear systems in Banach spaces: a survey // J. Optimization Theory Appl. 2002. V. 115, N 1. P. 7–28.
13. Engel K.-J., Klöss B., Nagel R., Fijavž B., Sikolya E. Maximal controllability for boundary control problems // Appl. Math. Optim. 2010. V. 62, N 2. P. 205–227.
14. Engel K.-J., Fijavž B. Exact and positive controllability of boundary control systems // Netw. Heterog. Media. 2017. V. 12, N 2. P. 319–337.
15. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 2. С. 273–290.
16. Пятков С. Г., Сафонов Е. И. О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 777–799.
17. Lunardi A. Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. Basel: Birkhäuser-Verl., 1995.
18. Grisvard P. Equations différentielles abstraites // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér. 1969. V. 2, N 3. P. 311–395.
19. Triebel H. Theory of function spaces. II. Basel: Birkhäuser-Verl., 1992.
20. Denk R., Krainer T. R -boundedness, pseudodifferential operators, and maximal regularity for some classes of partial differential operators // Manuscr. Math. 2007. V. 124, N 3. P. 319–342.
21. Kunstmann P. C., Weis L. Maximal L_p regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and H^∞ functional calculus // Proc. Autumn school on evolution equations and semigroups (M. Iannelli, R. Nagel, S. Piazzera, eds.). Heidelberg: Springer-Verl., 2004. V. 69. P. 65–320.
22. Denk R., Hieber M., Prüss J. R -boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type // Mem. Amer. Math. Soc. 2003. V. 166, N 788. P. 1–130.
23. Denk R., Hieber M., Prüss J. Optimal $L_p - L_q$ -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Math. Z. 2007. Bd 257, Heft 1. S. 93–224.
24. Prüss J., Simonett G. Maximal regularity for evolution equations in weighted L_p -spaces // Arch. Math. 2004. V. 82, N 5. P. 415–431.
25. Amann H. Maximal regularity for nonautonomous evolution equations // Adv. Nonlinear Stud. 2004. V. 4, N 4. P. 417–430.
26. Pyatkov S. G. Solvability of initial-boundary value problems for non-autonomous evolution equations // arXiv.org e-Print archive. arXiv:1806.02361. 6 Jun 2018.
27. Triebel H. Interpolation theory, function spaces, differential operators. Amsterdam: North-Holland Publ., 1978.
28. Yagi A. Abstract parabolic evolution equations and their applications. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2010.

29. Amann H. Linear and quasilinear parabolic problems. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser-Verl., 1995. V. 1.

Поступила в редакцию 10 июля 2018 г.

После доработки 30 июля 2018 г.

Принята к публикации 17 августа 2018 г.

Пятков Сергей Григорьевич
Югорский гос. университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
pyatkov@math.nsc.ru