Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. N. Berestovskii, Lorentzian manifolds close to Euclidean space, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 2, 306–322

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.205>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.198.64.247

April 26, 2023, 13:16:15

ЛОРЕНЦЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ, БЛИЗКИЕ К ЕВКЛИДОВУ ПРОСТРАНСТВУ

В. Н. Берестовский

Аннотация. Исследуются лоренцевы многообразия M_1, M_2, M_3, M_4 , получаемые небольшим изменением стандартной евклидовой метрики на $\mathbb{R}^4$ с выброшенным началом O . M_1 и M_4 — закрытые изотропные модели пространства-времени. Многообразия M_3, M_4 (соответственно M_1, M_2) геодезически (не) полны; M_1 и M_4 глобально гиперболичны, а M_2 и M_3 не хронологичны. Для всех многообразий найдены алгебры Ли групп движений и подобий; тензоры кривизны, Риччи, Эйнштейна, энергии-импульса, Вейля. Доказано, что M_1, M_4 конформно плоские, M_2, M_3 не являются конформно плоскими и их тензор Вейля имеет первый тип Петрова.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.205

Ключевые слова: группа гомотетий, группа движений, давление, закрытая изотропная модель, плотность, тензор Вейля, тензор Эйнштейна, тензор энергии-импульса.

Введение

В работе исследуются лоренцевы многообразия M_1, M_2, M_3, M_4 , получаемые небольшим изменением стандартной евклидовой метрики на $\mathbb{R}^4$ с выброшенным началом O и являющиеся искривленными произведениями $[1, 2]$ числовой полупрямой и трехмерной сферы с соответствующими римановыми или псевдоримановыми метриками.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ допускает четыре взаимно ортогональных векторных поля X, Y, Z, T , первые три из которых киллинговы, а T порождает 1-параметрическую группу гомотетий (растяжений с центром O), сохраняющих все эти векторные поля. При этом на единичной сфере $S_1^3 = S(O, 1) \subset \mathbb{R}^4$ эти векторные поля ортонормированы, T ортогонально S_1^3 , а X, Y, Z касаются S_1^3 и реализуются как единичные левоинвариантные векторные поля на группе Ли $SU(2)$ с биинвариантной римановой метрикой, изометричной S_1^3 .

Из $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ получают M_1 заменой евклидова скалярного квадрата $\langle T, T \rangle$ (псевдо)скалярным квадратом $\langle T, T \rangle = -\langle T, T \rangle$ и M_2 — заменой евклидова скалярного квадрата $\langle Z, Z \rangle$ (псевдо)скалярным квадратом $\langle Z, Z \rangle = -\langle Z, Z \rangle$. Тожественное отображение $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ на себя — конформное отображение с конформным множителем $1/r^2$ многообразия M_2 на M_3 и M_1 на стационарное пространство-время M_4 с пространством S_1^3 ; M_3 изометрично прямому метрическому произведению евклидовой прямой и сферы $S_1^3 \subset M_2$, снабженной индуцированной из M_2 псевдоримановой метрикой. Другими словами, M_3 —

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (код проекта 1.3087.2017/4.6).

прямое метрическое произведение евклидовой прямой и группы Ли $SU(2)$ с левоинвариантной лоренцевой метрикой.

Заметим, что переход от евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ к пространствам M_1 и M_2 аналогичен превращению $\mathbb{R}^4$ в пространство-время Минковского. Хокинг в [3, с. 139] предпочитает обратный переход: пространство-время, в котором события имеют мнимые значения временной координаты, называется евклидовым.

Многообразия M_1 и M_4 и рассматриваемая в статье вселенная де Ситтера — частные случаи *закрытых изотропных моделей пространства-времени* [4] и *пространств Фридмана — Робертсона — Уокера* [5]. Для многообразия M_2 поле Z — временноподобное киллингово векторное поле, все интегральные траектории которого замкнуты с общим периодом 2π . Для M_3 поле Z не только киллингово, но и геодезическое векторное поле. Все эти многообразия допускают транзитивные группы метрических подобий с подгруппами изометрий, орбиты которых — все сферы положительных радиусов в $\mathbb{R}^4$ с центром O , причем M_3 и M_4 однородны. Многообразия M_1 , M_2 геодезически не полны. Найдены касательные векторные поля к геодезическим в M_3 . Из их вида следует, что M_3 геодезически полно. Многообразия M_1 и M_4 глобально гиперболичны, а M_2 и M_3 даже не хронологичны [1, 2].

Известно, что всеми перечисленными свойствами многообразия M_3 обладает и вселенная Гёделя [5] с тем отличием, что роль $SU(2)$ играет $\mathbb{R}^3$ с некоторой однородной лоренцевой метрикой.

Найдены все ковариантные производные, тензоры кривизны, Риччи, Эйнштейна и Вейля для векторных полей из ортогонального базиса (тетрады, как говорят физики, т. е. четверки) X, Y, Z, T для евклидовой метрики и всех пространств M_1 , M_2 , M_3 и M_4 . Интересно, что при этом все компоненты ковариантных производных и ограничений всех тензоров на $S^3 \subset M_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, — постоянные целые числа. Матрицы тензора Эйнштейна (с нулевой космологической постоянной) для всех четырех лоренцевых многообразий нетривиальны, диагональны, а у M_1 и M_4 имеют нулевой след. При этом соответствующий тензор энергии-импульса (положительно пропорциональный тензору Эйнштейна на основании уравнений Эйнштейна поля релятивистской теории гравитации) дает положительные плотности массы-энергии, но совпадающие отрицательные собственные значения матрицы (трехмерного) тензора напряжений [4–8] для M_1 , M_4 и для M_2 , M_3 есть отрицательные и положительные значения.

Самое последнее утверждение и нехронологичность многообразий M_2 и M_3 дают основания думать, что все рассматриваемые лоренцевы многообразия не имеют физического смысла.

Между тем многообразия M_1 и M_4 имеют несомненный геометрический интерес вследствие следующих утверждений в [7, § 31].

Если задано некоторое поле в пространстве V_4 с метрикой ds^2 , допускающей n -параметрическую группу движений G_n , то оно обладает n законами сохранения. Для того, чтобы n -параметрической группе конформных преобразований G_n соответствовало n законов сохранения, необходимо и достаточно, чтобы след тензора энергии-импульса был равен нулю [9].

1. Евклидово пространство

Здесь $\mathbb{R}^4$ снабжается стандартной евклидовой метрикой со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$.

Известно, что сфера $S_1^3 \subset \mathbb{R}^4$ единичного радиуса с нулевым центром O и индуцированной из $\mathbb{R}^4$ римановой метрикой имеет постоянную секционную кривизну 1 и изометрична группе Ли $SU(2)$ с соответствующей биинвариантной римановой метрикой. Отождествляя S_1^3 с $SU(2)$ посредством этой изометрии, выберем произвольный левоинвариантный ортонормированный базис X, Y, Z на $SU(2) = S_1^3$. Тогда вследствие формул (16) и (26) в [13, п. 3.6] должны выполняться равенства для секционной кривизны

$$1 = K(X, Y) = (R(X, Y)Y, X) = \frac{1}{4}([X, Y], [X, Y]) = \frac{1}{4}(bZ, bZ) = \frac{b^2}{4}(Z, Z) = \frac{b^2}{4}.$$

Поэтому $b = 2$ и

$$[X, Y] = 2Z, \quad [Y, Z] = 2X, \quad [Z, X] = 2Y. \quad (1)$$

Продолжим векторные поля X, Y, Z до глобальных векторных полей на $\mathbb{R}^4$, полагая $X(O) = Y(O) = Z(O) = 0$ и

$$X(x) = |x|X(x/|x|), \quad Y(x) = |x|Y(x/|x|), \quad Z(x) = |x|Z(x/|x|), \quad x \neq O.$$

Ясно, что X, Y, Z — киллинговы векторные поля на $\mathbb{R}^4$, причем их интегральные кривые имеют общий период 2π в точках $x \neq O$, поскольку на S_1^3 они имеют длину $\equiv 1$, следовательно, на основании предложения 3.2 в [14] их интегральные кривые — геодезические в S_1^3 , параметризованные длиной дуги.

Определим также векторное поле T на $\mathbb{R}^4$, полагая $T(x) = x$. Интегральные кривые векторного поля T удовлетворяют о.д.у.

$$x'(\tau) = T(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}^4,$$

имеют вид $e^\tau x$, $\tau \in \mathbb{R}$, и являются орбитами 1-параметрической группы гомотетий (растяжений с центром O) пространства $\mathbb{R}^4$ вида

$$h(t, x) = tx, \quad x \in \mathbb{R}^4, \quad t = e^\tau > 0, \quad \tau = \ln t. \quad (2)$$

Следовательно, T сохраняет все векторные поля X, Y, Z, T и

$$[T, X] = [T, Y] = [T, Z] = 0. \quad (3)$$

Все векторные поля X, Y, Z, T полны. Кроме того, пары различных полей этой четверки ортогональны и

$$(X, X)(x) = (Y, Y)(x) = (Z, Z)(x) = (T, T)(x) = (x, x), \quad x \in \mathbb{R}^4. \quad (4)$$

Для векторных полей X, Y, Z на (псевдо)римановом многообразии с (псевдо)скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и связностью Леви-Чивита ∇ известна формула (7) в [13, п. 3.5]:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2}[X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle \\ &\quad + \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle]. \end{aligned} \quad (5)$$

В нашем случае вследствие формул (5), (1), (3) получаем

$$(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}[2(Z, Z) + 2(Y, Y) - 2(X, X)] = (Z, Z).$$

Аналогично, пользуясь формулами (5), (1), (3) при замене поля Z векторными полями X, Y, T , получим 0. Следовательно, $\nabla_X Y = Z$. При циклической перестановке в силу зануления тензора кручения приходим к равенствам

$$\nabla_X Y = -\nabla_Y X = Z, \quad \nabla_Y Z = -\nabla_Z Y = X, \quad \nabla_Z X = -\nabla_X Z = Y. \quad (6)$$

Применяя формулы (5) и (3) для других векторных полей, получим еще только следующие ненулевые выражения:

$$\nabla_X X = \nabla_Y Y = \nabla_Z Z = -T, \quad (7)$$

$$\nabla_X T = \nabla_T X = X, \quad \nabla_Y T = \nabla_T Y = Y, \quad \nabla_Z T = \nabla_T Z = Z, \quad \nabla_T T = T. \quad (8)$$

Известно, что тензор кривизны евклидова пространства зануляется, но полученные здесь формулы для ковариантных производных будут полезны для вычисления тензора кривизны в других разделах.

2. Пространство Фридмана — Робертсона — Уокера M_1

Зададим лоренцеву метрику на $\mathbb{R}^4 - \{0\}$, сделав лишь одно новое предположение:

$$\langle T, T \rangle(x) = -(T, T)(x) = -(x, x), \quad x \in \mathbb{R}^4 - \{0\}.$$

В результате получим некоторое лоренцево многообразие M_1 . По-прежнему X, Y, Z — киллинговы векторные поля, а T — инфинитезимальная гомотетия на M_1 . Геометрия пространства-времени M_1 задается формулой (1) из [6, § 27.1] с функцией

$$a(t) = t = t(x) = \sqrt{(x, x)}, \quad x \in \mathbb{R}^4 - \{0\}. \quad (9)$$

В общем случае функция $a(t)$ задает эволюцию во времени пространства, изометричного в момент времени $t > 0$ сфере $S_{a(t)}^3$ радиуса $a(t) > 0$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с индуцированной из $\mathbb{R}^4$ римановой метрикой. Такие лоренцевы многообразия — закрытые изотропные модели пространства-времени из [4, § 112], входящие в пространства Фридмана — Робертсона — Уокера, рассматриваемые в [5, § 5.3], где вместо $a(t)$ используется обозначение $S(t)$.

Подсчеты по формулам (5), (1), (3) показывают, что в многообразии M_1 сохраняются формулы (6) и (8), а в формуле (7) $-T$ заменится на T . Напомним, что в произвольном псевдоримановом многообразии тензор кривизны вычисляется по формуле

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (10)$$

Из подправленной формулы (7) и формул (6), (8), (10) нетрудно увидеть, что на M_1 тензор кривизны зануляется в точности для всех троек, содержащих T или попарно различные векторные поля. Из всех оставшихся случаев приведем лишь следующее вычисление:

$$\begin{aligned} R(X, Y)X &= \nabla_X \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_X X - \nabla_{[X, Y]} X \\ &= -\nabla_X Z - \nabla_Y T - 2\nabla_Z X = Y - Y - 2Y = -2Y = -R(Y, X)X. \end{aligned}$$

Остальные вычисления проводятся аналогично. В результате получим следующие соотношения:

$$R(Y, X)X = -R(X, Y)X = 2Y, \quad R(X, Y)Y = -R(Y, X)Y = 2X, \quad (11)$$

$$R(Z, X)X = -R(X, Z)X = 2Z, \quad R(X, Z)Z = -R(Z, X)Z = 2X, \quad (12)$$

$$R(Z, Y)Y = -R(Y, Z)Y = 2Z, \quad R(Y, Z)Z = -R(Z, Y)Z = 2Y. \quad (13)$$

Определение *тензора Риччи* в псевдоримановом многообразии таково:

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{trace } R(\cdot, X)Y. \quad (14)$$

Из формул (11)–(14) следует, что

$$\text{Ric}(X, X) = \text{Ric}(Y, Y) = \text{Ric}(Z, Z) = 4, \quad \text{Ric}(T, T) = 0, \quad (15)$$

а все остальные значения тензора Риччи равны нулю.

Скалярная кривизна многообразия M_1 (которую надо вычислять в нормированном ортогональном базисе $T/t, X/t, Y/t, Z/t$) равна

$$R(t) = (\text{Ric}(X, X) + \text{Ric}(Y, Y) + \text{Ric}(Z, Z) - \text{Ric}(T, T))/t^2 = 12/t^2. \quad (16)$$

Компоненты *тензора Эйнштейна* (которые обычно вычисляются в ортонормированном базисе пространства-времени с метрическим тензором g) определяются формулой (см. [4–8])

$$G_{\mu\nu} = \text{Ric}_{\mu\nu} - (R/2)g_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (17)$$

Здесь недиагональные компоненты тензора G равны нулю и

$$G_{00}(t) = 6/t^2, \quad G_{11}(t) = G_{22}(t) = G_{33}(t) = -2/t^2, \quad (18)$$

поскольку $-g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$.

Уравнение Эйнштейна поля тяготения имеет вид

$$G = 8\pi T, \quad (19)$$

где T — *тензор энергии-импульса* [4–8].

После проведенных геометрических вычислений нетрудно дать на основании (19) физическую интерпретацию пространства-времени M_1 .

Теорема 1. *Тензоры Риччи, Эйнштейна и энергии-импульса пространства-времени M_1 диагональны, а следы последних двух тензоров равны нулю; M_1 можно интерпретировать как эволюционирующее во времени замкнутое, однородное и изотропное пространство, являющееся сплошной средой в виде идеальной жидкости или идеального газа с плотностью $\rho(t) = 3/4\pi t^2$, давлением $p(t) = -1/4\pi t^2$, общей массой $m(t) = (3/2)\pi t$ и объемом $V(t) = 2\pi^2 t^3$, $t > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (18) и (19) получаем

$$\rho(t) := T_{00}(t) = 3/4\pi t^2, \quad (G_{11} = G_{22} = G_{33})(t) = -1/4\pi t^2 := p(t), \quad (20)$$

где ρ и p — *плотность и давление массы-энергии* [4–6].

Вследствие § 5.3 в [5] и § 5.5 в [6] это плотности и давления замкнутой, однородной и изотропной в момент времени $t > 0$ сплошной среды из идеальной жидкости или идеального газа.

Поскольку $a(t) = t$, $t > 0$, по формуле (111.9) из [4]

$$V(t) = 2\pi^2 t^3, \quad (21)$$

где $V(t)$ — *объем сферы S_t^3 радиуса t в $\mathbb{R}^4$* . Следовательно, в нашем случае *масса-энергия пространства* в момент времени t равна

$$m(t) = (3/4\pi t^2) \cdot 2\pi^2 t^3 = (3/2)\pi t. \quad \square \quad (22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Масса шара радиуса t в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с плотностью $\rho(t)$ из (20) равна t , в частности, равна 1 при $t = 1$.

Полученные результаты согласуются с другими источниками.

Согласно [6] уравнение поля Эйнштейна (удвоенное для удобства) $2G = 16\pi T$ для геометрии пространства-времени с метрикой (1) из § 27.1 полностью определяется формулой (2) там же:

$$\frac{6}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + \frac{6}{a^2} = 16\pi\rho. \quad (23)$$

В нашем случае $a = a(t) = t$, $da/dt = 1$. Отсюда получаем то же значение $\rho = \rho(t)$, что и в формуле (20). Формула (3) там же

$$m'(t) = -p(t)V'(t) \quad (24)$$

согласно (21) и (22) дает в нашем случае равенство $(3/2)\pi = -p(t)6\pi^2 t^2$, откуда $p(t) = -1/4\pi t^2$, то же, что и в формуле (20).

Уравнения поля по [5] (по существу, это (2.35) в [5]) сводятся там к одному уравнению (5.12):

$$3(a')^2 = 8\pi(\rho a^3)/a - 3K$$

с константой K , кривизной пространства, $t_0 = \text{const}$. При $a(t) = t$ и $t_0 = 1$ отсюда получаем $K = 1$ и $\rho(t) = \frac{6}{8\pi t^2} = \frac{3}{4\pi t^2}$, то же, что в (21).

Для пространств Фридмана — Робертсона — Уокера уравнение сохранения энергии (3.9) в [5] принимает вид уравнения (5.10) в [5]:

$$\rho'_t = -3(\rho + p)a'_t/a.$$

В случае $a(t) = t$ и $\rho(t) = 3/4\pi t^2$ это уравнение дает равенства

$$\rho'_t = -2\rho/t = -3(\rho + p)/t, \quad p = -\rho/3 = -1/4\pi t^2.$$

Уравнение Ландау — Райчаудхури (4.26) из [5] при космологической постоянной $\Lambda = 0$ принимает вид уравнения (5.11) из [5]:

$$4\pi(\rho + 3p) = 3a''_{tt}/a. \quad (25)$$

В нашем случае обе части этого уравнения всегда равны нулю.

Метрика замкнутых, однородных и изотропных моделей задается в координатном виде в [4] уравнением (112.2). Перейдем от этого уравнения к координатному заданию метрики многообразия M_1 в виде уравнения (1) из [6, § 27.1], умножив правую часть на -1 и предположив, что скорость света c равна 1 (тем самым примем «космическую» единицу измерения расстояния: световую секунду).

Функция $a(t)$ из (112.2) удовлетворяет в [4] уравнениям, для записи которых авторы вводят новую переменную η в уравнении (112.3), при $c = 1$, имеющем вид $dt = ad\eta$. Уравнение (112.5) из [4] для этой переменной при $k = c = 1$, $\varepsilon = \rho$ записывается в виде

$$8\pi\rho = \frac{3}{a^4}(a^2 + (a')^2). \quad (26)$$

В нашем случае $a = t$, поэтому $d\eta = dt/t = d\ln t$ и вследствие (2) естественно считать, что $\eta = \tau$. Тогда $a = t = e^\tau$, $a'_\tau = e^\tau = a = t$ и из уравнения (26) получаем то же равенство для ρ , что и в (20).

Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц в [4] пользуются известным термодинамическим соотношением $dE = T dS - p dV$, где E , S , V — энергия, энтропия и объем системы, а p , T — давление и температура. При постоянной энтропии они получают просто $dE = -p dV$, что при отождествлении E с m совпадает с уравнением (24). Вводя плотность массы-энергии $E/V = m/V$, в [4] получают последовательно в общем случае

$$d\rho = -(\rho + p) dV/V, \quad dV/V = 3 d \ln a, \quad -d\rho/(\rho + p) = 3 d \ln a.$$

В нашем случае при уже найденной плотности ρ в (20) получаем

$$d \ln a = dt/t, \quad \rho + p = -(-(3/2\pi t^3) dt)/(3 dt/t) = 1/2\pi t^2$$

и, наконец, нужное значение

$$p = (1/2 - 3/4)/\pi t^2 = -1/4\pi t^2.$$

Заметим также, что уравнение поля Эйнштейна в [4] для переменной η в общем случае записано в виде

$$\text{Ric}_0^0 = \frac{3}{a^4}((a')^2 - aa''). \quad (27)$$

В нашем случае $\text{Ric}_0^0 = -\text{Ric}(T, T) \equiv 0$, $\eta = \tau$, $a = e^\tau$, $a' = a'_\tau = a''_{\tau\tau}$, поэтому обе части уравнения (27) тождественно равны нулю.

Заметим, что хотя $m(t) = (3/2)\pi t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, но $\rho(t) \rightarrow +\infty$, $p(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow 0$; все ненулевые секционные, риччиевы кривизны и скалярная кривизна R в M_1 стремятся к бесконечности при $t \rightarrow 0$. Кроме того, будет показано, что всякая идущая в прошлое временноподобная кривая в M_1 с любым начальным временем $t_0 > 0$ за конечное «собственное» время, не большее t_0 , попадает в точку $O \in \mathbb{R}^4$. Это значит, что у такой вселенной имеется начало, отдаленное от любого события конечным промежутком времени. Таким образом, при $a = t = x = 0$ пространство-время M_1 имеет очень серьезную сингулярность. Поэтому необходимо исключить точку O .

Соотношения $p = -\rho/3 < 0$ противоречат разумным физическим предположениям $\rho > 0$, $p \geq 0$, согласующимся с энергетическими условиями из [5, разд. 4.3]. Тем не менее в [5] допускается случай $p < 0$, когда там говорится, что сингулярность с перечисленными выше свойствами возникает во всех моделях Фридмана — Робертсона — Уокера, для которых $\rho + 3p > 0$ и космологическая постоянная Λ отрицательна, равна нулю или имеет не слишком большое положительное значение.

Следующее предложение показывает, что это верно и в случае любой нестатичной закрытой модели Фридмана — Робертсона — Уокера, когда $\rho + 3p = 0$, $\Lambda = 0$.

Предложение 1. *Замкнутая изотропная модель с $\Lambda = 0$ имеет бесследовый тензор Эйнштейна тогда и только тогда, когда она изометрична статичной модели Эйнштейна с некоторым радиусом $a > 0$, изометрична M_1 или получается из M_1 некоторой комбинацией следующих преобразований: пропорциональным изменением масштаба времени, его сдвигом, изменением его направления.*

Доказательство. Тензор Эйнштейна такой модели имеет нулевой след тогда и только тогда, когда $\rho + 3p \equiv 0$. Уравнение (25) показывает, что это эквивалентно тождеству $a'' \equiv 0$.

В случае $a' \equiv 0$ получаем $a(t) \equiv \text{const} > 0$ и модель Эйнштейна.

Иначе $a'(t) \equiv \text{const} \neq 0$. Изменяя направление времени, если нужно, можно считать, что $\text{const} > 0$. Тогда $a(t) = bt + d$, $b > 0$, $d \in \mathbb{R}$. Изменяя пропорционально масштаб, можно считать, что $b = 1$. Полагая $\tilde{t} := t + d > 0$, получаем M_1 . $\square$

Предложение 2. *Всякая идущая в прошлое временноподобная кривая в M_1 с любым начальным временем $t_0 > 0$ за конечное собственное время $\tilde{t}$, не большее t_0 , попадает в точку $O \in \mathbb{R}^4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из очевидного неравенства $(d(\tilde{t}))^2 \leq (dt)^2$ при равенстве, выполняемом, лишь если касательный вектор ортогонален векторным полям X, Y, Z . $\square$

3. Лоренцево многообразие M_2

Еще одна возможность получить из евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ пространство-время — положить $\langle Z, Z \rangle = -(Z, Z) = -(x, x)$, сохранив все остальные скалярные произведения. Положительное направление времени t задается векторным полем Z . Обозначим его через M_2 . По-прежнему на M_2 : T — инфинитезимальная гомотетия, Z — киллингово векторное поле, но X, Y уже не киллинговы.

Формула (5) показывает, что при переходе от $\mathbb{R}^4$ к M_2 изменятся только следующие ковариантные производные:

$$\nabla_X Z = Y, \quad \nabla_Z X = 3Y, \quad \nabla_Y Z = -X, \quad \nabla_Z Y = -3X, \quad \nabla_Z Z = T. \quad (28)$$

Применяя к формуле (10) формулу (28) и остальные формулы из разд. 1, получим только следующие ненулевые компоненты тензора кривизны:

$$\begin{aligned} R(Y, X)X &= -R(X, Y)X = 6Y, & R(X, Y)Y &= -R(Y, X)Y = 6X, \\ R(Z, X)X &= -R(X, Z)X = -2Z, & R(X, Z)Z &= -R(Z, X)Z = 2X, \\ R(Z, Y)Y &= -R(Y, Z)Y = -2Z, & R(Y, Z)Z &= -R(Z, Y)Z = 2Y. \end{aligned} \quad (29)$$

Следовательно, все ненулевые компоненты тензора Риччи равны

$$\text{Ric}(X, X) = 6 - 2 = 4, \quad \text{Ric}(Y, Y) = 6 - 2 = 4, \quad \text{Ric}(Z, Z) = 2 + 2 = 4. \quad (30)$$

Скалярная кривизна (которую надо вычислять в нормированном ортогональном базисе $Z/r, X/r, Y/r, T/r$) (см. (57)) равна

$$R(r) = (-\text{Ric}(Z, Z) + \text{Ric}(X, X) + \text{Ric}(Y, Y) + \text{Ric}(T, T))/r^2 = 4/r^2. \quad (31)$$

Компоненты тензора Эйнштейна равны

$$G_{00}(r) = 6/r^2, \quad G_{11}(r) = G_{22}(r) = 2/r^2, \quad G_{33}(r) = -2/r^2. \quad (32)$$

Теорема 2. *Тензоры Риччи, Эйнштейна и энергии-импульса пространства-времени M_2 диагональны. В M_2 плотность материи и давления в разных направлениях (собственные значения тензора напряжений) равны*

$$\rho(r) = 3/4\pi r^2, \quad p_1(r) = p_2(r) = 1/4\pi r^2, \quad p_3(r) = -1/4\pi r^2, \quad r > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие (19), (32) компоненты тензора T равны

$$T_{00}(r) = 3/4\pi r^2, \quad (T_{11} = T_{22})(r) = 1/4\pi r^2, \quad T_{33}(r) = -1/4\pi r^2. \quad (33)$$

Эти значения дают указанные величины в теореме. $\square$

Аналогично разд. 2 в точке O сильная сингулярность (которую поэтому нужно удалить), плотность положительна, но давления в разных направлениях отрицательны. Уже поэтому пространство-время M_2 не имеет физического значения (в обычном смысле).

Но есть еще одна существенная особенность у M_2 : каждая точка (событие) $x \in M_2$, двигаясь во временноподобном направлении векторного поля Z , за собственное время $2\pi r(x)$ возвращается в x , т. е. для каждого x существует *машина времени*. Правда, траектории векторного поля Z не являются геодезическими. В следующем разделе этот недостаток машины времени исправлен: для пространства-времени M_3 векторное поле Z является временноподобным геодезическим полем. Все его траектории имеют потоянное собственное время возвращения, равное 2π .

Вследствие изложенного пространства-времени M_2 и M_3 не удовлетворяют самому слабому условию причинности из [1, 2]: *они не хронологичны*. M_1 (соответственно M_2) не геодезически полны, так как T/t (соответственно T/r) является геодезическим векторным полем: все его интегральные кривые являются геодезическими.

Пространства M_2 и M_3 в отличие от M_1 не допускают пространственно-подобных подмногообразий размерности 3 вследствие их односвязности. Это доказывается с помощью рассуждений из [5, § 5.7], касающихся модели вселенной Гёделя. M_2 и M_3 , как и вселенная Гёделя, не расщепляются на пространство и время. Поэтому для них нет аналогов теоремы 5. Все же на основе тензора энергии-импульса модели вселенной Гёделя в [5] дана некоторая ее физическая интерпретация. Мы не делаем и этого для M_2 и M_3 .

4. Лоренцево многообразие M_3

Как отмечено во введении, M_3 изометрично прямому метрическому произведению евклидовой прямой и сферы $S_1^3 \subset M_2$, снабженной индуцированной из M_2 лоренцевой метрикой.

Нужно заметить, что вследствие предложения 2.6 из [1] любое компактное пространство-время содержит замкнутую временноподобную кривую и поэтому не может быть хронологическим. Если оно еще и однородно, то через всякое его событие проходит замкнутая временноподобная кривая. В частности, это верно и для $S_1^3 = SU(2)$ с левоинвариантной лоренцевой метрикой, как здесь.

Поэтому в отличие от вселенной Гёделя заслуги в создании машины времени M_3 нет.

Тем не менее M_3 представляет геометрический интерес.

На этот раз T обозначает единичное векторное поле 1-мерного евклидова сомножителя.

Вследствие формулы (5) все ковариантные производные, включающие T , зануляются; все остальные имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y = -\nabla_Y X = Z, \quad \nabla_X Z = Y, \quad \nabla_Z X = 3Y, \quad \nabla_Y Z = -X, \\ \nabla_Z Y = -3X, \quad \nabla_X X = \nabla_Y Y = \nabla_Z Z = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Опуская детали длинных, но несложных вычислений по формулам (34),

(10), выпишем ненулевые компоненты тензора кривизны:

$$\begin{aligned} R(Y, X)X &= -R(X, Y)X = 7Y, & R(Z, X)X &= -R(X, Z)X = -Z, \\ R(X, Y)Y &= -R(Y, X)Y = 7X, & R(Z, Y)Y &= -R(Y, Z)Y = -Z, \\ R(X, Z)Z &= -R(Z, X)Z = X, & R(Y, Z)Z &= -R(Z, Y)Z = Y; \end{aligned} \quad (35)$$

ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\text{Ric}(X, X) = \text{Ric}(Y, Y) = 7 - 1 = 6, \quad \text{Ric}(Z, Z) = 1 + 1 = 2; \quad (36)$$

скалярную кривизну:

$$R = -\text{Ric}(Z, Z) + \text{Ric}(X, X) + \text{Ric}(Y, Y) + \text{Ric}(T, T) = 10; \quad (37)$$

тензор Эйнштейна:

$$G_{00} = 2 + 5 = 7, \quad G_{11} = G_{22} = 6 - 5 = 1, \quad G_{33} = 0 - 5 = -5. \quad (38)$$

Теорема 3. Тензоры Риччи, Эйнштейна и энергии-импульса пространства-времени M_3 диагональны. В M_3 плотность материи и давления в разных направлениях (собственные значения тензора напряжений) равны

$$\rho = \frac{7}{8\pi}, \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{8\pi}, \quad p_3 = -\frac{5}{8\pi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие (19), (38) компоненты тензора Т равны

$$T_{00} = \frac{7}{8\pi}, \quad T_{11} = T_{22} = \frac{1}{8\pi}, \quad T_{33} = -\frac{5}{8\pi}. \quad (39)$$

Эти значения дают указанные величины в теореме. $\square$

Найдем касательные векторные поля геодезических в M_3 .

Ясно, что достаточно решить эту задачу для геодезических во вполне геодезическом подмногообразии S_1^3 коразмерности 1 в M_3 .

Пусть $\gamma = \gamma(s)$ — геодезическая в S_1^3 . Тогда

$$\gamma'(s) = a(s)X(\gamma(s)) + b(s)Y(\gamma(s)) + c(s)Z(\gamma(s))$$

или просто

$$\gamma' = aX + bY + cZ := U$$

для некоторых вещественных функций $a = a(s)$, $b = b(s)$, $c = c(s)$. Условие геодезичности кривой $\gamma = \gamma(s)$ имеет вид

$$0 \equiv \nabla_{\gamma'} \gamma' = \nabla_U U.$$

С учетом (34) это уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} 0 &\equiv a'X + b'Y + c'Z + ab(\nabla_X Y + \nabla_Y X) + ac(\nabla_X Z + \nabla_Z X) + bc(\nabla_Y Z + \nabla_Z Y) \\ &= (a' - 4bc)X + (b' + 4ac)Y + c'Z. \end{aligned}$$

Следовательно, $c' \equiv 0$, $c = \text{const}$. Если $c = 0$, то

$$\gamma' = aX + bY, \quad (40)$$

где a, b — произвольные постоянные.

Если $c \neq 0$, то получаем дифференциальные уравнения

$$a' = 4bc, \quad b' = -4ac, \quad a'' = -16c^2a, \quad b'' = -16c^2b.$$

Отсюда нетрудно найти, что

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= (a(0) \cos(4cs) + b(0) \sin(4cs))X(\gamma(s)) \\ &\quad + (b(0) \cos(4cs) - a(0) \sin(4cs))Y(\gamma(s)) + cZ(\gamma(s)). \end{aligned} \quad (41)$$

Следствие 1. Пространство-время M_3 геодезически полно.

5. Вселенные Эйнштейна и де Ситтера

Статичная вселенная Эйнштейна упоминалась в статье не раз, и в разд. 4 рассматривалось пространство-время M_3 , получаемое из M_2 конформным отображением с множителем $1/r^2$. Поэтому имеет смысл рассмотреть здесь вселенную Эйнштейна M_4 с постоянным радиусом $a = 1$, получаемую из M_1 конформным отображением с множителем $1/t^2$, тем более что нужно минимум вычислений.

Векторные поля X, Y, Z, T те же, что и в разд. 4, только на этот раз T обозначает временноподобное направленное в будущее единичное векторное поле, ортогональное единичным ортонормированным векторным полям X, Y, Z на S_1^3 . При этом $\tau = \eta$ из формулы (2) и разд. 2 играет роль времени в M_4 .

Сфера S_1^3 имеет постоянную секционную кривизну 1. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, X) = \text{Ric}(Y, Y) = \text{Ric}(Z, Z) = 2, \quad \text{Ric}(T, T) = 0, \quad R = 6, \\ G_{00} = 3, \quad G_{11} = G_{22} = G_{33} = -1, \end{aligned} \quad (42)$$

$$T_{00} = \frac{3}{8\pi}, \quad T_{11} = T_{22} = T_{33} = -\frac{1}{8\pi}. \quad (43)$$

Отсюда непосредственно следует

Теорема 4. *Тензоры Риччи, Эйнштейна и энергии-импульса пространства-времени M_4 диагональны, а следы последних двух тензоров равны нулю; M_4 можно интерпретировать как постоянное во времени однородное и изотропное пространство, являющееся сплошной средой в виде идеальной жидкости или идеального газа с плотностью $\rho = 3/8\pi$, давлением $p = -1/8\pi$, общей массой $m = (3/4)\pi$ и объемом $V = 2\pi^2$. Минимальная космологическая постоянная, для которой M_4 будет иметь давление $p \geq 0$, есть $\Lambda = 1$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для вселенной Эйнштейна с радиусом $a > 0$

$$\rho = 3/8\pi a^2, \quad p = -1/8\pi a^2, \quad m = (3/4)\pi a, \quad V = 2\pi^2 a^3.$$

Лоренцево многообразие M_4 геодезически полно, так как его вполне геодезическое однородное риманово подмногообразие $S_1^3 \subset M_4$ геодезически полно.

Одна из наиболее интересных замкнутых изотропных моделей — *пространство-время де Ситтера первого рода* M_α с функцией $a(t) = \alpha \text{ch}(\alpha^{-1}t)$, $\alpha > 0$. Оно реализуется однополостным гиперболоидом

$$-t^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \alpha^2$$

с индуцируемой лоренцевой метрикой из пространства-времени Минковского Mink_5 с метрикой

$$ds^2 = -(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (dw)^2.$$

Связная группа G_S его движений — аналог линейной группы Лоренца для Mink_5 — имеет наибольшую возможную для четырехмерных лоренцевых многообразий размерность 10. M_α не только пространственно, но и само однородно и изотропно в том смысле, что G_S действует транзитивно на множествах временноподобных и светоподобных направленных в будущее геодезических.

Модель M_α геодезически полна и глобально гиперболична [1, 2]. Весьма необычное свойство у M_α — каждый инерциальный наблюдатель, т. е. направленная в будущее временноподобная геодезическая, имеет свои несовпадающие,

но пересекающиеся горизонты событий прошлого и будущего [5, 15]. Это пересечение изометрично единичной двумерной сфере. Каждый горизонт диффеоморфен прямому произведению $S^2 \times \mathbb{R}$. Это эллиптический цилиндр в $\mathbb{R}^5$ с прямолинейными образующими — светоподобными геодезическими асимптотически параллельными рассматриваемой временноподобной геодезической в будущем (соответственно в прошлом). Каждый горизонт является гипермногообразием и разбивает M_α на две открытые половины, переходящие друг в друга при инверсии $\text{Inv} : x \in M_\alpha \rightarrow -x$. Отображение Inv сохраняет горизонты событий всех наблюдателей и переводит каждую временноподобную геодезическую γ в геодезическую $-\gamma$ с противоположным направлением времени. Эти две геодезические имеют один и тот же горизонт событий будущего (соответственно прошлого). Пересечение дополнений горизонтов событий прошлого и будущего для γ имеет четыре связные открытые компоненты. Одна из этих компонент содержит γ , другая $-\gamma$. Любые два события из различных этих двух компонент причинно не связаны.

Далее ограничимся моделью $M_{\alpha=1}$, которую будем обозначать через M .

Теорема 5. *Пространство-время M можно интерпретировать как эволюционирующее во времени замкнутое, однородное и изотропное пространство, являющееся сплошной средой в виде идеальной жидкости или идеального газа с плотностью $\rho \equiv 3/8\pi$, давлением $p \equiv 1/8\pi$, массой $m(t) = (3/4)\pi \text{ch}^3 t$ и объемом $V(t) = 2\pi^2 \text{ch}^3 t$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае

$$a(t) = \text{ch } t, \quad a'(t) = \text{sh } t, \quad (a'(t))^2 + 1 = \text{ch}^2 t = a^2(t), \quad a''(t) = \text{ch } t = a(t).$$

Из последнего равенства и (23) получаем требуемую плотность, из предпоследнего равенства и (25) — равенства $\rho + 3p = 2\rho$, $p \equiv 1/8\pi$, а из (21) — равенства для объема и массы. $\square$

6. Тензор Вейля и конформная эквивалентность

Изучим вопрос, являются ли рассматриваемые лоренцевы многообразия конформно плоскими. Это эквивалентно занулению тензора Вейля [16]. Для вычисления тензора Вейля в псевдоримановом многообразии применим формулу из [5, п. 2.6], применив циклическую подстановку $X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow T \rightarrow X$ векторных полей X, Y, Z, T , поскольку используемое здесь обозначение тензора кривизны $R(Z, T, Y, X) = \langle R(Z, T)Y, X \rangle$ дает значение тензора кривизны для полей X, Y, Z, T именно в последнем порядке в обозначениях из [5], и заменив букву C на W . Тогда

$$\begin{aligned} W(Z, T, Y, X) = & R(Z, T, Y, X) + (1/(n-2))[\langle X, T \rangle \text{Ric}(Z, Y) \\ & - \langle X, Z \rangle \text{Ric}(T, Y) + \langle Y, Z \rangle \text{Ric}(T, X) - \langle Y, T \rangle \text{Ric}(Z, X)] \\ & + (R/((n-1)(n-2)))[\langle X, Z \rangle \langle T, Y \rangle - \langle X, T \rangle \langle Z, Y \rangle]. \end{aligned} \quad (44)$$

Тензор Вейля W имеет те же свойства симметрии, что и ковариантный тензор кривизны. Более точно, тензор W имеет структуру ковариантного тензора кривизны Риччи-плоского многообразия [5, 7]. В [5] доказано, что тензор Вейля W конформно инвариантен. Более точно, это значит, что если ϕ — конформное отображение двух псевдоримановых многообразий с множителем k^2 , $k > 0$,

зависящим от точек на первом многообразии, то для любых векторных полей X, Y, Z, T на первом многообразии

$$W(d\phi(X), d\phi(Y), d\phi(Z), d\phi(T)) = k^2 W(X, Y, Z, T) \quad (45)$$

(см. также [8, § 122]).

В случае $n = 4$ формула (44) приобретает вид

$$\begin{aligned} W(Z, T, Y, X) &= R(Z, T, Y, X) + (1/2)[\langle X, T \rangle \text{Ric}(Z, Y) \\ &\quad - \langle X, Z \rangle \text{Ric}(T, Y) + \langle Y, Z \rangle \text{Ric}(T, X) - \langle Y, T \rangle \text{Ric}(Z, X)] \\ &\quad + (R/6)[\langle X, Z \rangle \langle T, Y \rangle - \langle X, T \rangle \langle Z, Y \rangle]. \end{aligned} \quad (46)$$

Применим эту формулу к различным наборам векторных полей из четверки X, Y, Z, T в M_1 . Поскольку переход от $t = 1$ к произвольному t есть конформное отображение с множителем t^2 , вследствие (45) можно предполагать, что $t = 1$. На основании формул (11), (12), (13), (15) и (46) нетрудно заметить, что левые и правые части в (46) обращаются в нуль, если $Z = T$, $Y = X$ или если в четверку входит более двух различных векторных полей. Кроме того, $R = 0$ и $\text{Ric} = 0$, если в (46) входит T . Используя еще (16), получим

$$W(X, Y, Y, X) = W(Y, X, X, Y) = 2 + (1/2)[-1 \cdot 4 - 1 \cdot 4] + (12/6)[1 \cdot 1] = 0.$$

Аналогичные вычисления дают

$$W(Z, X, X, Z) = W(X, Z, Z, X) = W(Y, Z, Z, Y) = W(Z, Y, Y, Z) = 0$$

и зануление тензора W во всех остальных случаях.

Найдем тензор Вейля W для M_2 . Вследствие формул (29), (30), (31), (46) и зануления тензоров R и Ric при вхождении в них векторного поля T получаем при $r = 1$ следующие результаты:

$$\begin{aligned} W(Z, Y, Y, Z) &= W(Y, Z, Z, Y) = W(X, Z, Z, X) = W(Z, X, X, Z) \\ &= 2 + (1/2)[-(-1)4 - 1 \cdot 4] + (4/6)[-1 \cdot 1] = 2 - 2/3 = 4/3, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} W(Z, T, T, Z) &= W(T, Z, Z, T) \\ &= 0 + (1/2)[-(-1)0 - 1 \cdot 4] + (4/6)[-1 \cdot 1] = -2 - 2/3 = -8/3, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} W(X, Y, Y, X) &= W(Y, X, X, Y) \\ &= 6 + (1/2)[-1 \cdot 4 - 1 \cdot 4] + (4/6)[1 \cdot 1] = 6 - 4 + 2/3 = 8/3, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} W(T, Y, Y, T) &= W(Y, T, T, Y) = W(X, T, T, X) = W(T, X, X, T) \\ &= 0 + (1/2)[-1 \cdot 4 - 1 \cdot 0] + (4/6)[1 \cdot 1] = -2 + 2/3 = -4/3. \end{aligned} \quad (50)$$

Вследствие (45) на M_3 получим постоянные значения (47)–(50). Автор получил эти же значения, вычислив их напрямую для M_3 и проделав тем самым «решающий эксперимент», но здесь эти вычисления опущены. Легко проверить также второе из упомянутых выше свойств тензора Вейля в этом случае.

Теорема 6. *Лоренцево многообразие M_1 и всякое конформно эквивалентное ему лоренцево многообразие, в частности M_4 , конформно плоское.*

Теорема 7. Лоренцево многообразие M_2 и всякое конформно эквивалентное ему лоренцево многообразие, в частности M_3 , не конформно плоское.

Предложение 3. Каждая замкнутая изотропная модель пространства-времени конформно эквивалентна некоторой области статичной вселенной Эйнштейна M_4 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что M — лоренцево многообразие, конформно эквивалентное M_4 с множителем $(k(\tau))^2$, где $k(\tau) > 0$. Тогда как время и радиус в M можно взять функции

$$\mu = \mu(\tau) = \int_0^\tau (1/k(s)) ds, \quad a(\mu) = k(\tau). \quad (51)$$

При этом

$$d\tau/d\mu = k(\tau(\mu)) = a(\mu), \quad \tau = \tau(\mu) = \int_0^\mu a(u) du. \quad (52)$$

Последние равенства в (51) и (52) показывают, что предложение верно для любой замкнутой изотропной модели M после применения некоторого сдвига по времени в M . $\square$

Из теоремы 6 и предложения 3 вытекает

Следствие 2. Любая замкнутая изотропная модель пространства-времени конформно плоская.

На основании предложений 1 и 3 получаем

Следствие 3. Зануление следа тензора Эйнштейна не сохраняется при общих конформных преобразованиях лоренцевых метрик.

7. Тип Петрова тензора Вейля пространств-времен M_2 , M_3

Вследствие симметрий ковариантного тензора кривизны R на любом псевдоримановом многообразии R можно рассматривать как линейный симметрический оператор $\tilde{R}$ на бивекторных полях при определении псевдоскалярного произведения на простых бивекторах как определителя матрицы Грама задающих их векторов.

Пользуясь этим, А. З. Петров в [7, § 18, 19] доказывает, что матрицы операторов $\tilde{R}$ всех эйнштейновых [16] лоренцевых 4-многообразий в специально выбранном ортонормированном базисе из простых бивекторов могут иметь только три типа — *типы Петрова*.

Следовательно, поскольку тензор Вейля любого лоренцева 4-многообразия имеет все свойства тензора кривизны Риччи-плоского многообразия, можно определить тип Петрова тензора Вейля.

Сделаем это для M_2 , M_3 . Формулы (47)–(50) при занулении всех остальных компонент у W показывают, что все простые бивекторы, составленные из X, Y, T, Z , являются собственными (би)векторами оператора $\tilde{W}$ на 6-мерном пространстве. Тогда из результатов А. З. Петрова следует, что если все наши вычисления правильны, то тензор Вейля для этих пространств имеет *первый тип Петрова*. Тем не менее приведем необходимые для этого детали.

Снова возникает проблема с индексными обозначениями компонент тензоров кривизны и Вейля. У А. З. Петрова компоненты тензора кривизны определяются в координатах через символы Кристоффеля. Будем использовать наши обозначения, поскольку в любом случае может поменяться лишь знак у всех компонент одновременно.

Теорема 8. *Тензор Вейля лоренцевых многообразий M_2 , M_3 и любого конформного им многообразия имеет первый тип Петрова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Занумеруем векторные поля X, Y, T, Z на M_3 числами 1, 2, 3, 4 в порядке этого расположения. Следуя (18.4) из [7], используем следующую нумерацию двойных индексов:

$$14 \rightarrow 1, \quad 24 \rightarrow 2, \quad 34 \rightarrow 3, \quad 23 \rightarrow 4, \quad 31 \rightarrow 5, \quad 12 \rightarrow 6. \quad (53)$$

Одно из равенств в (47) в компонентах с базисом X, Y, T, Z записывается в виде $W_{1414} = -4/3$ или согласно (53) $\widetilde{W}_{11} = -4/3$ для бивектора $X \wedge Z$. Аналогично из (47)–(50) получаем

$$\widetilde{W}_{11} = \widetilde{W}_{22} = -4/3, \quad \widetilde{W}_{33} = 8/3, \quad \widetilde{W}_{44} = \widetilde{W}_{55} = 4/3, \quad \widetilde{W}_{66} = -8/3. \quad (54)$$

Это все ненулевые элементы матрицы $(\widetilde{W})$ оператора $\widetilde{W}$ в базисе из простых бивекторов, составленных из X, Y, T, Z . Следовательно,

$$(\widetilde{W}) = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \quad \text{где } M = \begin{pmatrix} -4/3 & 0 & 0 \\ 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}, \quad (55)$$

а N — нулевая (3×3) -матрица. Таким образом, матрица $(\widetilde{W})$ имеет вид (19.18) из [7].

Согласно [7] это значит, что тензор Вейля для M_3 имеет первый тип Петрова (подтипа D , т. е. с двумя совпадающими собственными значениями у матрицы M [17]). Поэтому вследствие инвариантности тензора Вейля при конформных отображениях (равенство (45)) тензор Вейля любого конформного M_3 многообразия тоже имеет первый тип Петрова. $\square$

8. Группы движений и конформных преобразований

Отождествляя, как и раньше, S_1^3 с группой Ли $SU(2)$ с биинвариантной римановой метрикой кривизны 1, возьмем на S_1^3 ортонормированный базис X_1, Y_1, Z_1 правоинвариантных векторных полей с коммутаторами, аналогичными (1):

$$[X_1, Y_1] = 2Z_1, \quad [Y_1, Z_1] = 2X_1, \quad [Z_1, X_1] = 2Y_1. \quad (56)$$

Распространим их на все M_1, M_2 формулами

$$X_1(rx) = rX_1(x), \quad Y_1(rx) = rY_1(x), \quad Z_1(rx) = rZ_1(x), \quad r \geq 0. \quad (57)$$

Тогда X_1, Y_1, Z_1 — киллинговы векторные поля на M_1, M_2, M_3, M_4 , касательные ко всем сферам $S_r^3, r > 0$, в $\mathbb{R}^4$. Они коммутируют со всеми векторными полями X, Y, Z, T :

$$\begin{aligned} 0 &= [X_1, X] = [X_1, Y] = [X_1, Z] = [X_1, T] = [Y_1, X] = [Y_1, Y] \\ &= [Y_1, Z] = [Y_1, T] = [Z_1, X] = [Z_1, Y] = [Z_1, Z] = [Z_1, T]. \end{aligned} \quad (58)$$

Векторные поля X, Y, Z суть киллинговы векторные поля на M_1 и M_4 , T — киллингово векторное поле на M_3 , M_4 и инфинитезимальная гомотетия на M_1 , M_2 . Кроме того, Z — киллингово векторное поле на M_2 , M_3 . Других киллинговых векторных полей и инфинитезимальных гомотетий на рассматриваемых многообразиях нет. Для M_3 это следует из того, что на основании (46) киллингово векторное поле на S_1^3 должно сохранять Z и быть киллинговым и для римановой метрики на S_1^3 с ортонормированными векторными полями X, Y, Z .

Значит, группы всех подобий (соответственно движений) пространств-времен M_1 и M_2 (соответственно M_4 и M_3) имеют размерности 7 и 5, а группы изометрий — 6 и 4.

Алгебра Ли L_7 с базисными векторными полями $X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, T$ и коммутаторами (1), (3), (56), (58) изоморфна алгебре Ли

$$L_7 \cong \mathfrak{so}(4) \oplus C_1 \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3) \oplus C_1 \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus C_1, \quad (59)$$

а алгебра L_5 с векторными полями X_1, Y_1, Z_1, Z, T — алгебре Ли

$$L_5 \cong \mathfrak{so}(3) \oplus C_2 \cong \mathfrak{su}(2) \oplus C_2, \quad (60)$$

где C_i обозначает центральный идеал размерности i .

В [7, § 27] дается (в том числе) классификация лоренцевых 4-многообразий по их группам движений.

Лоренцевы 4-многообразия, не являющиеся многообразиями Эйнштейна, с семимерными транзитивными группами движений перечислены в теореме 2 из [7, § 27], среди них есть и M_4 . Лоренцевых 4-многообразий с полными, но нетранзитивными группами движений размерности 6 (как у M_1) в [7] не указано.

Среди приведенных в [7] транзитивных полных 5-мерных групп движений лоренцевых 4-многообразий не указаны группы движений с алгеброй Ли L_5 (как у M_3). Полная нетранзитивная 4-мерная группа движений многообразия M_2 изоморфна группе Ли G_4VIII [7, § 10], но скорее всего вследствие изложенного о M_3 указанные формулой (26.35) (соответственно (25.5)) из [7] в координатном виде метрики с такой группой движений не включают метрику многообразия M_2 (соответственно подмногообразия $S_1^3 \subset M_2$).

Естественно возникает вопрос, допускают ли рассматриваемые многообразия группы конформных преобразований, собственно включающие упомянутые ранее группы движений и гомотетий. В [7] доказана следующая

Теорема 9. *Группа конформных преобразований поля тяготения, не являющегося конформно плоским, является группой движений или гомотетий пространства, конформного данному.*

В частности, из теорем 7 и 9 следует

Теорема 10. *Группа конформных преобразований лоренцева многообразия, конформного M_2 , является группой движений или гомотетий некоторого конформного ему лоренцева многообразия M_u .*

Автору неизвестны ответы на следующие два вопроса.

Вопрос 1. *Является ли M_3 многообразием M_u из теоремы 10?*

Вопрос 2. *Верно ли, что каждое конформное преобразование пространства-времени де Ситтера первого рода — его движение?*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку пространство-время де Ситтера первого рода конформно плоско и пространство-время Минковского допускает 1-параметрическую группу гомотетий, пространство-время де Ситтера хотя бы локально

допускает 1-параметрическое семейство конформных преобразований, не являющихся движениями.

Благодарности. Автор благодарен рецензенту за указание на второе издание [2] книги [1] и связанные с рассматриваемыми в статье задачами недавние публикации [10–12]. В первых двух статьях получена классификация четырехмерных однородных лоренцевых многообразий и конформно плоских псевдоримановых многообразий. В третьей статье доказано, что лоренцево многообразие является обобщенным пространством-временем Робертсона — Уокера [12] тогда и только тогда, когда оно допускает временноподобное конциркулярное векторное поле [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985.
2. Beem J. K., Ehrlich P. E., Easley K. L. Global Lorentzian geometry. 2nd ed. New York: Marcel Dekker, Inc., 1996.
3. Hawking St. A brief history of time. 10th ed. New York: Bantam Books, Inc., 1998.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973.
5. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.
6. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М.: Мир, 1977. Т. 1–3.
7. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
8. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964.
9. Траутман А. Уравнения Киллинга и законы сохранения // Бюлл. Польск. АН. 1954. Т. III, 4, № 10. С. 671–674.
10. Calvaruso G., Zaeim A. Four-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds // Monatsch. Math. 2014. V. 174, N 3. P. 377–402.
11. Calvaruso G., Zaeim A. Conformally flat pseudo-Riemannian four-manifolds // Tohoku Math. J. (2). 2014. V. 66, N 1. P. 31–54.
12. Chen Bang-Yen. A simple characterization of generalized Robertson–Walker spacetimes // Gen. Relativity Gravitation. 2014. V. 46, N 12. Art. 1833. 5 pp.
13. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
14. Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г. Римановы многообразия и однородные геодезические. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2012.
15. Berestovskii V. N., Zubareva I. A Correct observer's event horizon for de Sitter space-time // Sib. Electron. Math. Reports. 2015. V. 12. P. 101–107.
16. Бесче А. Л. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т. 1.
17. Batista C. On the Weyl tensor classification in all dimensions and its relation with integrability properties // J. Math. Phys. 2013. V. 54. N 042502. DOI:10.1063/1.4802240.

Поступила в редакцию 21 августа 2018 г.

После доработки 17 декабря 2018 г.

Принята к публикации 19 декабря 2018 г.

Берестовский Валерий Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
vberestov@inbox.ru