Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. Sh. Kalimullin, V. G. Puzarenko, M. Kh. Faizrahmanov, Partial decidable presentations in hyperarithmetic, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 3, 599–609

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.309>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.93.64.190

April 26, 2023, 14:37:47

ЧАСТИЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ГИПЕРАРИФМЕТИКЕ

И. Ш. Калимуллин, В. Г. Пузаренко,
М. Х. Файзрахманов

Аннотация. Исследуется проблема существования разрешимых и позитивных Π_1^1 - и Σ_1^1 -нумераций семейств Π_1^1 - и Σ_1^1 -конусов относительно включения. Найдены законы, отражающие наличие разрешимых вычислимых Π_1^1 - и Σ_1^1 -нумераций рассматриваемых семейств в зависимости от аналитической сложности определяющего конус множества.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.309

Ключевые слова: нумерация, разрешимая нумерация, позитивная нумерация, вычислимая нумерация, вычислимое множество, вычислимо перечислимое множество, сводимость по перечислимости, гиперарифметическое множество, конструктивное допустимое множество.

§ 1. Введение

Работа продолжает ряд работ, касающихся частичных нумераций, начатый в [1]. Основной проблемой, исследованию которой посвящена настоящая статья, является существование разрешимых и позитивных частичных представлений семейств в Π_1^1 - и Σ_1^1 -классах. Для семейств Π_1^1 -класса данные проблемы подробно исследовались в [2]. Для случая всюду определенных представлений эта проблематика изучалась в [3–5].

Основные сведения из классической вычислимости можно найти в [6, 7], из теории нумераций — в [8], а из теории допустимых множеств — в [9]. Сначала введем основные определения и обозначения, используемые в настоящей работе.

Символом $\Leftrightarrow$ будем обозначать равенство по определению. Множество натуральных чисел обозначим через ω . Через s будем обозначать канторовскую вычислимую функцию, нумерующую пары натуральных чисел.

Если R — бинарное отношение, а f — функция произвольной природы, то через δR и δf будем обозначать проекции на первую координату отношения

Работа И. Ш. Калимуллина выполнена за счет гранта Российского научного фонда (№ 18–11–00028), а также за счет субсидии, выделенной Министерством науки и высшего образования по программе федеральных профессоров (проект № 1.451.2016/1.4). Работа В. Г. Пузаренко выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18–01–00624) и при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1, проект № 0314–2019–0003. Работа М. Х. Файзрахманова выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1.13556.2019/13.1).

и область задания функции соответственно, а через ρR и ρf — проекции на вторую координату и область значений.

Пусть $A, B \subseteq \omega$; говорят, что A *e-сводится* к B (в этом случае используется обозначение $A \leq_e B$), если существует бинарный вычислимо перечислимый (в.п.) предикат W , для которого выполняется следующее:

$$A = \{n \mid \exists u[\langle n, u \rangle \in W \wedge (\gamma(u) \subseteq B)]\},$$

где $\gamma(u)$ — конечное множество с каноническим индексом u . Неформально это означает, что множество A может быть эффективно перечислено с использованием произвольного перечисления множества B .

В [1] было предложено следующее обобщение понятий нумерации и вычислимой нумерации, связанное с нумерациями в допустимых множествах (см. [9]). Под *A-нумерацией* не более чем счетного множества $\mathcal{S}$ будем понимать частичное числовое отображение ν с $\delta\nu \leq_e A$ и $\rho\nu = S$. *A-нумерацию* ν будем называть *пустой*, если $\delta\nu = \emptyset$; *всюду определенной*, если $\delta\nu = \omega$. В случае, когда необходимо подчеркнуть, что $\delta\nu \neq \omega$, будем называть *A-нумерацию* *частичной*. *A-нумерацию* ν будем называть *конечной*, если $\delta\nu$ конечно; *бесконечной* в противном случае.

Для *A-нумерации* ν через η_ν обозначим так называемую *нумерационную эквивалентность*

$$\{\langle x, y \rangle \in (\delta\nu)^2 \mid \nu(x) = \nu(y)\}.$$

A-нумерация ν множества S называется

- *позитивной*, если $c(\eta_\nu) \leq_e A$;
- *негативной*, если $c((\delta\nu)^2 \setminus \eta_\nu) \leq_e A$;
- *разрешимой*, если ν одновременно и позитивна, и негативна;
- *однозначной*, если каждое $s \in S$ имеет ровно один ν -номер.

A-нумерация ν семейства подмножеств натуральных чисел называется *вычислимой*, если $c(\Gamma_\nu^*) \leq_e A$, где

$$\Gamma_\nu^* \Leftarrow \{\langle a, b \rangle \mid a \in \nu(b), b \in \delta\nu\}.$$

Семейство S назовем *A-вычислимым*, если оно имеет хотя бы одну вычислимую *A-нумерацию*.

Будем говорить, что *A-нумерация* ν_0 *сводится* к *A-нумерации* ν_1 (и обозначать через $\nu_0 \leq \nu_1$), если существует $R \subseteq \omega^2$, для которого выполнено следующее: $c(R) \leq_e A$, $\delta R = \delta\nu_0$, $\rho R \subseteq \delta\nu_1$ и к тому же

$$\forall a_0 \forall a_1 [\langle a_0, a_1 \rangle \in R \Rightarrow \nu_0(a_0) = \nu_1(a_1)].$$

Будем также говорить, что *A-нумерации* ν_0 и ν_1 *эквивалентны* (и обозначать через $\nu_0 \equiv \nu_1$), если $\nu_0 \leq \nu_1$ и $\nu_1 \leq \nu_0$.

В качестве A здесь будут выступать Π_1^1 - и Σ_1^1 -множества. Под Π_1^1 - или Σ_1^1 -*нумерациями* будем понимать *A-нумерации*, где A — полное Π_1^1 - или Σ_1^1 -множество.

В данной работе действительно важно различать случаи всюду определенной и частичной нумераций. Например, в [1] доказано утверждение (теорема 1), из которого вытекает

Теорема 1. Пусть $P \in \{\Pi_1^1, \Sigma_1^1\}$ и $\mathcal{S}$ — P -вычислимое семейство, имеющее наибольший по включению элемент. Тогда существует позитивная вычислимая

P -нумерация семейства $\mathcal{S}$. Более того, вычислимую P -нумерацию этого семейства можно выбрать так, что каждое $C \in \mathcal{S}$, $C \neq \bigcup \mathcal{S}$, будет иметь один номер.

Однако ниже будет показано, что в условиях этой теоремы позитивная вычислимая всюду определенная P -нумерация семейства $\mathcal{S}$ может не существовать.

§ 2. Допустимые множества $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_B)$, $\mathbb{L}(\omega_1^{CK})$

Определим семейства с наибольшими элементами, которые будут играть ключевую роль в настоящей работе. Пусть $P \in \{\Pi_1^1, \Sigma_1^1\}$ и $B \in P$. Тогда положим

- 1) $\Delta_P(B) \Leftarrow \{C \subseteq B \mid C \in P\}$;
- 2) $\nabla_P(B) \Leftarrow \{C \subseteq \omega \mid C \in P, C \supseteq B\}$.

Отметим, что каждое из определенных выше P -семейств вычислимо. Когда ясно, о каком классе P идет речь, индекс P будем опускать и записывать семейства как $\Delta(B)$ и $\nabla(B)$ соответственно.

Выбор семейств указанного типа в качестве основного объекта исследований мотивирован тем, что при надлежащем выборе множества B семейства $\Delta_P(B)$ представляют собой семейства всех Σ -подмножеств наследственно конечных надстроек моделей $\mathfrak{N}_B$, а семейства вида $\nabla_P(B)$ являются дуальными к ним объектами. Следуя [10], опишем модель $\mathfrak{N}_B$ сигнатуры $\{0, s^2, R^2\}$, где B — полное Π_1^1 - или Σ_1^1 -множество. Носителем модели $\mathfrak{N}_B$ является множество $\omega \uplus \{z_n \mid n \in B\}$ такое, что $\langle \omega, 0, s \rangle$ — множество натуральных чисел с заданными на нем нулевым числом и отношением последователя, а $R = \{\langle n, z_n \rangle \mid n \in A\}$. Частичная функция

$$g(n) = \begin{cases} k(\in \omega), & \text{если } n = 4 \cdot k; \\ z_k, & \text{если } n = 4 \cdot k + 2, k \in B; \\ \emptyset, & \text{если } n = 1; \\ \{g(i_1), \dots, g(i_l)\}, & \text{если } n = 2 \cdot (2^{i_1} + \dots + 2^{i_l}) + 1, \\ & i_1 < i_2 < \dots < i_l, l \geq 1, \end{cases} \quad (1)$$

заданная на Π_1^1 - или Σ_1^1 -множестве B_1 , очевидно, являющемся цилиндром, перечисляет без повторений $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_B)$. Далее, поскольку B также является цилиндром, множества B и B_1 рекурсивно изоморфны. Тем самым семейство всех Σ -подмножеств $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}_B)$ представимо в виде $\Delta_{\Pi_1^1}(B)$ ($\Delta_{\Sigma_1^1}(B)$). Как показывают результаты настоящей статьи, условие полноты и, более того, негиперарифметичности множества $B \in \Pi_1^1 \cup \Sigma_1^1$ оказывает прямое влияние на наличие разрешимых вычислимых B -нумераций указанных семейств.

В основном рассмотрении будут проводиться в допустимой структуре $\mathbb{L}(\omega_1^{CK})$, носителем которой являются множества, конструктивные к шагу ω_1^{CK} , первому невычислимому ординалу. Как обычно (см., например, [11, 12]), под ω_1^{CK} -вычислимыми (ω_1^{CK} -в.) предикатами (функциями) понимаем Δ -предикаты (Σ -функции) на $\mathbb{L}(\omega_1^{CK})$, а под ω_1^{CK} -вычислимо перечислимыми (ω_1^{CK} -в.п.) предикатами — Σ -предикаты на $\mathbb{L}(\omega_1^{CK})$. Так как допустимое множество $\mathbb{L}(\omega_1^{CK})$ имеет биективную ω_1^{CK} -в. функцию $g : \omega_1^{CK} \rightarrow \mathbb{L}(\omega_1^{CK})$, ограничимся рассмотрением только подмножеств множества ω_1^{CK} его ординалов.

Приведем основные свойства $\mathbb{L}(\omega_1^{CK})$, которые будут здесь использоваться.

1. $B \subseteq \omega$ является ω_1^{CK} -в.п., если и только если $B \in \Pi_1^1$.

2. $B \subseteq \omega$ является ω_1^{CK} -вычислимым, если и только если $B \in \Delta_1^1 (\Leftrightarrow B \in \mathbb{L}(\omega_1^{CK}))$.

3. B является ω_1^{CK} -в.п., если и только если существует инъективная ω_1^{CK} -вычисляемая функция f с $\delta f \leq \omega_1^{CK}$ и $\rho f = B$ (если к тому же $B \in \mathbb{L}(\omega_1^{CK})$, то обязательно $\delta f < \omega_1^{CK}$; более того, можно считать, что в этом случае $\delta f \leq \omega$).

4. Если $B \in \mathbb{L}(\omega_1^{CK})$ и $f - \omega_1^{CK}$ -вычисляемая функция с $B \subseteq \delta f$, то $f(B) \in \mathbb{L}(\omega_1^{CK})$.

5. B является ω_1^{CK} -в.п. и $B \notin \mathbb{L}(\omega_1^{CK})$, если и только если существует инъективная ω_1^{CK} -вычисляемая функция f с $\delta f = \omega_1^{CK}$ и $\rho f = B$.

6. B является ω_1^{CK} -в.п., если и только если существует ω_1^{CK} -вычисляемая функция f с $\delta f = \omega_1^{CK}$, удовлетворяющая следующим условиям: $s < t \rightarrow f(s) \subseteq f(t)$; $f(0) = \emptyset$; $B = \bigcup_s f(s)$.

Более того, любая такая аппроксимация множества B удовлетворяет следующему условию: если $a \in \mathbb{L}(\omega_1^{CK})$ таково, что $a \subseteq B$, то $a \subseteq f(s)$ для некоторого s . В частности, если $B \in \mathbb{L}(\omega_1^{CK})$, то существует s_0 , для которого $B = f(s)$ при всех $s \geq s_0$.

7. Если $B \subseteq \omega^2$ является ω_1^{CK} -в.п. предикатом, то под аппроксимацией B будем понимать фактически аппроксимацию множества $c(B)$. При этом $B_{n,s} \Leftrightarrow \{m \mid c(n, m) \in c(B)_s\}$ и $B_n \Leftrightarrow \{m \mid c(n, m) \in c(B)\}$. Данная аппроксимация удовлетворяет следующим условиям:

— пусть $A, C \in \mathbb{L}(\omega_1^{CK})$ таковы, что $C \subseteq B_n$ для всех $n \in A$; тогда найдется t_0 , для которого выполняется соотношение $C \subseteq B_{n,t_0}$ для всех $n \in A$;

— пусть $A, C \in \mathbb{L}(\omega_1^{CK})$ таковы, что $B_n \not\subseteq C$ для всех $n \in A$; тогда найдется t_1 , для которого выполняется соотношение $B_{n,t_1} \not\subseteq C$ для всех $n \in A$.

Приведем основные понятия теории нумераций на $\mathbb{L}(\omega_1^{CK})$ (см. [9, 13, 14]), а также соответствия определениям на частичных нумерациях. Пусть S — не более чем счетное множество. Под $\mathbb{L}(\omega_1^{CK})$ -нумерацией множества S будем понимать частичное отображение ν с ω_1^{CK} -в.п. множеством $\delta\nu \subseteq \omega_1^{CK}$ и $\rho\nu = S$ (в дальнейшем будем писать « ω_1^{CK} -нумерация» вместо « $\mathbb{L}(\omega_1^{CK})$ -нумерация»). ω_1^{CK} -Нумерацию ν будем называть *пустой*, если $\delta\nu = \emptyset$; *всюду определенной*, если $\delta\nu = \omega_1^{CK}$. Далее, ω_1^{CK} -нумерацию будем называть *частичной* в случае, когда необходимо подчеркнуть, что $\delta\nu \neq \omega_1^{CK}$. Кроме того, ω_1^{CK} -нумерацию ν будем называть *конечной*, если $\delta\nu$ конечно; *бесконечной* в противном случае.

Для ω_1^{CK} -нумерации ν через η_ν обозначим так называемую *нумерационную эквивалентность*

$$\{\langle x, y \rangle \in (\delta\nu)^2 \mid \nu(x) = \nu(y)\}.$$

ω_1^{CK} -Нумерация ν множества S называется

- *позитивной*, если $\eta_\nu - \omega_1^{CK}$ -в.п.;
- *негативной*, если $(\delta\nu)^2 \setminus \eta_\nu - \omega_1^{CK}$ -в.п.;
- *разрешимой*, если ν одновременно и позитивна, и негативна;
- *однозначной*, если каждое $s \in S$ имеет ровно один ν -номер.

ω_1^{CK} -Нумерация ν семейства $\mathcal{S}$ подмножеств ω_1^{CK} называется *вычислимой*, если предикат

$$\Gamma_\nu^* \Leftrightarrow \{\langle a, b \rangle \mid a \in \nu(b), b \in \delta\nu\}$$

является ω_1^{CK} -в.п. Семейство $\mathcal{S}$ назовем ω_1^{CK} -*вычислимым*, если оно имеет хотя бы одну вычисляемую ω_1^{CK} -нумерацию.

Будем говорить, что ω_1^{CK} -нумерация ν_0 *сводится* к ω_1^{CK} -нумерации ν_1 (и обозначать через $\nu_0 \leq \nu_1$), если существует бинарный ω_1^{CK} -в.п. предикат R , для

которого выполнено следующее: $\delta R = \delta\nu_0$, $\rho R \subseteq \delta\nu_1$ и к тому же

$$\forall a_0 \forall a_1 [\langle a_0, a_1 \rangle \in R \Rightarrow \nu_0(a_0) = \nu_1(a_1)].$$

Так как допустимое множество $\mathbb{L}(\omega_1^{CK})$ удовлетворяет принципу униформизации, последнее понятие приобретает естественный вид: ω_1^{CK} -нумерация ν_0 сводится к ω_1^{CK} -нумерации ν_1 , если существует частичная ω_1^{CK} -в. функция f , для которой выполняются соотношения $\delta\nu_0 = \delta f$ и $\nu_0(n) = \nu_1(f(n))$ для всех $n \in \delta\nu_0$.

Будем также говорить, что ω_1^{CK} -нумерации ν_0 и ν_1 эквивалентны (и обозначать через $\nu_0 \equiv \nu_1$), если $\nu_0 \leq \nu_1$ и $\nu_1 \leq \nu_0$.

Опишем теперь трансформации, переводящие Π_1^1 -нумерации в ω_1^{CK} -нумерации и наоборот.

I. Пусть ν_0 — Π_1^1 -нумерация; положим $\nu_1 = \nu_0$ в качестве ω_1^{CK} -нумерации.

II. Пусть ν_0 — Π_1^1 -нумерация и f — инъективная ω_1^{CK} -вычислимая функция с $\delta f \leq \omega_1^{CK}$ и $\rho f = \delta\nu_0$; положим $\nu_1 = \nu_0 \circ f$ в качестве ω_1^{CK} -нумерации.

III. Пусть ν_1 — ω_1^{CK} -нумерация с $\delta\nu_1 \leq \omega$; положим $\nu_0 = \nu_1$ в качестве Π_1^1 -нумерации.

IV. Пусть ν_1 — ω_1^{CK} -нумерация и f — инъективная ω_1^{CK} -вычислимая функция с $\delta f \subseteq \omega$ и $\rho f = \delta\nu_1$; положим $\nu_0 = \nu_1 \circ f$ в качестве Π_1^1 -нумерации.

Во всех перечисленных случаях имеет место $\nu_0 \equiv \nu_1$ (в $\mathbb{L}(\omega_1^{CK})$). Кроме того, все трансформации сохраняют отношение сводимости. Будем также предполагать, что если $\rho\nu_i$ — семейство, то $\rho\nu_i \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, $i = 0, 1$. Ниже приводится таблица свойств, сохраняющихся относительно данных трансформаций (ч, б служат сокращением для частичная, бесконечная соответственно).

Свойство	I	II	III	IV
позитивная	+	+	+	+
негативная	+	+	+	+
разрешимая	+	+	+	+
однозначная	+	+	+	+
вычислимая	+	+	+	+
конечная	+	+	+	+
всюду определенная	чб	чб	чб	чб
частичная бесконечная	+	—	—	—

§ 3. О вычислимых Π_1^1 -нумерациях

Следующее утверждение является модификацией хорошо известного результата из классической теории нумерации (см. [8]).

Предложение 1. Любая разрешимая Π_1^1 -нумерация ν эквивалентна некоторой однозначной ν_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν — разрешимая Π_1^1 -нумерация множества S . Возьмем инъективную ω_1^{CK} -вычислимую функцию f с $\rho f = \delta\nu$ и $\delta f = \alpha_0$ для некоторого $\alpha_0 \leq \omega_1^{CK}$ (отметим, что $\delta\nu \in \Delta_1^1$, если и только если $\alpha_0 < \omega_1^{CK}$; более того, если при этом $\delta\nu$ бесконечно, то можно считать, что $\alpha_0 = \omega$).

Тогда $(\nu \circ f) \equiv \nu$ в $\mathbb{L}(\omega_1^{CK})$ и к тому же $\nu \circ f$ также разрешима. Пусть η_0 — отношение нумерационной эквивалентности для $(\nu \circ f)$. Определим

ω_1^{CK} -в. функцию g следующим образом ($\gamma < \alpha_0$):

$$g(\gamma) = \mu\sigma(\forall\beta < \gamma[\langle g(\beta), \sigma \rangle \notin \eta_0]).$$

Пусть теперь ω_1^{CK} -в. функция h такова, что $\rho h = \rho g$, h инъективна и $\delta h \subseteq \omega$. Как нетрудно понять, Π_1^1 -нумерация $\nu_0 \Leftarrow \nu \circ (f \circ h)$ однозначна и к тому же эквивалентна ν (действительно, $\nu \leq \nu_0$ посредством функции $(f \circ h)$, являющейся инъективной; поэтому обратная к ней функция осуществляет сводимость ν_0 к ν). $\square$

Из предложения 1 следует, что достаточно ограничиться рассмотрением однозначных Π_1^1 -нумераций при изучении класса разрешимых.

Кроме того, непосредственно из предложения 1 вытекает

Следствие 1. Если Π_1^1 -нумерация ν из условия предложения 1 такова, что $\delta\nu \in \Delta_1^1$, то и $\delta\nu_0 \in \Delta_1^1$.

Таким образом, существование разрешимой вычислимой Π_1^1 -нумерации эквивалентно существованию однозначной вычислимой Π_1^1 -нумерации.

Проблемы существования однозначных вычислимых представлений нижних конусов фактически решены в [2].

Теорема 2. Существует однозначная вычислимая Π_1^1 -нумерация семейства $\Delta(B)$, $B \in \Pi_1^1 \setminus \Delta_1^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как B — собственно Π_1^1 -множество, существует инъективная ω_1^{CK} -в. функция g_0 с $\delta g_0 = \omega_1^{CK}$ и $\rho g_0 = B$. По теореме 1 из [2] существует однозначная вычислимая Π_1^1 -нумерация ν семейства всех ω_1^{CK} -в.п. множеств, заданная на ω_1^{CK} . Тогда $n \in \delta h \mapsto (g_0 \circ (\nu \circ h))(n)$ искомая, где в качестве h выступает инъективная ω_1^{CK} -в. функция с $\delta h \subseteq \omega$ и $\rho h = \omega_1^{CK}$. $\square$

Теорема 3. Не существует однозначной вычислимой Π_1^1 -нумерации ν семейства $\Delta(B)$, $B \in \Pi_1^1 \setminus \Delta_1^1$, с $\delta\nu \in \Delta_1^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что такая Π_1^1 -нумерация (скажем, ν) существует. Как и прежде, зафиксируем инъективные ω_1^{CK} -в. функции g_0 и h с $\delta g_0 = \omega_1^{CK}$, $\delta h = \omega$ и $\rho g_0 = B$, $\rho h = \delta\nu$. Тогда существование однозначной вычислимой ω_1^{CK} -нумерации $n \in \omega \mapsto g_0^{-1}(\nu(h(n)))$ противоречит теореме 2 из [2], поскольку данная ω_1^{CK} -нумерация перечисляет без повторов все ω_1^{CK} -в.п. множества элементами множества ω . $\square$

Теорема 4. Не существует однозначной вычислимой Π_1^1 -нумерации семейства $\Delta(B)$, где $B \in \Delta_1^1$ бесконечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что такая Π_1^1 -нумерация (скажем, ν) существует. Как и прежде, пусть g_0 и h_0 — инъективные ω_1^{CK} -в. функции с $\delta g_0 = B$, $\delta h_0 = \alpha_0$ и $\rho g_0 = \omega$, $\rho h_0 = \delta\nu$ для подходящего $\alpha_0 \leq \omega_1^{CK}$. Применяя к $\gamma < \alpha_0 \mapsto g_0(\nu(h_0(\gamma)))$ теорему 3 из [2] в случае $\alpha_0 < \omega_1^{CK}$ и теорему 4 из [2] в случае $\alpha_0 = \omega_1^{CK}$, приходим к противоречию (поскольку ω_1^{CK} -нумерация $\gamma < \alpha_0 \mapsto g_0(\nu(h_0(\gamma)))$ перечисляет без повторов семейство всех Π_1^1 -множеств). $\square$

Проблема существования однозначных вычислимых представлений верхних конусов решается следующим образом.

Теорема 5. Не существует однозначной вычислимой Π_1^1 -нумерации $\nabla(B)$ ни для какого кобесконечного $B \in \Pi_1^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \subseteq \omega$ — кобесконечное Π_1^1 -множество. Допустим, что такая Π_1^1 -нумерация (скажем, ν) существует. Рассмотрим два случая.

1. $B \in \Delta_1^1$. Тогда Π_1^1 -нумерация $\nu'(n) \Leftarrow \nu(n) \setminus B$ с $\delta\nu' = \delta\nu$ будет вычислимой Π_1^1 -нумерацией семейства $\Delta(\omega \setminus B)$ и $(\omega \setminus B) \in \Delta_1^1$, что противоречит теореме 4.

2. $B \notin \Delta_1^1$. Возьмем инъективную ω_1^{CK} -в. функцию h , для которой имеет место $\delta h \leq \omega_1^{CK}$ и $\rho h = \delta\nu$. Зафиксируем последовательность элементов $\{N_\alpha^s\}_{\alpha < \delta h, s < \omega_1^{CK}}$, удовлетворяющую следующим условиям ($\alpha < \delta h$, $s < \omega_1^{CK}$):

- 1) $N_\alpha^0 = \emptyset$; $N_\alpha^s \subseteq N_\alpha^{s+1}$;
- 2) $N_\alpha^s = \bigcup_{s' < s} N_\alpha^{s'}$, если s — предельный ординал;
- 3) $(\nu \circ h)(\alpha) = \bigcup_s N_\alpha^s$;

4) $\langle \alpha_0, s_0 \rangle \mapsto N_{\alpha_0}^{s_0} - \omega_1^{CK}$ -в. функция.

Пусть $\alpha_1 < \delta h$ — единственный ординал α (в силу однозначности), для которого выполняется $(\nu \circ h)(\alpha) = \omega$. Определим две частичные ω_1^{CK} -в. функции $g(\alpha)$ и $f(\alpha)$ следующим образом:

$$g(\alpha) \Leftarrow \begin{cases} \mu s. [\omega \setminus N_\alpha^s = 1], & \text{если } \exists s [\omega \setminus N_\alpha^s = 1] \wedge (\alpha \neq \alpha_1), \\ \uparrow & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а график функции f с $\delta f = \delta g$ определяется выражением $f(\alpha) = x \Leftrightarrow x \in \omega \setminus N_\alpha^{g(\alpha)}$. Для завершения осталось заметить, что $\rho f = \omega \setminus B$, а это равенство противоречит тому, что $B \in \Pi_1^1 \setminus \Delta_1^1$. $\square$

Прежде чем перейти к рассмотрению разрешимых вычислимых Σ_1^1 -нумераций, рассмотрим позитивные вычислимые Π_1^1 -нумерации. Именно Π_1^1 -нумерации такого вида, близкие к представлениям из теоремы 1, возникают в качестве дуальных объектов разрешимых вычислимых Σ_1^1 -нумераций.

Предложение 2. *Не существует позитивной вычислимой Π_1^1 -нумерации ν семейства $\Delta(B)$, B — бесконечное Π_1^1 -множество, удовлетворяющей теореме 1 и дополнительно условию $\delta\nu \in \Delta_1^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и прежде, можно считать, что $\delta\nu = \omega$.

Сначала докажем следующее утверждение. *Если существует позитивная вычислимая Π_1^1 -нумерация ν семейства $\Delta(B)$, о которой говорится в условии, то существует такая же позитивная вычислимая Π_1^1 -нумерация ν' семейства $\Delta(\omega)$.*

Действительно, пусть ν — позитивная вычислимая Π_1^1 -нумерация семейства $\Delta(B)$, где B — бесконечное Π_1^1 -множество, $\delta\nu = \omega$, и каждое $C \in \Delta(B)$, $C \neq B$, имеет ровно один ν -номер.

Если $B \in \Delta_1^1$, то возьмем инъективную ω_1^{CK} -в. функцию h с $\delta h = B$ и $\rho h = \omega$ и рассмотрим Π_1^1 -нумерацию $\nu'(n) \Leftarrow h(\nu(n))$. Нетрудно понять, что она будет искомой.

Пусть теперь $B \in \Pi_1^1 \setminus \Delta_1^1$. Вновь возьмем инъективную ω_1^{CK} -в. функцию h с $\delta h = B$ и $\rho h = \omega_1^{CK}$ и построим искомую позитивную вычислимую Π_1^1 -нумерацию следующим образом:

$$\nu'(n) \Leftarrow \begin{cases} h(\nu(n)), & \text{если } h(\nu(n)) \subseteq \omega, \\ \omega, & \text{если } h(\nu(n)) \not\subseteq \omega. \end{cases}$$

Оставшаяся часть доказательства является модификацией доказательства теоремы 3 из [2]. Действительно, используя Π_1^1 -нумерацию ν' , определенную выше, построим позитивную вычислимую Π_1^1 -нумерацию ν'' семейства всех бесконечных Π_1^1 -множеств, удовлетворяющую дополнительно условию $\delta\nu'' = \omega$.

Для этого покажем, что функция $f : \omega \rightarrow \omega$, для которой выполняется соотношение $\nu'(f(n)) = \gamma(n)$, где $\gamma(n)$ — конечное множество с каноническим индексом n , является ω_1^{CK} -вычислимой, а следовательно, $f \in \Delta_1^1$. Действуем согласно следующей процедуре.

1. Пусть n_0 таково, что $\nu'(n_0) = \emptyset$; полагаем $f(0) = n_0$ (напомним, что такое число единственно).

2. Возьмем аппроксимацию $B_{n,s}$ предиката Γ_{ν}^* ; для каждого натурального числа n находим шаг t_0 , для которого существует ровно 2^{k_n} чисел x таких, что $B_{x,t_0} \subseteq \gamma(n)$, где k_n — количество элементов в множестве $\gamma(n)$; затем ищем шаг $t_1 \geq t_0$, для которого имеет место $B_{x_0,t_1} = \gamma(n)$ для подходящего x_0 (в этом случае должно выполняться условие $B_{x_0,t_1} = B_{x_0}$); полагаем $f(n) = x_0$.

Далее, индексы всех бесконечных множеств натуральных чисел образуют множество $\omega \setminus f(\omega)$, принадлежащее классу Δ_1^1 . Пусть h — инъективная ω_1^{CK} -вычислимая функция с $\delta h = \omega$ и $\rho h = \omega \setminus f(\omega)$. Тогда в качестве ν'' можно взять $\nu' \circ h$.

Для завершения доказательства покажем, что любая вычислимая Π_1^1 -нумерация μ семейства бесконечных множеств с $\delta\mu = \omega$ не содержит некоторого бесконечного Π_1^1 -множества (даже Δ_1^1 -множества). Действительно, пусть μ — вычислимая Π_1^1 -нумерация семейства бесконечных множеств с $\delta\mu = \omega$. Будем строить бесконечное Π_1^1 -множество согласно следующей конструкции.

1. Пусть $\{C_{n,s}\}_{n \in \omega, s < \omega_1^{CK}}$ — аппроксимация вычислимой Π_1^1 -нумерации μ . Индукцией по n будем помещать в A на каждом шаге по одному элементу l_n так, чтобы существовало число $k < l_n$ такое, что $k \in \mu(n) \setminus A$ (выполнение данного свойства можно достичь, если на каждом последующем шаге рассматривать только числа, большие l_n). Из этого будет следовать, что множество A должно отличаться от $\mu(n)$ для любого $n \in \omega$.

2. Пусть $n = 0$. Найдем шаг t_0 , для которого имеет место $C_{0,t_0} \neq \emptyset$. Далее, пусть $k_0 \in C_{0,t_0}$, тогда полагаем $l_0 = k_0 + 1$.

3. Предположим, что l_m уже задано, и определим число l_{m+1} следующим образом. Найдем шаг t_{m+1} , для которого имеет место соотношение $\exists k[(k > l_m) \wedge (k \in C_{m+1,t_{m+1}})]$. Пусть число k_{m+1} таково, что $k_{m+1} > l_m$ и к тому же $k_{m+1} \in C_{m+1,t_{m+1}}$. Тогда положим $l_{m+1} = k_{m+1} + 1$.

4. Положим $A = \{l_m \mid m \in \omega\}$.

Из конструкции следует, что множество A искомое. Так как A представляется в виде образа множества ω относительно ω_1^{CK} -в. функции, оно будет принадлежать классу Δ_1^1 .

Тем самым несуществование Π_1^1 -нумерации, о которой речь идет в условии предложения, доказано. $\square$

§ 4. О вычислимых Σ_1^1 -нумерациях

Как и для Π_1^1 -нумераций, докажем, что существование разрешимой вычислимой Σ_1^1 -нумерации эквивалентно существованию однозначной вычислимой Σ_1^1 -нумерации. Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Предложение 3. Пусть ν — разрешимая Σ_1^1 -нумерация. Тогда существует отношение эквивалентности $\eta_0 \in \Delta_1^1$ на ω такое, что $\eta_\nu \subseteq \eta_0 \subseteq (\omega^2 \setminus (\delta\nu)^2) \cup \eta_\nu$.

Доказательство. Пусть ν — Σ_1^1 -нумерация из условия. Тогда по принципу отделимости для Σ_1^1 (см., например, V.4.3 [11] для $\mathbb{A} = \mathbb{L}(\omega_1^{CK})$) найдется $R_0 \in \Delta_1^1$, для которого $c(\eta_\nu) \subseteq R_0 \subseteq \omega \setminus c((\delta\nu)^2 \setminus \eta_\nu)$. Далее, определим отношение

эквивалентности η_0 как наименьшее по включению отношение эквивалентности на ω , содержащее $\{\langle a, b \rangle \mid c(a, b) \in R_0\}$ в качестве подмножества. Отношение η_0 будет принадлежать Δ_1^1 , поскольку $c(\eta_0) \leq_e R_0$. $\square$

В качестве следствия этого предложения приведем аналог предложения 1 для Σ_1^1 -нумераций.

Предложение 4. *Любая разрешимая Σ_1^1 -нумерация эквивалентна некоторой однозначной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν — разрешимая Σ_1^1 -нумерация множества S и η_ν — ее нумерационная эквивалентность. По предложению 3 найдется отношение эквивалентности $\eta_0 \in \Delta_1^1$ на ω , для которого $\eta_\nu \subseteq \eta_0 \subseteq (\omega^2 \setminus (\delta\nu)^2) \cup \eta_\nu$.

Рассмотрим вспомогательную разрешимую вычислимую Π_1^1 -нумерацию $\varepsilon(n) \Leftarrow [n]_{\eta_0}$ с $\delta\varepsilon = \omega$. По предложению 1 существует однозначная Π_1^1 -нумерация ε_0 , эквивалентная ε . Более того, $\delta\varepsilon_0 \in \Delta_1^1$, поскольку $\delta\varepsilon = \omega \in \Delta_1^1$, следовательно, $\varepsilon = \varepsilon_0 f$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon g$ для некоторых функций $f, g \in \Delta_1^1$.

Покажем, что $\nu \equiv \nu \circ g$. Действительно, $\nu = (\nu \circ g) \circ (f \upharpoonright \delta\nu)$ и $(\nu \circ g) = \nu \circ (g \upharpoonright \rho(f \upharpoonright \delta\nu))$.

Однозначность Σ_1^1 -нумерации $(\nu \circ g)$ вытекает из того, что $\delta\nu$ является η_0 -замкнутым и $\eta_0 \cap (\delta\nu)^2 = \eta_\nu$, а также из определения ε и ε_0 . $\square$

Таким образом, при исследовании свойств разрешимых вычислимых Σ_1^1 -нумераций можно также ограничиться рассмотрением лишь однозначных.

Сначала докажем утверждение, в которой описывается трансформация, сопоставляющая однозначной вычислимой Σ_1^1 -нумерации некоторую позитивную вычислимую Π_1^1 -нумерацию.

Предложение 5. *Пусть $\mathcal{S} \subseteq \Sigma_1^1$ и $\check{\mathcal{S}} = \{B \mid \omega \setminus B \in \mathcal{S}\}$. Если ν — однозначная вычислимая Σ_1^1 -нумерация семейства $\mathcal{S}$, то*

$$\nu_0(n) = \begin{cases} \omega \setminus \nu(n), & \text{если } n \in \delta\nu, \\ \omega, & \text{если } n \notin \delta\nu, \end{cases}$$

является позитивной вычислимой Π_1^1 -нумерацией семейства $\check{\mathcal{S}} \cup \{\omega\}$, в которой каждое $R \in \check{\mathcal{S}} \setminus \{\omega\}$ имеет ровно один номер. Если к тому же $\mathcal{S}$ имеет наименьший по включению элемент, то

$$\nu_1(n) = \begin{cases} \omega \setminus \nu(n), & \text{если } n \in \delta\nu, \\ \bigcup \check{\mathcal{S}}, & \text{если } n \notin \delta\nu, \end{cases}$$

является позитивной вычислимой Π_1^1 -нумерацией семейства $\check{\mathcal{S}}$, в которой каждое $R \in \check{\mathcal{S}} \setminus \{\bigcup \check{\mathcal{S}}\}$ имеет ровно один номер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\Gamma_{\nu_0}^* = \omega^2 \setminus \Gamma_\nu^*$ и $\eta_{\nu_0} = \{\langle n, m \rangle \mid n = m \text{ или } \{n, m\} \cap \delta\nu = \emptyset\} \cup F$, где $F = \emptyset$, если $\emptyset \notin \mathcal{S}$; $F = \{\langle n_0, m \rangle \mid m \notin \delta\nu\} \cup \{\langle m, n_0 \rangle \mid m \notin \delta\nu\}$, если $\nu(n_0) = \emptyset \in \mathcal{S}$.

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{S}$ имеет наименьший по включению элемент. Необходимо показать, что ν_1 является позитивной вычислимой Π_1^1 -нумерацией. Действительно, $\eta_{\nu_1} = \{\langle n, n \rangle \mid n \in \omega\} \cup ((\omega \setminus \delta\nu) \cup \{n_0\})^2$, где n_0 таково, что $\nu(n_0) = \bigcap \mathcal{S}$, поэтому ν_1 позитивна, причем $C \neq \bigcup \check{\mathcal{S}}$ имеет ровно один ν_1 -номер. Кроме того, $\nu_1(n) = \nu_0(n) \cap \nu_0(n_0)$ для всех $n \in \omega$, откуда вытекает, что ν_1 вычислима.

Количественная характеристика номеров непосредственно следует из того, что ν однозначна. $\square$

Следующие два результата являются Σ_1^1 -аналогами теорем 4 и 5. Из них, в частности, следует, что не существует однозначной вычислимой Σ_1^1 -нумерации класса $\nabla(\emptyset) = \Delta(\omega)$ всех Σ_1^1 -множеств.

Теорема 6. *Не существует однозначной вычислимой Σ_1^1 -нумерации семейства $\nabla(B)$, когда B — кобесконечное Σ_1^1 -подмножество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B — кобесконечное Σ_1^1 -подмножество. Допустим, что существует однозначная вычислимая Σ_1^1 -нумерация семейства $\nabla(B)$. По предложению 5 существует положительная вычислимая Π_1^1 -нумерация ν_0 семейства $\Delta(\omega \setminus B)$ с $\delta\nu_0 = \omega$, для которой каждое собственное Π_1^1 -подмножество $\omega \setminus B$ будет иметь ровно один ν_0 -номер; противоречие с предложением 2. $\square$

Теорема 7. *Не существует однозначной вычислимой Σ_1^1 -нумерации семейства $\Delta(B)$ в случае, когда B — бесконечное Δ_1^1 -подмножество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B — бесконечное Δ_1^1 -подмножество. Допустим, что такая Σ_1^1 -нумерация существует. По предложению 5 существует положительная вычислимая Π_1^1 -нумерация ν семейства $\nabla(\omega \setminus B)$ с $\delta\nu = \omega$, для которой каждое $A \in \nabla(\omega \setminus B) \setminus \{\omega\}$ встречается лишь однажды. Далее, $\nu_0(n) = \nu(n) \cap B$ является положительной вычислимой Π_1^1 -нумерацией семейства $\Delta(B)$ с $\delta\nu_0 = \omega$, для которой каждое $A \in \Delta(B) \setminus \{B\}$ встречается лишь однажды; противоречие с предложением 2. $\square$

Очевидно, что в случае, когда семейство $\mathcal{S} \subseteq \Sigma_1^1$ конечно, однозначная вычислимая Σ_1^1 -нумерация существует. Рассмотрим более экзотический пример.

Теорема 8. *Пусть $B \in \Sigma_1^1$ таково, что B не имеет бесконечных кобесконечных Σ_1^1 -подмножеств. Тогда $\Delta(B)$ имеет однозначную вычислимую Σ_1^1 -нумерацию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \in \Sigma_1^1$ из условия предложения. Сначала построим положительную вычислимую Π_1^1 -нумерацию ν семейства $\nabla(\omega \setminus B)$, для которой $\delta\nu = \omega$ и каждое $A \in \nabla(\omega \setminus B) \setminus \{\omega\}$ имеет ровно один номер:

$$\nu(n) \Leftarrow \begin{cases} (\omega \setminus B) \cup \gamma(k), & \text{если } n = 2k, \gamma(k) \subseteq B, \\ \omega, & \text{если } n = 2k, \gamma(k) \not\subseteq B, \\ \omega \setminus \gamma(k), & \text{если } n = 2k + 1, \gamma(k) \subseteq B, \\ \omega, & \text{если } n = 2k + 1, \gamma(k) \not\subseteq B \end{cases}$$

(здесь $\gamma(k)$ — каноническая нумерация конечных подмножеств натуральных чисел).

Нетрудно проверить, что $\mu \upharpoonright B_0$ будет однозначной вычислимой Σ_1^1 -нумерацией семейства $\Delta(B)$, где $\mu(n) \Leftarrow \omega \setminus \nu(n)$, а $B_0 \Leftarrow \{1\} \cup \{n \mid \mu(n) \neq \emptyset\}$. $\square$

Отметим, что в качестве множества B из условия теоремы 8 можно взять дополнение максимального Π_1^1 -множества (существование такого множества доказано в [15]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г., Файзрахманов М. Х. Позитивные представления семейств относительно ϵ -оракулов // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 823–833.
2. Owings J. C. The meta r.e. sets but not the Π_1^1 sets can be enumerated without repetition // J. Symb. Log. 1970. V. 35, N 2. P. 223–229.
3. Доржиева М. В. Элиминация метарекурсии из теоремы Оуинса // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14, № 1. С. 35–43.

4. Доржиева М. В. Неразрешимость элементарных теорий полурешеток Роджерса аналитической иерархии // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 148–153.
5. Доржиева М. В. Однозначная нумерация для семейства всех Σ_2^1 -множеств // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2018. Т. 18, № 2. С. 47–52.
6. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
7. Soare R. I. Recursively enumerable sets and degrees: a study of computable functions and computably generated sets. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1987.
8. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
9. Ершов Ю. Л. Определимость и вычислимость. М.: Экономика, 2000.
10. Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г. О принципах вычислимости на допустимых множествах // Мат. тр. 2004. Т. 7, № 2. С. 35–71.
11. Barwise J. Admissible sets and structures. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1975.
12. Sacks G. Higher recursion theory. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1990.
13. Пузаренко В. Г. О вычислимости над моделями разрешимых теорий // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 2. С. 170–197.
14. Пузаренко В. Г. О разрешимых вычислимых $\mathbb{A}$ -нумерациях // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 5. С. 568–584.
15. Owings J. C. Recursion, metarecursion and inclusion // J. Symb. Log. 1967. V. 32, N 2. P. 173–178.

Поступила в редакцию 8 июня 2018 г.

После доработки 25 октября 2018 г.

Принята к публикации 19 декабря 2018 г.

Калимуллин Искандер Шагитович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
ikalimul@gmail.com

Пузаренко Вадим Григорьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
vagrig@math.nsc.ru

Файзрахманов Марат Хайдарович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
marat.faiзраhmanov@gmail.com