Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. N. Artyushin, A boundary value problem for a mixed type equation in a cylindrical domain, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 2, 274–289

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.203>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.80.97.219

April 26, 2023, 13:41:07

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

А. Н. Артюшин

Аннотация. Рассматривается краевая задача для уравнения второго порядка смешанного типа в цилиндрической области. С помощью специальной регуляризации при определенных условиях доказано существование регулярных решений в подходящем весовом пространстве Соболева. При этих же условиях доказана единственность обобщенного решения. Получены оценки вторых производных обобщенного решения в эллипτικο-параболической области.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.203

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, эллипτικο-гиперболические уравнения.

1. Введение

Пусть $T > 0$, $\Omega \subset R^m$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = \Omega \times (0, T)$, $S = \Gamma \times (0, T)$. В цилиндре Q рассматриваем задачу (L)

$$\begin{aligned} k(x, t)u_{tt} + \alpha(x, t)u_t - \Delta u &= f(x, t), \\ u(x, t)|_S &= 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0)|_{\Omega_0^+} = 0, \quad u_t(x, T)|_{\Omega_T^-} = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где множества $\Omega_0^\pm$, $\Omega_T^\pm$ определяются стандартным образом в зависимости от знака $k(x, 0)$, $k(x, T)$. Например, $\Omega_0^+ = \{x \in \Omega \mid k(x, 0) > 0\}$.

В таком виде задача впервые была рассмотрена в [1, 2]. Основное условие, при котором было установлено существование обобщенного решения, таково:

$$2\alpha(x, t) - k_t(x, t) \geq \delta_0 > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}. \quad (1.2)$$

При некоторых дополнительных предположениях и знакоопределенности функций $k(x, 0)$, $k(x, T)$ в [2] доказаны существование и единственность регулярного решения $u(x, t) \in W_2^2(Q)$. В дальнейшем эти результаты обобщались на случай иных краевых условий, операторные уравнения и уравнения высокого порядка (см. [3–5], одни из последних работ такого рода [6, 7]). Во всех случаях существование регулярных решений доказывалось лишь при условии знакоопределенности функций $k(x, 0)$, $k(x, T)$. При этих же условиях доказана единственность обобщенных решений. В [8] рассматривались регулярные решения задачи

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-51-41009).

с периодическими условиями по t . Стоит сказать, однако, что условия периодичности заметно облегчают исследование разрешимости. Отметим также работу [9] схожей тематики, в которой для параболических уравнений высокого порядка доказано существование регулярных решений в весовых пространствах без лишних условий на $k(x, 0)$, $k(x, T)$.

В данной работе устанавливается существование регулярных решений задачи **(L)** при условиях

$$(\nabla k(x, 0))^2 \leq C|k(x, 0)|, \quad (\nabla k(x, T))^2 \leq C|k(x, T)|.$$

Таким образом, функции $k(x, 0)$, $k(x, T)$ могут менять знак, хотя и не произвольным образом. Для доказательства теорем разрешимости применяется простой, но весьма эффективный метод регуляризации. Есть определенные основания ожидать, что этот метод имеет хорошие перспективы в исследовании других задач (уравнений), в которых часть границы освобождается от краевых условий.

2. Обозначения и определения

Введем обозначения: $k_0(x) = k(x, 0)$, $k_T(x) = k(x, T)$. Далее, как обычно, определяем положительную и отрицательную срезки

$$k_0^+(x) = \begin{cases} k_0(x), & \text{если } k_0(x) > 0, \\ 0, & \text{если } k_0(x) \leq 0, \end{cases}$$

$k_0^-(x) = k_0(x) - k_0^+(x)$. Аналогично определяем $k_T^-(x)$, $k_T^+(x)$, $k^-(x, t)$, $k^+(x, t)$.

Определим пространство $V \subset W_2^1(Q)$:

$$V = \{u(x, t) \in W_2^1(Q) \mid u(x, t)|_S = 0\}.$$

Функцию $u(x, t) \in V$ назовем *обобщенным решением задачи (L)*, если найдутся $\chi_0(x)$, $\chi_T(x) \in L_2(\Omega)$ такие, что для любой $\varphi(x, t) \in V$ выполнено тождество

$$\begin{aligned} & \int_Q (-ku_t(x, t)\varphi_t(x, t) + (\alpha - k_t)u_t(x, t)\varphi(x, t) + \nabla u(x, t)\nabla \varphi(x, t)) dQ \\ &= \int_Q f(x, t)\varphi(x, t) dQ - \int_{\Omega_T^+} \sqrt{|k_T(x)|}\chi_T(x)\varphi(x, T) dx \\ & \quad - \int_{\Omega_0^-} \sqrt{|k_0(x)|}\chi_0(x)\varphi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что $k(x, t) \in C^2(\overline{Q})$, $\alpha(x, t) \in C^1(\overline{Q})$ и для некоторых констант $\delta, R_0 > 0$ выполнены неравенства

$$\alpha(x, t) - |k_t(x, t)/2| \geq \delta > 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}, \quad (2.1)$$

$$(\nabla k_0(x))^2 \leq R_0|k_0(x)|, \quad (\nabla k_T(x))^2 \leq R_0|k_T(x)|, \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (2.2)$$

Определим функцию $R_1(x)$ следующим образом. Если $\Omega_T^- = \emptyset$, то $R_1(x) = 1$. В противном случае $R_1(x) = |k_T(x)| + \rho^2(x, \Omega_T^-)$, где $\rho(x, \Omega_T^-)$ — расстояние от точки x до множества Ω_T^- . Наконец, определим вес $R(x, t)$ следующим образом:

$$R(x, t) = |k_0(x)|(T - t)^2 + R_1(x)t^2 + t(T - t).$$

Лемма 2.1. Пусть выполнено условие (2.2). Тогда для некоторых констант $C_1, C_2 > 0$ справедливы неравенства

$$|k(x, t)| + |\nabla k(x, t)|^2 \leq C_1 R(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q}. \quad (2.3)$$

$$|\nabla R(x, t)|^2 \leq C_2 R(x, t) \quad \text{для п. в. } (x, t) \in Q. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим лишь случай $\Omega_T^- \neq \emptyset$. Другой случай рассматривается вполне аналогично. При $t \leq T/2$ имеет место неравенство

$$|k(x, t) - k(x, 0)| + |\nabla k(x, t) - \nabla k(x, 0)| \leq C_0(k)t.$$

Аналогично при $t \geq T/2$

$$|k(x, t) - k(x, T)| + |\nabla k(x, t) - \nabla k(x, T)| \leq C_T(k)(T - t).$$

С помощью условия (2.2) из этих неравенств легко получаем (2.3). Далее, функция $\rho(x, \Omega_T^-)$ липшицева. Следовательно, в силу (2.2)

$$(\nabla R_1(x))^2 \leq C_3 R_1(x) \quad \text{для п. в. } x \in \Omega$$

с некоторой константой $C_3 > 0$. Отсюда следует (2.4). $\square$

3. Разрешимость краевой задачи

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие (1.2). Тогда для любой $f(x, t) \in L_2(Q)$ существует обобщенное решение $u(x, t) \in V$ задачи **(L)**, для которого справедливо неравенство

$$\int_Q (2\alpha - k_t) u_t^2(x, t) dQ \leq \int_Q 2f u_t dQ. \quad (3.1)$$

Пусть дополнительно выполнены условия (2.1), (2.2) и δ достаточно велико. Тогда при условии $f_t(x, t) \in L_2(Q)$ существует обобщенное решение $u(x, t)$, для которого имеет место оценка

$$\int_Q (R(x, t) u_{tt}^2 + |\Delta u|^2 + |\nabla u_t|^2) dQ \leq C \int_Q (f^2 + f_t^2) dQ.$$

Кроме того, имеют место включения $\sqrt{|k_0|} u_t \in C([0, T/2]; L_2(\Omega))$, $\sqrt{|k_T|} u_t \in C([T/2, T]; L_2(\Omega))$ и

$$\sqrt{|k_0|} u_t(x, 0)|_{\Omega_0^+} = 0, \quad \sqrt{|k_T|} u_t(x, T)|_{\Omega_T^-} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем метод регуляризации. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим следующую задачу **(Aux)**:

$$-\varepsilon u_{ttt} + k u_{tt} + \alpha u_t - \Delta u = f(x, t), \quad (3.2)$$

$$u(x, t)|_S = 0, \quad u(x, 0) = 0,$$

$$-\varepsilon u_{tt}(x, 0) + k_0^+(x) u_t(x, 0) = 0, \quad (3.3)$$

$$-\varepsilon u_{tt}(x, T) + k_T^-(x) u_t(x, T) = 0. \quad (3.4)$$

Разрешимость этой задачи будем доказывать с помощью метода Галёркина со специальным базисом. Пусть $\{w_k\}_{k \in N}$ — система собственных функций задачи

$$-\Delta w_k = \lambda_k w_k, \quad w_k(x)|_\Gamma = 0,$$

ортонормированная в $L_2(\Omega)$. Для всякого $n > 0$ через $E_n \subset L_2(\Omega)$ обозначим подпространство функций, натянутое на векторы w_k , $k = \overline{1, n}$, а через P_n — ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на пространство E_n .

В пространстве $L_2(0, T; E_n)$ рассмотрим следующую задачу:

$$-\varepsilon v_{ttt} + P_n(kv_{tt} + \alpha v_t) - \Delta v = P_n(f(x, t)), \quad (3.5)$$

$$v(x, 0) = 0,$$

$$-\varepsilon v_{tt}(x, 0) + P_n(k_0^+(x)v_t(x, 0)) = 0, \quad (3.6)$$

$$-\varepsilon v_{tt}(x, T) + P_n(k_T^-(x)v_t(x, T)) = 0. \quad (3.7)$$

Данная задача представляет собой систему ОДУ относительно коэффициентов $a_k(t)$, определяемых из равенства

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) w_k(x).$$

Отметим, что $v(x, t)|_S = 0$ по определению.

Умножим уравнение (3.5) на $2v_t$ и проинтегрируем по цилиндру Q . После интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|k_0|v_t^2(x, 0) + |k_T|v_t^2(x, T) + |\nabla v(x, T)|^2) dx \\ + \int_Q 2\varepsilon v_{tt}^2 dQ + \int_Q (2\alpha - k_t)v_t^2(x, t) dQ = \int_Q 2fv_t dQ. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Пусть выполнено условие (1.2). Тогда имеет место оценка

$$\int_{\Omega} (|k_0|v_t^2(x, 0) + |k_T|v_t^2(x, T) + |\nabla v(x, T)|^2) dx + \int_Q (\varepsilon v_{tt}^2 + v_t^2) dQ \leq C. \quad (3.9)$$

Умножим уравнение (3.5) на v и проинтегрируем по цилиндру Q . С учетом предыдущей оценки легко получаем

$$\int_Q |\nabla v(x, t)|^2 dQ \leq C. \quad (3.10)$$

Из этих оценок следуют единственность решения задачи (3.5)–(3.7), а вместе с ней и разрешимость этой задачи. Более того, отсюда уже легко следует первое утверждение теоремы. Все действия стандартные, поэтому опишем лишь общую схему. Для всякого n обозначим через $v^{(n)}(x, t)$ решение задачи (3.5)–(3.7) с $\varepsilon = 1/n$. В силу оценок (3.9), (3.10) из последовательности $\{v^{(n)}(x, t)\}_{n \in N}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{v^{(n_k)}(x, t)\}_{k \in N}$ (далее индекс k опускаем), что для некоторых $u(x, t) \in V$ и $\chi_0(x), \chi_T(x) \in L_2(\Omega)$ имеют место сходимости

$$v_t^{(n)} \rightharpoonup u_t \quad \text{слабо в } L_2(Q),$$

$$\begin{aligned}\nabla v^{(n)} &\rightharpoonup \nabla u \quad \text{слабо в } (L_2(Q))^m, \\ \sqrt{|k_0|}v_t^{(n)}(x, 0) &\rightharpoonup \chi_0(x) \quad \text{слабо в } L_2(\Omega), \\ \sqrt{|k_T|}v_t^{(n)}(x, T) &\rightharpoonup \chi_T(x) \quad \text{слабо в } L_2(\Omega).\end{aligned}$$

Покажем, что $u(x, t)$ — обобщенное решение задачи **(L)**. Пусть $\varphi(x, t) \in V$. Умножим уравнение (3.5) на $P_n(\varphi)$, проинтегрируем по цилиндру Q и перейдем к пределу по n . В результате получим требуемое интегральное тождество. Переходя к пределу в равенстве (3.8), получим (3.1).

Для доказательства второй части теоремы понадобятся дополнительные оценки. Дальнейшие рассуждения носят выраженный технический характер, поэтому для лучшего понимания опишем логическую схему наших действий.

Сначала получим вспомогательные оценки для решений задачи (3.5)–(3.7). Для этого последовательно умножаем уравнение (3.5) на Δv_t , Δv , $(2t - T)v_{tt}$. В результате все необходимые производные функции $v(x, t)$ удастся оценить с помощью интегралов

$$\int_Q R(x, t)v_{tt}^2(x, t) dQ, \quad \int_\Omega \varepsilon(v_{tt}^2(x, 0) + v_{tt}^2(x, T)) dx.$$

Этих оценок уже хватает для того, чтобы перейти к пределу по n и получить $u(x, t)$ — решение задачи **(Aux)**. После этого умножаем уравнение (3.2) на $R(x, t)u_{ttt}(x, t)$ и получаем окончательную оценку, равномерную по ε . Дальнейшее очевидно.

Итак, зафиксируем некоторое $0 < \nu < 1$. Умножим уравнение (3.5) на $2\Delta v_t$ и проинтегрируем по цилиндру Q . Как и раньше, после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}&\left. \int_\Omega |k||\nabla v_t|^2 dx \right|_{t=0} + \left. \int_\Omega (|k||\nabla v_t|^2 + |\Delta v|^2) dx \right|_{t=T} + \int_Q (2\alpha - k_t)|\nabla v_t|^2 dQ \\&+ \int_Q 2\varepsilon|\nabla v_{tt}|^2 dQ \leq \int_Q 2|f_t||\Delta v| dQ + \int_\Omega |f(x, T)\Delta v(x, T)| dx \\&+ \int_Q 2|v_{tt}\nabla k\nabla v_t| dQ + 2 \left. \int_{\Omega_0^+} |v_t\nabla k\nabla v_t| dx \right|_{t=0} + 2 \left. \int_{\Omega_T^-} |v_t\nabla k\nabla v_t| dx \right|_{t=T}.\end{aligned}$$

В силу (2.2) имеем

$$2 \int_{\Omega_0^+} |v_t\nabla k\nabla v_t| dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_0^+} |k||\nabla v_t|^2 dx + C \int_{\Omega_0^+} v_t^2 dx.$$

Аналогичная оценка имеет место и при $t = T$. Далее, по лемме 2.1

$$\int_Q 2|v_{tt}\nabla k\nabla v_t| dQ \leq \delta \int_Q |\nabla v_t|^2 dQ + \frac{C}{\delta} \int_Q R(x, t)v_{tt}^2 dQ.$$

Наконец, по неравенству Коши

$$\int_Q 2|f_t||\Delta v| dQ + \int_\Omega |f(x, T)\Delta v(x, T)| dx \leq C(\nu) + \nu \int_Q |\Delta v|^2 dQ + \frac{1}{2} \int_\Omega |\Delta v(x, T)|^2 dx.$$

В результате получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_Q \varepsilon |\nabla v_{tt}|^2 dQ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |k| |\nabla v_t|^2 dx \Big|_{t=0} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|k| |\nabla v_t|^2 + |\Delta v|^2) dx \Big|_{t=T} \\ + \delta \int_Q |\nabla v_t|^2 dQ \leq C(\nu) + \nu \int_Q (\Delta v)^2 dQ + \frac{C}{\delta} \int_Q R(x, t) v_{tt}^2 dQ \\ + C \int_{\Omega} (v_t^2(x, T) + v_t^2(x, 0)) dx. \end{aligned}$$

Далее, умножим уравнение (3.5) на $-\Delta v$ и проинтегрируем по цилиндру Q . С помощью (3.9) и (3.10) легко получаем неравенство

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} k_T^+ v_t \Delta v dx \Big|_{t=T} + \int_Q (\varepsilon \nabla v_{tt} \nabla v_t + v_t k \Delta v_t + v_t k_t \Delta v) dQ \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha |\nabla v|^2 dx \Big|_{t=T} + \int_Q |\Delta v|^2 dQ \leq C + \int_Q |f \Delta v| dQ \leq C + \frac{1}{4} \int_Q |\Delta v|^2 dQ. \end{aligned}$$

По неравенству Коши

$$\begin{aligned} \int_Q (\varepsilon |\nabla v_{tt} \nabla v_t| + |v_t k_t \Delta v|) dQ \leq C + C \int_Q (\varepsilon^2 |\nabla v_{tt}|^2 + |\nabla v_t|^2) dQ + \frac{1}{4} \int_Q |\Delta v|^2 dQ, \\ - \int_Q v_t k \Delta v_t dQ = \int_Q \nabla(v_t k) \nabla v_t dQ \leq C + C \int_Q |\nabla v_t|^2 dQ, \\ \int_{\Omega} k_T^+ v_t \Delta v dx \Big|_{t=T} \leq \nu \int_{\Omega} |\Delta v(x, T)|^2 dx + C(\nu) \int_{\Omega} k_T^2 |v_t(x, T)|^2 dx. \end{aligned}$$

В конечном итоге, учитывая (3.9), приходим к неравенству

$$\frac{1}{2} \int_Q |\Delta v|^2 dQ \leq C(\nu) + C \int_Q (\varepsilon^2 |\nabla v_{tt}|^2 + |\nabla v_t|^2) dQ + \nu \int_{\Omega} |\Delta v(x, T)|^2 dx.$$

Наконец, положим $g(t) = 2(2t/T - 1)$, умножим уравнение (3.5) на $g(t)v_{tt}$ и проинтегрируем по цилиндру Q . С помощью леммы 2.1 и оценки (3.9) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\alpha(x, T) v_t^2(x, T) + \alpha(x, 0) v_t^2(x, 0)) dx \leq \int_Q g(t) v_{tt} \Delta v dQ \\ + C + \int_{\Omega} \varepsilon (v_{tt}^2(x, 0) + v_{tt}^2(x, T)) dx + C \int_Q R(x, t) v_{tt}^2 dQ. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, легко получаем

$$\int_Q g(t) v_{tt} \Delta v dQ = \int_{\Omega} 2v_t(x, T) \Delta v(x, T) dx + \int_Q g'(t) \nabla v_t \nabla v dQ + \int_Q g(t) |\nabla v_t|^2 dQ.$$

Следовательно,

$$\int_Q g(t) v_{tt} \Delta v \, dQ \leq \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} v_t^2(x, T) \, dx + \frac{C}{\delta} \int_{\Omega} |\Delta v(x, T)|^2 \, dx + C \int_Q |\nabla v_t|^2 \, dQ + C.$$

В результате получаем оценку

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} (v_t^2(x, T) + v_t^2(x, 0)) \, dx &\leq C + \frac{C}{\delta} \int_{\Omega} |\Delta v(x, T)|^2 \, dx \\ &+ \int_{\Omega} \varepsilon (v_{tt}^2(x, 0) + v_{tt}^2(x, T)) \, dx + C \int_Q (R(x, t) v_{tt}^2 + |\nabla v_t|^2) \, dQ. \end{aligned}$$

Обозначим

$$J \equiv 1 + \int_Q R(x, t) v_{tt}^2(x, t) \, dQ + \int_{\Omega} \varepsilon (v_{tt}^2(x, 0) + v_{tt}^2(x, T)) \, dx.$$

Отметим, что в силу условий (3.6), (3.7) и леммы 2.1 $J \leq C(\varepsilon)$. Пусть ν достаточно мало и δ достаточно велико. Тогда, собирая все оценки, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|k_0| |\nabla v_t(x, 0)|^2 + v_t^2(x, 0) + |k_T| |\nabla v_t(x, T)|^2 + v_t^2(x, T) + |\Delta v(x, T)|^2) \, dx \\ + \int_Q (\varepsilon - \tilde{C}\varepsilon^2) |\nabla v_{tt}|^2 \, dQ + \int_Q (\delta |\nabla v_t|^2 + |\Delta v|^2) \, dQ \leq C J. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Всюду далее считаем, что ε достаточно мало, так что $\tilde{C}\varepsilon < 1/2$. Тогда из уравнения (3.5) с помощью оценки (3.11) получаем

$$\int_Q v_{ttt}^2 \, dQ \leq C(\varepsilon).$$

Теперь можно переходить к пределу по n . Действуем, как и раньше. В результате получаем такую последовательность $\{v^{(n_k)}(x, t)\}_{k \in N}$ (далее индекс k опускаем), что для некоторой $u(x, t) \in V$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned} v_{ttt}^{(n)} &\rightharpoonup u_{ttt} \quad \text{слабо в } L_2(Q), \\ \Delta v^{(n)} &\rightharpoonup \Delta u \quad \text{слабо в } L_2(Q), \\ v_t^{(n)} &\rightarrow u_t \quad \text{сильно в } L_2(Q), \\ v_{tt}^{(n)} &\rightarrow u_{tt} \quad \text{сильно в } L_2(Q), \\ v_{tt}^{(n)}(x, 0) &\rightarrow u_{tt}(x, 0) \quad \text{сильно в } L_2(\Omega), \\ v_{tt}^{(n)}(x, T) &\rightarrow u_{tt}(x, T) \quad \text{сильно в } L_2(\Omega). \end{aligned}$$

Значит, $u(x, t)$ — регулярное решение задачи **(Aux)**. При этом для функции $u(x, t)$ имеет место оценка, аналогичная (3.11).

Наконец, умножим уравнение (3.2) на $-2(R(x, t)u_{tt})_t$ и проинтегрируем по цилиндру Q . В результате получим

$$\begin{aligned} & \int_Q 2\varepsilon Ru_{ttt}^2 dQ + \int_{\Omega} (k_0^+ R(x, 0)u_{tt}^2(x, 0) + |k_T^-| R(x, T)u_{tt}^2(x, T)) dx \\ & - 2 \int_{\Omega} \alpha Ru_t u_{tt} dx \Big|_0^T + \int_Q (2\alpha R + k_t R - k R_t) u_{tt}^2(x, t) dQ + \int_Q 2\alpha_t Ru_t u_{tt} dQ \\ & + \int_Q 2(Ru_{tt})_t \Delta u dQ = - \int_Q 2\varepsilon R_t u_{ttt} u_{tt} dQ - \int_{\Omega} 2Ru_{tt} f dx \Big|_0^T + \int_Q 2Ru_{tt} f_t dQ. \end{aligned}$$

Из условий (2.1), (2.2), (3.3), (3.4) и оценки (3.9) для $\nu > 0$ отсюда легко получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ((R^2(x, 0) + \delta\varepsilon)u_{tt}^2(x, 0) + (R^2(x, T) + \delta\varepsilon)u_{tt}^2(x, T)) dx + \int_Q \delta Ru_{tt}^2(x, t) dQ \\ & + \int_Q 2(Ru_{tt})_t \Delta u dQ \leq C(\nu) + \int_Q (|k R_t| + \nu R^2) u_{tt}^2(x, t) dQ \\ & + C \int_{\Omega} ((\nu R^2(x, 0) + \varepsilon)u_{tt}^2(x, 0) + (\nu R^2(x, T) + \varepsilon)u_{tt}^2(x, T)) dx. \end{aligned}$$

Заметим, что по построению $|k(x, t)| \leq CR(x, t)$. Пусть ν мало, тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((R^2(x, 0) + \delta\varepsilon)u_{tt}^2(x, 0) + (R^2(x, T) + \delta\varepsilon)u_{tt}^2(x, T)) dx \\ & + \int_Q \delta Ru_{tt}^2(x, t) dQ \leq CJ - \int_Q 2(Ru_{tt})_t \Delta u dQ. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Далее,

$$- \int_Q 2(Ru_{tt})_t \Delta u dQ = -2 \int_{\Omega} Ru_{tt} \Delta u dx \Big|_{t=T} - 2 \int_Q (u_{tt} \nabla R \nabla u_t + R \nabla u_{tt} \nabla u_t) dQ.$$

Оценим по отдельности три слагаемых в правой части данного равенства. С помощью (3.11) получаем

$$-2 \int_{\Omega} Ru_{tt} \Delta u dx \Big|_{t=T} \leq CJ + \frac{1}{2} \int_{\Omega_T^-} R^2(x, T) u_{tt}^2(x, T) dx.$$

С помощью леммы 2.1 и оценки (3.11) имеем

$$- \int_Q 2u_{tt} \nabla R \nabla u_t dQ \leq C \int_Q (Ru_{tt}^2 + |\nabla u_t|^2) dQ \leq CJ.$$

Последнее слагаемое интегрируем по частям:

$$- \int_Q 2R \nabla u_{tt} \nabla u_t dQ \leq \int_{\Omega} R(x, 0) |\nabla u_t(x, 0)|^2 dx + C \int_Q |\nabla u_t|^2 dQ.$$

Вновь применяя (3.11), приходим к оценке

$$-\int_Q 2(Ru_{tt})_t \Delta u \, dQ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} R^2(x, T) u_{tt}^2(x, T) \, dx + CJ.$$

Собирая все оценки, из (3.12) получаем неравенство

$$\delta \varepsilon \int_{\Omega} (u_{tt}^2(x, 0) + u_{tt}^2(x, T)) \, dx + \int_Q \delta R u_{tt}^2(x, t) \, dQ \leq CJ.$$

Поэтому если δ достаточно велико, то $J \leq C$, а значит,

$$\int_Q (R u_{tt}^2 + |\Delta u|^2 + |\nabla u_t|^2) \, dQ \leq C.$$

Кроме того, из краевых условий (3.3), (3.4) следует оценка

$$\int_{\Omega} ((k_0^+)^2 u_t^2(x, 0) + (k_T^-)^2 u_t^2(x, T)) \, dx \leq \varepsilon C.$$

Напомним, что из (3.11) вытекает неравенство

$$\int_{\Omega} (u_t^2(x, 0) + u_t^2(x, T)) \, dx \leq C.$$

Значит,

$$\int_{\Omega} (|k_0^+| u_t^2(x, 0) + |k_T^-| u_t^2(x, T)) \, dx \leq C \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.13)$$

Обозначим $v_{\varepsilon}(x, t) = (T - t) \sqrt{|k_0(x)|} u_t(x, t)$, $w_{\varepsilon}(x, t) = t \sqrt{|k_T(x)|} u_t(x, t)$. Из полученных оценок и условия (2.2) следует, что $v_{\varepsilon}, w_{\varepsilon} \in W_2^1(Q)$ и

$$\|v_{\varepsilon}\|_{W_2^1(Q)} + \|w_{\varepsilon}\|_{W_2^1(Q)} \leq C$$

с константой C , не зависящей от ε . Кроме того, в силу (3.13)

$$\|v_{\varepsilon}(x, 0)\|_{L_2(\Omega_0^+)} \rightarrow 0, \quad \|w_{\varepsilon}(x, T)\|_{L_2(\Omega_T^-)} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Дальнейшие действия уже очевидны, и мы их опускаем. На этом доказательство теоремы закончено. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Вместо оператора Лапласа в уравнении (1.1) может фигурировать самосопряженный равномерно-эллиптический оператор вида

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^m (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}.$$

Все рассуждения остаются без изменений.

Следствие 3.1. Пусть выполнены условия (2.2) и (1.2). Тогда обобщенное решение задачи (L) единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства данного утверждения используем разрешимость сопряженной задачи. Пусть $u(x, t)$ — обобщенное решение задачи (L) с $f(x, t) = 0$. Для гладкой функции $g(x, t)$ рассмотрим задачу (V)

$$(k(x, t)v_t)_t - \alpha(x, t)v_t - \Delta v = g(x, t),$$

$$v(x, t)|_S = 0, \quad v(x, T) = 0, \quad v_t(x, 0)|_{\Omega_0^-} = 0, \quad v_t(x, T)|_{\Omega_T^+} = 0.$$

Сначала предположим, что δ_0 достаточно велико, так что выполнены условия второй части теоремы 3.1. Как следствие получаем существование гладкого решения задачи (V). Положим $\varphi(x, t) = v_t(x, t)$ и формально подставим в интегральное тождество для $u(x, t)$. В результате получим

$$\int_Q (u_t(x, t)(-kv_{tt}(x, t) + (\alpha - k_t)v_t(x, t)) + \nabla u(x, t)\nabla v_t(x, t)) dQ = 0.$$

Интегрируя последнее слагаемое по частям, приходим к равенству

$$\int_Q u_t(x, t)g(x, t) dQ = 0.$$

Следовательно, $u_t(x, t) = 0$, а значит, и $u(x, t) = 0$. Для обоснования этих формальных выкладок используем усреднения по t .

Продолжим функцию $v(x, t)$ нечетным образом при $t < 0$ и $t > T$, т. е. положим

$$\tilde{v}(x, t) = \begin{cases} 2v(x, 0) - v(x, -t) & \text{для } t \in (-T, 0), \\ v(x, t) & \text{для } t \in [0, T], \\ -v(x, 2T - t) & \text{для } t \in (T, 2T). \end{cases}$$

Заметим, что в силу (3.11) имеет место включение $\Delta v(x, 0) \in L_2(\Omega)$. Поэтому при $t < 0$ имеет место включение $\Delta v \in L_2(-T, 0; L_2(\Omega))$. В качестве ядра усреднения выбираем произвольную неотрицательную финитную гладкую четную функцию $\rho(t)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$w(x, t) = \frac{1}{\varepsilon} \rho(t/\varepsilon) * \tilde{v}(x, t).$$

В качестве пробной функции выбираем $\varphi(x, t) = w_t(x, t)$. Согласно определению обобщенного решения имеем

$$\begin{aligned} & \int_Q (u_t(x, t)(-kw_{tt}(x, t) + (\alpha - k_t)w_t(x, t)) + \nabla u(x, t)\nabla w_t(x, t)) dQ \\ &= - \int_{\Omega_T^+} \sqrt{|k_T(x)|} \chi_T(x) w_t(x, T) dx - \int_{\Omega_0^-} \sqrt{|k_0(x)|} \chi_0(x) w_t(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $w(x, T) = 0$. Отсюда легко получаем

$$\begin{aligned} & \int_Q u_t(x, t)(-kw_{tt}(x, t) + (\alpha - k_t)w_t(x, t) + \Delta w(x, t)) dQ \\ &= - \int_{\Omega_T^+} \sqrt{|k_T(x)|} \chi_T(x) w_t(x, T) dx - \int_{\Omega_0^-} \sqrt{|k_0(x)|} \chi_0(x) w_t(x, 0) dx. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Теперь можно переходить к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом в левой части равенства (3.14) получится требуемый интеграл

$$\int_Q u_t(-kv_{tt} + (\alpha - k_t)v_t + \Delta v) dQ = \int_Q u_t(x, t)g(x, t) dQ,$$

а правая часть равенства (3.14) стремится к нулю, коль скоро

$$\begin{aligned} \sqrt{|k_0|}v_t &\in C([0, T/2]; L_2(\Omega)), \quad \sqrt{|k_T|}v_t \in C([T/2, T]; L_2(\Omega)), \\ \sqrt{|k_0|}v_t(x, 0)|_{\Omega_0^-} &= 0, \quad \sqrt{|k_T|}v_t(x, T)|_{\Omega_T^+} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, единственность обобщенного решения задачи **(L)** доказана при том условии, что δ_0 достаточно велико. Для общего случая применяем сдвиг. Пусть $u(x, t)$ — обобщенное решение задачи **(L)** с $f(x, t) = 0$. Для всякого $\gamma > 0$ обозначим $F_\gamma(x, t) = \gamma u_t$. Тогда

$$k(x, t)u_{tt} + (\alpha(x, t) + \gamma)u_t - \Delta u = F_\gamma(x, t).$$

Ясно, что функция $u(x, t)$ является обобщенным решением соответствующей задачи **(L)**. Однако, как мы только что видели, если γ достаточно велико, то это обобщенное решение единственно, и по теореме 3.1 имеет место оценка

$$\int_Q (2\alpha + 2\gamma - k_t)u_t^2(x, t) dQ \leq \int_Q 2F_\gamma u_t dQ = \int_Q 2\gamma u_t^2 dQ.$$

Значит,

$$\delta_0 \int_Q u_t^2(x, t) dQ \leq 0$$

и $u(x, t) = 0$. $\square$

4. Оценка обобщенного решения в эллиптико-параболической области

Пусть $M(x, t)$ — липшицева функция в $\overline{Q}$, причем для некоторого $C_M > 0$ и для всех $(x, t) \in \overline{Q}$ выполнены условия

- 1) $M(x, t)k^+(x, t) = 0$,
- 2) $M(x, t) \geq |k^-(x, t)|$,
- 3) $|\nabla(M(x, t)k^-(x, t))|^2 \leq C_M |M(x, t)k^-(x, t)|$.

В простейшем случае можно положить $M(x, t) = |k^-(x, t)|$. Более интересный пример доставляет $M(x, t) \sim \rho(x, t, Q^+)$ — расстояние от точки (x, t) до множества $Q^+ = \{(x, t) \in Q \mid k(x, t) > 0\}$. Точная конструкция такой функции $M(x, t)$ будет предъявлена позже.

Теорема 4.1. Пусть выполнено условие (1.2). Тогда для любой $f(x, t) \in L_2(Q)$ существует обобщенное решение $u(x, t) \in V$ задачи **(L)**, для которого справедливо неравенство

$$\int_Q M(|k^-|^2 u_{tt}^2 + |k^-| |\nabla u_t|^2 + |\Delta u|^2) dQ \leq C \int_Q f^2 dQ. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формально оценку (4.1) можно получить, если умножить уравнение (1.1) на $M\Delta u$, Mku_{tt} и проинтегрировать по частям. Для обоснования этих рассуждений вновь применяем метод регуляризации. В целом все оценки аналогичны предыдущим, так что непринципиальные детали опускаем.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим следующую задачу:

$$-\varepsilon u_{ttt} - \varepsilon \Delta u_t + ku_{tt} + \alpha u_t - \Delta u = f_\varepsilon(x, t), \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} u(x, t)|_S &= 0, \quad u(x, 0) = 0, \\ -\varepsilon u_{tt}(x, 0) + k_0^+(x)u_t(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$-\varepsilon u_{tt}(x, T) + k_T^-(x)u_t(x, T) = 0. \quad (4.4)$$

При этом предполагаем, что $f_\varepsilon, f_{\varepsilon t} \in L_2(Q)$ и $f_\varepsilon(x, T) = 0$. Кроме того, при $\varepsilon \rightarrow 0$ последовательность $f_\varepsilon(x, t)$ сходится к $f(x, t)$ сильно в $L_2(Q)$ и для некоторой константы C^* имеет место равномерная оценка

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_Q f_{\varepsilon t}^2 dQ \leq C^*.$$

Разрешимость этой задачи доказывается с помощью метода Галёркина аналогично теореме 3.1.

Умножим уравнение (4.2) на u_t и проинтегрируем по цилиндру Q . В результате получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|k_0|u_t^2(x, 0) + |k_T|u_t^2(x, T) + (\nabla u(x, T))^2) dx \\ + \varepsilon \int_Q (u_{tt}^2 + |\nabla u_t|^2) dQ + \int_Q u_t^2(x, t) dQ \leq C. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Как и раньше, отсюда легко следует оценка

$$\int_Q |\nabla u|^2(x, t) dQ \leq C.$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_\Omega (|u_t|^2(x, T) + |u_t|^2(x, 0)) dx \leq C \int_Q (\varepsilon u_{tt}^2 + u_t^2) dQ \leq C. \quad (4.6)$$

Далее, умножим уравнение (4.2) на $-\varepsilon \Delta u_t$ и проинтегрируем по цилиндру Q . С учетом оценки (4.5), как и раньше, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_\Omega |\Delta u(x, T)|^2 dx + \varepsilon^2 \int_Q |\nabla u_{tt}|^2 dQ + \varepsilon^2 \int_Q |\Delta u_t|^2 dQ \\ \leq C + C\varepsilon \int_{\Omega_0^+} |u_t \nabla k \nabla u_t| dx \Big|_{t=0} + C\varepsilon \int_{\Omega_T^-} |u_t \nabla k \nabla u_t| dx \Big|_{t=T}. \end{aligned}$$

Для $\nu > 0$ с помощью (4.6) получаем

$$\varepsilon \int_{\Omega_0^+} |u_t \nabla k \nabla u_t| dx \Big|_{t=0} \leq C(\nu) + \nu \varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_\Omega |\nabla u_t|^2(x, 0) dx.$$

Аналогично (4.6) имеет место неравенство

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{\Omega} |\nabla u_t|^2(x, 0) dx \leq C \int_Q (\varepsilon^2 |\nabla u_{tt}|^2 + \varepsilon |\nabla u_t|^2) dQ.$$

Таким образом,

$$\varepsilon \int_{\Omega_0^+} |u_t \nabla k \nabla u_t| dx \Big|_{t=0} \leq C(\nu) + C\nu \int_Q (\varepsilon^2 |\nabla u_{tt}|^2 + \varepsilon |\nabla u_t|^2) dQ.$$

Аналогично этому получаем неравенство

$$\varepsilon \int_{\Omega_T^-} |u_t \nabla k \nabla u_t| dx \Big|_{t=T} \leq C(\nu) + C\nu \int_Q (\varepsilon^2 |\nabla u_{tt}|^2 + \varepsilon |\nabla u_t|^2) dQ.$$

Выбирая ν достаточно малым, получаем оценку

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta u(x, T)|^2 dx + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{\Omega} (|\nabla u_t|^2(x, T) + |\nabla u_t|^2(x, 0)) dx \\ + \varepsilon^2 \int_Q |\nabla u_{tt}|^2 dQ + \varepsilon^2 \int_Q |\Delta u_t|^2 dQ \leq C. \end{aligned}$$

Умножим уравнение (4.2) на $-\varepsilon^{\frac{1}{2}} \Delta u$ и проинтегрируем по Q :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_Q (|\Delta u|^2 + k |\nabla u_t|^2) dQ \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} |k^+ u_t \Delta u(x, T)| dx \\ + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_Q (|u_t k_t \Delta u| + |u_t \nabla k \nabla u_t|) dQ + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_Q |u_{tt} \Delta u_t| dQ \leq C. \end{aligned}$$

Для малого $\nu > 0$ по неравенству Коши получаем

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_Q |\Delta u|^2 dQ \leq C(\nu) + \nu \int_Q k^2 |\nabla u_t|^2 dQ.$$

Умножим уравнение (4.2) на $-\varepsilon^{\frac{1}{2}} M(x, t) \Delta u_t$ и проинтегрируем по Q . С учетом условия на f_ε получаем

$$\begin{aligned} \int_Q M(\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\nabla u_{tt}|^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\alpha - k_t/2) |\nabla u_t|^2) dQ \leq C + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} |u_t \nabla (Mk^-) \nabla u_t| dx \Big|_{t=T} \\ + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_Q (|u_{tt} \nabla (Mk) \nabla u_t| + |k M_t/2| |\nabla u_t|^2) dQ \\ + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_Q (|M_t u_{tt} \Delta u_t|) dQ + \nu \int_Q k^2 |\nabla u_t|^2 dQ. \end{aligned}$$

Теперь можно воспользоваться условиями на $M(x, t)$. В результате для $\mu > 0$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} \int_Q M(\varepsilon^{\frac{3}{2}} |\nabla u_{tt}|^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \delta_0 |\nabla u_t|^2) dQ \\ \leq C(\mu) + \mu \varepsilon \int_{\Omega} M |\nabla u_t|^2 dx \Big|_{t=T} + \nu \int_Q C(k^2 + kM) |\nabla u_t|^2 dQ. \end{aligned}$$

Выбирая μ достаточно малым, приходим к оценке

$$\int_Q M(\varepsilon^{\frac{3}{2}}|\nabla u_{tt}|^2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta_0|\nabla u_t|^2) dQ \leq C + C\nu \int_Q |kM||\nabla u_t|^2 dQ,$$

а значит,

$$\varepsilon \int_{\Omega} M(x, 0)|\nabla u_t(x, 0)|^2 dx \leq C + C\nu \int_Q |kM||\nabla u_t|^2 dQ.$$

Наконец, можем умножить уравнение (4.2) на $-M(x, t)\Delta u$ и проинтегрировать по Q . С учетом всех имеющихся оценок приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \int_Q (M|\Delta u|^2 + |kM||\nabla u_t|^2) dQ &\leq C + \int_Q (|u_t(kM)_t\Delta u| + |u_t\nabla(kM)\nabla u_t|) dQ \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} M(x, 0)|\nabla u_t(x, 0)|^2 dx \leq C + C\nu \int_Q |kM||\nabla u_t|^2 dQ. \end{aligned}$$

Выбирая достаточно малое ν , получаем желаемую оценку

$$\int_Q (M|\Delta u|^2 + |kM||\nabla u_t|^2) dQ \leq C.$$

Теперь уже с помощью умножения на kMu_{tt} приходим к оценке

$$\int_Q Mk^2u_{tt}^2 dQ \leq C.$$

После этого можно переходить к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

5. Построение весовой функции $M(x, t)$

Как отмечалось выше, в качестве $M(x, t)$ всегда можно выбирать $|k^-(x, t)|$. Однако это не всегда оптимальный выбор. Например, для $k(x, t) \equiv 0$ получается бессодержательный результат $M(x, t) = 0$. Хотя на самом деле можно положить $M(x, t) = 1$. Пусть $Q^+ = \{(x, t) \in Q \mid k(x, t) > 0\}$. Хотелось бы построить такую функцию $M(x, t)$, которая обращается в нуль только на $\overline{Q}^+$. Это, однако, не всегда возможно. Нетрудно убедиться, что функция $M(x, t)$ должна обращаться в нуль и в тех точках боковой поверхности цилиндра $(x, t) \in S$, в которых $u(x, t) = 0$ и $u_\nu(x, t) > 0$ ($u_\nu(x, t)$ — производная по направлению внешней нормали). Ниже описывается достаточно общая конструкция построения таких $M(x, t)$. Чтобы убрать влияние границы, сначала продолжим функцию $k(x, t)$ вне цилиндра Q и только потом будем строить $M(x, t)$. Для доказательства основного неравенства мы воспользовались идеями из [10, с. 72].

Сначала опишем основную конструкцию. Пусть $A = \sup_{(x, t) \in Q} |\nabla k(x, t)|$. Положим $M_0(x, t) = 1$, если $Q^+ = \emptyset$. В противном случае пусть $M_0(x, t) = \rho(x, t, Q^+)$ — расстояние от точки (x, t) до множества Q^+ . Далее, для всякого фиксированного $t \in [0, T]$ положим

$$M_1(x, t) = \min_{y \in \partial\Gamma} \left(\frac{|k^-(y, t)|}{A} + |x - y| \right), \quad M_2(x, t) = \min(M_0(x, t), M_1(x, t)).$$

После этого определяем $M(x, t)$ следующим образом:

$$M(x, t) = |k^-(x, t)| + M_2(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q}.$$

Лемма 5.1. Построенная выше функция $M(x, t)$ удовлетворяет всем требованиям разд. 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $M(x, t)$ липшицева, $M(x, t)k^+(x, t) \equiv 0$ и, очевидно, $M(x, t) \geq |k^-(x, t)|$. Так что осталось лишь показать, что для некоторой константы $C_M > 0$ справедливо неравенство

$$|\nabla(M(x, t)k^-(x, t))|^2 \leq C_M M(x, t)|k^-(x, t)|.$$

Для этого достаточно установить неравенство

$$M_2(x, t)|\nabla k^-(x, t)|^2 \leq C_0 |k^-(x, t)| \quad (5.1)$$

с подходящей константой C_0 . Для простоты рассмотрим лишь случай $m = 1$ и $\Omega = (0, 1)$. В общем случае все рассуждения аналогичны. Обозначим $B = \sup_{(x, t) \in Q} |k_{xx}(x, t)|$. Пусть $t \in (0, T)$ фиксировано, $x \in \Omega$ и $k(x, t) \leq 0$. Без потери общности считаем, что $k_x(x, t) \neq 0$. Далее считаем, что $k_x(x, t) < 0$. Случай $k_x(x, t) > 0$ рассматривается аналогично (вместо интервала $(0, x)$ рассматриваем интервал $(x, 1)$). Положим (аналогично [10])

$$r = \frac{2k(x, t)}{k_x(x, t)}.$$

Рассмотрим четыре варианта. Сначала предположим, что $r \leq x$ и $k(x-r, t) \leq 0$. По теореме о среднем

$$k(x-r, t) = k(x, t) - rk_x(x, t) + r^2 k_{xx}(\xi, t)/2.$$

Отсюда легко получаем

$$-2k(x, t) \leq r^2 B, \quad k_x^2(x, t) \leq 2|k(x, t)|B.$$

Значит, в этом случае можно положить

$$C_0 = 2B \sup_{(y, \tau) \in Q} M_2(y, \tau).$$

Предположим, что $r \leq x$ и $k(x-r, t) > 0$. В этом случае $M_2(x, t) \leq M_0(x, t) \leq r$. Значит,

$$M_2(x, t)|k_x(x, t)| \leq 2|k(x, t)|, \quad M_2(x, t)|k_x^2(x, t)| \leq 4k^2(x, t)/M_2(x, t).$$

По теореме о среднем в данном случае можно положить

$$C_0 = 4\left(\sup_{(y, \tau) \in Q} |k_t(y, \tau)| + \sup_{(y, \tau) \in Q} |k_y(y, \tau)|\right).$$

Таким образом, далее можно считать, что $r > x$. Предположим, что $|k^-(0, t)| > 2Ax$. В этом случае по теореме о среднем $|k^-(x, t)| > |k^-(0, t)|/2$. По определению

$$M_2(x, t) \leq M_1(x, t) \leq 3|k^-(0, t)|/(2A) \leq 3|k^-(x, t)|.$$

Значит, в этом случае можно положить

$$C_0 = 3A^2.$$

Осталось рассмотреть последний случай $r > x$ и $|k^-(0, t)| \leq 2Ax$. По теореме о среднем $|k^-(x, t)| \leq 3Ax$. Следовательно,

$$xk_x^2(x, t) \leq 4k^2(x, t)/x \leq 12A|k^-(x, t)|.$$

С другой стороны,

$$M_2(x, t) \leq M_1(x, t) \leq 3x.$$

Значит, в этом случае можно положить

$$C_0 = 36A.$$

Итак, все четыре случая рассмотрены, и в каждом можно указать подходящую константу C_0 . Тем самым доказано неравенство (5.1), что и завершает доказательство леммы. $\square$

Пусть $\Omega_1 \subset R^m$ — ограниченная область с гладкой границей, $Q_1 = \Omega_1 \times (0, T)$, причем $\bar{\Omega} \subset \Omega_1$. Продолжим функцию $k(x, t)$ на цилиндр Q_1 с сохранением гладкости так, что $k(x, t)|_{S_1} < 0$, где $S_1 = \partial\Omega_1 \times (0, T)$. Для продолженной функции $k(x, t)$ в цилиндре Q_1 строим функцию $M(x, t)$ по схеме, описанной выше. Легко видеть, что такой подход позволяет строить наиболее подходящий вес $M(x, t)$. В частности, для $k(x, t) \equiv 0$ при надлежащем продолжении получится $M(x, t) \geq \varepsilon > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каратопрклиев Г. Д. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях. I // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 64–75.
2. Врагов В. Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 6. С. 1098–1105.
3. Кислов Н. В. Краевые задачи для дифференциально-операторных уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1427–1436.
4. Чуешев А. В. Об одном линейном уравнении смешанного типа высокого порядка // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 2. С. 454–472.
5. Егоров И. Е., Федоров В. Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.
6. Amanov D., Ashyralyev A. Well-posedness of boundary-value problems for partial differential equations of even order // Electron. J. Differ. Equ. 2014. V. 2014, N 108. P. 1–18.
7. Егоров И. Е. О фредгольмовости краевой задачи Врагова для уравнения смешанного типа четного порядка // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 4. С. 19–30.
8. Khuri M. A. Boundary value problems for mixed type equations and applications // Nonlinear Anal. 2011. V. 74, N 17. P. 6405–6415.
9. Пятков С. Г. Краевые задачи для некоторых классов сингулярных параболических уравнений // Мат. тр. 2003. Т. 6, № 2. С. 144–208.
10. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой Математика. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1971. С. 7–252. (Итоги науки).

Поступила в редакцию 11 июля 2018 г.

После доработки 18 июля 2018 г.

Принята к публикации 17 августа 2018 г.

Артюшин Александр Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
alexsp3@yandex.ru