Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. S. Romanovskii, Generalized rigid metabelian groups, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 1, 194–200

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.116>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.81.55.215

April 26, 2023, 14:27:12

ОБОБЩЕННО ЖЕСТКИЕ МЕТАБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

Н. С. Романовский

Аннотация. Исследуются обобщенно жесткие группы (r -группы) более детально в метабелевом случае. Описаны периодические r -группы. Доказано, что делимая метабелева r -группа распадается в полупрямое произведение двух своих абелевых подгрупп. Установлено, что всякая метабелева r -группа независимо вкладывается в делимую метабелеву r -группу. Доказано, что пересечение любого множества делимых подгрупп в делимой метабелевой r -группе снова является делимой подгруппой.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.116

Ключевые слова: разрешимая группа, метабелева группа, делимая группа.

1. Введение

Автор в своих и совместных с А. Г. Мясниковым работах [1–9] основательно изучил алгебраические и теоретико-модельные свойства жестких групп. Напомним определение жесткой (разрешимой) группы.

Пусть в группе G имеется нормальный ряд

$$G = G_1 > G_2 > \cdots > G_m > G_{m+1} = 1, \quad (1)$$

факторы которого G_i/G_{i+1} абелевы. Действие группы G на G_i сопряжениями $x \rightarrow x^g = g^{-1}xg$ позволяет определить на факторе G_i/G_{i+1} структуру (правого) модуля над групповым кольцом $\mathbb{Z}[G/G_i]$. Группа G называется *жесткой*, если для любого i такой модуль не имеет $\mathbb{Z}[G/G_i]$ -кручения, т. е. всякий ненулевой элемент кольца $\mathbb{Z}[G/G_i]$ действует нетривиально на любом ненулевом элементе модуля G_i/G_{i+1} .

В [10] было дано обобщение этого понятия, по сути, условие « $\mathbb{Z}[G/G_i]$ -модуль G_i/G_{i+1} не имеет кручения» заменено следующим условием. Сначала обозначим через R_i фактор-кольцо $\mathbb{Z}[G/G_i]$ по аннулятору G_i/G_{i+1} , так что G_i/G_{i+1} можно рассматривать как правый R_i -модуль. Новое условие состоит в том, что G_i/G_{i+1} не имеет R_i -кручения и что каноническое отображение $\mathbb{Z}[G/G_i] \rightarrow R_i$ инъективно на множестве G/G_i . Для краткости обобщенно жесткие группы называются *r -группами*. В [10] получены некоторые базисные факты об этих группах. В частности, показано, что ряд (1) если существует, то определяется однозначно группой G , для членов этого (жесткого) ряда было введено обозначение $G_i = \rho_i(G)$. Подгруппа группы G также будет r -группой, ее жесткий ряд получается пересечением с рядом (1) и выбрасыванием повторений. Назовем определенное выше кольцо R_i *кольцом, ассоциированным с*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00100).

фактором G_i/G_{i+1} ряда (1). Было доказано, что оно является (левой и правой) областью Оре, а потому вкладывается в тело частных. Было определено понятие *делимой r -группы*: в ней всякий модуль G_i/G_{i+1} должен быть делимым R_i -модулем и тогда его можно рассматривать как (правое) векторное пространство над телом частных кольца R_i .

Результаты этой работы в основном касаются метабелевых r -групп, при этом в качестве метабелевой мы понимаем группу ступени разрешимости ≤ 2 . Сразу отметим, что по определению абелевы r -группы могут быть двух типов: 1) абелевы группы простого периода p , все они являются делимыми в смысле r -групп; 2) абелевы группы без кручения, здесь понятие делимого объекта в смысле r -групп совпадает с аналогичным понятием в смысле теории абелевых групп. Нами получены следующие основные результаты. Описаны периодические r -группы, в частности, все они оказываются метабелевыми. Доказывается, что всякая делимая метабелева r -группа распадается в полупрямое произведение двух своих абелевых подгрупп. Доказывается, что всякая метабелева r -группа независимо вкладывается в делимую метабелеву r -группу. Устанавливается, что пересечение любого множества делимых подгрупп в метабелевой r -группе снова является делимой подгруппой.

2. Периодические r -группы

Для каждой пары простых чисел (p, q) с условием: p делит $q^n - 1$ при некотором натуральном n , и для каждого кардинала $\alpha \geq 1$ построим 2-ступенно разрешимую периодическую r -группу, которую обозначим через $E(p, q, \alpha)$. Пусть, как обычно, F_q обозначает поле из q элементов, $\overline{F}_q$ — его алгебраическое замыкание. Выберем в мультипликативной группе $\overline{F}_q^*$ циклическую подгруппу C порядка p , такая подгруппа единственна. В поле $\overline{F}_q$ рассмотрим подкольцо, порожденное C , на самом деле это будет некоторое подполе F_{q^n} . Пусть T — векторное пространство над полем F_{q^n} с базой мощности α . Полагаем $E(p, q, \alpha)$ равным группе матриц $\begin{pmatrix} C & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$. Эта группа разлагается в виде полупрямого произведения C и аддитивной группы пространства T . Она является r -группой с жестким рядом

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} > 1.$$

При p , делящем $q - 1$, группа $E(p, q, 1)$ будет неабелевой группой порядка pq .

Доказательство следующего утверждения в общих чертах было подсказано В. Д. Мазуровым, которому автор выражает благодарность.

Лемма. Пусть p и q — простые числа, p делит $q - 1$, $E = E(p, q, 1)$ — неабелева группа порядка pq . Группа E не может содержаться в мультипликативной группе какого-либо тела.

Доказательство. Предположим противное: E содержится в мультипликативной группе некоторого тела D . Если бы характеристика D была простым числом, то E порождало бы в D конечное подкольцо, которое должно быть подтелом, а значит, полем, что противоречит некоммутативности группы E . Поэтому характеристика тела D должна быть равна 0.

Возьмем некоторый ненулевой элемент $v \in D$ и обозначим через V $\mathbb{Q}$ -подпространство, порожденное множеством $v \cdot E$. Оно конечномерно, группа

E действует на V правыми умножениями без неподвижных точек. Последнее условие равносильно тому, что линейное преобразование пространства V , соответствующее любому нетривиальному элементу из E , не имеет характеристического числа, равного 1. Пополним V до пространства W над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Группа E также действует на W без неподвижных точек. Пусть $A = \langle a \rangle$ — подгруппа порядка p из E , $B = \langle b \rangle$ — подгруппа порядка q . Подгруппа B нормальна в E и $aba^{-1} = b^r$, где $1 < r < q$ и $r^p \equiv 1 \pmod{q}$. Пусть ξ — первообразный корень степени q из единицы. Можно утверждать, что $\{\xi, \xi^2, \dots, \xi^{q-1}\}$ — множество всех характеристических чисел линейного преобразования b . Пространство W разбивается в прямую сумму $W_1 \oplus \dots \oplus W_{q-1}$ подпространств $W_i = \{x \in W \mid xa = \xi^i x\}$. Пусть $0 \neq w \in W_1$. Так как $(wa)b = w(aba^{-1})a = (wb^r)a = \xi^r \cdot wa$, то $W_1 a = W_r$. Далее получаем, что $w, wa, \dots, wa^{p-1}$ лежат в различных W_i . Поэтому вектор $w + wa + \dots + wa^{p-1}$ отличен от нулевого, однако он неподвижен относительно преобразования a . Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Предложение 1. Пусть G — r -группа ступени разрешимости m . Предположим, что какой-то фактор $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ ее жесткого ряда имеет $\mathbb{Z}$ -кручение. Тогда этот фактор имеет простой период p и либо $i = 1$, либо $i = m$. При $i = 1$ и $m > 1$ порядок рассматриваемого фактора равен p .

Доказательство. Так как по предположению фактор $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ имеет $\mathbb{Z}$ -кручение, в нем существует нетривиальный элемент u простого порядка p . На аддитивном языке $up = 0$. Но тогда $p\mathbb{Z}$ лежит в ядре действия кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ и весь фактор $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ имеет период p .

Пусть $i = 1$, $m > 1$, $A = \rho_1(G)/\rho_2(G)$. Как уже замечено, A — абелева группа периода p . Допустим, она не является циклической. Тогда в A найдется подгруппа A' , изоморфная прямому произведению двух циклических групп порядка p . Пусть R_2 — кольцо, ассоциированное с фактором $\rho_2(G)/\rho_3(G)$. Оно коммутативно, вкладывается в поле и является гомоморфным образом группового кольца $\mathbb{Z}A$. При этом A (и тогда A') вкладывается в R_2^* . Но в мультипликативной группе поля не может быть подгруппы, изоморфной A' . Из полученного противоречия вытекает, что A — циклическая группа порядка p .

Допустим, что $1 < i < m$. В этом случае $\rho_i(G)$ будет неабелевой r -группой, причем первый фактор ее жесткого ряда имеет простой период, скажем, q . На основании уже доказанного этот фактор является циклической группой порядка q . Заменяя G на $\rho_{i-1}(G)$, будем предполагать, что $i = 2$, $B = \rho_2(G)/\rho_3(G)$ — циклическая группа порядка q и $m \geq 3$. Тогда ассоциированным с фактором $\rho_2(G)/\rho_3(G)$ кольцом будет поле F_q . Группа $A = \rho_1(G)/\rho_2(G)$ должна вкладываться в мультипликативную группу поля F_q , и ее период должен быть простым числом p , которое делит $q - 1$. Получаем, что группа $G/\rho_3(G)$ изоморфна $E(p, q, 1)$ — неабелевой группе порядка pq . Эта группа, в свою очередь, должна вкладываться в мультипликативную группу кольца, ассоциированного с фактором $\rho_3(G)/\rho_4(G)$, а значит, в мультипликативную группу тела частных этого кольца. Последнее противоречит лемме. Предложение доказано.

Теорема 1. Периодические r -группы исчерпываются абелевыми группами простых периодов и метаабелевыми группами $E(p, q, \alpha)$.

Доказательство. С абелевыми группами все понятно. Пусть G — периодическая неабелева r -группа. Из предложения 1 вытекают следующие факты: группа G 2-ступенно разрешимая, фактор-группа $A = \rho_1(G)/\rho_2(G)$ является

циклической группой простого порядка p , группа $\rho_2(G)$ имеет простой период, скажем, q . Рассмотрим ассоциированное с $\rho_2(G)$ кольцо. Оно является гомоморфным образом кольца $F_q A$, потому конечно, не имеет делителей нуля и, следовательно, является некоторым полем F_{q^n} . Группа A вкладывается в мультипликативную группу поля F_{q^n} и порождает его как подкольцо. Поэтому p делит $q^n - 1$ и n минимально с этим условием. Теперь очевидно, что $G \cong E(p, q, \alpha)$, где α — размерность $\rho_2(G)$ над F_{q^n} . Теорема доказана.

3. Делимые метабелевы r -группы

3.1. Один из важных фактов о делимых жестких группах состоит в том, что такие группы разлагаются в последовательные полупрямые произведения некоторых своих абелевых подгрупп [5]. Покажем, что подобное верно и для делимых метабелевых r -групп.

Теорема 2. Пусть G — 2-ступенно разрешимая r -группа и $\rho_2(G)$ является делимым R -модулем, где R — ассоциированное с $\rho_2(G)$ кольцо. Тогда подгруппа $\rho_2(G)$ отщепляется в G , т. е. найдется подгруппа $A \cong G/\rho_2(G)$ такая, что G является полупрямым произведением $A \cdot \rho_2(G)$. Любое другое подобное разложение группы G имеет вид $A^f \cdot \rho_2(G)$, где $f \in \rho_2(G)$. Всякий элемент $g \in G \setminus \rho_2(G)$ сопряжен с помощью элемента из $\rho_2(G)$ с некоторым элементом из A .

Следствие. Делимая метабелева r -группа распадается в полупрямое произведение некоторой своей делимой абелевой подгруппы и $\rho_2(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. По теореме 2 из [11] существует строгое R -расщепление группы G над $\rho_2(G)$, т. е. группа матриц $\begin{pmatrix} \bar{G} & 0 \\ D(G) & 1 \end{pmatrix}$, где $\bar{G} = G/\rho_2(G)$, $D(G)$ — правый R -модуль без кручения и группа G вкладывается в указанную группу матриц по правилу $g = \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ d(g) & 1 \end{pmatrix}$, здесь $\bar{g} = g \cdot \rho_2(G)$, причем элементы $d(g)$ порождают модуль $D(G)$. Обозначим через K поле частных кольца R и через V — векторное пространство над K , полученное естественным пополнением R -модуля $\rho_2(G)$. Понятно, что $\rho_2(G)$ будет подпространством в V . Зафиксируем некоторый элемент $g_0 \in G \setminus \rho_2(G)$, и пусть $a = \bar{g}_0$, $t = d(g_0)$, т. е. $g_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$, $a \neq 1$. Для произвольного элемента $g = \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ d(g) & 1 \end{pmatrix} \in G$ имеем

$$[g_0, g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t(\bar{g} - 1) - d(g)(a - 1) & 1 \end{pmatrix} \in \rho_2(G).$$

Из условия делимости модуля $\rho_2(G)$ следует, что элемент

$$u_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t(\bar{g} - 1)(a - 1)^{-1} - d(g) & 1 \end{pmatrix}$$

также лежит в $\rho_2(G)$. Имеем

$$gu_g = \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ t(a - 1)^{-1}(\bar{g} - 1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ v_0(\bar{g} - 1) & 1 \end{pmatrix},$$

где $v_0 = t(a - 1)^{-1} \in V$. Нетрудно проверяется, что элементы $\begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ v_0(\bar{g} - 1) & 1 \end{pmatrix}$ образуют в G подгруппу A , изоморфную $\bar{G}$, изоморфизм $\begin{pmatrix} \bar{g} & 0 \\ v_0(\bar{g} - 1) & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{g}$. Группа G будет полупрямым произведением A и $\rho_2(G)$.

Будем смотреть на $\rho_2(G)$ как на правый R -модуль, для которого используем обозначение T . Группу G можно отождествить с группой матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$. Пусть $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \notin \rho_2(G)$, тогда $a \neq 1$, пусть $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t(a-1)^{-1} & 1 \end{pmatrix}$. Имеем $f^{-1}gf = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$, так что всякий элемент $g \in G \setminus \rho_2(G)$ сопряжен при помощи элемента $f \in \rho_2(G)$ с элементом из A .

Пусть $A' \cdot \rho_2(G)$ — другое представление группы G в виде полупрямого произведения и $1 \neq a' \in A'$. Выберем элемент $f \in \rho_2(G)$, для которого $f^{-1}a'f \in A$. Так как каждая из подгрупп A или A' совпадает с централизатором любого своего нетривиального элемента, можно утверждать, что $f^{-1}A'f = A$. Теорема доказана.

3.2. Пусть G является r -группой ступени разрешимости m и $(R_1, \dots, R_m)$ — набор колец, ассоциированных с соответствующими факторами жесткого ряда группы G . По определению группа $G/\rho_i(G)$ вкладывается в мультипликативную группу кольца R_i и порождает это кольцо. Пусть H — подгруппа из G той же ступени разрешимости m . Тогда H также будет r -группой, при этом $\rho_i(H) = H \cap \rho_i(G)$ и кольцо $R_i(H)$, ассоциированное с фактором $\rho_i(H)/\rho_{i+1}(H)$, можно считать подкольцом в R_i , порожденным $H/\rho_{i+1}(H) \leq G/\rho_{i+1}(G)$. По аналогии с жесткими группами будем говорить, что H — *независимая подгруппа* в G , если для любого i всякая линейно независимая над кольцом $R_i(H)$ система элементов из $\rho_i(H)/\rho_{i+1}(H)$ остается линейно независимой над большим кольцом $R_i = R_i(G)$. Отметим, что любая подгруппа абелевой r -группы независима. В соответствии с этим определением можно говорить о независимом вложении одной r -группы в другую.

Теорема 3. *Всякая метабелева r -группа независимо вкладывается в делимую метабелеву r -группу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если рассматриваемая группа G абелева, то либо ее период равен простому числу и тогда она по нашему определению делимая, либо G — группа без кручения и тогда она вкладывается в делимое пополнение (делимую оболочку), которое будет полной абелевой группой без кручения и определяется однозначно с точностью до G -изоморфизма.

Пусть группа G 2-ступенно разрешима, $A = G/\rho_2(G)$, R — кольцо, ассоциированное с $\rho_2(G)$. Поскольку по теореме 2 из [11] группу G можно заменить ее строгим R -расщеплением, сразу предполагаем, что G является полупрямым произведением A и $\rho_2(G)$.

Пусть сначала A — группа простого периода p . По предложению 1 она должна быть циклической группой порядка p . Если период группы $\rho_2(G)$ конечен, то по теореме 1 группа G изоморфна какой-то группе $E(p, q, \alpha)$ и сама является делимой. Пусть период $\rho_2(G)$ бесконечен. Обозначим через K поле частных кольца R , оно имеет характеристику 0. Выберем в R -модуле $\rho_2(G)$ максимальную линейно независимую над R систему элементов $\{e_i \mid i \in I\}$ и вложим $\rho_2(G)$ в векторное пространство V с базой $\{e_i \mid i \in I\}$ над полем K . Группа матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix}$ будет делимой r -группой, и G естественным образом вкладывается в нее как независимая подгруппа.

Предположим, что A — абелева группа без кручения. Она вкладывается в мультипликативную группу кольца R . Пусть K — поле частных R и $\bar{K}$ — алгеб-

раическое замыкание K . Мультипликативная группа поля $\overline{K}$ является полной абелевой группой. Обозначим через A' делимую оболочку A в этой группе, она будет делимой абелевой группой без кручения. Пусть R' — подкольцо в $\overline{K}$, порожденное множеством A' , K' — его поле частных. Выберем в $\rho_2(G)$ какую-нибудь максимальную линейно независимую над R систему элементов $\{e_i \mid i \in I\}$ и вложим $\rho_2(G)$ в векторное пространство V с базой $\{e_i \mid i \in I\}$ над полем K' . Группа G независимо вкладывается в делимую метабелеву r -группу $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix}$. Теорема доказана.

Предложение 2. Пересечение любого множества делимых подгрупп в метабелевой r -группе снова является делимой подгруппой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G — метабелева r -группа, $\{G_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество ее делимых подгрупп, $H = \bigcap G_i$. Утверждение очевидно, если G — абелева группа или $H \leq \rho_2(G)$ и тогда $H = \bigcap \rho_2(G_i)$ — пересечение абелевых делимых r -групп.

Предположим, что существует элемент $a \in H \setminus \rho_2(G)$. Обозначим через A централизатор элемента a в G и положим $A_i = A \cap G_i$. Из теоремы 2 следует, что имеются разложения групп G_i в полупрямые произведения $A_i \cdot \rho_2(G_i)$. Тогда $H = B \cdot \rho_2(H)$, где $B = \bigcap A_i$, $\rho_2(H) = \bigcap \rho_2(G_i)$. Очевидно, что B — делимая абелева r -группа. Пусть R — кольцо, ассоциированное в G с $\rho_2(G)$. Подкольцо R_i , порожденное A_i , ассоциировано в G_i с $\rho_2(G_i)$, а подкольцо R_B , порожденное B , ассоциировано в H с $\rho_2(H)$. Понятно, что $R_B \leq \bigcap R_i$. Нужно доказать, что $\rho_2(H)$ — делимый R_B -модуль. Пусть $t \in \rho_2(H)$, $0 \neq u \in R_B$. Так как $u \in R_i$ для всякого i , то t делится в каждом $\rho_2(G_i)$ на u . Частное от деления определяется однозначно и не зависит от i , пусть $su = t$. Имеем $s \in \bigcap \rho_2(G_i) = \rho_2(H)$. Предложение доказано.

Проблема. Будет ли делимой подгруппой пересечение любого множества делимых подгрупп в произвольной r -группе?

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Опираясь на предложение 2, можно определить делимое замыкание любой подгруппы H метабелевой делимой r -группы G как пересечение всех делимых подгрупп, содержащих H .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для произвольной жесткой группы G было установлено [5], что существует такое ее делимое замыкание (в подходящей делимой жесткой группе), в котором G будет независимой подгруппой, и это замыкание определяется однозначно с точностью до G -изоморфизма. Существование подобного замыкания для метабелевой r -группы выводится из теоремы 3, а однозначность не получается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романовский Н. С. Нетеровость по уравнениям жестких разрешимых групп // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 2. С. 258–279.
2. Myasnikov A., Romanovskii N. Krull dimension of solvable groups // J. Algebra. 2010. V. 324, N 10. P. 2814–2831.
3. Романовский Н. С. Делимые жесткие группы // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 6. С. 762–776.
4. Мясников А. Г., Романовский Н. С. Логические аспекты теории делимых жестких групп // Докл. АН. 2014. Т. 459, № 2. С. 154–155.
5. Романовский Н. С. Делимые жесткие группы. Алгебраическая замкнутость и элементарная теория // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 5. С. 593–612.

6. Романовский Н. С. Неприводимые алгебраические множества над делимыми распавшимися жесткими группами // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 793–818.
7. Романовский Н. С. Теорема Гильберта о нулях (Nullstellensatz) в алгебраической геометрии над жесткими разрешимыми группами // Изв. РАН. Сер. мат. 2015. Т. 79, № 5. С. 201–214.
8. Мясников А. Г., Романовский Н. С. Теоретико-модельные аспекты теории делимых жестких разрешимых групп // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 1. С. 121–125.
9. Мясников А. Г., Романовский Н. С. Делимые жесткие группы. II. Стабильность, насыщенность и элементарные подмодели // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 1. С. 43–56.
10. Романовский Н. С. Обобщенно жесткие группы: определение, базисные факты, проблемы // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 891–896.
11. Романовский Н. С. Расщепление группы над абелевой нормальной подгруппой // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 4. С. 478–492.

Поступила в редакцию 9 марта 2018 г.

После доработки 9 марта 2018 г.

Принята к публикации 23 мая 2018 г.

Романовский Николай Семенович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
rmnvski@math.nsc.ru