Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. V. Semenko, Reduction of vector boundary value problems on Riemann surfaces to one-dimensional problems, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 1, 201–213

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.117>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.85.183.62

April 26, 2023, 15:42:20

СВЕДЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ К ОДНОМЕРНЫМ

Е. В. Семенко

Аннотация. Построены основы теории векторных краевых задач сопряжения на компактной римановой поверхности произвольного положительного рода. На риманову поверхность переносятся основные конструкции, используемые в классической теории векторных краевых задач на плоскости: сведение задачи к системе интегральных уравнений на контуре, понятия сопутствующей и союзной задач и их связь с исходной задачей, построение матричного мероморфного решения. Показано, что любую векторную краевую задачу сопряжения можно свести к задаче с треугольной матрицей коэффициентов, что фактически сводит решение задачи к последовательно решаемым одномерным задачам. Это сведение к хорошо изученным одномерным задачам открывает путь к полному построению общего решения векторных краевых задач на римановой поверхности.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.117

Ключевые слова: риманова поверхность, векторная краевая задача сопряжения, сопутствующая задача, союзная задача, голоморфное векторное расслоение.

1. Введение, постановка задачи

В работе автора [1] установлена связь между векторными краевыми задачами на римановой поверхности и голоморфными векторными расслоениями, а именно показано, что общий метод решения однородной векторной краевой задачи фактически эквивалентен полной классификации голоморфных векторных расслоений (с точностью до эквивалентности), а общий метод решения неоднородной задачи — описанию первой группы когомологий с коэффициентами в векторных расслоениях. В частности, одним из проявлений этой связи является эквивалентность известных утверждений для римановой поверхности рода нуль (т. е. римановой сферы или плоскости): о приведении векторной задачи к задаче с диагональной матрицей [2] и об эквивалентности векторного расслоения прямой сумме одномерных расслоений (теорема Гротендика) [3].

Под полной классификацией расслоений (краевых задач) имеется в виду введение системы инвариантов (т. е. характеристик, одинаковых для эквивалентных расслоений и/или эквивалентных краевых коэффициентов), задание которых однозначно определяет класс эквивалентных расслоений и соответственно коэффициент краевого условия с точностью до эквивалентности. Так, для одномерных расслоений (одномерных краевых задач) есть два инварианта: первый — индекс краевого коэффициента = степень дивизора сечений расслоения = класс $\mathcal{C}$ Женя расслоения — и второй — элемент группы Якоби, однозначно задающий класс эквивалентных коэффициентов нулевого индекса = элемент

группы Пикара, однозначно определяющий класс эквивалентных дивизоров нулевого порядка (расслоений нулевого класса Чжэня), см. [1]. Для векторных расслоений над римановой сферой такими инвариантами являются классы Чжэня одномерных расслоений = частные индексы матрицы коэффициентов [1].

Задача классификации векторных расслоений над произвольной компактной римановой поверхностью весьма полно исследована в [4]. Одно время эта задача привлекала довольно большое внимание главным образом в связи с работами А. Н. Тюрина, например, [5–7]. В целом на сегодняшний день совершенно ясно, что не все векторные расслоения на римановой поверхности произвольного рода эквивалентны прямой сумме одномерных, однако полная система инвариантов, классифицирующая голоморфные векторные расслоения, на данный момент не известна.

Что касается векторных краевых задач, то на римановой поверхности они ранее практически не рассматривались, за исключением одномерных, изученных достаточно полно (см., например, [8–11]).

В настоящей работе предпринимается попытка построения основ теории векторных краевых задач на римановой поверхности. В первую очередь для этого на риманову поверхность переносятся основные конструкции, используемые в классической теории векторных краевых задач на плоскости, в частности, сведение векторной задачи к системе интегральных уравнений на контуре (этому посвящен разд. 2) и построение линейно независимой системы мероморфных решений (разд. 3). Такое перенесение результатов с плоскости (поверхности рода нуль) на поверхность произвольного рода не совсем тривиально и требует некоторых дополнительных усилий.

Далее, установлено (разд. 4), что любая векторная краевая задача сводится к задаче с треугольной матрицей. Это позволяет свести решение краевой задачи к последовательному решению одномерных краевых задач, для которых имеется хорошо разработанная теория. Данное утверждение эквивалентно доказанному в [4, с. 63] утверждению, что любое расслоение с точностью до эквивалентности может быть задано с помощью треугольных матриц перехода. Важно здесь, однако, не само по себе сведение задачи к задаче с треугольной матрицей, а разработанная в статье техника анализа краевых задач с использованием мероморфных матриц и их дивизоров, позволяющая строить решения краевых задач с помощью сингулярных интегралов, как в классической теории, и, в частности, открывающая путь к полной классификации краевых коэффициентов.

Предварительно подчеркнем вывод, следующий из [1]. Там показано, что краевые задачи на любой гладкой кривой, в том числе даже не замкнутой или не простой, сводятся к построению сечений голоморфных векторных расслоений. Точнее говоря, для такого сведения необходимо, чтобы риманова поверхность с разрезом вдоль этой кривой распадалась на конечное число компонент связности (может быть, и одна компонента) с кусочно гладкой границей. Это, в частности, означает, что общий метод решения задач не зависит от выбора кривой, т. е. для построения общего решения (и для классификации расслоений) кривую можно выбрать достаточно произвольно.

Итак, пусть D — риманова поверхность рода $\rho > 0$, и пусть L — простой гладкий контур, разделяющий D на две связные части $D^\pm$, причем ориентация L согласована с D^+ . Рассмотрим однородную краевую задачу линейного

сопряжения

$$g^+(t) = G(t)g^-(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

где $g^\pm(t)$ — граничные значения на L искомого аналитического (или мероморфного) в $D^\pm$ n -мерного вектора $g^\pm(z)$, $G(t)$ — заданная невырожденная ($\det G(t) \neq 0$, $t \in L$) гёльдерова $n \times n$ -матрица на L . Матрицу $G(t)$ будем называть *коэффициентом краевой задачи*. Одновременно будем рассматривать аналогичные задачи для дифференциалов

$$w^+(t) = G^T(t)w^-(t), \quad t \in L, \quad (2)$$

где $w^\pm(t)$ — граничные значения на L n -мерного абелева дифференциала $w^\pm(z)$, $z \in D^\pm$. Отметим, что задача для векторов-дифференциалов (2) также сводится к векторному расслоению, т. е. в конечном счете к задаче для вектор-функций вида (1), отдельно рассматриваем задачу для дифференциалов только для технического удобства.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При необходимости можно считать, что одна из областей D^+ или D^- односвязна, т. е. конформно эквивалентна части плоскости.

Далее согласно общепринятой терминологии [2] точку поверхности D называем *полюсом вектора*, если она является полюсом хотя бы одной его координаты, а порядком полюса считаем максимальный порядок полюса по всем координатам. Соответственно нулем вектора будет нуль всех его координат одновременно, а порядком нуля — минимальный его порядок по всем координатам. Таким образом определяется дивизор любого мероморфного вектора. Так как умножение на произвольную мероморфную функцию сохраняет решение задач (1) и (2), дивизоры мероморфных решений определяются с точностью до главных дивизоров. Наконец, поскольку локально задачи (1) и (2) эквивалентны задачам на плоскости, любые их нули и полюсы, в том числе расположенные на контуре L , имеют целый порядок.

2. Сведение задач к системам интегральных уравнений, сопутствующая и союзная задачи

Здесь перенесем на риманову поверхность основы теории краевых задач на плоскости [2].

Начнем с ядра Коши $K_0(p, q)$ для одномерной краевой задачи [10, 11]: $K_0(p, q)$ есть абелев дифференциал по p , кратный дивизору $p_1 \cdots p_\rho p_0^{-1} q^{-1}$ с вычетами единица в точке q и минус единица в p_0 , и мероморфная функция по q , кратная $p^{-1} p_0 p_1^{-1} \cdots p_\rho^{-1}$; здесь $p_1, \dots, p_\rho$ — любой набор точек D такой, что не существует абелева дифференциала 1-го рода на D , имеющего нули во всех этих точках. Далее точки p_j , $j = \overline{1, \rho}$, будем называть *полюсами ядра Коши*, а точку p_0 — *нулем*. Отметим, что нуль и полюсы можно выбирать достаточно произвольно, в частности всегда можно выбрать полюсы в окрестности любой заданной точки поверхности D , а нуль можно выбрать произвольно, лишь бы он не совпадал с полюсами [10].

Свойства ядра Коши. 1. Пусть $g(t)$ — гёльдерова функция на L и

$$\Phi^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_0(t_0, z) g(t_0), \quad z \in D^\pm.$$

Тогда

- (а) Функции $\Phi^\pm(z)$ аналитичны в $D^\pm$, кроме точек p_j , $j = \overline{1, \rho}$, где имеются простые полюсы.
 (б) Если для любого абелева дифференциала 1-го рода $w(z)$ на D

$$\int_L g(t)w(t) = 0,$$

то $\Phi^\pm(z)$ аналитичны в $D^\pm$.

- (с) Граничные значения на L таковы:

$$\Phi^\pm(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_0(t_0, t)g(t_0) \pm \frac{g(t)}{2}, \quad t \in L.$$

2. Пусть $w(t)$ — дифференциал на L и

$$W^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_0(z, t_0)w(t_0), \quad z \in D^\pm.$$

Тогда

- (а) Дифференциалы $W^\pm(z)$ аналитичны в $D^\pm$, кроме точки p_0 , где имеется простой полюс, причем

$$\text{Res } W(z)|_{z=p_0} = -\frac{1}{2\pi i} \int_L w(t).$$

- (б) Граничные значения

$$W^\pm(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_0(t, t_0)w(t_0) \mp \frac{w(t)}{2}, \quad t \in L.$$

Действительно, в [10, гл. 1, § 4] показано, что в плоскости локального параметра t_0 при $z \rightarrow t_0$ ядро Коши имеет вид

$$K(t_0, z) = \frac{dt_0}{t_0 - z} + F(t_0, z) dt_0,$$

где $F(t_0, z)$ аналитична по обоим переменным, и, таким образом, все приведенные выражения для граничных значений $\Phi^\pm(t)$ и $W^\pm(t)$ имеют обычный смысл сингулярных интегралов (в смысле главного значения), а все утверждения об этих граничных значениях сразу следуют из свойств предельных значений интеграла типа Коши. Все остальные свойства либо непосредственно установлены в [10, гл. 1, § 4], либо легко следуют из результатов, изложенных в [10].

Кроме того, будем использовать построенные в [10, гл. 2, § 7] функции $\psi^\pm(z) = \psi(p | z)$, $z \in D^\pm$, аналитичные в $D^\pm$ при $p \in D^\pm$ и имеющие единственный простой нуль в точке p .

Также будем использовать стандартные обозначения: $r[\Delta]$ — число линейно независимых мероморфных функций, кратных дивизору Δ , $i[\Delta]$ — число линейно независимых абелевых дифференциалов, кратных Δ . Теорема Римана — Роха: $r[\Delta^{-1}] = i[\Delta] + \deg \Delta - \rho + 1$ [4, 10, 12].

Обратимся к условиям аналитической продолжимости функций и дифференциалов с контура L в области $D^\pm$. Далее будем использовать два ядра Коши:

ядро $K_1(p, q)$ с полюсами $p_{j1} \in D^-$, $j = \overline{1, \rho}$, и нулем $p_{01} \in D^+$ и ядро $K_2(p, q)$ с полюсами $p_{j2} \in D^+$, $j = \overline{1, \rho}$, и нулем $p_{02} \in D^-$.

Теорема 1 (аналитическая продолжимость функций и дифференциалов). Пусть задана функция $g(t)$, $t \in L$.

1. Функция $g(t)$ аналитически продолжима в D^+ , т. е. $g(t) = g^+(t)$, тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_1(t_0, t) g(t_0) - \frac{g(t)}{2} = C = \text{const}.$$

При этом

$$g^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L K_1(t, z) g(t) - C, \quad C = -g^+(p_{01}).$$

2. Функция $g(t)$ аналитически продолжима в D^- , т. е. $g(t) = g^-(t)$, тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_2(t_0, t) g(t_0) + \frac{g(t)}{2} = C = \text{const}.$$

При этом

$$g^-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L K_2(t, z) g(t) + C, \quad C = g^-(p_{02}).$$

Аналогично пусть на L задан дифференциал $w(t)$.

1. Дифференциал $w(t)$ аналитически продолжим в D^+ тогда и только тогда, когда существуют константы $C_1, \dots, C_\rho$ такие, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_2(t, t_0) w(t_0) + \frac{w(t)}{2} = \sum_{k=1}^{\rho} C_k w_k(t).$$

2. Дифференциал $w(t)$ аналитически продолжим в D^- тогда и только тогда, когда существуют константы $C_1, \dots, C_\rho$ такие, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_1(t, t_0) w(t_0) - \frac{w(t)}{2} = \sum_{k=1}^{\rho} C_k w_k(t).$$

Здесь $w_k(z)$, $k = \overline{1, \rho}$, — базис абелевых дифференциалов 1-го рода на D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(t) = g^+(t)$ и функция $g^+(z)$ аналитична в D^+ . Тогда для любого абелева дифференциала 1-го рода $w(z)$ на D , очевидно, имеем

$$\int_{L=\partial D^+} g^+(t) w(t) = 0,$$

откуда следует, что функция

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L K_1(t, z) g^+(t)$$

будет аналитическим в $D^\pm$ решением задачи о скачке $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t)$, $t \in L$. Другим решением той же задачи будет

$$\Phi_2(z) = \begin{cases} g^+(z), & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, разность $\Phi_1(z) - \Phi_2(z)$ аналитична в D , т. е. равна константе. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L K_1(t, z) g^+(t) - g^+(z) &= C, \quad z \in D^+, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_L K_1(t, z) g^+(t) &= C, \quad z \in D^-, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L K_1(t_0, t) g(t_0) - \frac{g(t)}{2} = C.$$

Обратно, пусть с некоторой константой C выполнено последнее равенство. Рассмотрим функцию

$$g^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L K_1(t, z) g(t) - C.$$

Поскольку $K_1(t, p_{01}) \equiv 0$, то $g^+(p_{01}) = -C$. Функция $g^+(z)$ мероморфна в $D^\pm$ и имеет полюсы в точках $p_{j1} \in D^-$, $j = \overline{1, \rho}$, т. е. она аналитична в D^+ и очевидно ее граничное значение

$$g^+(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L K_1(t_0, t) g(t_0) + \frac{g(t)}{2} - C = g(t).$$

Доказательства утверждений теоремы о продолжимости в D^- , а также утверждений о продолжимости дифференциалов аналогичны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Формулировки и доказательства теоремы будут абсолютно теми же, если функции $g(t)$ заменить n -мерными вектор-функциями $g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ или аналогично заменить дифференциал $w(t)$ вектором, составленным из дифференциалов, только нужно заменить константы C_1, C_2, C_{k1}, C_{k2} , $k = \overline{1, \rho}$, постоянными векторами.

Далее по умолчанию $g(t)$ — вектор-функции, $w(t)$ — векторы-дифференциалы, C_1, C_2, C_{k1}, C_{k2} , $k = \overline{1, \rho}$ — постоянные векторы.

Следствия теоремы 1. 1. Задача для функций (1) эквивалентна системе уравнений для вектор-функции $g(t) = g^-(t)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_1(t_0, t) G(t_0) g(t_0) - \frac{G(t)g(t)}{2} = C_1, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_2(t_0, t) g(t_0) + \frac{g(t)}{2} = C_2, \quad (3)$$

из которой следует равенство

$$\begin{aligned} g(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} [K_2(t_0, t) - K_1(t_0, t) G^{-1}(t) G(t_0)] g(t_0) \\ = C_2 - G^{-1}(t), \quad C_1, C_1, C_2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Задача для дифференциалов (2) эквивалентна системе уравнений для вектора-дифференциала $w(t) = w^+(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_2(t, t_0) w(t_0) + \frac{w(t)}{2} &= \sum_{k=1}^{\rho} C_{k2} w_k(t), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_1(t, t_0) (G^T(t_0))^{-1} w(t_0) - \frac{(G^T(t))^{-1} w(t)}{2} &= \sum_{k=1}^{\rho} C_{k1} w_k(t), \end{aligned} \quad (5)$$

из которой следует равенство

$$\begin{aligned} w(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} [K_2(t, t_0) - K_1(t, t_0) G^T(t) (G^T(t_0))^{-1}] w(t_0) \\ = \sum_{k=1}^{\rho} (C_{k2} - G^T(t) C_{k1}) w_k(t), \quad C_{k1}, C_{k2} = \text{const}, \quad k = \overline{1, \rho}. \end{aligned} \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Уравнения (4) и (5) — это системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода (поскольку ядро их имеет сингулярность порядка меньше единицы, т. е. интегральный оператор вполне непрерывен), причем эти системы сопряженные, т. е., в частности, уравнение (4) имеет решение тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна любому решению однородного уравнения (6), т. е.

$$\int_L (C_2 - G^{-1}(t) C_1) w(t) = 0$$

для любого решения уравнения (6) с $C_{k1} = C_{k2} = 0$, $k = \overline{1, \rho}$.

Покажем, что при определенных условиях решения уравнений (4) или (6) дают решения краевых задач (1) или (2) соответственно. Введем функции

$$\begin{aligned} \psi_0^+(z) &= \psi(p_{01} | z), \quad \psi_1^+(z) = \prod_{j=1}^{\rho} \psi(p_{j2} | z), \quad z \in D^+, \\ \psi_0^-(z) &= \psi(p_{02} | z), \quad \psi_1^-(z) = \prod_{j=1}^{\rho} \psi(p_{j1} | z), \quad z \in D^-, \end{aligned}$$

и соответственно $\psi_j^{\pm}(t)$, $t \in L$, $j = \overline{0, 1}$.

Пусть задана функция $g(t)$, $t \in L$, и

$$\begin{aligned} h^+(z) &= \psi_1^+(z) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{t \in L} K_2(t, z) g(t) - C_2 \right), \quad z \in D^+; \\ h^-(z) &= \psi_1^-(z) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{t \in L} K_1(t, z) G(t) g(t) - C_1 \right), \quad z \in D^-, \end{aligned}$$

$C_1, C_2 = \text{const}$. Функция $h^+(z)$ аналитична в D^+ (поскольку интеграл имеет только простые полюсы в точках p_{j2} , $j = \overline{1, \rho}$, которые компенсируют нули ψ_1^+), а $h^-(z)$ аналитична в D^- . В свою очередь, имеем

$$\frac{h^+(t)}{\psi_1^+(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_2(t_0, t) g(t_0) + \frac{g(t)}{2} - C_2,$$

$$\frac{h^-(t)}{\psi_1^-(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0 \in L} K_1(t_0, t) G(t_0) g(t_0) - \frac{G(t)g(t)}{2} - C_1.$$

Но тогда условие (4) означает, что

$$\frac{h^+(t)}{\psi_1^+(t)} - G^{-1}(t) \frac{h^-(t)}{\psi_1^-(t)} = 0,$$

или

$$h^+(t) = G^{-1}(t) \frac{\psi_1^+(t)}{\psi_1^-(t)} h^-(t), \quad t \in L. \quad (7)$$

Эту задачу в соответствии с терминологией из [2] назовем *сопутствующей задаче* (1). Если сопутствующая задача (7) имеет только тривиальное решение, то тогда $h^\pm(t) = 0$, откуда следует, что выполнены условия (3), т. е. решение уравнения (4) дает решение краевой задачи (1).

Аналогично для задачи для дифференциалов (2) и уравнения (6) соответственно получим сопутствующую задачу

$$w^+(t) = \frac{\psi_0^+(t)}{\psi_0^-(t)} (G^T(t))^{-1} w^-(t), \quad t \in L. \quad (8)$$

Эту задачу, как и в [2], назовем *союзной к задаче* (1).

Отметим, что вид сопутствующей и союзной задач для поверхности рода $\rho > 0$ довольно существенно отличается от аналогичных задач на плоскости [2].

Теорема 2. 1. Если сопутствующая задача (7) имеет только тривиальное решение в классе аналитических функций, то любое решение $g(t)$ уравнения (4) дает решение задачи (1) $g^-(t) = g(t)$, $g^+(t) = G(t)g(t)$ в классе аналитических функций.

2. Если союзная задача (8) имеет только тривиальное решение в классе аналитических в $D^\pm$ дифференциалов, то любое решение $w(t)$ уравнения (6) дает решение задачи для дифференциалов (2) $w^+(t) = w(t)$, $w^-(t) = (G^T(t))^{-1} w(t)$.

3. Если и сопутствующая, и союзная задачи имеют только тривиальные решения, то исходная задача (1) имеет аналитическое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать только утверждение 3. Рассмотрим уравнение (4) с $C_1 = 0$, т. е. с правой частью C_2 . Оно разрешимо (замечание 3) тогда и только тогда, когда

$$\int_L C_2 w(t) = 0$$

для любого решения $w(t)$ однородного ($C_{1k} = C_{2k} = 0$, $k = \overline{1, \rho}$) уравнения (6). Но поскольку союзная задача (8) имеет только тривиальное решение, любое решение уравнения (6) (в том числе и решение однородного) дает решение краевой задачи (2) с $w(t) = w^+(t)$ и условие разрешимости, которое, очевидно, выполнено, приобретает вид

$$\int_{L=\partial D^+} C_2 w^+(t) = 0.$$

Итак, решение уравнения (4) с $C_1 = 0$ и любым вектором C_2 существует. Но поскольку сопутствующая задача (7) имеет только тривиальное решение, решение уравнения (4) дает аналитическое решение задачи (1).

3. Построение матричного мероморфного решения

Пусть $\Phi^\pm(z) = (g_1^\pm(z) \cdots g_n^\pm(z))$ — матрица, составленная из мероморфных решений задачи (1) $g_j^\pm(z)$, $j = \overline{1, n}$, т. е. $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$, $t \in L$, и пусть $\det \Phi^\pm(z) \neq 0$, $z \in D^\pm$. Матрицу Φ будем называть *матричным мероморфным решением задачи (1)*.

Построение матричного мероморфного решения, точнее, доказательство его существования, является отправной точкой при классификации коэффициентов краевой задачи и построении общего решения в классической теории векторных краевых задач на плоскости [2]. В данном разделе покажем, что матричное решение существует и на римановой поверхности.

Теорема 3. *Аналитические решения задач (1) и (2) образуют конечномерное линейное пространство, и порядок дивизора любого аналитического решения задач (1) и (2) не превосходит константы $m = m(G, \rho)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку (4) — система уравнений Фредгольма, число ее линейно независимых решений (с произвольными постоянными векторами C_1, C_2) конечно, значит, конечно и число линейно независимых аналитических решений задачи (1), пусть это число $s = s(G)$. Пусть аналитическое решение (1) $g^\pm(z)$ имеет дивизор Δ (он состоит только из нулей), и пусть $\deg \Delta > 2\rho - 2$. Тогда $i[\Delta] = 0$ [10, 12], т. е. по теореме Римана — Роха $r = r[\Delta^{-1}] = \deg \Delta - \rho + 1$. Однако если $f_j(z)$, $j = \overline{1, r}$, — линейно независимые мероморфные функции, кратные Δ^{-1} , то векторы $f_j(z)g^\pm(z)$ будут линейно независимыми аналитическими решениями задачи (1), т. е. $r \leq s$, откуда $\deg \Delta \leq s + \rho - 1$, окончательно $\deg \Delta \leq m = \max(s(G) + \rho - 1, 2\rho - 2)$.

Доказательство теоремы для задачи (2) и системы (6) аналогично.

Лемма 1. 1. Вектор $g^\pm(z)$ будет мероморфным решением задачи (1) с полюсами q_j , $j = \overline{1, s}$, тогда и только тогда, когда $g_0^\pm(z) = g^\pm(z)\psi^\pm(z)$ будет аналитическим решением задачи (1) с коэффициентом $G_0(t) = G(t)\psi^+(t)/\psi^-(t)$, здесь

$$\psi^\pm(z) = \prod_{q_j \in D^\pm} \psi(q_j | z), \quad z \in D^\pm.$$

2. В свою очередь, если $g_0^\pm(z)$ — аналитическое решение задачи (1) с коэффициентом $G_0(t) = G(t)\psi^-(t)/\psi^+(t)$, то $g^\pm(z) = g_0^\pm(z)\psi^\pm(z)$ — аналитическое решение задачи (1) с нулями q_j , $j = \overline{1, s}$.

Утверждения леммы очевидны.

Теорема 4 (существование мероморфного матричного решения). Введем верхние оценки числа нулей для сопутствующей задачи $m_1 = m(G^{-1}\psi_1^+/\psi_1^-, \rho)$ и для союзной задачи $m_2 = m((G^T)^{-1}\psi_0^+/\psi_0^-, \rho)$ и возьмем дивизор $\Delta = \prod q_j$, $q_j \in D^-$, причем $\deg \Delta > \max(m_1, m_2)$.

Тогда существуют решения задачи (1), кратные дивизору Δ^{-1} . Эти решения образуют конечномерное пространство размерности $\geq n$, причем для любой выбранной точки q_j имеются n решений $g_1, \dots, g_n$, у которых главные константы в этой точке линейно независимы. Под главными константами понимаем постоянные векторы C в разложении в окрестности q_j

$$g(z) = \frac{C}{(z - q_j)^{k_j}} + \dots,$$

где k_j — порядок нуля q_j в дивизоре Δ .

Указанные n решений образуют матричное мероморфное решение задачи (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\psi^-(z) = \prod_{q_j} \psi(q_j | z), \quad z \in D^-; \quad \psi^+(z) \equiv 1.$$

Задача (1) в классе векторов, кратных Δ^{-1} , сводится к задаче (1) с коэффициентом $G_0(t) = G(t)/\psi^-(t)$ в классе аналитических функций (лемма 1), решения которой, а значит, и решения (1), кратные Δ^{-1} , образуют конечномерное пространство (теорема 3).

Докажем непустоту этого пространства и существование в нем решений $g_1, \dots, g_n$ с линейно независимыми главными константами. Соответствующая коэффициенту $G_0(t)$ сопутствующая задача имеет коэффициент

$$G_1 = G^{-1}\psi^-\psi_1^+/\psi_1^-,$$

а союзная —

$$G_2 = (G^T)^{-1}\psi^-(t)\psi_0^+/\psi_0^-.$$

Если, скажем, задача (1) с коэффициентом G_1 имеет аналитическое решение $g_1^\pm(z)$, то (снова лемма 1) $g^\pm(z) = \psi^\pm(z)g_1^\pm(z)$ будет аналитическим решением задачи (1) с коэффициентом $G^{-1}\psi_1^+/\psi_1^-$, причем это решение имеет нули в точках дивизора Δ , т. е. имеет порядок дивизора $m_0 \geq \deg \Delta > m_1 = m(G^{-1}\psi_1^+/\psi_1^-, \rho)$, что невозможно по теореме 3. Аналогично не существует аналитического решения задачи (2) с коэффициентом G_2 . Итак, для задачи (1) с коэффициентом $G_0(t)$ не существует аналитических решений ни сопутствующей, ни союзной задач, тогда по теореме 2 эта задача имеет аналитическое решение $g_0^\pm(z)$.

Отметим, что для решения g_0 вектор $C_2 = g_0^-(p_{02})$ можно выбрать произвольным (см. теорему 1 и доказательство теоремы 2). В свою очередь, справедливость теоремы 2 не зависит от выбора ядер Коши $K_{1,2}(p, q)$, т. е. от выбора их полюсов p_{j1}, p_{j2} , $j = \overline{1, \rho}$, и нулей p_{01}, p_{02} . В частности, для любой фиксированной точки q_j дивизора Δ можно выбрать $p_{02} = q_j$. Тогда, беря n линейно независимых значений вектора $C = g_0^-(q_j)$, получим n линейно независимых решений задачи (1) с коэффициентом $G_0(t)$, что опять по лемме 1 дает n линейно независимых решений задачи (1) с исходным коэффициентом $G(t)$, причем соответствие $g^\pm(z) = g_0^\pm(z)/\psi^\pm(z)$ означает, что выбранные значения C будут главными константами в точке q_j .

Последнее утверждение теоремы очевидно следует из предыдущего.

Итак, матричное мероморфное решение задачи (1) всегда существует.

4. Приведение коэффициента краевого условия к треугольному виду

Напомним [1, 2], что коэффициенты $G_1(t)$ и $G_2(t)$ называются эквивалентными, $G_1 \sim G_2$, если $G_1(t) = X^+(t)G_2(t)(X^-(t))^{-1}$, $t \in L$, где матрицы $X^\pm(z)$ аналитичны в $D^\pm$ и $\det X^\pm(z) \neq 0$, $z \in D^\pm$. Задачи сопряжения для эквивалентных коэффициентов сводятся одна к другой с сохранением нулей и полюсов, и коэффициенты краевого условия классифицируются как раз с точностью до указанной эквивалентности.

Как известно, на поверхности рода $\rho = 0$ можно с точностью до умножения на мероморфную функцию считать, что все нули и полюсы мероморфного решения расположены в одной фиксированной точке (на плоскости обычно их располагают в бесконечности, см. [2]). Это позволяет [2] установить на плоскости представление для матричного решения $\Phi^\pm(z) = X^\pm(z)\Gamma^\pm(z)$, где $X^\pm(z)$ аналитичны в $D^\pm$, $\det X^\pm(z) \neq 0$, $z \in D^\pm$, а $\Gamma^\pm = \text{diag}(\gamma_1^\pm, \dots, \gamma_n^\pm)$ — диагональные матрицы. Отсюда следует, что

$$G(t) \sim \Gamma^+(t)(\Gamma^-(t))^{-1} = \Gamma(t) = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n),$$

т. е. любой коэффициент эквивалентен диагональной матрице, а любая краевая задача сводится к независимому решению одномерных задач. При переходе от однородной задачи к векторному расслоению [1] получим, что с точностью до эквивалентности координаты сечений любого голоморфного векторного расслоения суть сечения одномерных расслоений, т. е. известную теорему Гротендика [3].

На римановой поверхности положительного рода $\rho > 0$ сведение всех нулей/полюсов решения в одну точку, вообще говоря, невозможно, как невозможно свести любой коэффициент к диагональной матрице. В данном разделе покажем, что любой коэффициент эквивалентен треугольной матрице.

Рассмотрим матричное мероморфное решение $\Phi^\pm = (g_1^\pm \cdots g_n^\pm)$. Введем дивизоры его столбцов

$$(g_j^\pm) = \Delta_j^\pm = \prod_l (s_{jl}^\pm)^{k_{jl}^\pm}, \quad s_{jl}^\pm \in D^\pm, \quad j = \overline{1, n},$$

и функции, кратные этим дивизорам:

$$\psi_j^\pm(z) = \psi(\Delta_j^\pm | z) = \prod_l (\psi(s_{jl}^\pm | z))^{k_{jl}^\pm}, \quad z \in D^\pm, \quad j = \overline{1, n}.$$

Очевидно, $g_j^\pm(z) = \psi_j^\pm(z)\varphi_j^\pm(z)$, $j = \overline{1, n}$, где векторы $\varphi_j^\pm(z)$ не имеют нулей и полюсов. Отсюда

$$\Phi^\pm = (\varphi_1^\pm \cdots \varphi_n^\pm) \cdot \text{diag}(\psi_1^\pm, \dots, \psi_n^\pm) = \Phi_0^\pm \Gamma_0^\pm,$$

причем матрицы $\Phi_0^\pm$ аналитичны в $D^\pm$ и их столбцы не имеют нулей. Однако $\det \Phi_0^\pm$ может иметь нули. Рассмотрим для определенности $\Phi_0^+(z) = \Phi_0(z) = (\varphi_1(z) \cdots \varphi_n(z))$, $z \in D^+$, и пусть $(\det \Phi_0) = \Delta = s_1 \cdots s_l$, где $s_j \in D^+$, $j = \overline{1, l}$, — нули $\det \Phi_0$. Поскольку $\det \Phi_0(s_1) = 0$, существуют (не все нулевые) коэффициенты α_j , $j = \overline{1, n}$, такие, что $\sum \alpha_j \varphi_j(s_1) = 0$ или

$$\varphi_m(s_1) = \sum_{j < m} \alpha_j \varphi_j(s_1),$$

где m — максимальный номер ненулевого коэффициента. Тогда

$$\Phi_0 = (\varphi_1 \cdots \varphi_m \cdots \varphi_n) = (\varphi_1 \cdots \varphi_m^0 \cdots \varphi_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\varphi_m^0(z) = \varphi_m(z) - \sum_{j < m} \alpha_j \varphi_j(z).$$

Но тогда $\varphi_m^0(s_1) = 0$, значит, $\varphi_m^0(z) = \psi_1(z)\varphi_m^1(z)$, где $\psi_1(z) = \psi(s_1 | z)$, причем $\varphi_m^1(s_1) \neq 0$ (точнее, имеет меньший порядок нуля в s_1), таким образом:

$$\Phi_0 = (\varphi_1 \cdots \varphi_m^1 \cdots \varphi_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \psi_1(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \Phi_1(z)\Gamma_1(z),$$

здесь $\Gamma_1(z)$ — верхняя треугольная матрица, $\Phi_1(z)$ аналитична и имеет дивизор определителя $(\det \Phi_1) = \Delta/s_1 = s_2 \cdots s_l$. Повторяя этот процесс, придем к представлению

$$\Phi^+(z) = X^+(z)\Gamma^+(z), \quad z \in D^+,$$

где $X^+(z)$ аналитичны в D^+ и $\det X^+(z) \neq 0$, а $\Gamma^+ = \Gamma_l \cdots \Gamma_1 \Gamma_0$ — верхняя треугольная матрица. Совершенно аналогичное представление получим и для $\Phi^-(z)$, откуда

$$X^+(t)\Gamma^+(t) = \Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) = G(t)X^-(t)\Gamma^-(t),$$

т. е.

$$G(t) = X^+(t)\Gamma(t)(X^-(t))^{-1}, \quad \Gamma(t) = \Gamma^+(t)(\Gamma^-(t))^{-1}.$$

Теорема 5. Любой коэффициент $G(t)$ эквивалентен верхней треугольной матрице $\Gamma(t)$, причем диагональные элементы $\Gamma(t)$ суть

$$\gamma_j(t) = \psi^+(\Delta^+ | t)/\psi^-(\Delta^- | t),$$

где $\Delta^\pm \subset D^\pm$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Легко показать, что с точностью до умножения мероморфных решений на мероморфные на D функции всегда можно считать, что точки дивизоров $\Delta^\pm$ не лежат на L и вообще их можно считать расположенными только в D^+ ($\psi^- \equiv 1$) или, наоборот, только в D^- ($\psi^+ \equiv 1$).

Теорема 5 сводит решение задачи (1) к задаче с треугольной матрицей, которую можно решать последовательно по координатам. При этом сами эти треугольные матрицы представляются в виде произведения треугольных или диагональных матриц весьма простого вида. На этой основе, используя хорошо известный метод решения одномерных задач, предполагается построить общее решение векторной задачи и систему инвариантов, классифицирующую коэффициенты $G(t)$ с точностью до эквивалентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Семенко Е. В. Связь голоморфных векторных расслоений и когомологий на римановой поверхности с краевыми задачами сопряжения // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 406–416.

2. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Гостехиздат, 1950.
3. Grothendieck A. Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphere de Riemann // Amer. J. Math. 1957. V. 79, N 1. P. 121–138.
4. Gunning R. C. Lectures on vector bundles on Riemann surfaces. Princeton: Princeton Univ. Press; The Univ. Tokyo Press, 1967. V. 5.
5. Тюрин А. Н. О классификации двумерных алгебраических расслоений над алгебраической кривой произвольного рода // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 1. С. 21–52.
6. Тюрин А. Н. Классификация векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, № 3. С. 657–688.
7. Тюрин А. Н. О классификации n -мерных векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1966. Т. 30, № 6. С. 1353–1366.
8. Зверович Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гильбертовых классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 1. С. 113–179.
9. Монахов В. Н., Верховод Д. Б., Семенко Е. В. Краевые задачи для квазианалитических функций на компактных римановых поверхностях. Новосибирск: ИГ СОАН СССР, 1990.
10. Монахов В. Н., Семенко Е. В. Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях. М.: Физматлит, 2003.
11. Семенко Е. В. Представление дифференциалов Прима как решений краевых задач на римановых поверхностях // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 157–170.
12. Форстер О. Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.

Поступила в редакцию 9 января 2018 г.

После доработки 20 августа 2018 г.

Принята к публикации 17 октября 2018 г.

Семенко Евгений Вениаминович
Новосибирский гос. технический университет,
пр. Маркса, 20, Новосибирск 630073;
Новосибирский гос. педагогический университет,
ул. Вилуйская, 28, Новосибирск 630126
semenko54@gmail.com