A. I. Budkin, The operator L_n on quasivarieties of universal algebras, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 724–733

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.402>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 3.82.47.9

April 26, 2023, 14:13:04

ОПЕРАТОР L_n НА КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

А. И. Будкин

Аннотация. Пусть n — произвольное натуральное число и $\mathcal{M}$ — любой класс универсальных алгебр. Обозначим через $L_n(\mathcal{M})$ класс алгебр G таких, что для каждой n -порожденной подалгебры A алгебры G смежный класс a/R ($a \in A$) по наименьшей конгруэнции R , содержащей $A \times A$, является алгеброй из $\mathcal{M}$. Исследуются классы $L_n(\mathcal{M})$. В частности, доказано, что если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие, то $L_n(\mathcal{M})$ — квазимногообразие. Аналогичный результат получен для универсально аксиоматизируемых классов алгебр. Также установлено, что если $\mathcal{M}$ — конгруэнц-перестановочное многообразие алгебр, то $L_n(\mathcal{M})$ является многообразием. Найдено многообразие P полугрупп такое, что класс $L_1(P)$ не является многообразием.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.402

Ключевые слова: квазимногообразие, многообразие, универсальная алгебра, конгруэнц-перестановочное многообразие, класс Леви.

Введение

Покрытием универсальной алгебры G назовем всякую систему подалгебр этой алгебры, теоретико-множественное объединение подалгебр которой совпадает с G . Исследование влияния свойств покрытия на строение самой алгебры — одна из важных задач. Весьма подробно эта задача рассматривалась в теории групп. Приведем ряд статей, посвященных решению этой задачи в теории групп, относящихся к классам Леви.

Классы Леви были впервые введены Каппе [1] под влиянием работы Леви [2]. Класс $L(\mathcal{K})$ называется *классом Леви*, порожденным классом групп $\mathcal{K}$, если он состоит из всех групп G , в которых все 1-порожденные (как нормальные) нормальные подгруппы содержатся в $\mathcal{K}$. Оказалось [3], что если $\mathcal{K}$ — многообразие групп, то $L(\mathcal{K})$ также многообразие групп, если $\mathcal{K}$ — квазимногообразие групп, то $L(\mathcal{K})$ — квазимногообразие групп [4]. Дальнейшие свойства классов Леви изучались следующими авторами: Каппе и Морс [5, 6], А. И. Будкин [7], А. И. Будкин и Л. В. Таранина [8], В. В. Лодейщикова [9–15], С. А. Шахова [16].

В данной работе сделана попытка обобщения понятия класса Леви, возникшее в теории групп, на случай универсальных алгебр.

Для каждого натурального числа n и всякого класса $\mathcal{M}$ универсальных алгебр мы вводим класс $L_n(\mathcal{M})$ следующим образом: $G \in L_n(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда для всякой n -порожденной подалгебры A алгебры G смежный класс a/θ ($a \in A$) по наименьшей конгруэнции θ , содержащей $A \times A$, является алгеброй из $\mathcal{M}$. Данная работа посвящена исследованию классов $L_n(\mathcal{M})$. В частности, доказано, что если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие или универсально

аксиоматизируемый класс алгебр, то таковым же является класс $L_n(\mathcal{M})$. Установлено, что если $\mathcal{M}$ — конгруэнц-перестановочное многообразие алгебр, то $L_n(\mathcal{M})$ также является многообразием. Найдено многообразие $\mathcal{P}$ полугрупп такое, что класс $L_1(\mathcal{P})$ не является многообразием.

§ 1. Предварительные сведения

Напомним некоторые понятия и определения.

Через $\text{var}(\mathcal{K})$ будем обозначать многообразие, порожденное классом $\mathcal{K}$ алгебр. Всюду в работе через $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ обозначено множество натуральных чисел. Вместо «универсальная алгебра» будем писать просто «алгебра». Сигнатурный символ f и соответствующую ему операцию f^A на алгебре A будем обозначать одинаково.

Далее $\langle S \rangle$ — подалгебра, порожденная множеством S , E — одноэлементная алгебра. Запись $H \leq G$ означает, что H — подалгебра алгебры G . Вложением алгебры A в алгебру B будем называть любой гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow B$, являющийся изоморфизмом A на $\varphi(A)$. Если существует вложение A в B , то говорим, что A вложима в B .

0-Трансляцией алгебры G называется тождественное или константное отображение $g : G \rightarrow G$, т. е. функция вида $g(x) = x$ или $g(x) = a$, где a — фиксированный и x — произвольный элементы из G . 1-Трансляцией алгебры G называется 0-трансляция или отображение вида

$$x \rightarrow f(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad x \in G,$$

где f — символ основной операции алгебры G и $a_1, \dots, a_n$ — фиксированные элементы из G . Композиция k 1-трансляций алгебры G называется k -трансляцией этой алгебры. Отображение $g : G \rightarrow G$ называется *просто трансляцией* алгебры G , если g есть k -трансляция для некоторого k ; a/θ — смежный класс по конгруэнции θ , содержащий a .

Всюду в работе $\Delta = \{(x, x) \mid x \in G\}$ — тривиальная конгруэнция на G .

Пусть $A \leq G$. Через θ_A будем обозначать наименьшую конгруэнцию на G , содержащую $A \times A$ (часто вместо θ_A пишут $\theta(A)$). Заметим, что при $a \in A$ смежный класс a/θ_A является подалгеброй алгебры G .

Отметим, что в случае групп (колец) a/θ_A ($a \in A$) — это наименьшая нормальная подгруппа группы G , содержащая A (наименьший идеал, содержащий A).

Имеет место следующее утверждение [17, следствие 7.10].

Лемма 1. Если $A \leq G$, то $(a, b) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют такие пары $(x_i, y_i) \in A \times A$ и такие трансляции g_i алгебры G ($i = 0, \dots, n$), что

$$a = g_0(x_0), \quad g_i(x_i) = g_{i-1}(y_{i-1}) \quad (i = 1, \dots, n), \quad g_n(y_n) = b.$$

Пусть α и β — бинарные отношения на множестве G . Произведение $\alpha\beta$ есть отношение, определяемое следующим образом:

$$(a, b) \in \alpha\beta \Leftrightarrow (\exists c \in G) (a, c) \in \alpha \text{ и } (c, b) \in \beta.$$

Класс алгебр $\mathcal{K}$ называется *конгруэнц-перестановочным*, если во всякой алгебре $G \in \mathcal{K}$ любые две конгруэнции θ и ρ перестановочны (т. е. $\theta\rho = \rho\theta$). Класс алгебр $\mathcal{K}$ имеет n -перестановочные конгруэнции, если во всякой алгебре

$G \in \mathcal{K}$ для любых конгруэнций θ и ρ имеет место $\theta \vee \rho = \theta\rho\theta\rho\ldots$ (n сомножителей). Класс алгебр $\mathcal{K}$ называется *конгруэнц-дистрибутивным*, если для всякой алгебры $G \in \mathcal{K}$ ее решетка конгруэнций дистрибутивна. Класс алгебр $\mathcal{K}$ называется *арифметическим*, если он конгруэнц-перестановочный и конгруэнц-дистрибутивный.

Пусть $\{A_i \mid i \in I\}$ — непустое семейство алгебр A_i . Рассмотрим декартово произведение $A = \{a : I \rightarrow \cup A_i \mid a(i) \in A_i\}$ их носителей. Определив операции на A так:

$$f(a_1, \dots, a_n)(i) = f(a_1(i), \dots, a_n(i)) \quad \text{для всех } i \in I,$$

получаем прямое произведение этих алгебр, которое обозначается через $\prod_{i \in I} A_i$.

Пусть $\mathcal{D}$ — произвольный фильтр над I , ϑ — конгруэнция на $A = \prod_{i \in I} A_i$, определенная таким образом:

$$a\vartheta b \Leftrightarrow \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in \mathcal{D}.$$

Тогда фактор-алгебра A/ϑ называется *фильтрованным произведением алгебр A_i по фильтру $\mathcal{D}$* и обозначается через $\prod_{i \in I} A_i/\mathcal{D}$. Смежный класс a/ϑ принято обозначать через $a\mathcal{D}$.

Класс алгебр $\mathcal{K}$ называется *наследственным*, если с каждой своей алгеброй содержит все ее подалгебры; *гомоморфно замкнутым*, если с каждой своей алгеброй содержит все ее гомоморфные образы; *мультипликативно замкнутым*, если содержит всевозможные прямые произведения алгебр из $\mathcal{K}$; *замкнутым относительно фильтрованных произведений*, если содержит всевозможные фильтрованные произведения алгебр из $\mathcal{K}$.

Говорят, что *аксиоматический ранг квазимногообразия $\mathcal{K}$ в данном классе $\mathcal{N}$ ($\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}$)* равен n , если $\mathcal{K}$ можно задать в $\mathcal{N}$ системой квазитождеств от n переменных и нельзя задать никаким множеством квазитождеств от меньшего числа переменных. Если такого числа n не существует, то $\mathcal{K}$ имеет бесконечный аксиоматический ранг в $\mathcal{N}$. В качестве $\mathcal{N}$ будем рассматривать класс всех алгебр данной сигнатуры.

Будем пользоваться следующим известным утверждением, вытекающим из определения фильтрованного произведения.

Лемма 2. Пусть $t_1(x_1, \dots, x_n), t_2(x_1, \dots, x_n)$ — произвольные термы рассматриваемой сигнатуры, $\mathcal{D}$ — фильтр над I , $A = \prod_{i \in I} A_i/\mathcal{D}$, $a_1\mathcal{D}, \dots, a_n\mathcal{D} \in A$.

Справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} t_1(a_1\mathcal{D}, \dots, a_n\mathcal{D}) &= t_2(a_1\mathcal{D}, \dots, a_n\mathcal{D}) \\ &\Leftrightarrow \{i \in I \mid t_1(a_1(i), \dots, a_n(i)) = t_2(a_1(i), \dots, a_n(i))\} \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{M}$ — любой класс алгебр, n ($n \geq 1$) — произвольное натуральное число. Тогда через $L_n(\mathcal{M})$ обозначим класс всех алгебр G , обладающих следующим свойством: для любой n -порожденной подалгебры A алгебры G подалгебра a/θ_A ($a \in A$) принадлежит классу $\mathcal{M}$.

Отметим, что в случае групп класс $L_1(\mathcal{M})$ совпадает с классом Леви, порожденным классом $\mathcal{M}$ [1, 4].

§ 2. Общие свойства оператора L_n

Лемма 3. Если $\mathcal{M}$ — наследственный класс алгебр, то $L_n(\mathcal{M})$ также является наследственным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что класс $L_n(\mathcal{M})$ вместе с каждой алгеброй G содержит все ее подалгебры. Пусть $H \leq G$ и A — n -порожденная подалгебра, $A \leq H$, θ'_A и θ_A — определенные ранее конгруэнции на H и G соответственно. Из определений θ'_A и θ_A и леммы 1 следует, что $\theta'_A \subseteq \theta_A$, откуда $a/\theta'_A \leq a/\theta_A$ при $a \in A$. Поскольку $a/\theta_A \in \mathcal{M}$ и $\mathcal{M}$ — наследственный класс, то $a/\theta'_A \in \mathcal{M}$. Отсюда $H \in L_n(\mathcal{M})$. Лемма доказана.

Теорема 1. Если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие алгебр, то $L_n(\mathcal{M})$ также является квазимногообразием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что единичная алгебра E содержится в классе $L_n(\mathcal{M})$. По лемме 3 $L_n(\mathcal{M})$ — наследственный класс. Осталось ввиду теоремы Мальцева [18, § 11, следствие 3] показать замкнутость класса $L_n(\mathcal{M})$ относительно фильтрованных произведений.

Пусть $G_k \in L_n(\mathcal{M})$ ($k \in K$), $\mathcal{D}$ — фильтр над K , $G = \prod_{k \in K} G_k/\mathcal{D}$ — фильтрованное произведение алгебр G_k по фильтру $\mathcal{D}$, $A = \langle f_1\mathcal{D}, \dots, f_n\mathcal{D} \rangle \leq G$, $a\mathcal{D}$ — произвольный элемент из A . Необходимо показать, что $a\mathcal{D}/\theta_A \in \mathcal{M}$. Предположим, что $A_k = \langle f_1(k), \dots, f_n(k) \rangle$ — подалгебра алгебры G_k , порожденная элементами $f_1(k), \dots, f_n(k)$, а $f_1(k)/\theta_{A_k}$ — соответствующие смежные классы (заметим, что вместо $f_1(k)$ можно взять любой элемент из A_k). Рассмотрим алгебру $B = \prod_{k \in K} (f_1(k)/\theta_{A_k})/\mathcal{D}$. Зададим отображение $\varphi: a\mathcal{D}/\theta_A \rightarrow B$ следующим образом.

Берем любой элемент $b\mathcal{D} \in a\mathcal{D}/\theta_A$. Тогда $(a\mathcal{D}, b\mathcal{D}) \in \theta_A$. По лемме 1 существуют такие пары $(x_i\mathcal{D}, y_i\mathcal{D}) \in A \times A$ и такие трансляции g_i алгебры G ($i = 0, \dots, s$), что

$$a\mathcal{D} = g_0(x_0\mathcal{D}), \quad g_i(x_i\mathcal{D}) = g_{i-1}(y_{i-1}\mathcal{D}) \quad (i = 1, \dots, s), \quad g_s(y_s\mathcal{D}) = b\mathcal{D}.$$

Обозначим через J множество всех $j \in K$ таких, что в алгебре G_j имеем

$$a(j), x_i(j), y_i(j) \in A_j \quad (i = 0, \dots, s),$$

$$a(j) = g_0(x_0(j)), \quad g_i(x_i(j)) = g_{i-1}(y_{i-1}(j)) \quad (i = 1, \dots, s), \quad g_s(y_s(j)) = b(j),$$

где g_i — соответствующие трансляции алгебры G_j ($i = 0, \dots, s$). Из замкнутости фильтра относительно пересечений конечного числа своих элементов следует, что $J \in \mathcal{D}$. Из леммы 1 вытекает, что при каждом $j \in J$ $(a(j), b(j)) \in \theta_{A_j}$, т. е. $b(j) \in a(j)/\theta_{A_j}$. Поскольку $a(j)/\theta_{A_j} = f_1(j)/\theta_{A_j}$, можем определить следующий элемент $t_b \in \prod_{k \in K} (f_1(k)/\theta_{A_k})$:

$$t_b(j) = b(j) \text{ при } j \in J; \quad t_b(j) \text{ — произвольный элемент из } f_1(j)/\theta_{A_j} \text{ при } j \notin J.$$

Полагаем по определению

$$\varphi(b\mathcal{D}) = t_b\mathcal{D}.$$

Отметим, что если при построении $\varphi(b\mathcal{D})$ пользоваться другим набором элементов $a\mathcal{D}, x_i\mathcal{D}, y_i\mathcal{D} \in A$ ($i = 0, \dots, m$) и другим набором трансляций g_i алгебры G ($i = 0, \dots, m$), то по аналогии с J возникнет некоторое множество $J' \in \mathcal{D}$, по которому определяется t_b . Поскольку $J \cap J' \in \mathcal{D}$, образ элемента $b\mathcal{D}$ задается однозначно.

Покажем, что φ — гомоморфизм. Пусть f — m -арная операция, $b_1\mathscr{D}, \dots, b_m\mathscr{D} \in a\mathscr{D}/\theta_A$. Так как $\mathscr{D}$ — фильтр, из определения t_b и леммы 2 следует, что существует множество $J_1 \in \mathscr{D}$ такое, что $t_{b_i}(j) = b_i(j)$ для всех $j \in J_1$ и каждого $i = 1, \dots, m$. Тогда

$$f(b_1, \dots, b_m)(j) = f(b_1(j), \dots, b_m(j)) = f(t_{b_1}(j), \dots, t_{b_m}(j)) = f(t_{b_1}, \dots, t_{b_m})(j)$$

для каждого $j \in J_1$. Возьмем $J_2 \in \mathscr{D}$ такое, что

$$t_{f(b_1, \dots, b_m)}(j) = f(b_1, \dots, b_m)(j)$$

для всех $j \in J_2$. Тогда при каждом $j \in J_1 \cap J_2 \in \mathscr{D}$ имеем

$$t_{f(b_1, \dots, b_m)}(j) = f(t_{b_1}, \dots, t_{b_m})(j).$$

Это означает, что $t_{f(b_1, \dots, b_m)}\mathscr{D} = f(t_{b_1}, \dots, t_{b_m})\mathscr{D}$, откуда

$$\begin{aligned} \varphi(f(b_1\mathscr{D}, \dots, b_m\mathscr{D})) &= \varphi(f(b_1, \dots, b_m)\mathscr{D}) = t_{f(b_1, \dots, b_m)}\mathscr{D} \\ &= f(t_{b_1}, \dots, t_{b_m})\mathscr{D} = f(t_{b_1}\mathscr{D}, \dots, t_{b_m}\mathscr{D}) = f(\varphi(b_1\mathscr{D}), \dots, \varphi(b_m\mathscr{D})). \end{aligned}$$

Таким образом, φ — гомоморфизм.

Покажем, что φ — вложение. Пусть $\varphi(b_1\mathscr{D}) = \varphi(b_2\mathscr{D})$. Поскольку $\mathscr{D}$ — фильтр, найдется $J \in \mathscr{D}$ такое, что

$$b_1(j) = t_{b_1}(j) = t_{b_2}(j) = b_2(j) \quad \text{для всех } j \in J.$$

Отсюда $b_1\mathscr{D} = b_2\mathscr{D}$, следовательно, φ — вложение.

Так как $A_k = \langle f_1(k), \dots, f_n(k) \rangle$ — n -порожденная подалгебра алгебры $G_k \in \mathscr{M}$, то $f_1(k)/\theta_{A_k} \in \mathscr{M}$. Значит, $B = \prod_{k \in K} (f_1(k)/\theta_{A_k})\mathscr{D} \in \mathscr{M}$, откуда $a\mathscr{D}/\theta_A \in \mathscr{M}$, поскольку φ — вложение. Теорема доказана.

Несложная модификация доказательства теоремы 1 приводит нас к следующим результатам.

Следствие 1. Если $\mathscr{M}$ — наследственный и мультипликативно замкнутый класс алгебр, то $L_n(\mathscr{M})$ наследственный и мультипликативно замкнутый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наследственность класса $L_n(\mathscr{M})$ вытекает из леммы 3. Далее следует повторить доказательство теоремы 1, взяв в качестве $\mathscr{D}$ одноэлементный фильтр $\mathscr{D} = \{K\}$. Известно, что в этом случае фильтрованное произведение над $\mathscr{D}$ совпадает с прямым произведением над K . Следствие доказано.

Следствие 2. Если $\mathscr{M}$ — наследственный и ультразамкнутый класс алгебр, то $L_n(\mathscr{M})$ наследственный и ультразамкнутый.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует повторить доказательство теоремы 1, взяв в качестве $\mathscr{D}$ ультрафильтр. Следствие доказано.

Известно [18, § 8.3, следствие 5], что класс алгебр универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он ультразамкнутый и наследственный. Значит, следствие 2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 2. Если $\mathscr{M}$ — универсально аксиоматизируемый класс алгебр, то $L_n(\mathscr{M})$ также является универсально аксиоматизируемым классом.

В случае групп известно [14, лемма 1], что если $\mathscr{M}$ — локально конечное квазимногообразие групп, то класс $L_1(\mathscr{M})$ также локально конечен. Аналог этого результата оказался несправедливым в случае универсальных алгебр.

Теорема 3. Существует локально конечное квазимногообразие $\mathcal{P}_0$ алгебр такое, что $L_1(\mathcal{P}_0)$ не является локально конечным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве $\mathcal{P}_0$ многообразие полурешеток. Ясно, что $\mathcal{P}_0$ — локально конечное многообразие.

Рассмотрим следующий 2-порожденный группоид G . Его элементы таковы: $0, x_1, a_1, a_2, a_3, \dots$, где $a_1 = x_2$, $a_2 = x_2 x_1$, $a_3 = a_2 x_1, \dots$, $a_{i+1} = a_i x_1, \dots$. Операции заданы следующим образом:

$$x_1 \cdot x_1 = x_1, \quad 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \quad \text{для всех } x \in G,$$

$$a_i \cdot x_1 = a_{i+1}, \quad a_i \cdot a_i = a_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$$u \cdot v = 0 \quad \text{для всех остальных пар } (u, v).$$

Каждая 1-порожденная подалгебра A алгебры G является одноэлементной полурешеткой, поэтому $\theta_A = \Delta$, откуда $G \in L_1(\mathcal{P}_0)$. Поскольку G — 2-порожденная бесконечная алгебра, $L_1(\mathcal{P}_0)$ не является локально конечным классом. Теорема доказана.

Было бы интересно найти условия на классы алгебр, при выполнении которых из локальной конечности квазимногообразия $\mathcal{M}$ следует локальная конечность класса $L_n(\mathcal{M})$.

Из определения $L_n(\mathcal{M})$ вытекает, что если $\mathcal{M}$ — наследственный класс, то

$$L_1(\mathcal{M}) \supseteq L_2(\mathcal{M}) \supseteq L_3(\mathcal{M}) \cdots \supseteq \mathcal{M}.$$

Если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие аксиоматического ранга n , то алгебра G принадлежит $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда все ее n -порожденные подалгебры содержатся в $\mathcal{M}$. Отсюда $L_n(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ в этом случае. Возникает вопрос: если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие алгебр и $L_n(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ при подходящем n , верно ли, что $\mathcal{M}$ имеет конечный аксиоматический ранг? Это верно, например, для всякого квазимногообразия абелевых групп.

Поскольку все n -порожденные алгебры из квазимногообразия $\mathcal{M}$ содержатся в $L_n(\mathcal{M})$ и всякое квазимногообразие порождается своими конечно порожденными алгебрами, получаем

Предложение 1. Если $\mathcal{M}$ — квазимногообразие алгебр, то

$$\bigcap_{n < \omega} L_n(\mathcal{M}) = \mathcal{M}.$$

Отсюда вытекает

Следствие 3. Если $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — квазимногообразия алгебр и $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$, то найдется натуральное число n такое, что $L_n(\mathcal{M}) \neq L_n(\mathcal{N})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если предположить, что $L_n(\mathcal{M}) = L_n(\mathcal{N})$ для каждого n , то

$$\mathcal{M} = \bigcap_{n < \omega} L_n(\mathcal{M}) = \bigcap_{n < \omega} L_n(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$$

ввиду предложения 1. Полученное противоречие доказывает следствие.

§ 3. Многообразие алгебр и оператор L_n

Ясно, что если квазитожество от n -переменных истинно в каждой алгебре из квазимногообразия $\mathcal{M}$, то оно истинно в $L_n(\mathcal{M})$. Ряд свойств многообразий описывается на языке тождеств (например, при помощи условий Мальцева [17]). Применяя эти описания, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. 1. Если $\mathcal{M}$ — конгруэнц-перестановочное или арифметическое многообразие алгебр, то таковым же является квазимногообразие $L_2(\mathcal{M})$.

2. Если многообразие алгебр $\mathcal{M}$ имеет n -перестановочные конгруэнции или является конгруэнц-дистрибутивным или конгруэнц-модулярным, то таковым же классом является квазимногообразие $L_3(\mathcal{M})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [17, теоремы 13.1, 13.2, 14.1, 46.1], что многообразие $\mathcal{M}$ обладает свойством из формулировки теоремы тогда и только тогда, когда в нем выполнен определенный набор тождеств (от двух переменных в случае 1, от трех переменных в случае 2). Значит, эти тождества истинны в свободных алгебрах из соответствующих квазимногообразий $L_k(\mathcal{M})$ ($k \geq 2$ в случае 1, $k \geq 3$ в случае 2). Но свободные алгебры в классах $L_k(\mathcal{M})$ и $\text{var}(L_k(\mathcal{M}))$ одни и те же. Поэтому рассматриваемые тождества истинны в соответствующих многообразиях $\text{var}(L_k(\mathcal{M}_i))$, следовательно, эти многообразия (и их подквазимногообразия $L_k(\mathcal{M}_i)$) обладают свойствами из формулировки теоремы. Теорема доказана.

Теорема 5. Существует конгруэнц-перестановочное многообразие алгебр $\mathcal{M}$ такое, что квазимногообразие $L_1(\mathcal{M})$ не конгруэнц-перестановочно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве $\mathcal{M}$ многообразие алгебр, заданное тождествами

$$m(x, x, y) = y, \quad m(x, y, y) = x,$$

где m — 3-арная операция. По теореме Мальцева [17, теорема 13.1] многообразие $\mathcal{M}$ конгруэнц-перестановочное.

Пусть $\mathcal{N}$ — многообразие алгебр, заданное тождеством $m(x, x, x) = x$. Если $G \in L_1(\mathcal{M})$, $a \in G$, то $a/\theta_{\langle a \rangle} \in \mathcal{M}$. Поскольку в $\mathcal{M}$ истинно тождество $m(x, x, x) = x$, это тождество истинно в $a/\theta_{\langle a \rangle}$, откуда $m(a, a, a) = a$. Значит, $L_1(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{N}$.

Пусть $G \in \mathcal{N}$. Тогда всякая ее 1-порожденная подалгебра будет одноэлементной. Отсюда наименьшей конгруэнцией, содержащей $\langle a \rangle \times \langle a \rangle$, будет Δ , откуда $a/\theta_{\langle a \rangle} = \langle a \rangle \in \mathcal{M}$. Следовательно, $G \in L_1(\mathcal{M})$, т. е. $\mathcal{N} \subseteq L_1(\mathcal{M})$. Итак, $\mathcal{N} = L_1(\mathcal{M})$.

Пусть $\langle P, \cdot \rangle$ — свободная полурешетка ранга 3, a, b, c — ее свободные порождающие, $\theta(x, y)$ — конгруэнция на ней, порожденная парой (x, y) . Несложно проверяется, что $(a, c) \in \theta(a, b)\theta(b, c)$ и $(a, c) \notin \theta(b, c)\theta(a, b)$, откуда $\theta(a, b)\theta(b, c) \neq \theta(b, c)\theta(a, b)$. Введем на этой полурешетке термальную операцию так: $f(x, y, z) = xyz$. Возникла алгебра $\langle P, f \rangle \in \mathcal{N}$. Поскольку f — термальная операция, всякая конгруэнция на $\langle P, \cdot \rangle$ является конгруэнцией на $\langle P, f \rangle$. Следовательно, конгруэнции на $\langle P, f \rangle$ не перестановочны. Теорема доказана.

Лемма 4. Если $\mathcal{M}$ — конгруэнц-перестановочный и гомоморфно замкнутый класс алгебр, то класс $L_n(\mathcal{M})$ гомоморфно замкнут.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $E \in L_n(\mathcal{M})$, то $L_n(\mathcal{M}) \neq \emptyset$. Пусть $G \in L_n(\mathcal{M})$, $\varphi: G \rightarrow B$ — гомоморфизм алгебры G на B , $\theta = \ker \varphi = \{(x, y) \mid \varphi(x) = \varphi(y)\}$ — ядро гомоморфизма φ . Образ элемента $x \in G$ при гомоморфизме φ

удобно обозначать через $\bar{x}$. Пусть $\bar{A} = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle$ — n -порожденная подалгебра алгебры B , $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \leq G$.

По лемме 1 $(a_1, d) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют такие пары $(x_i, y_i) \in A \times A$ и такие трансляции h_i алгебры G ($i = 0, \dots, s$), что

$$a_1 = h_0(x_0), \quad h_i(x_i) = h_{i-1}(y_{i-1}) \quad (i = 1, \dots, s), \quad h_s(y_s) = d.$$

Рассмотрев образы всех только что выписанных элементов, видим, что если $d \in a_1/\theta_A$, то $\varphi(d) \in \bar{a}_1/\theta_{\bar{A}}$. Таким образом, $\varphi(a_1/\theta_A) \subseteq \bar{a}_1/\theta_{\bar{A}}$. Докажем обратное включение.

Возьмем произвольный элемент $\bar{b} \in \bar{a}_1/\theta_{\bar{A}}$. По лемме 1 существуют такие пары $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in \bar{A} \times \bar{A}$ и такие трансляции $\bar{g}_i$ алгебры B ($i = 0, \dots, s$), что

$$\bar{a}_1 = \bar{g}_0(\bar{x}_0), \quad \bar{g}_1(\bar{x}_1) = \bar{g}_0(\bar{y}_0), \dots, \quad \bar{g}_i(\bar{x}_i) = \bar{g}_{i-1}(\bar{y}_{i-1}), \dots, \quad \bar{g}_s(\bar{x}_s) = \bar{g}_{s-1}(\bar{y}_{s-1}),$$

$$\bar{g}_s(\bar{y}_s) = \bar{b}.$$

Пусть g_i — соответствующая трансляция алгебры G такая, что $\varphi(g_i(x)) = \bar{g}_i(\bar{x})$. Считаем, что все x_i, y_i взяты из A . Отсюда $(g_i(x_i), g_i(y_i)) \in \theta_A$.

Применив выписанное выше к алгебре G , имеем

$$(a_1, g_0(x_0)) \in \theta, \quad (g_0(y_0), g_1(x_1)) \in \theta, \quad (g_1(y_1), g_2(x_2)) \in \theta, \dots,$$

$$(g_{s-1}(y_{s-1}), g_s(x_s)) \in \theta, \quad (g_s(y_s), b) \in \theta.$$

Учитывая, что $(g_i(x_i), g_i(y_i)) \in \theta_A$, получаем

$$(a_1, b) \in \theta\theta_A\theta\theta_A \dots \theta_A\theta.$$

Поскольку конгруэнции на алгебре G перестановочны, имеем $(a_1, b) \in \theta_A\theta$. В силу определения произведения конгруэнций найдется элемент $c \in G$ такой, что $(a_1, c) \in \theta_A$, $(c, b) \in \theta$. Следовательно, $\varphi(c) = \bar{b}$ и $c \in a_1/\theta_A$.

Итак, всякий элемент из $\bar{a}_1/\theta_{\bar{A}}$ имеет прообраз, содержащийся в a_1/θ_A . Значит, $\bar{a}_1/\theta_{\bar{A}}$ — образ некоторой подалгебры алгебры a_1/θ_A при φ . Из $\varphi(a_1/\theta_A) \subseteq \bar{a}_1/\theta_{\bar{A}}$, получаем, что $\varphi(a_1/\theta_A) = \bar{a}_1/\theta_{\bar{A}}$. Поскольку A — n -порожденная алгебра, $a_1/\theta_A \in \mathcal{M}$. Но $\mathcal{M}$ — гомоморфно замкнутый класс, значит, $\bar{a}_1/\theta_{\bar{A}} \in \mathcal{M}$. Итак, показали, что $B \in L_n(\mathcal{M})$. Лемма доказана.

Теорема 6. Если $\mathcal{M}$ — конгруэнц-перестановочное многообразие алгебр, то $L_n(\mathcal{M})$ также является многообразием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По известной теореме Биркгофа [18] класс алгебр является многообразием тогда и только тогда, когда он наследствен, мультипликативно и гомоморфно замкнут. Из следствия 1 и леммы 4 вытекает, что наследственным, мультипликативно и гомоморфно замкнутым является класс $L_n(\mathcal{M})$. Следовательно, $L_n(\mathcal{M})$ — многообразие. Теорема доказана.

Отметим, что известными [17] примерами конгруэнц-перестановочных многообразий служат многообразия групп, колец, квазигрупп, луп, булевых алгебр.

Следующий пример показывает, что в формулировке теоремы 6 избавиться от конгруэнц-перестановочности нельзя.

Теорема 7. Пусть $\mathcal{P}$ — многообразие коммутативных полугрупп. Тогда $L_1(\mathcal{P})$ не является многообразием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F = \langle a, b \rangle$ — свободная полугруппа со свободными порождающими a, b , $A = \langle x \rangle$. Покажем сначала, что $x/\theta_A \in \mathcal{P}$. Рассмотрим

$$\theta = \Delta \cup \{(x^{k_1} a^{m_1} b^{n_1} x^{k_2} a^{m_2} b^{n_2} \dots x^{k_s} a^{m_s} b^{n_s}, x^{r_1} a^{m_1} b^{n_1} x^{r_2} a^{m_2} b^{n_2} \dots x^{r_s} a^{m_s} b^{n_s}) \\ | (\exists i, j) (k_i \neq 0 \ \& \ r_j \neq 0), (k_1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 0), k_i, m_i, r_i, n_i, s \in \{0, 1, 2, \dots\}\}.$$

Запись вида y^0 означает отсутствие сомножителя y^0 в соответствующем произведении. Несложно заметить, что θ — конгруэнция на F . Отсюда $\theta_A \subseteq \theta$. Следовательно, $x/\theta_A \subseteq x/\theta$. Исследуем смежный класс x/θ .

Возьмем произвольный элемент $y \in x/\theta$, $y \neq x$. Так как $(x, y) \in \theta$, элементы x, y можно представить в следующем виде:

$$x = x^{k_1} a^{m_1} b^{n_1} x^{k_2} a^{m_2} b^{n_2} \dots x^{k_s} a^{m_s} b^{n_s}, \quad y = x^{r_1} a^{m_1} b^{n_1} x^{r_2} a^{m_2} b^{n_2} \dots x^{r_s} a^{m_s} b^{n_s}.$$

Длина элемента из F — это сумма чисел вхождений a и b в запись этого элемента. В силу того, что существует i , для которого $k_i \neq 0$, длина элемента $x^{k_1} a^{m_1} b^{n_1} x^{k_2} a^{m_2} b^{n_2} \dots x^{k_s} a^{m_s} b^{n_s}$ свободной полугруппы равна длине элемента x тогда и только тогда, когда $k_i = 1$ и все остальные показатели в этом произведении равны 0. Отсюда получаем, что $y = x^{r_1 + \dots + r_s}$, т. е. $y \in A$. Итак, доказали, что $x/\theta = A$, поэтому $x/\theta_A = A \in \mathcal{P}$. Значит, $F \in L_1(\mathcal{P})$.

В качестве B возьмем любую простую некоммутативную 2-порожденную полугруппу, содержащую такой элемент z , что $z^2 \neq z$ (например, знакопеременную группу A_5 , рассматриваемую как полугруппу). Тогда $\theta_{\langle z \rangle} \neq \Delta$, откуда $z/\theta_{\langle z \rangle} = B \notin \mathcal{P}$, т. е. $B \notin L_1(\mathcal{P})$. Но полугруппа B является гомоморфным образом свободной полугруппы F . Сказанное означает, что $L_1(\mathcal{P})$ не является многообразием. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kappe L. C. On Levi-formations // Arch. Math. 1972. V. 23, N 1. P. 561–572.
2. Levi F. W. On groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions // J. Indian Math. Soc. 1942. V. 6. P. 87–97.
3. Morse R. F. Levi-properties generated by varieties // Contemp. Math. 1994. V. 169. P. 467–474.
4. Будкин А. И. Квазимногообразия Леви // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 266–270.
5. Kappe L. C., Morse R. F. Levi-properties in metabelian groups // Contemp. Math. 1990. V. 109. P. 59–72.
6. Kappe L. C., Morse R. F. Groups with 3-abelian normal closures // Arch. Math. 1988. V. 51, N 2. P. 104–110.
7. Будкин А. И. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 6. С. 635–647.
8. Будкин А. И., Таранина Л. В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 270–277.
9. Лодейщикова В. В. О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 1. С. 26–41.
10. Лодейщикова В. В. О квазимногообразиях Леви, порожденных нильпотентными группами // Изв. АлтГУ. 2009. Т. 61, № 1. С. 26–29.
11. Лодейщикова В. В. Об одном классе Леви экспоненты $2p$ // Изв. АлтГУ. 2014. Т. 81, № 1/2. С. 45–51.
12. Лодейщикова В. В. Об одном квазимногообразии Леви экспоненты 8 // Изв. АлтГУ. 2010. Т. 65, № 1/2. С. 42–45.
13. Лодейщикова В. В. О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1359–1366.
14. Лодейщикова В. В. Об одном многообразии Леви экспоненты $2p$ // Изв. АлтГУ. 2015. Т. 85, № 1/1. С. 84–88.

15. Лодейщикова В. В. О классе Леви, порожденном почти абелевым квазимногообразием нильпотентных групп // Изв. АлтГУ. 2016. Т. 89, № 1. С. 148–151.
16. Шахова С. А. Об аксиоматическом ранге квазимногообразия M^{p^2} // Изв. АлтГУ. 2015. Т. 85, № 1/2. С. 179–182.
17. Смирнов Д. М. Многообразия алгебр. Новосибирск: Наука; Сибирская издательская фирма, 1992.
18. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 23 октября 2018 г.

После доработки 23 октября 2018 г.

Принята к публикации 19 декабря 2018 г.

Будкин Александр Иванович
Алтайский гос. университет,
ул. Ленина, 61, Барнаул 656064
budkin@math.asu.ru