Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. S. Sgibnev, The discrete Wiener–Hopf equation with probability kernel of oscillating type, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 3, 664–675

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.314>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.89.56.158

April 26, 2023, 17:02:55

УДК 517.968.2

ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА — ХОПФА С ВЕРОЯТНОСТНЫМ ЯДРОМ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ТИПА

М. С. Сгибнев

Аннотация. Доказано существование решения дискретного неоднородного уравнения Винера — Хопфа, ядром которого является арифметическое распределение вероятностей, порождающее осциллирующее случайное блуждание. Установлены асимптотические свойства решения в зависимости от свойств неоднородного члена уравнения и его ядра.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.314

Ключевые слова: дискретное уравнение Винера — Хопфа, неоднородное уравнение, асимптотическое поведение, арифметическое распределение, осциллирующий тип.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, $\mathbb{Z}_+$ — множество всех неотрицательных целых чисел и $\mathbb{Z}_- := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+$ — множество всех отрицательных целых чисел. Дискретным аналогом интегрального уравнения Винера — Хопфа

$$z(x) = \int_0^{\infty} k(x-y)z(y) dy + g(x), \quad x \geq 0, \quad (1)$$

является бесконечная система уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{j-k} z_k = g_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad (2)$$

где $\{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$ — известные числовые последовательности, а $\{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ — последовательность искомых величин, причем коэффициенты a_j удовлетворяют условию $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$ (см. [1, § 13, п. 1]). Система уравнений (2) может быть записана в виде, аналогичном уравнению (1):

$$z_j = \sum_{k=0}^{\infty} f_{j-k} z_k + g_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проект № 0314–2016–0005).

© 2019 Сгибнев М. С.

где $f_0 = 1 - a_0$, $f_j = -a_j$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots$, или в виде

$$z_j = \sum_{k=-\infty}^j z_{j-k} f_k + g_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (3)$$

Последовательность $\{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — это дискретный аналог ядра $k(x)$ в классическом уравнении Винера — Хопфа (1). Назовем последовательность $\{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ *ядром* уравнения (3). Будем изучать уравнение (3), ядром которого является арифметическое с шагом единица распределение вероятностей $F = \{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, порождающее случайное блуждание осциллирующего типа. Напомним (см. [2, гл. V, § 2, определение 3]), что распределение вероятностей F на $\mathbb{R}$ называется *арифметическим*, если оно сосредоточено на множестве точек вида $0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots$. Наибольшее число λ , обладающее этим свойством, называется *шагом* распределения F . Пусть X_k , $k \geq 1$, — независимые случайные величины с одним и тем же распределением F , не сосредоточенным в нуле: $P(X_k = j) = f_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Эти величины порождают случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. Согласно теореме 1 в [2, гл. XII, § 2] существуют только два типа случайных блужданий: 1) осциллирующий тип (S_n колеблется с вероятностью единица между $-\infty$ и $+\infty$); 2) уходящий тип (с вероятностью единица S_n стремится либо к $-\infty$, либо к $+\infty$). Случайное блуждание уходит в $-\infty$ (см. [2, гл. XII, § 7, теорема 2]) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(S_n > 0) < \infty.$$

Таким образом, $\{S_n\}$ — осциллирующее случайное блуждание тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(S_n > 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(S_n < 0) = \infty.$$

В частности, $\{S_n\}$ — осциллирующее случайное блуждание при $EX_1 = 0$ (см. [2, гл. XII, § 2, теорема 2, § 7, теорема 3]).

Условимся записывать последовательности в виде функций целочисленного аргумента, если их обозначения содержат больше одной буквы, например, $Z_c = \{Z_c(j)\}_{j=0}^{\infty}$. Обозначим через l_1 пространство двусторонних суммируемых последовательностей $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Определим *свертку* $a * b$ последовательностей $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $b = \{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ пространства l_1 как последовательность $c = \{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l_1$, где

$$c_n := a * b(n) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} b_k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Это определение свертки будет использоваться также в тех случаях, когда указанная сумма имеет смысл при всех $n \in \mathbb{Z}$, несмотря на то что исходные последовательности a и b могут не принадлежать пространству l_1 . Так как комплекснозначные меры, сосредоточенные на множестве $\mathbb{Z}$, могут рассматриваться как последовательности, под сверткой двух таких мер будем понимать определенную выше свертку соответствующих последовательностей. Мы не будем различать такие меры и соответствующие им последовательности. Каждой последовательности $a = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l_1$ поставим в соответствие ряд $\hat{a}(s) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n s^n$,

который абсолютно сходится на окружности $\{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. В частности, $\widehat{F}(s) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n s^n$. Обозначим через δ_0 атомическую меру единичной массы, сосредоточенную в нуле; ей соответствует последовательность, у которой все члены суть нули, за исключением члена с нулевым номером, который равен единице. Пространство l_1 — банахова алгебра с нормой $\|a\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$ и сверткой $a * b$ в качестве операции умножения, сложение, вычитание и умножение последовательностей на числа выполняются почленно: $a \pm b = \{a_n \pm b_n\}$, $\alpha a = \{\alpha a_n\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, а δ_0 — единица алгебры l_1 (см. [3, дополнение, § 1, п. 1, пример 4]). Запись $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in l_1$ означает, что $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l_1$, где $a_n \equiv 0$, $n \in \mathbb{Z}_-$.

Для $c \in \mathbb{C}$ полагаем отношение c/∞ равным нулю. Соотношение $a_j \sim cb_j$ при $j \rightarrow \infty$ означает, что $a_j/b_j \rightarrow c$ при $j \rightarrow \infty$; если $c = 0$, то $a_j = o(b_j)$.

§ 2. Факторизация Винера — Хопфа

Положим $\mathcal{T}_+ := \min\{n \geq 1 : S_n > 0\}$. Случайная величина $\mathcal{H}_+ := S_{\mathcal{T}_+}$ называется *первой строго возрастающей лестничной высотой*. Аналогично $\mathcal{T}_- := \min\{n \geq 1 : S_n \leq 0\}$ и $\mathcal{H}_- := S_{\mathcal{T}_-}$ — *первая слабо убывающая лестничная высота*. Обозначим через $G_{\pm}$ распределения случайных величин $\mathcal{H}_{\pm}$ соответственно. Справедливо факторизационное тождество (см. [2, гл. XVIII, § 3]):

$$1 - \xi E(e^{sX_1}) = [1 - E(\xi^{\mathcal{T}_-} e^{s\mathcal{H}_-})][1 - E(\xi^{\mathcal{T}_+} e^{s\mathcal{H}_+})], \quad |\xi| \leq 1, \operatorname{Re} s = 0. \quad (4)$$

Ниже понадобится аналогичное тождество для другого набора лестничных величин. Положим $\overline{\mathcal{T}}_+ := \min\{n \geq 1 : S_n \geq 0\}$. Случайная величина $\overline{\mathcal{H}}_+ := S_{\overline{\mathcal{T}}_+}$ называется *первой слабо возрастающей лестничной высотой*. Аналогично $\overline{\mathcal{T}}_- := \min\{n \geq 1 : S_n < 0\}$ и $\overline{\mathcal{H}}_- := S_{\overline{\mathcal{T}}_-}$ — *первая сильно убывающая лестничная высота*. Требуемое тождество выглядит следующим образом:

$$1 - \xi E(e^{sX_1}) = [1 - E(\xi^{\overline{\mathcal{T}}_-} e^{s\overline{\mathcal{H}}_-})][1 - E(\xi^{\overline{\mathcal{T}}_+} e^{s\overline{\mathcal{H}}_+})], \quad |\xi| \leq 1, \operatorname{Re} s = 0. \quad (5)$$

Его можно установить, модифицируя должным образом рассуждения из [2, гл. XVIII, § 3], приводящие к тождеству (4). Проще, однако, вывести (5) непосредственно из (4). Рассмотрим случайное блуждание $\{-S_n\}_{n=0}^{\infty}$, порожденное последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин $\{-X_k\}_{k=1}^{\infty}$. Лестничные величины, отвечающие этому блужданию, обозначим готическими буквами:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_+ &:= \min\{n \geq 1 : -S_n > 0\}, & \mathfrak{H}_+ &:= -S_{\mathfrak{T}_+}, \\ \mathfrak{T}_- &:= \min\{n \geq 1 : -S_n \leq 0\}, & \mathfrak{H}_- &:= -S_{\mathfrak{T}_-}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\mathfrak{T}_+ = \overline{\mathcal{T}}_-$ и $\mathfrak{H}_+ = -\overline{\mathcal{H}}_-$. Аналогично $\mathfrak{T}_- = \overline{\mathcal{T}}_+$ и $\mathfrak{H}_- = -\overline{\mathcal{H}}_+$. Для случайного блуждания $\{-S_n\}_{n=0}^{\infty}$ соотношение (4) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} 1 - \xi E(e^{-sX_1}) &= [1 - E(\xi^{\mathfrak{T}_-} e^{s\mathfrak{H}_-})][1 - E(\xi^{\mathfrak{T}_+} e^{s\mathfrak{H}_+})] \\ &= [1 - E(\xi^{\overline{\mathcal{T}}_+} e^{-s\overline{\mathcal{H}}_+})][1 - E(\xi^{\overline{\mathcal{T}}_-} e^{-s\overline{\mathcal{H}}_-})], \quad |\xi| \leq 1, \operatorname{Re} s = 0, \end{aligned}$$

откуда вытекает тождество (5).

§ 3. Существование решения и его явный вид

Обозначим через F^{n*} n -кратную свертку распределения F :

$$F^{1*} := 1, \quad F^{(n+1)*} := F^{n*} * F, \quad n \geq 1, \quad F^{0*} := \delta_0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть F — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица. Дискретная мера

$$U := \sum_{k=0}^{\infty} F^{k*} = \{U(\{n\})\}_{n=-\infty}^{\infty} =: \{u_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

называется *мерой восстановления*, порожденной распределением F .

Обозначим через $F_+ := \{f_j^+\}_{j=0}^{\infty}$ и $F_- := \{f_j^-\}_{j=-\infty}^{-1}$ распределения случайных величин $\overline{\mathcal{H}}_+$ и $\overline{\mathcal{H}}_-$ соответственно. Удобно доопределить эти последовательности следующим образом: $f_j^+ = 0$ при $j < 0$ и $f_j^- = 0$ при $j \geq 0$. Тогда распределения $F_+ := \{f_j^+\}_{j=-\infty}^{\infty}$ и $F_- := \{f_j^-\}_{j=-\infty}^{\infty}$ суть элементы банаховой алгебры l_1 . Из тождества (5) вытекает равенство

$$\delta_0 - F = (\delta_0 - F_-) * (\delta_0 - F_+).$$

Пусть

$$U_{\pm} := \sum_{k=0}^{\infty} F_{\pm}^{k*} = \{U_{\pm}(\{n\})\}_{n=-\infty}^{\infty} =: \{u_n^{\pm}\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

— меры восстановления, порожденные распределениями $F_{\pm}$ соответственно. Обозначим через $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_-}$ индикаторную функцию подмножества $\mathbb{Z}_-$ в множестве $\mathbb{Z}$: $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_-}(j) = 1$ при $j \in \mathbb{Z}_-$ и $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_-}(j) = 0$ при $j \in \mathbb{Z}_+$. Аналогичный смысл имеет обозначение $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_+}$. Рассмотрим уравнение (3). Доопределим последовательность $g = \{g_j\}_{j=0}^{\infty}$, полагая $g_j = 0$ при $j < 0$.

Теорема 1. Пусть F — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица и $g \in l_1$. Тогда последовательность

$$z_j = U_+ * [(U_- * g)\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_+}](j), \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad (6)$$

является решением уравнения (3), совпадающим с решением, полученным методом последовательных приближений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить существование решения z уравнения (3) для неотрицательных последовательностей g ; в случае вещественных последовательностей следует воспользоваться представлением $g_j = g_j^+ - g_j^-$, где $g_j^+ := \max(g_j, 0)$, $g_j^- := -\min(g_j, 0)$, а для комплексных g — представлением $g_j = \operatorname{Re} g_j + i \operatorname{Im} g_j$. Тогда для вещественных последовательностей имеем $z = z^+ - z^-$, где $z^{\pm}$ — два решения уравнения (3) с последовательностями $g^{\pm}$ вместо g . Положим $w = e^s$, $\xi \in (0, 1)$ в (5):

$$1 - \xi \widehat{F}(w) = [1 - \widehat{F}_{\xi^-}(w)][1 - \widehat{F}_{\xi^+}(w)], \quad |w| = 1,$$

где $F_{\xi^{\pm}}$ — положительные меры, сосредоточенные на множествах $\mathbb{Z}_{\pm}$ соответственно, причем $F_{\xi^{\pm}}(\mathbb{Z}_{\pm}) < 1$. Найдем решение уравнения

$$z_{\xi}(j) = \xi \sum_{k=-\infty}^j z_{\xi}(j-k) f_k + g_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad (7)$$

методом последовательных приближений:

$$z_{\xi}^{(0)}(j) = g_j, \quad z_{\xi}^{(n)}(j) = \xi \sum_{k=-\infty}^j z_{\xi}^{(n-1)}(j-k) f_k + g_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad n = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что $z_{\xi}^{(n)}(j) \uparrow z_{\xi}(j)$ при $n \uparrow \infty$ для любого $j \in \mathbb{Z}_+$, и по теореме о монотонной сходимости z_{ξ} — решение уравнения (7). Покажем, что числа $z_{\xi}(j)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, конечны. Рассмотрим дискретное уравнение восстановления

$$\zeta_j = \xi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \zeta_{j-k} f_k + g_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Построим его решение методом последовательных приближений:

$$\zeta_j^{(0)} = g_j, \quad \zeta_j^{(n)} = \xi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \zeta_{j-k}^{(n-1)} f_k + g_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что $\zeta_j^{(n)} \uparrow$ при $n \uparrow$. Поэтому можно перейти к пределу под знаком суммирования. Таким образом, пределы $\zeta_j := \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_j^{(n)}$, $j \in \mathbb{Z}$, существуют, причем $z_{\xi}(j) \leq \zeta_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Последовательность ζ — решение уравнения (8). Так как $\zeta^{(n)} = \sum_{k=0}^n \xi^k F^{k*} * g$, последовательность $\zeta = \{\zeta_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ можно представить в виде $\zeta = U_{\xi} * g$, где $U_{\xi} := \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k F^{k*}$ — дискретная мера восстановления, порожденная несобственным распределением ξF , причем $U_{\xi} \in l_1$, так как $\|\xi F\|_1 \leq \xi < 1$. Следовательно, $\zeta \in l_1$. Таким образом, доказано существование решения $z_{\xi} \in l_1$ уравнения (7).

Докажем формулу (6). Сначала найдем явный вид решения z_{ξ} уравнения (7). В [4] кратко изложена формальная схема решения классического уравнения Винера — Хопфа (см. также [5, гл. II, § 5, п. 5.4]). По аналогии с первым шагом этой схемы запишем наше уравнение (7) на всей прямой. Пусть

$$v_{\xi}(j) = \begin{cases} z_{\xi}(j) & \text{при } j \geq 0, \\ 0 & \text{при } j < 0, \end{cases} \quad n_{\xi}(j) = \begin{cases} 0 & \text{при } j \geq 0, \\ -\xi \sum_{k=-\infty}^j z_{\xi}(j-k) f_k & \text{при } j < 0. \end{cases}$$

Последовательность $n_{\xi} = \{n_{\xi}(j)\}$ имеет смысл. Действительно, $\{|n_{\xi}(j)|\} \leq \xi z_{\xi} * F \in l_1$. Уравнение (7) становится эквивалентным следующему дискретному уравнению восстановления:

$$v_{\xi}(j) = \xi \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{\xi}(j-k) f_k + g_j + n_{\xi}(j), \quad j \in \mathbb{Z},$$

или кратко

$$(\delta_0 - \xi F) * v_{\xi} = g + n_{\xi}. \quad (9)$$

Положим $U_{\xi \pm} := \sum_{n=0}^{\infty} F_{\xi \pm}^{n*} \in l_1$. Образует свертки элемента $U_{\xi -}$ с обеими частями уравнения (9). Из равенства $\delta_0 - \xi F = (\delta_0 - F_{\xi -}) * (\delta_0 - F_{\xi +})$ вытекает, что

$$U_{\xi -} * (\delta_0 - \xi F) = \delta_0 - F_{\xi +}.$$

Поэтому имеем

$$(\delta_0 - F_{\xi+}) * v_{\xi}(j) = U_{\xi-} * (g + n_{\xi})(j), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Конечная мера $U_{\xi-}$ неотрицательна и сосредоточена на $\mathbb{Z}_- \cup \{0\}$. Левая часть соотношения (10) обращается тождественно в нуль на $\mathbb{Z}_-$. Следовательно,

$$[U_{\xi-} * (g + n_{\xi})] \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_-} = 0,$$

откуда вытекает, что $U_{\xi-} * n_{\xi} = -(U_{\xi-} * g) \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_-}$. Образует свертки обеих частей этого равенства с мерой $\delta_0 - F_{\xi-}$. Получаем

$$n_{\xi} = -(\delta_0 - F_{\xi-}) * [(U_{\xi-} * g) \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_-}].$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} v_{\xi} &= U_{\xi} * (g + n_{\xi}) = U_{\xi} * \{g - (\delta_0 - F_{\xi-}) * [(U_{\xi-} * g) \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_-}]\} \\ &= U_{\xi} * \{g - (\delta_0 - F_{\xi-})(U_{\xi-} * g) + (\delta_0 - F_{\xi-}) * [(U_{\xi-} * g) \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_+}]\} \\ &= U_{\xi} * \{(\delta_0 - F_{\xi-}) * [(U_{\xi-} * g) \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_+}]\} = U_{\xi+} * [(U_{\xi-} * g) \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_+}]. \end{aligned}$$

Устремляя $\xi \uparrow 1$, убеждаемся в справедливости равенства (6). Докажем последнее утверждение теоремы. Образует последовательные приближения $z^{(n)}$ для исходного уравнения (3):

$$z^{(0)}(j) = g_j, \quad z^{(n)}(j) = \sum_{k=-\infty}^j z^{(n-1)}(j-k) f_k + g_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad n = 1, 2, \dots$$

Имеем $z^{(n)}(j) \uparrow, n \uparrow$. Следовательно, существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}(j), j \in \mathbb{Z}_+$. Покажем, что они совпадают с решением (6). В силу монотонной сходимости и индукции по n имеем

$$z^{(n)}(j) = \lim_{\xi \uparrow 1} z_{\xi}^{(n)}(j) \leq \lim_{\xi \uparrow 1} z_{\xi}(j), \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Справедливы соотношения

$$z_{\xi}(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} z_{\xi}^{(n)}(j) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}(j) \leq \lim_{\xi \uparrow 1} z_{\xi}(j) =: z_j.$$

Переходя к пределу при $\xi \uparrow 1$ получаем равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}(j) = z_j$, т. е. решение z , определяемое формулой (6), совпадает с решением $\{\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}(j)\}$, полученным методом последовательных приближений. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1 справедлива для *всех* типов арифметических вероятностных распределений с шагом единица: как для распределений уходящего типа, так и для распределений осциллирующего типа.

§ 4. Асимптотические свойства решения

Известна следующая дискретная теорема восстановления (ниже приведено доказательство для полноты изложения).

Теорема 2. Пусть $F = \{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица такое, что

$$\mu := EX_1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j f_j \in (0, +\infty],$$

и пусть $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l_1$. Тогда

$$(U * a)_j \rightarrow \frac{1}{\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n, \quad j \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой об ограниченной сходимости для сумм. Известно [2, гл. XI, § 1, теорема 1], что $u_n \rightarrow 1/\mu$ при $n \rightarrow \infty$ и $u_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow -\infty$. Значит, последовательность $\{u_n\}$ ограничена некоторым числом $C > 0$, выражение под знаком суммы в равенстве

$$(U * a)_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{j-n} a_n$$

мажорируется соответствующими элементами суммируемой последовательности $\{C|a_j|\}_{j=-\infty}^{\infty}$, и можно перейти к пределу под знаком суммы при $j \rightarrow \infty$ (см. [6, гл. V, разд. 26, теорема D]), где пространство с мерой $(X, \mathbf{S}, \mu)$ — обозначения Халмоша — имеет следующий вид: $X = \mathbb{Z}$, $\mathbf{S}$ — совокупность всех подмножеств в $\mathbb{Z}$, μ — считающая мера, т. е. $\mu(A)$ — это число элементов подмножества $A \subset \mathbb{Z}$, если A — конечное множество, и $\mu(A) = \infty$, если A — бесконечное множество.

Исследуем асимптотическое поведение решения z уравнения (3). Рассмотрим два случая в зависимости от свойств неоднородного члена g . Обозначим через DX_1 дисперсию случайной величины X_1 .

Теорема 3. Пусть $F = \{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица такое, что $EX_1 = 0$ и $DX_1 = \sigma^2 < \infty$. Предположим, что $\left\{ \sum_{k=j}^{\infty} |g_k| \right\}_{j=0}^{\infty} \in l_1$. Тогда решение $z = \{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ уравнения (3), задаваемое формулой (6), удовлетворяет следующему соотношению:

$$z_j \rightarrow \frac{1}{\mu_+} \sum_{n=-\infty}^0 u_n^- \sum_{l=-n}^{\infty} g_l, \quad j \rightarrow \infty,$$

где $\mu_+ := E\overline{\mathcal{H}}_+$.

Доказательство. Согласно теореме 1 из [2, гл. XVIII, § 5], примененной к случайному блужданию $\{-S_n\}$, математические ожидания μ_+ и $\mu_- := E\overline{\mathcal{H}}_-$ существуют и $\sigma^2/2 = \mu_+|\mu_-|$. Поэтому (см. [2, гл. XI, § 1, теорема 1]) $u_n^+ \rightarrow 1/\mu_+$ при $n \rightarrow \infty$ и $u_n^- \rightarrow 1/|\mu_-|$ при $n \rightarrow -\infty$. Последовательность $\{u_n^-\}_{n=-\infty}^0$ ограничена некоторым числом $C > 0$. Имеем $(U_- * g)\mathbf{1}_{\mathbb{Z}_+} \in l_1$. Действительно,

$$|U_- * g(j)| = \left| \sum_{n=-\infty}^0 u_n^- g_{j-n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^0 u_n^- |g_{j-n}| \leq C \sum_{k=j}^{\infty} |g_k|, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Применяя теорему 2 (см. формулу (11)), получаем

$$\begin{aligned} z_j &= U_+ * (U_- * g)(j) \rightarrow \frac{1}{\mu_+} \sum_{k=0}^{\infty} U_- * g(k) \\ &= \frac{1}{\mu_+} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^0 u_n^- g_{k-n} = \frac{1}{\mu_+} \sum_{n=-\infty}^0 u_n^- \sum_{l=-n}^{\infty} g_l, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Если в теореме 2 отказаться от требования $a \in l_1$, то имеет место следующий, по-видимому, также известный результат, который применим к исследованию асимптотики решения z , не требуя при этом выполнения условия $\left\{ \sum_{k=j}^{\infty} |g_k| \right\}_{j=0}^{\infty} \in l_1$, как в теореме 3.

Теорема 4. Пусть $F = \{f_j\}_{j=0}^{\infty}$ — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица, и пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — ограниченная неотрицательная последовательность такая, что $I(n) := \sum_{k=0}^n a_k \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$U * a(j) \sim \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^j a_n, \quad j \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена числом A , и пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ произвольно. Последовательность (мера восстановления) $U = \{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена некоторым числом $C > 0$, так как $u_n \rightarrow 1/\mu$, $n \rightarrow \infty$, где $\mu = EX_1$. Выберем $N = N(\varepsilon)$ так, что

$$\frac{1-\varepsilon}{\mu} \leq u_n \leq \frac{1+\varepsilon}{\mu}, \quad n \geq N.$$

Имеем

$$\begin{aligned} U * a(j) &= \sum_{n=0}^j u_n a_{j-n} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} + \sum_{n=N}^j \right) u_n a_{j-n} =: I_1(j) + I_2(j), \\ I_1(j) &\leq C \sum_{n=0}^{N-1} a_{j-n} \leq CAN, \\ \frac{1-\varepsilon}{\mu} \sum_{n=0}^{j-N} a_n &\leq I_2(j) \leq \frac{1+\varepsilon}{\mu} \sum_{n=0}^{j-N} a_n, \\ \sum_{n=0}^{j-N} a_n &\sim I(j) \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как сумма слева отличается от $I(j)$ на конечное число слагаемых $a_{j-N+1}, \dots, a_j$. Из приведенных соотношений вытекают неравенства

$$\frac{1-\varepsilon}{\mu} \leq \varliminf_{j \rightarrow \infty} \frac{U * a(j)}{I(j)} \leq \varlimsup_{j \rightarrow \infty} \frac{U * a(j)}{I(j)} \leq \frac{1+\varepsilon}{\mu},$$

что доказывает теорему ввиду произвольности ε .

Теорема 5. Пусть $F = \{f_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица такое, что $EX_1 = 0$ и $DX_1 = \sigma^2 < \infty$. Предположим, что g — суммируемая неотрицательная последовательность, но $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} g_k = \infty$. Тогда решение $z = \{z_j\}_{j=0}^{\infty}$ уравнения (3), задаваемое формулой (6), удовлетворяет следующему соотношению:

$$z_j \sim \frac{2}{\sigma^2} \sum_{k=0}^j \sum_{l=k}^{\infty} g_l, \quad j \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$\sum_{k=0}^j U_- * g(k) \sim \frac{1}{|\mu_-|} \sum_{k=0}^j \sum_{l=k}^{\infty} g_l =: \frac{1}{|\mu_-|} I(j), \quad j \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Меру восстановления U_- можно представить в виде

$$U_- = \frac{1}{|\mu_-|} \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_- \cup \{0\}} + V_-,$$

где последовательность $V_- = \{v_n^-\}_{n=-\infty}^0$ такая, что $v_n^- \rightarrow 0$ при $n \rightarrow -\infty$. Имеем

$$U_- * g(k) = \frac{1}{|\mu_-|} \sum_{l=-\infty}^0 g_{k-l} + \sum_{l=-\infty}^0 v_l^- g_{k-l} = \frac{1}{|\mu_-|} \sum_{l=k}^{\infty} g_l + \sum_{l=-\infty}^0 v_l^- g_{k-l}.$$

Суммируя по k от 0 до j , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^j U_- * g(k) &= \frac{1}{|\mu_-|} \sum_{k=0}^j \sum_{l=-\infty}^0 g_{k-l} + \sum_{k=0}^j \sum_{l=-\infty}^0 v_l^- g_{k-l} \\ &= \frac{1}{|\mu_-|} I(j) + \sum_{k=0}^j \sum_{l=-\infty}^0 v_l^- g_{k-l}. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Найдем $K < 0$ такое, что $|v_k^-| \leq \varepsilon$ при $k \leq K$. Разобьем последнюю двойную сумму на два слагаемых:

$$I_0(j) := \sum_{k=0}^j \sum_{l=k}^{\infty} g_l v_{k-l}^- = \sum_{k=0}^j \sum_{l=k-K}^{\infty} g_l v_{k-l}^- + \sum_{k=0}^j \sum_{l=k}^{k-K-1} g_l v_{k-l}^- =: I_1(j) + I_2(j).$$

Элементы последовательности V_- ограничены по абсолютной величине: $|v_n^-| \leq C < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$. Справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |I_1(j)| &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^j \sum_{l=k-K}^{\infty} g_l \leq \varepsilon I(j), \\ |I_2(j)| &\leq C \sum_{k=0}^j \sum_{l=k}^{k-K-1} g_l = C \sum_{k=0}^j \sum_{p=0}^{|K|-1} g_{k+p} \leq C|K| \|g\|_1 = o(I(j)), \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В итоге $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |I_0(j)|/I(j) \leq \varepsilon$. Ввиду произвольности ε получаем $I_0(j) = o(I(j))$, $j \rightarrow \infty$. Соотношение (12) установлено. Применим теорему 4, в которой положим U равным U_+ и в качестве a_n возьмем $U_- * g(n)$. Имеем

$$z_j \sim \frac{1}{\mu_+} \frac{1}{|\mu_-|} \sum_{k=0}^j \sum_{l=k}^{\infty} g_l = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{k=0}^j \sum_{l=k}^{\infty} g_l, \quad j \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме 5 можно отказаться от условия $g \geq 0$. Взамен достаточно потребовать, чтобы для $g \in l_1$ по крайней мере одна из сумм $a^\pm(j) := \sum_{k=0}^j \sum_{l=k}^\infty g_l^\pm$ неограниченно возрастала и, например, $a^-(j) \sim ca^+(j) \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$. Тогда нетрудно показать, что $z_j \sim 2(1-c)a^+(j)/\sigma^2$, $j \rightarrow \infty$. При $c \neq 1$

$$z_j \sim \frac{2}{\sigma^2} \sum_{k=0}^j \sum_{l=k}^\infty g_l, \quad j \rightarrow \infty,$$

как в теореме 5.

§ 5. Воздействие решения однородного уравнения

Решение z уравнения (3), полученное методом последовательных приближений в теореме 1, не является единственным решением этого уравнения. Рассмотрим однородное уравнение

$$Z_j = \sum_{k=-\infty}^j Z_{j-k} f_k, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad (13)$$

где $Z = \{Z_j\}_{j=0}^\infty$ — неизвестная последовательность, а $F = \{f_j\}_{j=-\infty}^\infty$ — арифметическое распределение вероятностей с шагом единица, порождающее осциллирующее случайное блуждание $\{S_n\}$. Пусть G_+ — распределение первой строго возрастающей лестничной высоты $\mathcal{H}_+$ и U_{G_+} — мера восстановления, порожденная распределением G_+ . Ее функция восстановления $Z_j := U_{G_+}((-\infty, j])$, $j \in \mathbb{Z}_+$, является решением уравнения (13), обладающим нормировкой $Z_0 = 1$ (см. [7, теорема 1]) и асимптотикой $Z_j \sim j/\mathbb{E}\mathcal{H}_+$, $j \rightarrow \infty$. Пусть $c \in \mathbb{C}$ произвольно. Очевидно, что последовательность $Z_c = \{Z_c(j)\}_{j=0}^\infty := z + cZ$ — решение неоднородного уравнения (3). Исследуем асимптотику этого решения при различных предположениях о ядре F и неоднородном члене g . Известны следующие факты: 1) если F — арифметическое осциллирующее распределение вероятностей с шагом единица, то распределение G_+ лестничной высоты $\mathcal{H}_+$ также арифметическое с тем же шагом [7, лемма 1]; 2) если $\mathbb{E}X_1 = 0$ и $\mathbb{E}(X_1^+)^3 < \infty$, то $\mathbb{E}\mathcal{H}_+^2 < \infty$ (см. [8, лемма 1], где следует взять $\phi(x) = x^2$); 3) если $\mathbb{E}\mathcal{H}_+^2 < \infty$ и G_+ — арифметическое распределение с шагом единица, то (см. [2, гл. XI, § 4])

$$Z_j - \frac{j}{\mathbb{E}\mathcal{H}_+} \rightarrow \frac{\mathbb{E}\mathcal{H}_+^2 + \mathbb{E}\mathcal{H}_+}{2(\mathbb{E}\mathcal{H}_+)^2}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Из приведенных фактов и уже доказанных теорем вытекают следующие результаты об асимптотике решения Z_c уравнения (3).

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $\mathbb{E}(X_1^+)^3 < \infty$. Тогда

$$Z_c(j) - \frac{cj}{\mathbb{E}\mathcal{H}_+} \rightarrow \frac{1}{\mu_+} \sum_{n=-\infty}^0 u_n^- \sum_{m=-n}^\infty g_m + \frac{c\mathbb{E}\mathcal{H}_+^2 + c\mathbb{E}\mathcal{H}_+}{2(\mathbb{E}\mathcal{H}_+)^2}, \quad j \rightarrow \infty.$$

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 5 и $\mathbb{E}(X_1^+)^3 < \infty$. Тогда

$$Z_c(j) - \frac{cj}{\mathbb{E}\mathcal{H}_+} \sim \frac{2}{\sigma^2} \sum_{k=0}^j \sum_{l=k}^\infty g_l, \quad j \rightarrow \infty. \quad (14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для симметричных распределений формулы в теоремах 6 и 7 упрощаются. Распределение $F = \{f_j\}$ симметрично, если $f_j = f_{-j}$, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда $E\mathcal{K}_+ = \sigma/\sqrt{2\gamma_0}$, где $\gamma_0 = \exp\left[-\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0)/n\right]$ (см., например, [7, лемма 2]), и соотношение (14) принимает следующий вид:

$$Z_c(j) - \frac{c\sqrt{2\gamma_0}}{\sigma}j \sim \frac{2}{\sigma^2} \sum_{k=0}^j \sum_{l=k}^{\infty} g_l, \quad j \rightarrow \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Исследованию дискретного уравнения Винера — Хопфа посвящена работа [9]. Приведем два ее результата, относящиеся к рассматриваемому осциллирующему случаю. В наших обозначениях теорема 4(б) в [9] утверждает, что если $g \in l_1$, $g \geq 0$, то $z_j = O(j)$, $j \rightarrow \infty$; а в теореме 5(б) в [9] говорится о том, что если $g_1 \in l_1$ и $\sum_{j=1}^{\infty} j|g_j| < \infty$, то

$$\sum_{j=0}^p z_j = O(p), \quad p \rightarrow \infty.$$

Отметим также работу [10], где рассматривалось классическое уравнение Винера — Хопфа (1) с плотностью распределения вероятностей в качестве ядра и были приведены оценки для его решения в зависимости от свойств ядра и свободного члена. В частности, для осциллирующего случая справедливо следующее утверждение (см. [10, теорема 16]):

$$\int_0^{\infty} (1+x)|g(x)|dx < \infty \implies \int_0^t z(\tau)d\tau = O(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Эта оценка имеет место и при более общем условии на функцию $g(x)$, но его описание выходит за рамки настоящей статьи. Наконец, в обзорной статье [11] большое место уделено рассмотрению интегрального уравнения Винера — Хопфа (1) и факторизационного метода его решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 5. С. 3–120.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 2.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.
4. Дмитриев В. И. Винера — Хопфа уравнение // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1977. Т. 1. С. 697–698.
5. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.
6. Halmos P. R. Measure theory. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1974.
7. Сгибнев М. С. Об однородном консервативном уравнении Винера — Хопфа // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 9. С. 123–132.
8. Doney R. A. Moments of ladder heights in random walks // J. Appl. Probab. 1980. V. 17. P. 248–252.
9. Арабаджян Л. Г. О дискретных уравнениях Винера — Хопфа в консервативном случае // Математический анализ и его приложения. Ереван, 1980. С. 26–36.
10. Арабаджян Л. Г. О консервативном уравнении Винера — Хопфа // Изв. АН Арм. ССР. 1981. Т. 16, № 1. С. 65–80.

-
11. Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1984. Т. 22. С. 175–245. (Итоги науки и техники).

Поступила в редакцию 23 августа 2018 г.

После доработки 4 декабря 2018 г.

Принята к публикации 19 декабря 2018 г.

Сгибнев Михаил Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`sgibnev@math.nsc.ru`