Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. A. Aleksandrova, N. A. Bazhenov, On decidability of list structures, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 3, 489–505

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.302>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.224.187.69

April 26, 2023, 15:52:18

О РАЗРЕШИМОСТИ СПИСОЧНЫХ СТРУКТУР

С. А. Александрова, Н. А. Баженов

Аннотация. Изучается теоретико-вычислимая сложность различных структур, основанных на списочном типе данных. *Списочная надстройка* над структурой S содержит два сорта элементов: атомы из S и конечные линейные списки атомов. Сигнатура списочной надстройки состоит из сигнатуры S , пустого списка nil и бинарной операции присоединения атома к списку. *Обогащенная списочная надстройка* над S получается добавлением к сигнатуре дополнительных функций и отношений: взятия последнего элемента списка, получения остатка списка после удаления последнего элемента, отношения принадлежности атома к списку и отношения «быть начальным сегментом списка».

Доказано, что элементарная теория обогащенной списочной надстройки над $(\omega, +)$, т. е. моноида натуральных чисел относительно сложения, вычислимо изоморфна арифметике первого порядка. В частности, это означает, что преобразование структуры S в обогащенную списочную надстройку над S не всегда сохраняет разрешимость элементарных теорий. Также показано, что списочная надстройка над S может быть представлена с помощью конечного автомата в том и только том случае, когда S конечна.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.302

Ключевые слова: линейный список, списочная надстройка, разрешимая структура, автоматная структура, древесно-автоматная структура.

§ 1. Введение

В работе изучается теоретико-вычислимая сложность моделей формальной теории линейных списков. Аксиоматическая теория для линейных списков была введена в работе Мура и Рассела [1]. Типичная модель такой теории получается следующим образом. Предположим, что A — непустое множество. Тогда *списочной надстройкой* над A (обозначается через $LS(A)$) называется двусортная структура, содержащая в качестве первого сорта атомы из A , а в качестве второго — конечные линейные списки атомов A . Язык $LS(A)$ состоит из двух символов:

- 1) константы nil , интерпретируемой как пустой список,
- 2) функционального символа $cons$ сорта $\text{список} \times \text{атом} \rightarrow \text{список}$, интерпретируемого как присоединение атома к списку.

С. С. Гончаров [2] разработал обобщение теории из [1], вводя аксиоматическую теорию списков над заданным абстрактным типом данных. При таком подходе тип данных определяется некоторой теорией первого порядка T . Тогда

Работа С. А. Александровой выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 18-41-543015 р_мол_а). Исследования Н. А. Баженова выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00028).

модель теории С. С. Гончарова может быть задана как списочная надстройка $LS(\mathcal{A})$, где в качестве $\mathcal{A}$ вместо множества берется модель теории T (подробнее см. п. 2.1).

В мотивации к изучению списочных надстроек можно выделить два аспекта. Во-первых, такие надстройки представляют собой естественный тип данных. Более того, они тесно связаны с понятием *семантического программирования*, введенным Ю. Л. Ершовым, С. С. Гончаровым и Д. И. Свириденко (см. [3–5]). Семантическое программирование основано на теории списочных расширений *GES* (грубо говоря, эта теория может работать не только со списками атомов, но также и со списками списков, списками списков списков и т. д.). При таком подходе программы представляются Σ -формулами в подходящем языке. Теоретические результаты семантического программирования широко используют методы, разработанные в теории допустимых множеств (см. монографии [6, 7] и недавние статьи [8–10]).

Во-вторых, такие надстройки связаны с теорией структур, представимых конечными автоматами. Идея использования автоматов для исследования проблем разрешимости алгебраических структур восходит к Бюхи [11] и Раби-ну [12]. Систематическое изучение автоматных структур (т. е. структур, представимых с помощью автомата) было начато Б. Хусаиновым и Нероудом [13]. Дальнейшие сведения по теории автоматных структур могут быть найдены, например, в обзорах [14–17]. Говоря неформально, использование автоматных представлений позволяет получать более сильные результаты в вопросах разрешимости: в частности, для любой автоматной структуры ее теория первого порядка, расширенная квантором $\exists^\infty$ («существует бесконечно много»), разрешима [18, следствие 3.12].

В [19] вторым автором начаты исследования автоматных представлений для списочных надстроек. В частности, было доказано, что для произвольного множества A обогащенная списочная надстройка $ELS(A)$ (см. определение в п. 2.1) имеет автоматную копию тогда и только тогда, когда A конечно. Отметим, что данный результат можно интерпретировать следующим образом: для произвольного конечного множества A теория первого порядка $ELS(A)$, расширенная квантором $\exists^\infty$, разрешима.

Данная статья посвящена изучению автоматности списочных надстроек и разрешимости теорий таких структур. Основные задачи исследования могут быть сформулированы следующим образом.

Проблема 1. Предположим, что $\mathcal{M}$ — счетная структура и $S(\mathcal{M})$ — *расширенно-списочная надстройка* над $\mathcal{M}$ (например, $LS(\mathcal{M})$ или $ELS(\mathcal{M})$). Формальное определение расширенно-списочной надстройки будет приведено в п. 2.1.

(i) Если элементарная теория структуры $\mathcal{M}$ разрешима, то будет ли теория $S(\mathcal{M})$ также разрешимой? Аналогичный вопрос может быть поставлен и для полных диаграмм структур.

(ii) Пусть $\mathcal{M}$ имеет копию, представимую определенным видом конечного автомата (например, конечным или древесным автоматом). Будет ли в таком случае $S(\mathcal{M})$ обладать тем же свойством?

Отметим, что С. С. Гончаров [2] доказал, что из разрешимости теории $\mathcal{M}$ следует разрешимость теории $LS(\mathcal{M})$ (см. предложение 2.1).

Приведем краткое описание структуры статьи. В § 2 содержатся необходимые предварительные сведения, которые даны достаточно подробно в связи

с тем, что наша цель — сделать изложение как можно более самодостаточным. В § 3 построена разрешимая структура эквивалентности $\mathcal{E}$ такая, что *стандартное представление* структуры $ELS(\mathcal{E})$ не является разрешимым. Также показано, что элементарная теория $ELS(\omega, +)$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка. Таким образом, переход от структуры $\mathcal{M}$ к $ELS(\mathcal{M})$ не всегда сохраняет разрешимость элементарной теории. Более того, доказано, что для любого непустого не более чем счетного множества S теория структуры $ELS(ELS(S))$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка. В § 4 показано, что $LS(\mathcal{M})$ допускает представление конечным автоматом в том и только в том случае, когда $\mathcal{M}$ — конечная структура. Также приведены примеры списочных надстроек, которые не могут быть представлены с помощью древесных автоматов.

§ 2. Предварительные сведения

В статье рассматриваются только вычислимые языки и структуры с носителем, содержащимся в множестве натуральных чисел ω . Конечные формулы отождествляются с их гёделевскими номерами. Для множества A через $card(A)$ обозначается мощность A . Если $\psi(x_1, \dots, x_n)$ — формула и $\mathcal{M}$ — некоторая структура, то $\psi[\mathcal{M}]$ обозначает множество всех кортежей $\bar{a} = a_1, \dots, a_n$ из $\mathcal{M}$ таких, что $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$.

Для языка L *бесконечными формулами* языка L называются формулы логики $L_{\omega_1, \omega}$. Для счетного ординала α бесконечные Σ_α - и Π_α -формулы определяются стандартным образом (см., например, [20, гл. 6]). Приведем краткое неформальное описание класса *вычислимых бесконечных формул* языка L . Такие формулы допускают дизъюнкции и конъюнкции вычислимо перечислимых (в.п.) множеств формул. Пусть α — ненулевой вычислимый ординал.

1. *Вычислимыми Σ_0 - и Π_0 -формулами* называют бескванторные формулы первого порядка языка L .

2. *Вычислимой Σ_α -формулой* (Σ_α^c -формулой) называют в.п. дизъюнкцию $\bigvee_i \exists \bar{u}_i \psi_i(\bar{x}, \bar{u}_i)$, где ψ_i — вычислимая Π_{β_i} -формула для некоторого $\beta_i < \alpha$.

3. *Вычислимой Π_α -формулой* (Π_α^c -формулой) называют в.п. конъюнкцию $\bigwedge_i \forall \bar{u}_i \psi_i(\bar{x}, \bar{u}_i)$, где ψ_i — вычислимая Σ_{β_i} -формула для некоторого $\beta_i < \alpha$.

Формальное определение вычислимых бесконечных формул, а также их свойства можно найти в [20, гл. 7].

Пусть $\mathcal{M}$ — L -структура. Через $Th(\mathcal{M})$ обозначается элементарная теория структуры $\mathcal{M}$. *Полной диаграммой* $\mathcal{M}$ называют множество

$$ED(\mathcal{M}) = \{\psi(\bar{a}) : \psi(\bar{x}) \text{ — } L\text{-формула, } \bar{a} \in \mathcal{M}, \mathcal{M} \models \psi(\bar{a})\}.$$

Структура $\mathcal{M}$ *разрешима*, если ее полная диаграмма является вычислимым множеством. Отметим, что для разрешимой структуры ее элементарная теория также разрешима.

2.1. Списочные надстройки. Следуя [2, 19], приведем необходимые понятия для работы со списками. Пусть $\mathcal{M}$ — структура языка L . Тогда *списочной надстройкой* над $\mathcal{M}$ (обозначаемой через $LS(\mathcal{M})$) называют двусортную структуру, первым сортом элементов которой является носитель структуры $\mathcal{M}$ (элементы первого сорта называют *атомами*), вторым — множество

всех линейных списков атомов. Структура $LS(\mathcal{M})$ рассматривается в языке $L^{cons} := L \cup \{nil, cons\}$, где

- Предполагается, что $nil, cons \notin L$.
- Любой символ из L действует только на атомах: например, если f — бинарный функциональный символ из L , то предполагаем, что f принадлежит сорту $\text{атом} \times \text{атом} \rightarrow \text{атом}$. Более того, интерпретация f в $LS(\mathcal{M})$ совпадает с его интерпретацией в $\mathcal{M}$.
- Константа nil интерпретируется как пустой список. Символ $cons$ имеет сорт $\text{список} \times \text{атом} \rightarrow \text{список}$ и интерпретируется как присоединение атома к списку.

Будем использовать строчные буквы $x, y, z, \dots$ для обозначения переменных сорта атом . Заглавными буквами $X, Y, Z, \dots$ будем обозначать переменные сорта список . Далее будем предполагать, что пустой список nil одновременно принадлежит и тому, и другому сорту. Другими словами, в некоторых случаях удобно считать nil атомом.

Предположим, что T — теория первого порядка языка L . Следуя [2], определим двусортную теорию $LL(T)$. Аксиомами этой теории будут следующие предложения:

- все формулы из T (при этом считаем, что эти формулы содержат только переменные сорта атом);
- для каждой L^{cons} -формулы $\psi(X)$ предложение следующего вида:

$$[\psi(nil) \& \forall X \forall y [\psi(X) \rightarrow \psi(cons(X, y))]] \rightarrow \forall X \psi(X);$$

- $\forall X \forall y [cons(X, y) \neq nil];$
- $\forall X_1 \forall X_2 \forall y_1 \forall y_2 [cons(X_1, y_1) = cons(X_2, y_2) \rightarrow (X_1 = X_2 \& y_1 = y_2)].$

С. С. Гончаров [2, предложение 3] доказал следующее: если теория T полна, то $LL(T)$ также полна. Нетрудно показать, что условие $\mathcal{M} \models T$ влечет за собой $LS(\mathcal{M}) \models LL(T)$. Таким образом, надстройки $LS(\mathcal{M})$ можно рассматривать как стандартные модели $LL(T)$.

Предложение 2.1 [2]. Если элементарная теория структуры $\mathcal{M}$ разрешима, то теория $LS(\mathcal{M})$ также разрешима.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть T — теория $\mathcal{M}$. Так как $LS(\mathcal{M}) \models LL(T)$ и $LL(T)$ полна, теория $LS(\mathcal{M})$ совпадает с $LL(T)$. Заметим, что $LL(T)$ рекурсивно аксиоматизируема и полна. Следовательно, $LL(T)$ разрешима. $\square$

Для L -структуры $\mathcal{M}$ определим *обогащенную списочную надстройку* $ELS(\mathcal{M})$ следующим образом. Языком надстройки будет

$$L^{enr} := L^{cons} \cup \{head, tail, \in, \sqsubseteq\},$$

где

- Ограничение $ELS(\mathcal{M})$ на язык L^{cons} совпадает с $LS(\mathcal{M})$.
- Функциональный символ $head$ имеет сорт $\text{список} \rightarrow \text{атом}$ и интерпретируется как взятие последнего элемента («головы») списка. Предполагаем, что $head(nil) = nil$. Отметим, что здесь полезно наше соглашение о том, что nil в некоторых случаях считается атомом.
- Символ $tail$ имеет сорт $\text{список} \rightarrow \text{список}$ и интерпретируется следующим образом: удаляется последний элемент списка и выдается оставшийся после

удаления список («хвост»). Здесь опять считаем, что $tail(nil) = nil$. Заметим, что для непустого списка X всегда выполнено

$$cons(tail(X), head(X)) = X.$$

- Символ $\in$ имеет сорт **атом** $\times$ **список**. Отношение $x \in Y$ выполнено в том и только том случае, если атом x принадлежит списку Y .

- Символ $\sqsubseteq$ имеет сорт **список** $\times$ **список**. Условие $X \sqsubseteq Y$ выполнено тогда и только тогда, когда список X является начальным сегментом списка Y .

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим множество $S = \{0, 1\}$. Можно рассматривать S как структуру пустого языка. Тогда $ELS(S)$ состоит из S и всех списков, содержащих только 0 и 1. В дальнейшем будем использовать *постфиксную запись* для представления $ELS(S)$: например, выполнены соотношения

$$cons(nil, 0) = \langle 0 \rangle, \quad cons(\langle 0 \rangle, 1) = \langle 0, 1 \rangle, \quad head(\langle 0, 0, 1 \rangle) = 1,$$

$$tail(\langle 1, 1, 0 \rangle) = \langle 1, 1 \rangle, \quad 0 \in \langle 0, 0 \rangle, \quad \langle 0, 1 \rangle \sqsubseteq \langle 0, 1, 1, 0 \rangle, \quad \langle 1, 0 \rangle \not\sqsubseteq \langle 0, 1, 1, 0 \rangle.$$

Обогащенная списочная надстройка введена в [19]. Ее определение довольно естественным образом основано на идеях семантического программирования. Напомним, что этот подход использует теорию списочных расширений GES . Типичной моделью GES является так называемая *наследственно конечная списочная надстройка* $\mathbb{HW}(\mathcal{M})$, где $\mathcal{M}$ — это L -структура (подробнее см., например, [8]). Отметим, что структура $ELS(\mathcal{M})$ есть *подструктура* $\mathbb{HW}(\mathcal{M})$. Заметим, что иногда язык наследственно конечной списочной надстройки включает в себя конкатенацию списков [3].

Понятия $LS(\mathcal{M})$ и $ELS(\mathcal{M})$ можно объединить, введя новый, более общий класс списочных надстроек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Предположим, что $\mathcal{M}$ — L -структура и α — вычислимый ординал. Предположим также, что $\Psi = \{\psi_n(\bar{x}_n)\}_{n \in \omega}$ — равномерно вычислимая последовательность Σ_α^c -формул языка L^{cons} . (Здесь равномерная вычислимость последовательности означает, что для заданного n можно вычислить некоторый Σ_α^c -индекс формулы ψ_n .) Тогда Ψ -расширенно-списочная надстройка над $\mathcal{M}$ (обозначим ее через $\Psi\text{-}S(\mathcal{M})$) — двусортная структура в языке $L^\Psi := L \cup \{R_{\psi_n}\}_{n \in \omega}$, где R_{ψ_n} — новые символы, и выполняется:

- первый сорт элементов — атомы из $\mathcal{M}$, второй — списки, состоящие из атомов;
- каждый символ из L интерпретируется как действующий только на атомах;
- для каждого $n \in \omega$ отношение R_{ψ_n} интерпретируется как $\psi_n[LS(\mathcal{M})]$.

В случае, если $\Psi = \{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$, определение Ψ -расширенно-списочной надстройки повторяет приведенное выше, при этом не требуется равномерная вычислимость последовательности Ψ .

Отметим, что данное выше определение не зависит от выбора $\mathcal{M}$. Более того, для рассмотрения функциональных символов в языке Ψ -расширенно-списочных надстроек можно, как обычно, отождествлять функции с их графиками. В данной работе, однако, определение $\Psi\text{-}S(\mathcal{M})$ не будет использоваться в полном объеме, так как будут рассматриваться только конечные Ψ . В случаях, когда последовательность Ψ ясна из контекста, префикс Ψ - будет опускаться.

ПРИМЕР 2.2. Списочная надстройка $LS(\mathcal{M})$ в контексте данного определения будет выглядеть как $\{nil, cons\}$ - $S(\mathcal{M})$. Обогащенная списочная надстройка также будет расширенно-списочной надстройкой: например, отношения $\in$ и $\sqsubseteq$ могут быть заданы следующими Σ_2^c -формулами:

$$x \in Y \Leftrightarrow (Y \neq nil) \& \bigvee head(tail^k(Y)) = x;$$

$$X \sqsubseteq Y \Leftrightarrow \bigvee_{k \geq 0} \bigwedge_{m \geq 0} head(tail^m(X)) = head(tail^{k+m}(Y)).$$

Кроме того, можно определить операцию конкатенации двух списков:

$$\begin{aligned} conc(X, Y) = Z &\Leftrightarrow [(X = Z) \& (Y = nil)] \vee \bigvee_{k > 0} \bigwedge_{m \geq 0} [head(tail^m(X)) \\ &= head(tail^{k+m}(Z)) \& (tail^k(Y) = nil) \& (tail^{k-1}(Y) \neq nil) \& (tail^m(Y) \neq nil \\ &\rightarrow head(tail^m(Y)) = head(tail^m(Z)))]. \end{aligned}$$

Отметим также, что известен подход [21–23], похожий на приведенный выше метод использования расширенно-списочных надстроек. Этот подход основан на понятии *итерации структуры*.

Рассмотрим (не обязательно конечный) алфавит Δ . Как обычно, Δ^* обозначает множество всех слов алфавита Δ . Если u и v — некоторые слова, то $u\hat{v}$ обозначает конкатенацию u и v .

Пусть $\mathcal{A} = (A; R_0, R_1, \dots, R_n)$ — структура конечного предикатного языка. Множество A можно рассматривать как алфавит. Тогда *базовая итерация* структуры $\mathcal{A}$ определяется как

$$\mathcal{A}_{ba}^* = (A^*; \preceq, \hat{R}_0, \hat{R}_1, \dots, \hat{R}_n, \varepsilon),$$

где ε — пустое слово, $\preceq$ — префиксный порядок на множестве всех слов и

$$\hat{R}_i = \{(u\hat{a}_1, \dots, u\hat{a}_{n_i}) : u \in A^*, (a_1, \dots, a_{n_i}) \in R_i[\mathcal{A}]\}.$$

Полная итерация структуры $\mathcal{A}$ — это структура

$$\mathcal{A}_{fu}^* = (A^*; \preceq, cl, \hat{R}_0, \hat{R}_1, \dots, \hat{R}_n, \varepsilon),$$

где $cl = \{u\hat{a}a : u \in A^*, a \in A\}$ — унарный *предикат клонирования*.

В [23, предложение 3.4] показано, что существует структура $\mathcal{A}$ с разрешимой элементарной теорией такая, что теория ее полной итерации $\mathcal{A}_{fu}^*$ неразрешима. С другой стороны [23, следствие 4.17], если элементарная теория $\mathcal{A}$ разрешима, то базовая итерация $\mathcal{A}_{ba}^*$ также имеет разрешимую теорию. Более подробно с теорией итераций структур можно ознакомиться в [21–24].

2.2. Автоматные структуры. Предположим, что Σ — конечный алфавит. Пусть $\Sigma_\diamond := \Sigma \cup \{\diamond\}$, где $\diamond \notin \Sigma$. Для обозначения длины слова w будем писать $|w|$. Основные понятия и обозначения из теории автоматов можно найти в [25].

Напомним, что (*недетерминированным*) *конечным автоматом* называется четверка $\mathbf{A} = (S, \Delta, i, F)$, где S — конечное множество состояний, $\Delta \subseteq S \times \Sigma \times S$ — отношение перехода, $i \in S$ — начальное состояние и $F \subseteq S$ — множество конечных состояний. Язык $L(\mathbf{A})$, *распознаваемый* автоматом $\mathbf{A}$, определяется стандартным образом (см., например, [25, § 2.3]).

Конечное бинарное дерево T будем представлять как поддереву полного бинарного дерева, имеющего носитель $\{0, 1\}^*$. Через $Leaf(T)$ обозначается множество листьев T . Для $x \in \{0, 1\}^*$ положим $Left(x) := x\hat{0}$ и $Right(x) := x\hat{1}$. Конечное Σ -дерево — это пара (T, v) , где T — конечное бинарное дерево и $v : T \setminus Leaf(T) \rightarrow \Sigma$ — отображение, сопоставляющее вершинам T , не являющимся листьями, символы алфавита.

Древесный автомат (работающий сверху вниз) представляет собой четверку $\mathbf{A} = (S, \Delta, i, F)$ где S, i, F — объекты такие же, как в конечном автомате, а отношение перехода Δ есть подмножество $S \times \Sigma \times (S \times S)$. Прохождение автоматом $\mathbf{A}$ конечного Σ -дерева (T, v) — отображение $r : T \rightarrow S$, которое удовлетворяет условиям $r(\emptyset) = i$ и $(r(x), v(x), r(Left(x)), r(Right(x))) \in \Delta$ для любого $x \in T \setminus Leaf(T)$. Прохождение называют *распознающим*, если каждому $x \in Leaf(T)$ сопоставляется конечное состояние $r(x) \in F$. Языком древесного автомата $\mathbf{A}$ будем называть множество всех конечных Σ -деревьев, которые распознает $\mathbf{A}$.

Для слов $w_1, \dots, w_n \in \Sigma^*$ их *конволюция* $\otimes(w_1, \dots, w_n)$ — слово в алфавите $(\Sigma_\diamond)^n$: конволюция имеет длину $\max\{|w_1|, \dots, |w_n|\}$, k -м символом $\otimes(w_1, \dots, w_n)$ будет $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, где a_i — k -й символ w_i , если $k \leq |w_i|$, и $a_i = \diamond$ в противном случае.

Если $U_1 = (T_1, v_1), \dots, U_n = (T_n, v_n)$ — конечные Σ -деревья, то их *конволюция* — конечное $(\Sigma_\diamond)^n$ -дерево $\otimes(U_1, \dots, U_n) = (T, v)$ такое, что носитель T равен $\bigcup_{i \leq n} T_i$, и $v(x) := \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ для любого $x \in T$, где $a_i = v_i(x)$, если $x \in T_i$, и $a_i = \diamond$ в противном случае.

Предположим, что R — n -арный предикат, определенный либо на Σ^* , либо на множестве всех конечных Σ -деревьев. Тогда отождествляем отношение R и множество всех конволюций кортежей из R .

Пусть L — конечный предикатный язык. Структура $\mathcal{M}$ языка L называется *автоматной* (древесно-автоматной), если носитель $\mathcal{M}$ и все сигнатурные отношения $\mathcal{M}$ распознаются конечным автоматом (древесным автоматом). Также можно рассматривать автоматные структуры произвольного конечного языка (естественным образом отождествляя сигнатурные функции с их графиками).

Предложение 2.2 [13, 18]. Предположим, что $\mathcal{M}$ — структура конечного языка L . Если $\mathcal{M}$ автоматная (древесно-автоматная), то существует алгоритм, по заданной L -формуле $\psi(\bar{x})$ выдающий конечный автомат (древесный автомат), распознающий множество $\psi[\mathcal{M}]$. В частности, любая автоматная (древесно-автоматная) структура разрешима.

§ 3. Элементарные теории списочных надстроек

Перейдем к рассмотрению п. (i) проблемы 1: будем исследовать вопросы разрешимости элементарных теорий расширенно-списочных надстроек.

В этом параграфе будем считать, что для любой рассматриваемой структуры ее носитель является вычислимым бесконечным подмножеством ω . Поэтому перед тем, как приступить к изложению результатов, определим *стандартное представление* расширенно-списочной надстройки. Главным требованием при формулировке этого определения будет выполнение нашего условия на носитель структуры.

Зафиксируем стандартную гёделевскую нумерацию γ , сопоставляющую конечным (возможно, пустым) кортежам натуральных чисел натуральные числа.

Пусть $\mathcal{M}$ — L -структура с носителем M . Тогда носитель *стандартного представления* $\Psi\text{-}S(\mathcal{M})$ равен множеству

$$\{2x : x \in M\} \cup \{2\gamma(\bar{a}) + 1 : \bar{a} \text{ — это кортеж из } M\}.$$

Будем отождествлять атом $a \in M$ с элементом $2a$ из стандартного представления. Список $\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$ отождествляется с элементом $2\gamma(a_0, a_1, \dots, a_n) + 1$. Используя приведенные соглашения, можно естественным образом определить все символы языка $\Psi\text{-}S(\mathcal{M})$.

3.1. Структуры эквивалентности. Одним из естественных классов теории вычислимых моделей являются структуры эквивалентности. *Структура эквивалентности* $\mathcal{A}$ определяется при помощи задания ее носителя A и отношения эквивалентности $E^{\mathcal{A}}$ на носителе. Если $\mathcal{A}$ — структура эквивалентности и $a \in \mathcal{A}$, то $[a]_{\mathcal{A}}$ обозначает класс эквивалентности a в $\mathcal{A}$.

Характером структуры эквивалентности $\mathcal{A}$ называют множество

$$\chi(\mathcal{A}) = \{(n, k) : 0 < n < \omega, 0 < k < \omega, \mathcal{A} \text{ содержит не менее } k \text{ различных классов эквивалентности размера } n\}.$$

Характер $\mathcal{A}$ называется *ограниченным*, если существует натуральное число N такое, что размер любого конечного класса эквивалентности в $\mathcal{A}$ не превосходит N . Отметим, что две счетные структуры эквивалентности изоморфны в том и только том случае, когда они имеют одинаковый характер и одно и то же число бесконечных классов эквивалентности.

Наш первый результат показывает следующее: переход от структуры $\mathcal{M}$ к стандартному представлению ее расширенно-списочной надстройки не всегда сохраняет разрешимость структуры (т. е. вычислимость полной диаграммы).

Теорема 3.1. *Предположим, что $\mathcal{A}$ — структура эквивалентности с вычислимым неограниченным характером и бесконечным числом бесконечных классов. Тогда существует $\mathcal{B}$ — разрешимая копия структуры $\mathcal{A}$ такая, что стандартное представление расширенно-списочной надстройки $\{\in\}\text{-}S(\mathcal{B})$ неразрешимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале напомним критерий разрешимости для структур эквивалентности.

Лемма 3.1 (следует из теорем 5.2 и 5.6 в [26]). *Вычислимая структура эквивалентности $\mathcal{A}$ разрешима тогда и только тогда, когда следующие множества вычислимы: ее характер $\chi(\mathcal{A})$ и множество*

$$K(\mathcal{A}) := \{(a, k) : a \in \mathcal{A}, k \in \omega, \text{card}([a]_{\mathcal{A}}) \geq k\}.$$

Более того, структура эквивалентности имеет разрешимую копию в том и только том случае, когда ее характер вычислим.

Для простоты изложения будем предполагать, что для любого конечного N наша структура эквивалентности $\mathcal{A}$ имеет не более одного класса размера N . Доказательство общего случая проводится аналогично.

Найдем вычислимое бесконечное множество S такое, что $\chi(\mathcal{A}) = \{(n, 1) : n \in S\}$. Пусть W — вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество. Зафиксируем некоторое эффективное перечисление $\{W^s\}_{s \in \omega}$ для W такое, что $W^s \subseteq \{0, 1, \dots, s-1\}$ для любого s .

Построение $\mathcal{B}$ будем проводить по шагам. На шаге s определяем вычислимую структуру эквивалентности $\mathcal{B}^s$ (с носителем B^s) такую, что $\mathcal{B}^s \subseteq \mathcal{B}^{s+1}$. Также определяется конечное множество T^s .

ШАГ 0. Полагаем $T^0 = \emptyset$ и $B^0 = \{\langle x, 0 \rangle : x \in \omega\}$. Отношение $E^{\mathcal{B}^0}$ определяется как тождественное отношение на B^0 .

ШАГ $s + 1$. Для каждого $x \leq s$ поступаем следующим образом. Если $x \notin W^{s+1}$, то добавляем новый элемент в класс $[\langle x, 0 \rangle]_{\mathcal{B}^s}$. Если $x \in W^{s+1} \setminus W^s$, то выберем наименьшее число n такое, что $n \in S$, $n \geq \text{card}([\langle x, 0 \rangle]_{\mathcal{B}^s})$ и n еще не было перечислено в T^{s+1} . Такое n найдется, так как множество S бесконечно. Используя новые элементы, (при необходимости) увеличиваем класс $[\langle x, 0 \rangle]_{\mathcal{B}^s}$ до размера n . Также перечисляем n в T^{s+1} .

Затем выбираем наименьшее $m \in S$, которое еще не было перечислено в T^{s+1} , и создаем класс размера m в $\mathcal{B}^{s+1}$, используя новые элементы. Перечисляем m в T^{s+1} .

Описание конструкции завершено. Положим $\mathcal{B} := \bigcup_{s \in \omega} \mathcal{B}^s$. Нетрудно показать, что $\mathcal{B}$ — вычислимая структура эквивалентности с носителем ω .

Нетрудно показать, что $\mathcal{B}$ имеет бесконечно много бесконечных классов. Более того, из построения следует, что для любого конечного размера n следующие условия эквивалентны: $(n \in \bigcup_{s \in \omega} T^s = S) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \text{ содержит класс размера } n) \Leftrightarrow (\mathcal{B} \text{ содержит единственный класс размера } n)$. Следовательно, $\chi(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{A})$ и структура $\mathcal{B}$ изоморфна $\mathcal{A}$.

Предположим, что $b \in \mathcal{B}$ и $k \in \omega$. Найдем наименьший шаг s_0 такой, что $b \in \mathcal{B}^{s_0}$. Тогда соотношение $\text{card}([b]_{\mathcal{B}}) \geq k$ верно в том и только том случае, когда $\text{card}([b]_{\mathcal{B}^{s_0+k}}) \geq k$. Таким образом, множество $K(\mathcal{B})$ вычислимо и по лемме 3.1 $\mathcal{B}$ разрешима.

Заметим, что для любого $n \in \omega$ условие $n \in W$ выполнено тогда и только тогда, когда класс $[\langle n, 0 \rangle]_{\mathcal{B}}$ конечен. В структуре $\{\in\}$ - $S(\mathcal{B})$ элементы x из $\mathcal{B}$, имеющие конечные классы, определимы следующей формулой:

$$\text{Fin}(x) := \exists Y \forall z [E^{\mathcal{B}}(z, x) \rightarrow z \in Y].$$

Из этих двух утверждений следует, что для натурального числа n условие $n \in W$ выполняется в том и только том случае, когда формула $\text{Fin}(2\langle n, 0 \rangle)$ истинна в стандартном представлении $\{\in\}$ - $S(\mathcal{B})$. В силу того, что W невычислимо, наше представление не может быть разрешимым. $\square$

В качестве следствия этой теоремы получаем тот факт, что стандартное представление обогащенной списочной надстройки $ELS(\mathcal{B})$ также неразрешимо. Заметим, что теорема 3.1 ничего не говорит о том, может ли $ELS(\mathcal{B})$ иметь разрешимые копии. Поэтому в следующем пункте будет получен результат, из которого будет следовать, что существует разрешимая структура $\mathcal{M}$ такая, что $ELS(\mathcal{M})$ не имеет разрешимых копий. Тем не менее теорема 3.1 интересна сама по себе: во-первых, она использует простой (но достаточно широкий) класс алгебраических структур; во-вторых, для получения этого примера потребовалось только отношение $\in$ из обогащенной списочной надстройки.

3.2. Натуральные числа со сложением. Приведенный ниже результат показывает следующее: переход от структуры $\mathcal{M}$ к расширенно-списочной надстройке над $\mathcal{M}$ не всегда сохраняет разрешимость элементарной теории.

Теорема 3.2. Пусть $\mathcal{M} = (\omega; +)$ — коммутативный моноид натуральных чисел относительно сложения. Тогда элементарная теория $ELS(\mathcal{M})$ неразрешима.

Доказательство. Достаточно показать, что умножение атомов формульно определимо (без параметров) в $ELS(\mathcal{M})$. Напомним, что элементы $0, 1, 2$ и естественный порядок $\leq$ на атомах определимы в $(\omega, +)$: например, соотношение $(x \leq y)$ определимо с помощью формулы $\exists z(x + z = y)$. Следовательно, можно использовать $0, 1, 2$ и $\leq$ в наших формулах. Как обычно, формула $(\forall X \sqsubseteq Y)\psi(X, Y)$ будет означать, что $\forall X[(X \sqsubseteq Y) \rightarrow \psi(X, Y)]$.

Зададим вспомогательную формулу $\psi(X, y)$, означающую, что $y \neq 1$ и список X имеет вид $\langle 1, y, 2, 2 \cdot y, \dots, n, n \cdot y \rangle$ для некоторого ненулевого $n \in \omega$:

$$\begin{aligned} \psi(X, y) := & (y \neq 1) \ \& \ (\forall Z \sqsubseteq X) \{[(tail^2(Z) = nil) \& (tail(Z) \neq nil) \\ & \rightarrow (head(Z) = y) \& (head(tail(Z)) = 1)] \ \& \ [(tail^4(Z) = nil) \& (tail^3(Z) \neq nil) \\ & \rightarrow (head(Z) = y + y) \& (head(tail(Z)) = 2)]\} \ \& \ \forall U \forall V \forall W \{[(W \sqsubseteq X) \\ & \& (V = tail^2(W)) \& (U = tail^2(V)) \& (U \neq nil)] \rightarrow [(head(W) = head(V) + 1) \\ & \& (head(V) = head(U) + 1)) \vee (head(W) = head(V) + y) \\ & \& (head(V) = head(U) + y)]\} \ \& \ \{[(tail^2(X) = nil) \& (tail(X) \neq nil)] \\ & \vee [(tail^3(X) \neq nil) \& (head(X) = head(tail^2(X)) + y)]\}. \end{aligned}$$

Требование $y \neq 1$ в формуле $\psi(X, y)$ обусловлено необходимостью для списка X иметь *четную* длину, т. е. условием, что голова списка X должна совпадать с $n \cdot y$.

Таким образом, $x \cdot y = z$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- (a) $x = 0$ и $z = 0$,
- (b) $y = 1$ и $x = z$,
- (c) $x \neq 0, y \neq 1$,

и

$$\exists X[\psi(X, y) \& (head(tail(X)) = x) \& (head(X) = z)],$$

т. е. X — список вида $\langle 1, y, 2, 2y, \dots, x, x \cdot y \rangle$.

Теорема 3.2 доказана. $\square$

Заметим также, что константа nil определима формулой $[tail(x) = x]$. Поэтому справедливо

Следствие 3.1. Расширенно-списочная структура $\{head, tail, \sqsubseteq\}$ - $S(\omega, +)$ не имеет разрешимых копий. В частности, она не может быть представлена с помощью конечного или древесного автомата.

Предположим, что $A, B \subseteq \omega$. Напомним, что множества A и B *вычислимо изоморфны*, если существует вычислимая перестановка τ множества ω такая, что $\tau(A) = B$. Известно (см., например, теорему X в [27, § 14.7]), что арифметика первого порядка, т. е. теория $Th(\omega, +, \cdot)$, вычислимо изоморфна $\mathcal{O}^{(\omega)}$, ω -скачку пустого множества (подробности см. в [27]). Таким образом, нетрудный анализ доказательства теоремы 3.2 показывает

Следствие 3.2. Элементарная теория структуры $\{head, tail, \sqsubseteq\}$ - $S(\omega, +)$ вычислимо изоморфна $\mathcal{O}^{(\omega)}$.

3.3 Итерированные списочные надстройки. Предположим, что n — ненулевое натуральное число и $\mathcal{M}$ — некоторая структура. Тогда n -я итерация обогащенной списочной надстройки над $\mathcal{M}$ определяется следующим образом:

$$ELS^n(\mathcal{M}) := \underbrace{ELS(ELS(\dots ELS(\mathcal{M}) \dots))}_{n \text{ раз}}.$$

Теорема 3.3. Предположим, что A — непустое не более чем счетное множество. Тогда элементарная теория структуры $ELS^2(A)$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный элемент $a \in A$. Зададим формулы $\psi_{Dom}(X, a)$ и $\psi_+(X, Y, Z, a)$ со следующими свойствами:

- множество $Dom := \{X : ELS^2(A) \models \psi_{Dom}(X, a)\}$ является подмножеством $ELS(A)$;
- структура $\mathcal{S} = (Dom; \{(X, Y, Z) \in Dom^3 : ELS^2(A) \models \psi_+(X, Y, Z, a)\})$ изоморфна моноиду $(\omega; +)$ в предикатном языке.

Существования таких формул ψ_{Dom} и ψ_+ достаточно для доказательства теоремы. Действительно, рассмотрим следующее рассуждение.

- (1) Используя формулы ψ_{Dom} и ψ_+ , можно определить структуру

$$\mathcal{N} := \{head, tail, \sqsubseteq\}\text{-}\mathcal{S}(\omega, +)$$

в $ELS^2(A, a)$ следующим образом:

- атомы задаются формулой ψ_{Dom} , а множество списков определимо формулой

$$\psi_{List}(X, a) := (\forall Y \in X) \psi_{Dom}(Y, a);$$

- сложение (более точно, его график) задается формулой ψ_+ ;
- символы $head$, $tail$ и $\sqsubseteq$ определяются естественным образом: например,

$$u = head(Y) \Leftrightarrow ELS^2(A, a) \models \psi_{List}(Y, a) \ \& \ (u = head(Y)).$$

(2) Поскольку структура $\mathcal{N}$ формульно определима (без параметров) в $ELS^2(A, a)$, из следствия 3.2 вытекает, что теория $Th(ELS^2(A, a))$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка. Таким образом, множество $\emptyset^{(\omega)}$ 1-сводимо к теории $Th(ELS^2(A, a))$. Отсюда нетрудно получить, что существует вычислимая последовательность $\{\xi_n(x)\}_{n \in \omega}$ формул языка $ELS^2(A)$ со следующими свойствами:

- $\xi_i \neq \xi_j$ для $i \neq j$;
- для любого $n \in \omega$ условие $n \in \emptyset^{(\omega)}$ выполнено тогда и только тогда, когда $ELS^2(A) \models \xi_n(a)$.

Пусть c — произвольный элемент A . Нетрудно показать, что существует автоморфизм F структуры $ELS^2(A)$ такой, что $F(a) = c$. Следовательно, для любого $n \in \omega$ имеем

$$ELS^2(A) \models (\xi_n(a) \leftrightarrow \xi_n(c)).$$

Отсюда получаем

$$n \in \emptyset^{(\omega)} \Leftrightarrow ELS^2(A) \models \forall x [\text{атом}(x) \rightarrow \xi_n(x)].$$

Значит,

$$\emptyset^{(\omega)} \leq_1 Th(ELS^2(A)).$$

Так как структура $ELS^2(A)$ вычислима, также имеем

$$Th(ELS^2(A)) \leq_1 \emptyset^{(\omega)}.$$

Следовательно, теория $Th(ELS^2(A))$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка.

Теперь дадим формальные определения формул ψ_{Dom} и ψ_+ . Положим

$$\psi_{Dom}(X, a) := (\forall y \in X)(y = a).$$

Другими словами, множество Dom состоит из списков, которые содержат только элемент a :

$$Dom = \{nil, \langle a \rangle, \langle a, a \rangle, \langle a, a, a \rangle, \dots\}.$$

Для определения формулы ψ_+ понадобится следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Предположим, что n — ненулевое натуральное число. Операция конкатенации списков*

$$conc_n : ELS^n(A) \times ELS^n(A) \rightarrow ELS^n(A)$$

формульно определима в $ELS^{n+1}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем сначала *обращение* Y^R списка Y : если $Y = \langle a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k \rangle$, то $Y^R = \langle a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0 \rangle$.

Введем также вспомогательную формулу $\varphi(F, X, Y)$, означающую следующее. Если $X = \langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle = \langle \bar{a} \rangle$ и $Y = \langle b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m \rangle$, то список F имеет вид

$$\begin{aligned} \langle X, Y, \langle \bar{a}, b_m \rangle, \langle b_0, b_1, \dots, b_{m-1} \rangle, \langle \bar{a}, b_m, b_{m-1} \rangle, \langle b_0, b_1, \dots, b_{m-2} \rangle, \\ \dots, \langle \bar{a}, b_m, b_{m-1}, \dots, b_1 \rangle, \langle b_0 \rangle, \langle \bar{a}, b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0 \rangle, nil \rangle. \end{aligned}$$

Формулу φ определим так:

$$\begin{aligned} \varphi(F, X, Y) := & [cons(cons(cons(cons(nil, X), Y), cons(X, head(Y))), tail(Y)) \sqsubseteq F] \\ & \& [head(tail(F)) = cons(head(tail^3(F)), head^2(tail^2(F)))] \\ & \& [head(F) = tail(head(tail^2(F)))] \& (\forall Z \sqsubseteq F) \{ (tail^4(Z) \neq nil) \\ \rightarrow & [(head(Z) = tail(head(tail^2(Z)))) \& (head(tail^2(Z)) = tail(head(tail^4(Z))))] \\ & \vee [(head(Z) = cons(head(tail^2(Z)), head^2(tail(Z)))) \\ & \& (head(tail^2(Z)) = cons(head(tail^4(Z)), head^2(tail^3(Z))))] \} \\ & \& [(head(F) = nil) \& (head(tail^2(F)) \neq nil)]. \end{aligned}$$

Тогда условие $Z = Y^R$ может быть записано формулой

$$[(Y \neq nil) \& \exists F (\varphi(F, nil, Y) \& head(tail(F)) = Z)] \vee [Y = Z = nil].$$

Для определения конкатенации списков X и Y из $ELS^n(A)$ потребуется существование списка F следующего вида:

$$\begin{aligned} \langle X, Y^R, cons(X, head(Y^R)), tail(Y^R), \\ cons(cons(X, head(Y^R)), head(tail(Y^R))), tail^2(Y^R), \dots, conc_n(X, Y), nil \rangle, \end{aligned}$$

который и задается формулой $\varphi(F, X, Y^R)$. Более формально, формула $Z = \text{conc}_n(X, Y)$ может быть записана следующим образом:

$$[(Y \neq \text{nil}) \& \exists F(\varphi(F, X, Y^R) \& (\text{head}(\text{tail}(F)) = Z))] \vee [(Y = \text{nil}) \& (Z = X)].$$

Лемма 3.2 доказана. $\square$

Лемма 3.2 позволяет определить формулу

$$\psi_+(X, Y, Z, a) := \psi_{\text{Dom}}(X, a) \& \psi_{\text{Dom}}(Y, a) \& (Z = \text{conc}_1(X, Y)).$$

Нетрудно показать, что $ELS^2(A) \models \psi_+(X, Y, Z, a)$ в том и только в том случае, если списки X, Y, Z содержат только элемент a , а длина Z совпадает с суммой длин X и Y . Таким образом, структура $\mathcal{S}$, которая была определена в начале доказательства, изоморфна моноиду $(\omega; +)$. Используя рассуждение, приведенное перед леммой 3.2, заключаем, что $Th(ELS^2(A))$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка. Теорема 3.3 доказана. $\square$

Следствие 3.3. Пусть $\mathcal{M}$ — L -структура, имеющая арифметическую атомарную диаграмму $D(\mathcal{M})$, т. е. $D(\mathcal{M}) \leq_T \emptyset^{(n)}$ для некоторого $n \in \omega$. Тогда элементарная теория структуры $ELS^2(\mathcal{M})$ вычислимо изоморфна арифметике первого порядка. В частности, $ELS^2(\mathcal{M})$ не представима с помощью конечного или древесного автомата.

§ 4. Автоматные представления списочных надстроек

В этом параграфе рассматривается п. (ii) проблемы 1: расширенно-списочные надстройки, представимые конечными автоматами. Основное внимание сосредоточено на надстройках $LS(\mathcal{M})$ и $ELS(\mathcal{M})$, где $\mathcal{M}$ принадлежит некоторому естественному классу структур.

4.1. Автоматные структуры. Предположим, что $\mathcal{M}$ — автоматная структура. В данном пункте будут получены необходимые и достаточные условия для автоматной представимости надстройки $LS(\mathcal{M})$. В частности, этот результат является ответом на вопрос, представленный в [19, с. 721]. Вначале напомним известный вспомогательный результат.

Лемма 4.1 [13] (см. также лемму 1 в [15]). Предположим, что Σ — конечный алфавит и $D \subseteq \Sigma^*$. Если $f : D^n \rightarrow D$ — функция, график которой распознается конечным автоматом, то существует константа C такая, что для всех $x_1, \dots, x_n \in D$ выполнено

$$|f(x_1, \dots, x_n)| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} + C.$$

Теорема 4.1. Пусть $\mathcal{M}$ — структура конечного языка. Тогда списочная надстройка $LS(\mathcal{M})$ имеет автоматное представление в том и только том случае, когда $\mathcal{M}$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Leftarrow$) Если $\mathcal{M}$ — конечная структура, то несложно построить автоматное представление для $LS(\mathcal{M})$, следуя доказательству предложения 3 из [19].

($\Rightarrow$) Достаточно показать, что для бесконечного счетного множества A его надстройка $LS(A)$ не допускает автоматных представлений. Предположим противное: пусть $\mathcal{A}$ — некоторая автоматная копия структуры $LS(A)$, Σ — алфавит для $\mathcal{A}$ и D — основное множество $\mathcal{A}$.

Напомним, что строчные латинские буквы используются для обозначения атомов, а заглавные — для обозначения списков. Определим функцию $f : D^2 \rightarrow D$ следующим образом:

$$f(X, y) := \text{cons}(X, y); \quad f(x, y) = f(X, Y) = f(x, Y) := \text{nil}.$$

Заметим, что функция f формульно определима в $\mathcal{A}$. Следовательно, по предложению 2.2 график f есть регулярное отношение. Таким образом, по лемме 4.1 найдется константа $C \in \omega$ такая, что для всех $x, y \in D$ выполняется $|f(x, y)| \leq \max\{|x|, |y|\} + C$. Отсюда для элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, являющихся атомами $\mathcal{A}$, легко выводится следующее ограничение:

$$|\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle| \leq \max\{|\text{nil}^\mathcal{A}|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\} + nC \leq \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| + C_1 + nC, \quad (1)$$

где C_1 — некоторая константа.

Пусть $\leq_l$ — линейное упорядочение атомов, заданное по правилу

$$x \leq_l y \Leftrightarrow |x| < |y|$$

или ($|x| = |y|$ и x лексикографически меньше либо равен y). Предположим, что $b_1 <_l b_2 <_l b_3 <_l \dots$ — список всех атомов $\mathcal{A}$. Зафиксируем натуральное t_0 такое, что $\text{card}(\Sigma) \leq 2^{t_0}$. Для числа n определим множество S_n по правилу

$$S_0 = \{\text{nil}^\mathcal{A}\}, \quad S_{n+1} = \{\text{cons}(X, b_i) : X \in S_n, i \leq 2^{2t_0 C}\}.$$

Пусть $l_0 := |b_{2^{2t_0 C}}|$. По (1) для каждого $x \in S_n$ длина x не превышает $l_0 + C_1 + nC$. Следовательно, для всех n выполняется

$$\text{card}(S_n) = 2^{2^{t_0 C} n} \leq (\text{card}(\Sigma))^{1+l_0+C_1+Cn} \leq 2^{t_0 \cdot (1+l_0+C_1+Cn)}.$$

Таким образом, $2^{t_0 C n} \leq C'$, где C' — константа. Полученное противоречие доказывает отсутствие у $LS(A)$ автоматных представлений. $\square$

4.2. Древесно-автоматные структуры. В данном пункте приводятся несколько примеров, связанных с древесно-автоматными списочными надстройками. Известно, что структура $(\omega, +)$ имеет автоматное представление. Таким образом, теорема 3.2 дает пример автоматной структуры $\mathcal{M}$ такой, что $ELS(\mathcal{M})$ не имеет древесно-автоматных представлений. Также докажем

Предложение 4.1. Пусть α — ординал такой, что $\alpha \geq \omega^\omega$. Тогда структура $ELS(\alpha)$ не имеет древесно-автоматных представлений.

Сначала дадим описание необходимых вспомогательных объектов, которые будут использоваться в доказательстве предложения 4.1.

Предположим, что $k \geq 2$ и $0 \leq t < k$. Квантор $\exists^{(t,k)}$ определяется следующим образом: для структуры $\mathcal{M}$ и формулы $\psi(x)$ условие $\mathcal{M} \models (\exists^{(t,k)} x) \psi(x)$ выполнено в том и только том случае, когда множество $\psi[\mathcal{M}]$ конечно и $t = \text{card}(\psi[\mathcal{M}]) \bmod k$ (т. е. мощность $\psi[\mathcal{M}]$ равна $kz + t$ для некоторого целого z).

Если L — язык, то через $FO_L(\exists^{(t,k)})$ обозначим множество всех L -формул логики первого порядка, расширенной кванторами $\exists^{(t,k)}$ для $t, k \in \omega$. Иногда будем опускать индекс L в обозначении $FO_L(\exists^{(t,k)})$. Следующая лемма является обобщением предложения 2.2.

Лемма 4.2 [28, 29]. Предположим, что $\mathcal{M}$ — структура конечного языка L . Если $\mathcal{M}$ автоматна (древесно-автоматна), то существует алгоритм, по заданной формуле $\psi(\bar{x})$ из $FO_L(\exists^{(t,k)})$ выдающий конечный автомат (древесный автомат), распознающий множество $\psi[\mathcal{M}]$.

Следующий результат может быть полезен для доказательства несуществования древесно-автоматных представлений.

Лемма 4.3. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторая структура, α — бесконечный ординал. Предположим также, что существует $FO(\exists^{(t,k)})$ -определение α в $\mathcal{M}$, заданное формулами $D(x)$ и $R(x, y)$ (возможно, с параметрами $\bar{c}$ из $\mathcal{M}$), такое, что

$$(D[\mathcal{M}], R[\mathcal{M}]) \cong \alpha.$$

Тогда ординал ω^α имеет $FO(\exists^{(t,k)})$ -определение (с теми же параметрами $\bar{c}$) в надстройке $ELS(\mathcal{M})$.

Доказательство по существу следует идеям из [19, теорема 1]. Здесь приведем его в схематичном виде.

В этой лемме будем понимать ω как ординал. Пусть $\mathcal{L} := (D[\mathcal{M}], R[\mathcal{M}])$. Формула $(x <_R y)$ означает, что $R(x, y) \& (x \neq y)$.

Предположим, что $\alpha > \omega$ и 0 — наименьший элемент $\mathcal{L}$. Пусть d — элемент из $\mathcal{L}$ такой, что интервал $[0, d]_{\mathcal{L}}$ изоморфен ω . Заметим, что элементы 0 и d формульно определимы в порядке $\mathcal{L}$. Как обычно, формула $(X \sqsubset Y)$ означает, что $(X \subseteq Y) \& (X \neq Y)$.

Как и в доказательстве [19, теорема 1], определим $FO(\exists^{(t,k)})$ -формулы $l_0(X)$ и $l_1(X)$ со следующими свойствами: $ELS(\mathcal{M}) \models l_0(X) \Leftrightarrow X$ — список четной длины и $ELS(\mathcal{M}) \models l_1(X) \Leftrightarrow X$ — список нечетной длины. Также зададим следующие две формулы:

$$\begin{aligned} \varphi(X) := & l_0(X) \& (\forall Y \sqsubseteq X)[(Y \neq \text{nil}) \rightarrow D(\text{head}(Y))] \\ & \& \forall Y \forall Z[(Y \sqsubset Z \sqsubseteq X) \& l_1(Y) \& l_1(Z) \rightarrow (\text{head}(Z) <_R \text{head}(Y))] \\ & \& \forall Y[(Y \sqsubseteq X) \& l_0(Y) \& (Y \neq \text{nil}) \rightarrow (0 <_R \text{head}(Y) <_R d)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(X, Y) := & \varphi(X) \& \varphi(Y) \& \{(X \sqsubseteq Y) \vee \exists Z \exists a \exists b[(a <_R b) \\ & \& (\text{cons}(Z, a) \sqsubseteq X) \& (\text{cons}(Z, b) \sqsubseteq Y)]\}. \end{aligned}$$

Напомним, что ненулевой ординал $\beta < \omega^\alpha$ имеет канторову нормальную форму

$$\beta = \omega^{\gamma_0} \cdot k_0 + \omega^{\gamma_1} \cdot k_1 + \dots + \omega^{\gamma_t} \cdot k_t,$$

где $\alpha > \gamma_0 > \gamma_1 > \dots > \gamma_t \geq 0$ и $0 < k_i < \omega$ для каждого $i \leq t$. Пользуясь этим наблюдением, нетрудно показать, что структура $(\varphi[ELS(\mathcal{M})], \psi[ELS(\mathcal{M})])$ является изоморфной копией ω^α . Таким образом, порядок ω^α $FO(\exists^{(t,k)})$ -определим в $ELS(\mathcal{M})$. Доказательство для случая $\alpha = \omega$ по существу повторяет вышеизложенное со следующей модификацией формулы $\varphi(X)$: в ней заменяем подформулу $(0 <_R \text{head}(Y) <_R d)$ на $(\text{head}(Y) \neq 0)$. $\square$

Перейдем теперь к доказательству предложения 4.1.

Доказательство предложения 4.1. Предположим, что α — ординал такой, что $\alpha \geq \omega^\omega$. Заметим, что полный порядок ω^ω формульно определим

(с одним параметром c) в α . Более того, его определение удовлетворяет условиям леммы 4.3. Таким образом, ординал $\omega^{\omega^c} FO(\exists^{(t,k)})$ -определим в структуре $ELS(\alpha)$ с тем же параметром c .

Предположим, что $ELS(\alpha)$ допускает древесно-автоматное представление. Тогда по лемме 4.2 ω^{ω^c} также имеет древесно-автоматную копию. Это противоречит известному описанию древесно-автоматных ординалов: ординал β имеет древесно-автоматное представление в том и только том случае, когда $\beta < \omega^{\omega^c}$ [30, следствие 2.2]. $\square$

Заметим, что предложение 4.1 дает пример древесно-автоматной структуры $\mathcal{N}$, не имеющей автоматных копий и такой, что надстройка $ELS(\mathcal{N})$ не представима древесным автоматом (в качестве $\mathcal{N}$ можно выбрать любой ординал α такой, что $\omega^{\omega^c} \leq \alpha < \omega^{\omega^{\omega^c}}$).

Следствие 3.3, в свою очередь, показывает, что для любой структуры $\mathcal{M}$ надстройка $ELS^2(\mathcal{M})$ не имеет древесно-автоматных копий. Остается открытым вопрос о том, существует ли бесконечная структура $\mathcal{S}$ такая, что $ELS(\mathcal{S})$ допускает древесно-автоматное представление.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moore D. J., Russell B. Axiomatic data type specifications: a first order theory of linear lists // Acta Inf. 1981. V. 15, N 3. P. 193–207.
2. Гончаров С. С. Теория списков и ее модели // Вычисл. системы. 1986. № 114. С. 84–95.
3. Goncharov S. S., Sviridenko D. I. Theoretical aspects of Σ -programming // Mathematical methods of specification and synthesis of software systems'85. Berlin; Heidelberg: Springer, 1986. P. 169–179. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 215).
4. Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Sviridenko D. I. Semantic foundations of programming // Fundamentals of computation theory. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1987. P. 116–122. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 278).
5. Goncharov S. S., Sviridenko D. I. Σ -programming // Transl., Ser. 2, Amer. Math. Soc. 1989. N 142. P. 101–121.
6. Barwise J. Admissible sets and structures. Berlin: Springer, 1975.
7. Ершов Ю. Л. Определимость и вычислимость. Новосибирск: Науч. книга, 1996.
8. Александрова С. А. Проблема униформизации для Σ -предикатов в наследственно конечной списочной надстройке над полем действительных чисел с экспонентой // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 1. С. 3–14.
9. Гончаров С. С. Условные термы в семантическом программировании // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 5. С. 1026–1034.
10. Гончаров С. С., Свириденко Д. И. Рекурсивные термы в семантическом программировании // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 6. С. 1279–1290.
11. Büchi J. R. Weak second-order arithmetic and finite automata // Z. Math. Logik Grundlagen Math. 1960. N 6. P. 66–92.
12. Rabin M. O. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees // Transl., Amer. Math. Soc. 1969. N 141. P. 1–35.
13. Khoussainov B., Nerode A. Automatic presentations of structures // Logic and computational complexity. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1995. V. 960. P. 367–392. (Lect. Notes Comput. Sci.).
14. Bárány V., Grädel E., Rubin S. Automata-based presentations of infinite structures // Finite and algorithmic model theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2011. V. 379. P. 1–76. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.).
15. Khoussainov B., Minnes M. Three lectures on automatic structures // Logic Colloquium 2007. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2010. V. 35. P. 132–176. (Lect. Notes Logic).
16. Khoussainov B., Nerode A. Open questions in the theory of automatic structures // Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. EATCS. 2008. N 94. P. 181–204.
17. Rubin S. Automata presenting structures: a survey of the finite string case // Bull. Symb. Log. 2008. V. 14, N 2. P. 169–209.

18. *Blumensath A.* Automatic structures: Diploma Thes. Aachen: RWTH, 1999.
19. *Bazhenov N. A.* Automatic structures and the theory of lists // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. N 12. P. 714–722.
20. *Ash C. J., Knight J. F.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy. Amsterdam: Elsevier Sci. B. V., 2000. (Stud. Logic Found. Math.; V. 144).
21. *Semenov A. L.* Decidability of monadic theories // Mathematical foundations of computer science 1984. Lect. Notes Comput. Sci. Berlin: Springer, 1984. V. 176. P. 162–175.
22. *Walukiewicz I.* Monadic second order logic on tree-like structures // Theor. Comput. Sci. 2002. V. 275, N 1–2. P. 311–346.
23. *Kuske D., Lohrey M.* Monadic chain logic over iterations and applications to push-down systems // 21st Annual IEEE Symposium on logic in computer science (LICS'06). Los Alamitos: IEEE Computer Society, 2006. P. 91–100.
24. *Kuske D., Lohrey M.* Logical aspects of Cayley-graphs: The monoid case // Int. J. Algebra Comput. 2006. V. 16, N 2. P. 307–340.
25. *Hopcroft J. E., Motwani R., Ullman J. D.* Introduction to automata theory, languages, and computation. Boston: Addison-Wesley, 2000.
26. *Cenzer D., Harizanov V., Remmel J. B.* Σ_1^0 and Π_1^0 equivalence structures // Ann. Pure Appl. Logic. 2011. V. 162, N 7. P. 490–503.
27. *Rogers Jr. H.* Theory of recursive functions and effective computability. New York: McGraw-Hill, 1967.
28. *Colcombet T.* Equational presentations of tree-automatic structures // Workshop on automata, structures and logic. Auckland, 2004.
29. *Khoussainov B., Rubin S., Stephan F.* Definability and regularity in automatic structures // STACS 2004. Berlin: Springer-Verl., 2004. P. 440–451. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 2996).
30. *Delhommé C.* Automacités des ordinaux et des graphes homogènes // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. 2004. V. 339, N 1. P. 5–10.

Поступила в редакцию 10 июля 2018 г.

После доработки 10 июля 2018 г.

Принята к публикации 19 декабря 2018 г.

Александрова Светлана Анатольевна
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
svet-ka@eml.ru

Баженов Николай Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
bazhenov@math.nsc.ru