K. Denecke, The partial clone of linear formulas, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 734–750

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.403>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.210.77.194

April 26, 2023, 17:38:13

ЧАСТИЧНЫЙ КЛОН ЛИНЕЙНЫХ ФОРМУЛ

К. Денеке

Аннотация. Терм t называется *линейным*, если ни одна переменная не входит в него более одного раза. Тожество $s \approx t$ называется *линейным*, если s и t — линейные термы. Тожества — частный случай формул. Как и в случае термов, операции суперпозиции могут быть определены также и для формул. В статье определены произвольные линейные формулы и поставлен вопрос: при каких условиях множество всех линейных формул замкнуто относительно суперпозиции формул? Это свойство используется для определения операторов частичной суперпозиции на множестве линейных формул и многосортной частичной алгебре $\text{Formclone}_{\text{lin}}(\tau, \tau')$. Оказывается, что эта алгебра обладает подобными свойствами как частичный многосортный клон всех линейных термов. Во второй части понятие гиперподстановки типа τ распространено на линейные гиперподстановки типа (τ, τ') для алгебраических систем. Продолжения линейных гиперподстановок типа (τ, τ') отображают линейные формулы в линейные формулы и являются слабыми эндоморфизмами $\text{Formclone}_{\text{lin}}(\tau, \tau')$.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.403

Ключевые слова: терм, формула, суперпозиция формул, линейный терм, линейная формула, клон, частичный клон, линейная гиперподстановка для формул.

1. Предварительные сведения

Пусть $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — конечное множество переменных, и пусть множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ счетно бесконечно. Пусть $(f_i)_{i \in I}$ — индексированное множество символов операций, где символ f_i n_i -арен и $n_i \in \mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ для всех $i \in I$, $I \neq \emptyset$. Пусть $(\gamma_j)_{j \in J}$ — индексированное множество символов отношений, где символ γ_j n_j -арен, $n_j \in \mathbb{N}^+$ и $j \in J$. Пусть $\tau := (n_i)_{i \in I}$, и пусть $\tau' := (n_j)_{j \in J}$, $J \neq \emptyset$. Множество $W_\tau(X_n)$ всех n -арных термов типа τ определяется следующим образом:

- (i) всякий элемент $x_k \in X_n$ — n -арный терм типа τ ,
- (ii) если $t_1, \dots, t_{n_i}$ — n -арные термы типа τ , а f_i — n_i -арный символ операции, то $f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$ — n -арный терм типа τ .

Пусть $W_\tau(X) = \bigcup_{n \geq 1} W_\tau(X_n)$ — множество всех термов типа τ . То же самое

обозначение используется для многосортного множества $W_\tau(X) := (W_\tau(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}$.

Заметим, что множество всех термов типа τ является формальным языком эквациональной логики универсальной алгебры. Здесь модели множеств равенств $s \approx t$, состоящих из термов $s, t \in W_\tau(X)$, — универсальные алгебры $\mathcal{A} = (A; (f_i^{\mathcal{A}})_{i \in I})$ типа τ , где $f_i^{\mathcal{A}} : A^{n_i} \rightarrow A$ — n_i -арные операции для каждого $i \in I$. Равенства — специальный вид формул. Для описания свойств алгебраических систем $\mathcal{A} = (A; (f_i^{\mathcal{A}})_{i \in I}, (\gamma_j^{\mathcal{A}})_{j \in J})$, где $(\gamma_j^{\mathcal{A}})_{j \in J}$ — индексное множество отношений, определенных на множестве A , нужно больше общих формул.

Произвольные n -арные формулы типа (τ, τ') определяются следующим образом (см., например, [1, 2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $n \in \mathbb{N}^+$. n -Арная формула типа (τ, τ') определяется следующим индуктивным образом.

(i) Если t_1, t_2 — n -арные термы типа τ , то равенство $t_1 \approx t_2$ — n -арная формула типа (τ, τ') . Все переменные в $t_1 \approx t_2$ свободны. Свобода переменной x_i в формуле F означает, что перед x_i в F нет квантора $\exists$.

(ii) Если $t_1, \dots, t_{n_j}$ — n -арные термы типа τ и γ_j — n_j -арный символ отношения, то $\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j})$ — n -арная формула типа (τ, τ') . Все переменные в такой формуле свободны.

(iii) Если F — n -арная формула типа (τ, τ') , то $\neg F$ — n -арная формула типа (τ, τ') . Все свободные переменные в F свободны также в $\neg F$. Все связанные переменные в F также связаны в $\neg F$.

(iv) Если F_1 и F_2 — n -арные формулы типа (τ, τ') такие, что переменные, входящие в обе формулы одновременно, свободны в каждой из них, то $F_1 \vee F_2$ — n -арная формула типа (τ, τ') . Переменные, свободные хотя бы в одной из формул F_1 или F_2 , также свободны в $F_1 \vee F_2$. Переменные, связанные в одной из формул F_1 или F_2 , также связаны в $F_1 \vee F_2$.

(v) Если F — n -арная формула типа (τ, τ') и переменная $x_i \in X_n$ свободна в формуле F , то $\exists x_i(F)$ — n -арная формула типа (τ, τ') . Переменная x_i связана в формуле $\exists x_i(F)$, и все остальные свободные или связанные переменные в F таковы же и в $\exists x_i(F)$.

Пусть $\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n))$ — множество всех n -арных формул типа (τ, τ') , и пусть

$$\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X)) := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n))$$

— множество всех формул типа (τ, τ') . Будем также использовать обозначение

$$\hat{\mathcal{F}}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X)) := (\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

Приведенное определение следует [1] с той лишь разницей, что в [1] еще рассматриваются логические связки $\wedge$ и $\rightarrow$ и квантор $\forall$, которые можно вывести из $\vee$, $\neg$ и $\exists$. Отметим, что символ равенства в (i) не принадлежит символам отношений из $\{\gamma_j \mid j \in J\}$.

Как известно, на многосортном множестве $W_\tau(X)$ можно определить операторы суперпозиции $S_m^n : W_\tau(X_n) \times (W_\tau(X_m))^n \rightarrow W_\tau(X_m)$ по индукции для $m, n \in \mathbb{N}^+$ следующим образом:

$$S_m^n : W_\tau(X_n) \times (W_\tau(X_m))^n \rightarrow W_\tau(X_m)$$

и

- (i) $S_m^n(x_j, t_1, \dots, t_n) := t_j$ при $1 \leq j \leq n$,
- (ii) $S_m^n(f_i(s_1, \dots, s_{n_i}), t_1, \dots, t_n) = f_i(S_m^n(s_1, t_1, \dots, t_n), \dots, S_m^n(s_{n_i}, t_1, \dots, t_n))$.

Тогда можно определить многосортную алгебру

$$\text{clone } \tau := ((W_\tau(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}; (S_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (x_i)_{i \leq n \in \mathbb{N}^+}),$$

клон всех термов типа τ , удовлетворяющую следующим трем равенствам:

$$(C1) \quad \widetilde{S}_m^p(\widetilde{Z}, \widetilde{S}_m^n(\widetilde{Y}_1, \widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n), \dots, \widetilde{S}_m^n(\widetilde{Y}_p, \widetilde{X}_1; \dots, \widetilde{X}_n)) \\ \approx \widetilde{S}_m^n(\widetilde{S}_n^p(\widetilde{Z}, \widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_p), \widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n) \quad (m, n, p \in \mathbb{N}^+);$$

$$(C2) \quad \widetilde{S}_m^n(\lambda_j, \widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n) \approx \widetilde{X}_j \quad (m = 1, 2, \dots, 1 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}^+);$$

$$(C3) \quad \widetilde{S}_n^n(\widetilde{Y}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \approx \widetilde{Y} \quad (n \in \mathbb{N}^+),$$

где $\widetilde{Z}, \widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_p, \widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_n$ — переменные термов, $\widetilde{S}_m^n$ — символы операций и $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, — нуль-арные символы операций.

Равенство (C1) обобщает закон ассоциативности. В самом деле, при $m = n = p = 1$ имеем $\widetilde{S}_1^1(\widetilde{Z}, \widetilde{S}_1^1(\widetilde{Y}_1, \widetilde{X}_1)) \approx \widetilde{S}_1^1(\widetilde{S}_1^1(\widetilde{Z}, \widetilde{Y}_1), \widetilde{X}_1)$. Поэтому (C1) называется *законом суперассоциативности*.

Понятие клона — одно из основных алгебраических понятий. Всякая модель аксиом (C1)–(C3) называется *абстрактным клоном*. Пусть A , где $|A| > 1$, — произвольное непустое множество, $O^n(A)$ — множество всех n -арных операций на A , и пусть $O(A) := \bigcup_{n \geq 1} O^n(A)$ — множество всех операций на A . На многосортном множестве $(O^n(A))_{n \in \mathbb{N}^+}$ операторы суперпозиции $S_m^{n,A} : O^n(A) \times (O^m(A))^n \rightarrow O^m(A)$ определяются равенством

$$S_m^{n,A}(f, g_1, \dots, g_n)(a_1, \dots, a_m) := f(g_1(a_1, \dots, a_m), \dots, g_n(a_1, \dots, a_m))$$

для всех $a_1, \dots, a_m \in A$. Вместе с операциями проектирования $e_i^{n,A}$, определенными формулами $e_i^{n,A}(a_1, \dots, a_n) := a_i$ для всех $a_1, \dots, a_n \in A$ и $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}^+$, получаем многосортную алгебру

$$((O^n(A))_{n \in \mathbb{N}^+}; (S_m^{n,A})_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (e_i^{n,A})_{1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^+}).$$

Эта алгебра удовлетворяет соотношениям (C1)–(C3), т. е. является клоном. Такие клоны операций называются *конкретными клонами*. Известно, что всякий абстрактный клон изоморфен конкретному клону. Клон также может рассматриваться как категория. Категории, двойственные таким категориям, являются так называемыми теориями Ловира (см. [3]).

В [2] введены операторы суперпозиции на множествах формул следующим образом (см. также [4]):

$$R_m^n : \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n)) \times (W_\tau(X_m))^n \rightarrow \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_m)),$$

где

(i) если $t_1 \approx t_2 \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n))$ и $s_1, \dots, s_n \in W_\tau(X_m)$, то $R_m^n(t_1 \approx t_2, s_1, \dots, s_n)$ — это формула $S_m^n(t_1, s_1, \dots, s_n) \approx S_m^n(t_2, s_1, \dots, s_n)$;

(ii) если $\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j}) \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n))$ и $s_1, \dots, s_n \in W_\tau(X_m)$, то $R_m^n(\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j}), s_1, \dots, s_n)$ — это формула

$$\gamma_j(S_m^n(t_1, s_1, \dots, s_n), \dots, S_m^n(t_{n_j}, s_1, \dots, s_n));$$

(iii) если $\neg F \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n))$ и $s_1, \dots, s_n \in W_\tau(X_m)$, то $R_m^n(\neg F, s_1, \dots, s_n)$ — это формула $\neg R_m^n(F, s_1, \dots, s_n)$;

(iv) если $F_1 \vee F_2 \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n))$ и $s_1, \dots, s_n \in W_\tau(X_m)$, то $R_m^n(F_1 \vee F_2, s_1, \dots, s_n)$ — это формула $R_m^n(F_1, s_1, \dots, s_n) \vee R_m^n(F_2, s_1, \dots, s_n)$;

(v) если $\exists x_i(F) \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n))$ и $s_1, \dots, s_n \in W_\tau(X_m)$, то $R_m^n(\exists x_i(F), s_1, \dots, s_n)$ — это формула $\exists x_i(R_m^n(F, s_1, \dots, s_n))$.

Определение операций R_m^n требует следующие два типа множеств:

$$(\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^+} \text{ и } (W_\tau(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

Можем рассматривать многосортную алгебру

$$\text{Formclone}(\tau, \tau') := ((\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^+}, (W_\tau(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}; (R_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, \\ (S_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (x_i)_{i \leq n, n \in \mathbb{N}^+}).$$

В [2] доказано, что эта многосортная алгебра удовлетворяет тождествам, указанным в теореме 1.2.

Теорема 1.2. Многосортная алгебра $\text{Formclone}(\tau, \tau')$ удовлетворяет следующим равенствам:

$$(\text{FC1}) \quad \tilde{R}_m^n(\tilde{R}_n^p(\tilde{F}, \tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p), \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n) \\ \approx \tilde{R}_m^p(\tilde{F}, \tilde{S}_m^n(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n), \dots, \tilde{S}_m^n(\tilde{X}_p, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_p))$$

где $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$ — переменные термов, $\tilde{R}_m^n, \tilde{R}_n^p, \tilde{S}_m^n$ — символы операций и $\tilde{F}$ — переменная для формулы;

(FC2) $\tilde{R}_n^n(\tilde{F}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \approx \tilde{F}$. Здесь $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, — нуль-арные символы операций.

Кроме того, (C1)–(C3) тоже выполняются.

2. Линейные формулы

Линейные термы над универсальной алгеброй являются обобщением линейных выражений над векторным пространством. Терм, в котором переменные встречаются не более одного раза, называется *линейным*. Для формального определения n -арных линейных термов заменим п. (ii) в определении термов немного другим условием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. n -Арный линейный терм типа τ определяется следующим образом по индукции.

- (i) Для каждого $j \in \{1, \dots, n\}$ $x_j \in X_n$ — n -арный линейный терм (типа τ).
- (ii) Если $t_1, \dots, t_{n_i}$ — n -арные линейные термы и $\text{var}(t_j) \cap \text{var}(t_k) = \emptyset$ для всех $1 \leq j < k \leq n_i$, то $f_i(t_1, \dots, t_{n_i})$ — n -арный линейный терм (здесь $\text{var}(t_j)$ — множество всех переменных, входящих в t_j).
- (iii) Множество $W_\tau^{\text{lin}}(X_n)$ всех n -арных линейных термов — самое маленькое множество, содержащее $x_1, \dots, x_n$ и замкнутое относительно конечных применений (ii).

Множество всех линейных термов типа τ над счетным бесконечным алфавитом X определяется формулой $W_\tau^{\text{lin}}(X) := \bigcup_{n \geq 1} W_\tau^{\text{lin}}(X_n)$. Также используем

$$W_\tau^{\text{lin}}(X) := (W_\tau^{\text{lin}}(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

Многосортное множество $(W_\tau^{\text{lin}}(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}$ линейных термов незамкнуто относительно S_m^n . В качестве примера рассмотрим $\tau = (2)$ с бинарным символом операций f . Тогда $S_2^2(f(x_2, x_1), x_1, f(x_2, x_1)) = f(f(x_2, x_1), x_1)$ нелинеен, хотя $f(x_2, x_1)$ и x_1 линейны. Задаем вопрос: при каком условии множество $(W_\tau^{\text{lin}}(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}$ замкнуто относительно S_m^n ?

Следующее предложение доказано в [5].

Предложение 2.2 [3]. Если

$$f_i(t_1, \dots, t_{n_i}) \in W_\tau^{\text{lin}}(X_n), \quad s_1, \dots, s_n \in W_\tau^{\text{lin}}(X_m), \quad \text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \emptyset$$

при $1 \leq j < k \leq n$, то

$$S_m^n(f_i(t_1, \dots, t_{n_i}), s_1, \dots, s_n) \in W_\tau^{\text{lin}}(X_m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$S_m^n(f_i(t_1, \dots, t_{n_i}), s_1, \dots, s_n) = f_i(S_m^n(t_1, s_1, \dots, s_n), \dots, S_m^n(t_{n_i}, s_1, \dots, s_n)),$$

нужно показать, что

- (1) $S_m^n(t_j, s_1, \dots, s_n) \in W_\tau^{\text{lin}}(X_m)$ при всех $1 \leq j \leq n_i$,
- (2) $\text{var}(S_m^n(t_j, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(S_m^n(t_k, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset$ при всех $1 \leq j < k \leq n_i$.

(1) Поскольку терм t_j линеен, переменные из X_n входят в t_j , $1 \leq j \leq n_i$, лишь однократно. Для этих переменных заменим термы из $\{s_1, \dots, s_n\}$. Но по предположению в множестве $\{s_1, \dots, s_n\}$ каждая переменная из X_m встречается лишь однажды, т. е. в $S_m^n(t_j, s_1, \dots, s_n)$ переменные из X_m входят лишь однажды, и потому терм $S_m^n(t_j, s_1, \dots, s_n)$ линеен.

(2) Поскольку $f_i(t_1, \dots, t_{n_i}) \in W_\tau^{\text{lin}}(X_n)$, имеем $\text{var}(t_j) \cap \text{var}(t_k) = \emptyset$ для $1 \leq j < k \leq n_i$, т. е. в $S_m^n(t_j, s_1, \dots, s_n)$ и $S_m^n(t_k, s_1, \dots, s_n)$ для различных переменных подставлены различные термы из $s_1, \dots, s_n$, содержащие различные переменные в силу равенства $\text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \emptyset$ для $1 \leq j < k \leq n_i$. $\square$

Предыдущий результат ведет к частичному многосортному отображению

$$\bar{S}_m^n : W_\tau^{\text{lin}}(X_n) \times (W_\tau^{\text{lin}}(X_m))^n \dashrightarrow W_\tau^{\text{lin}}(X_m),$$

определенному формулой

$$\begin{aligned} \bar{S}_m^n(t, s_1, \dots, s_n) \\ := \begin{cases} S_m^n(t, s_1, \dots, s_n), & \text{если } \text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \emptyset \text{ для всех } 1 \leq j < k \leq n, \\ \text{не определен} & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned}$$

для $m, n \in \mathbb{N}^+$ и многосортной частичной алгебры

$$\text{clone}_{\text{lin}} \tau := ((W_\tau^{\text{lin}}(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}, (\bar{S}_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (x_i)_{i \leq n, n \in \mathbb{N}^+}).$$

Равенство $s \approx t$ термов многосортной частичной алгебры $\mathcal{A}$ называется *слабым тождеством* в $\mathcal{A}$, если после означивания одна часть определена, другая часть определена и обе части равны. Многосортная частичная алгебра $\text{clone}_{\text{lin}} \tau$ удовлетворяет (C1)–(C3) как слабым соотношениям [5].

Наша основная цель — определить линейные формулы и затем проверить, могут ли результаты для линейных термов быть перенесены на линейные формулы. Для формулы F пусть $\text{var}(F)$ — множество переменных, входящих в F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Предположим, что $n \geq 1$. Пусть также $(f_i)_{i \in I}$ — индексированное множество символов операций типа τ , где f_i n_i -арен, и пусть $(\gamma_j)_{j \in J}$ — индексированное множество символов отношений типа τ' , где γ_j n_j -арен, $n_i, n_j \in \mathbb{N}^+$. n -Арная линейная формула типа (τ, τ') определяется по индукции следующим образом.

(i) Если t_1, t_2 — n -арные линейные термы типа τ , то равенство $t_1 \approx t_2$ — n -арная линейная формула типа (τ, τ') . Все переменные в $t_1 \approx t_2$ свободны.

(ii) Если $t_1, \dots, t_{n_j}$ — n -арные линейные термы типа τ , $\text{var}(t_k) \cap \text{var}(t_l) = \emptyset$ при $1 \leq k < l \leq n_j$ и γ_j — n_j -арный символ операции, то $\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j})$ — n -арная линейная формула типа (τ, τ') . Все переменные в такой формуле свободны.

(iii) Если F — n -арная линейная формула типа (τ, τ') , то $\neg F$ — n -арная линейная формула типа (τ, τ') . Все свободные переменные в F также свободны в $\neg F$. Все связанные переменные в F также связаны в $\neg F$.

(iv) Если F_1 и F_2 — n -арные линейные формулы типа (τ, τ') , $\text{var}(F_1) \cap \text{var}(F_2) = \emptyset$, то $F_1 \vee F_2$ — n -арная линейная формула типа (τ, τ') . Переменные, связанные либо в F_1 , либо в F_2 , связанные также в $F_1 \vee F_2$. (Заметим, что в этом случае $F_1 \vee F_2$ — формула, поскольку нет переменных, входящих в обе формулы, в F_1 и в F_2 .)

(v) Если F — n -арная линейная формула типа (τ, τ') и переменная $x_i \in X_n$ свободна в F , то $\exists x_i(F)$ — n -арная линейная формула типа (τ, τ') . Переменная x_i связана в формуле $\exists x_i(F)$, а все остальные свободные или связанные переменные в F имеют тот же вид в $\exists x_i(F)$.

II. (i) соответствует обычному определению линейных тождеств (см., например, [6] или [7]). В [7] показана важность линейных тождеств для степенных алгебр.

Пусть $\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_{\tau}^{\text{lin}}(X_n))$ — множество всех n -арных формул типа (τ, τ') , и пусть

$$\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_{\tau}^{\text{lin}}(X)) := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_{\tau}^{\text{lin}}(X_n))$$

— множество всех линейных формул типа (τ, τ') . Также будем использовать

$$\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_{\tau}^{\text{lin}}(X)) := (\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_{\tau}^{\text{lin}}(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^+}.$$

Если вместо (i) использовать условие

(i') если t_1, t_2 n -арные линейные термы типа τ , где $\text{var}(t_1) \cap \text{var}(t_2) = \emptyset$, то равенство $t_1 \approx t_2$ — n -арная линейная формула типа (τ, τ') (все переменные в $t_1 \approx t_2$ свободны),

то речь идет об n -арной сильной линейной формуле. Ясно, что всякая сильная линейная формула линейна.

В качестве примера рассмотрим тип $(2, 2)$. Пусть f — бинарный символ операции, и пусть γ — бинарный символ отношения. Чтобы определить $\mathcal{F}_{(2, 2)}^{\text{lin}}(W_{(2)}^{\text{lin}}(X_2))$, начнем с шагов (i) и (ii) определения. Формулы, определяемые условиями (i) и (ii), называются *атомарными*. Атомарные линейные формулы выглядят так: $x_1 \approx x_1$, $x_1 \approx x_2$, $x_2 \approx x_1$, $x_2 \approx x_2$, $f(x_1, x_2) \approx x_1$, $f(x_1, x_2) \approx x_2$, $x_1 \approx f(x_1, x_2)$, $x_2 \approx f(x_1, x_2)$, $f(x_1, x_2) \approx f(x_1, x_2)$, $f(x_1, x_2) \approx f(x_2, x_1)$, $f(x_2, x_1) \approx f(x_1, x_2)$, $f(x_2, x_1) \approx f(x_2, x_1)$, $\gamma(x_1, x_2)$, $\gamma(x_2, x_1)$.

Из атомарных линейных формул с использованием $\neg$, $\exists$ и $\vee$ получаются все остальные линейные формулы.

Многосортное множество $(\mathcal{F}_{\tau}^{\text{lin}}(W_{\tau}^{\text{lin}}(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^+}$ не является замкнутым относительно операций суперпозиции R_m^n . В качестве примера рассмотрим тип $\tau = (2, 2)$, линейную формулу $f(x_1, x_2) \approx f(x_2, x_1)$ и линейные термы $s_1 = f(x_1, x_2)$ и $s_2 = x_2$. Тогда

$$\begin{aligned} R_2^2(f(x_1, x_2) \approx f(x_2, x_1), f(x_1, x_2), x_2) \\ = S_2^2(f(x_1, x_2), f(x_1, x_2), x_2) \approx S_2^2(f(x_2, x_1), f(x_1, x_2), x_2) \\ = f(f(x_1, x_2), x_2) \approx f(x_2, f(x_1, x_2)), \end{aligned}$$

что нелинейно.

Наша цель — определить условие, при котором суперпозиция линейных формул линейна. Для доказательства этого условия нужно следующее утверждение.

Лемма 2.4. Если F_1, F_2 — линейные n -арные формулы, $\text{var}(F_1) \cap \text{var}(F_2) = \emptyset$ и $s_1, \dots, s_n$ — m -арные термы с условием $\text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \emptyset$ при $1 \leq j < k \leq n$, то

$$\text{var}(R_m^n(F_1, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(F_2, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала атомарные формулы:

- (1) $F_1 : s \approx t, F_2 : u \approx v$;
- (2) $F_1 : s \approx t, F_2 : \gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j})$;
- (3) $F_1 : \gamma_k(t_1, \dots, t_{n_k}), F_2 : \gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j})$.

(Так как операция $\cap$ коммутативна, случай $F_1 : \gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j}), F_2 : s \approx t$ можно пропустить.)

(1) Поскольку

$$\text{var}(R_m^n(s \approx t, s_1, \dots, s_n)) = \text{var}(S_n^m(s, s_1, \dots, s_n) \approx S_n^m(t, s_1, \dots, s_n))$$

и

$$\text{var}(R_m^n(u \approx v, s_1, \dots, s_n)) = \text{var}(S_n^m(u, s_1, \dots, s_n) \approx S_n^m(v, s_1, \dots, s_n)),$$

в силу соотношений

$$\text{var}(s \approx t) \cap \text{var}(u \approx v) = \emptyset,$$

$$\text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \emptyset \quad \text{при } 1 \leq j < k \leq n$$

получаем

$$\begin{aligned} \text{var}(S_n^m(s, s_1, \dots, s_n) \approx S_n^m(t, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(S_n^m(u, s_1, \dots, s_n) \\ \approx S_n^m(v, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset. \end{aligned}$$

(2) Поскольку

$$\begin{aligned} \text{var}(R_m^n(\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j}), s_1, \dots, s_n)) \\ = \text{var}(\gamma_j(S_n^m(t_1, s_1, \dots, s_n), \dots, S_n^m(t_{n_j}, s_1, \dots, s_n)), \end{aligned}$$

в силу соотношений

$$\text{var}(s \approx t) \cap \text{var}(\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j})) = \emptyset,$$

$$\text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \emptyset \quad \text{при } 1 \leq j < k \leq n$$

пересечение

$$\begin{aligned} \text{var}(S_n^m(s, s_1, \dots, s_n) \approx S_n^m(t, s_1, \dots, s_n)) \\ \cap \text{var}(\gamma_j(S_n^m(t_1, s_1, \dots, s_n), \dots, S_n^m(t_{n_j}, s_1, \dots, s_n))) \end{aligned}$$

пусто.

(3) Так как

$$\text{var}(\gamma_k(t_1, \dots, t_{n_k})) \cap \text{var}(\gamma_j(l_1, \dots, l_{n_j})) = \emptyset,$$

в силу соотношений

$$\begin{aligned} \text{var}(R_m^n(\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j}), s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(\gamma_k(l_1, \dots, l_{n_k}), s_1, \dots, s_n)) \\ = \text{var}(\gamma_j(S_n^m(t_1, s_1, \dots, s_n), \dots, S_n^m(t_{n_j}, s_1, \dots, s_n)) \\ \cap \text{var}(\gamma_k(S_n^m(l_1, s_1, \dots, s_n), \dots, S_n^m(l_{n_k}, s_1, \dots, s_n))) \end{aligned}$$

и $\text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \emptyset$ при $1 \leq j < k \leq n$ пересечение пусто.

Предположим теперь, что для формул F_1, F_2 выполнена импликация

$$\begin{aligned} \text{var}(F_1) \cap \text{var}(F_2) = \emptyset \text{ и } \text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \emptyset \text{ при } 1 \leq j < k \leq n, \\ \Rightarrow \text{var}(R_m^n(F_1, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(F_2, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset. \end{aligned}$$

Нужно показать, что после применения шагов (iii)–(v) к F_1, F_2 импликация остается верной для получающихся формул. Так как $\text{var}(F) = \text{var}(\neg F) = \text{var}(\exists x_i(F))$, $R_m^n(\neg F, s_1, \dots, s_n) = \neg R_m^n(F, s_1, \dots, s_n)$ и $R_m^n(\exists x_i(F), s_1, \dots, s_n) = \exists x_i(R_m^n(F, s_1, \dots, s_n))$, в случае применения только (iii) или (v) лемма доказана.

В случае (iv), если $F_1 = F_{11} \vee F_{12}$, в силу равенства $\text{var}(F_{11} \vee F_{12}) = \text{var}(F_{11}) \cup \text{var}(F_{12})$ наше предположение имеет вид $(\text{var}(F_{11}) \cup \text{var}(F_{12})) \cap \text{var}(F_2) = \emptyset$. Это дает

$$(\text{var}(F_{11}) \cap \text{var}(F_2)) \cup (\text{var}(F_{12}) \cap \text{var}(F_2)) = \emptyset,$$

и тогда $\text{var}(F_{11}) \cap \text{var}(F_2) = \emptyset$ и $\text{var}(F_{12}) \cap \text{var}(F_2) = \emptyset$. В силу предположения отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \text{var}(R_m^n(F_{11}, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(F_2, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset, \\ \text{var}(R_m^n(F_{12}, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(F_2, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset. \end{aligned}$$

Тогда объединение левой и правой частей этих равенств пусто, поэтому

$$(\text{var}(R_m^n(F_{11}, s_1, \dots, s_n)) \cup \text{var}(R_m^n(F_{12}, s_1, \dots, s_n))) \cap \text{var}(R_m^n(F_2, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset.$$

В силу первого замечания

$$\text{var}(R_m^n(F_{11}, s_1, \dots, s_n) \vee R_m^n(F_{12}, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(F_2, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset$$

и

$$\text{var}(R_m^n(F_{11} \vee F_{12}, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(F_2, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset.$$

Если F_2 имеет вид $F_2 = F_{21} \vee F_{22}$, то делаем аналогичное заключение. Если F_1 имеет вид $F_1 = F_{11} \vee F_{12}$, а F_2 — вид $F_2 = F_{21} \vee F_{22}$, то из

$$\text{var}(F_1) \cap \text{var}(F_2) = \emptyset$$

следует, что

$$\text{var}(F_{11} \vee F_{12}) \cap \text{var}(F_{21} \vee F_{22}) = (\text{var}(F_{11}) \cup \text{var}(F_{12})) \cap (\text{var}(F_{21}) \cup \text{var}(F_{22})) = \emptyset$$

и тем самым

$$(\text{var}(F_{11}) \cap (\text{var}(F_{21}) \cup \text{var}(F_{22}))) \cup (\text{var}(F_{12}) \cap (\text{var}(F_{21}) \cup \text{var}(F_{22}))) = \emptyset.$$

Это означает, что $\text{var}(F_{11}) \cap (\text{var}(F_{21}) \cup \text{var}(F_{22})) = \emptyset$ и $\text{var}(F_{12}) \cap (\text{var}(F_{21}) \cup \text{var}(F_{22})) = \emptyset$. Кроме того, имеем $\text{var}(F_{11}) \cap \text{var}(F_{21}) = \emptyset$, $\text{var}(F_{11}) \cap \text{var}(F_{22}) = \emptyset$, $\text{var}(F_{12}) \cap \text{var}(F_{21}) = \emptyset$, $\text{var}(F_{12}) \cap \text{var}(F_{22}) = \emptyset$. Так как относительно использования $\vee$ формулы F_{11} и F_{12} имеют меньшую сложность, чем F_1 , и F_{21}, F_{22} имеют меньшую сложность, чем F_2 , то

$$\begin{aligned} \text{var}(R_m^n(F_{11}, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(F_{21}, s_1, \dots, s_n)) &= \emptyset, \\ \text{var}(R_m^n(F_{11}, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(F_{22}, s_1, \dots, s_n)) &= \emptyset, \\ \text{var}(R_m^n(F_{12}, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(F_{21}, s_1, \dots, s_n)) &= \emptyset, \\ \text{var}(R_m^n(F_{12}, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(F_{22}, s_1, \dots, s_n)) &= \emptyset \end{aligned}$$

и потому объединение левой и правой частей — пустое множество. Отсюда

$$\begin{aligned} \text{var}(R_m^n(F_{11}, s_1, \dots, s_n) \vee R_m^n(F_{12}, s_1, \dots, s_n)) \\ \cap \text{var}(R_m^n(F_{21}, s_1, \dots, s_n) \vee R_m^n(F_{22}, s_1, \dots, s_n)) \\ = \text{var}(R_m^n(F_{11} \vee F_{12}, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(F_{21} \vee F_{22}, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 2.5. Если F — n -арная линейная формула типа (τ, τ') и $s_1, \dots, s_n$ — m -арные линейные термы типа τ такие, что $\text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \emptyset$ при $1 \leq j < k \leq n$, то $R_m^n(F, s_1, \dots, s_n)$ — m -арная линейная формула типа (τ, τ') .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дадим доказательство индукцией по сложности определения n -арной линейной формулы типа (τ, τ') и начнем с атомарных формул.

1. Пусть F — равенство $t_1 \approx t_2$, где $t_1, t_2 \in W_\tau^{\text{lin}}(X)$. Тогда $R_m^n(t_1 \approx t_2, s_1, \dots, s_n)$ — равенство $S_m^n(t_1, s_1, \dots, s_n) \approx S_m^n(t_2, s_1, \dots, s_n)$. Так как $\text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \emptyset$ при $1 \leq j < k \leq n$, по предложению 2.2 термы в левой и правой частях линейны, поэтому все равенство линейно и $R_m^n(F, s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_\tau^{\text{lin}}(X_m))$.

2. Предположим, что F — формула вида $\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j}) \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_\tau^{\text{lin}}(X_m))$. Так как

$$R_m^n(\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j}), s_1, \dots, s_n) = \gamma_j(S_m^n(t_1, s_1, \dots, s_n), \dots, S_m^n(t_{n_j}, s_1, \dots, s_n)),$$

покажем, что правая часть — линейная формула. По определению 2.1 эта формула линейна, если

- (а) $S_m^n(t_k, s_1, \dots, s_n) \in W_\tau^{\text{lin}}(X_n)$ при $1 \leq k \leq n_j$,
- (б) $\text{var}(S_m^n(t_k, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(S_m^n(t_j, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset$ при $1 \leq k \leq n_j$.

Поскольку $t_k \in W_\tau^{\text{lin}}(X_n)$ и $\text{var}(s_i) \cap \text{var}(s_j) = \emptyset$ при $1 \leq j < k \leq n$ по предложению 2.2, условие (а) выполнено. По определению 2.3(ii) $\text{var}(t_k) \cap \text{var}(t_l) = \emptyset$. Так как $\text{var}(s_i) \cap \text{var}(s_j) = \emptyset$ при $1 \leq i < j \leq n$, условие (б) тоже выполнено.

3. Пусть F, F_1, F_2 — n -арные линейные формулы типа (τ, τ') . По индукции предположим, что $R_m^n(F, s_1, \dots, s_n), R_m^n(F_1, s_1, \dots, s_n), R_m^n(F_2, s_1, \dots, s_n)$ линейны. Нужно доказать, что $R_m^n(\neg F, s_1, \dots, s_n), R_m^n(\exists x_i(F), s_1, \dots, s_n)$ и $R_m^n(F_1 \vee F_2, s_1, \dots, s_n)$ линейны, если $\text{var}(F_1) \cap \text{var}(F_2) = \emptyset$. Так как

$$\begin{aligned} R_m^n(\neg F, s_1, \dots, s_n) &= \neg R_m^n(F, s_1, \dots, s_n), \\ R_m^n(\exists x_i(F), s_1, \dots, s_n) &= \exists x_i(R_m^n(F, s_1, \dots, s_n)) \end{aligned}$$

в силу определения 2.3, то

$$R_m^n(\neg F, s_1, \dots, s_n), R_m^n(\exists x_i(F), s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_\tau^{\text{lin}}(X_m)).$$

4. В этом случае имеем

$$R_m^n(F_1 \vee F_2, s_1, \dots, s_n) = R_m^n(F_1, s_1, \dots, s_n) \vee R_m^n(F_2, s_1, \dots, s_n).$$

В силу леммы 2.4 из предположений на F_1, F_2 следует, что

$$\text{var}(R_m^n(F_1, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(R_m^n(F_2, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset,$$

и тогда по определению 2.3(iv) формула $R_m^n(F_1 \vee F_2, s_1, \dots, s_n)$ линейна.

3. Частичный клон линейных формул

Используя теорему 2.5, определим частичные многосортные отображения

$$\bar{R}_m^n : \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_\tau^{\text{lin}}(X_n)) \times (W_\tau^{\text{lin}}(X_m))^n \longrightarrow \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_\tau^{\text{lin}}(X_m))$$

формулой

$$\begin{aligned} \bar{R}_m^n(F, s_1, \dots, s_n) \\ := \begin{cases} R_m^n(F, s_1, \dots, s_n), & \text{если } \text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \emptyset \text{ для всех } 1 \leq j < k \leq n, \\ \text{не определено} & \text{иначе} \end{cases} \end{aligned}$$

для $m, n \in \mathbb{N}^+$ и определим частичную многосортную алгебру

$$\text{Formclone}_{\text{lin}}(\tau, \tau')$$

$$:= ((\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_\tau^{\text{lin}}(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^+}, (W_\tau^{\text{lin}}(X_m))_{m \in \mathbb{N}^+}; (\bar{R}_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (x_i)_{1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^+}).$$

Теорема 3.1. Многосортная частичная алгебра $\text{Formclone}_{\text{lin}}(\tau, \tau')$ удовлетворяет соотношениям (FC1) и (FC2) как слабым тождествам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяем $\tilde{F}$ в (FC1) произвольной формулой

$$F \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_{\tau}^{\text{lin}}(X_m)),$$

а $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p$ — произвольными n -арными линейными термами из $W_{\tau}^{\text{lin}}(X_n)$, $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$ — произвольными m -арными линейными термами из $W_{\tau}^{\text{lin}}(X_m)$, символы операций — соответствующими частичными операциями $\bar{R}_m^n, \bar{R}_n^p, \bar{R}_m^p, \bar{S}_m^n$ и получим

$$\bar{R}_m^n(\bar{R}_n^p(F, t_1, \dots, t_p), s_1, \dots, s_n) = \bar{R}_m^p(F, \bar{S}_m^n(t_1, s_1, \dots, s_n), \dots, \bar{S}_m^n(t_p, s_1, \dots, s_n)).$$

Если $\text{var}(s_i) \cap \text{var}(s_j) = \emptyset$ при $1 \leq i < j \leq n$ и $\text{var}(t_l) \cap \text{var}(t_k) = \emptyset$ при $1 \leq l < k \leq p$, то левая часть определена и равна $R_m^n(\bar{R}_n^p(F, t_1, \dots, t_p), s_1, \dots, s_n)$. Тогда термы $\bar{S}_m^n(t_1, s_1, \dots, s_n), \dots, \bar{S}_m^n(t_p, s_1, \dots, s_n)$ также определены и равны $S_m^n(t_1, s_1, \dots, s_n), \dots, S_m^n(t_p, s_1, \dots, s_n)$. Кроме того, имеем

$$\text{var}(S_m^n(t_l, s_1, \dots, s_n)) \cap \text{var}(S_m^n(t_k, s_1, \dots, s_n)) = \emptyset,$$

так как $\text{var}(t_l) \cap \text{var}(t_k) = \emptyset$. Поэтому правая часть также определена и равна

$$R_m^p(F, S_m^n(t_1, s_1, \dots, s_n), \dots, S_m^n(t_p, s_1, \dots, s_n)).$$

В [2] доказано (теорема 2.2), что обе части равны. Таким образом, (FC1) — слабое тождество в $\text{Formclone}_{\text{lin}}(\tau, \tau')$. Для проверки (FC2) заменим $\tilde{F}$ в (FC2) произвольной формулой $F \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_{\tau}^{\text{lin}}(X_n))$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на $x_1, \dots, x_n$, а символ операции $\tilde{R}_n^n$ — частичной операцией $\bar{R}_n^n$ и получим $R_n^n(F, x_1, \dots, x_n) = F$, так как левая часть определена. В [2] доказано, что обе части совпадают. $\square$

4. Линейные гиперподстановки типа (τ, τ')

Гиперподстановки — это отображения, переводящие символы операций в термы той же арности: $\sigma : \{f_i \mid i \in I\} \rightarrow W_{\tau}(X)$. Пусть $\text{Нур}(\tau)$ — множество всех гиперподстановок типа τ . Всякая гиперподстановка продолжается до отображения $\bar{\sigma} : W_{\tau}(X) \rightarrow W_{\tau}(X)$ следующим образом:

- (i) $\bar{\sigma}[x_l] := x_l$ для переменных,
- (ii) $\bar{\sigma}[f_i(t_1, \dots, t_{n_i})] := S_n^{n_i}(\sigma(f_i), \bar{\sigma}[t_1], \dots, \bar{\sigma}[t_{n_i}])$, если $t_1, \dots, t_{n_i} \in W_{\tau}(X_n)$.

Применяя продолжения гиперподстановок к термам s, t тождества $s \approx t$, заменяем символы операций в s, t термами. Если получающиеся равенства являются тождествами в алгебре или классе алгебр типа τ , то равенство $s \approx t$ называется *гипертождеством*. Гипертождества — частный случай формул второго порядка. Больше о гиперподстановках и гипертождествах можно найти, например, в [8].

Для всякого терма t и всякой гиперподстановки σ множество переменных, входящих в $\bar{\sigma}[t]$, является подмножеством множества переменных, входящих в t [9].

Лемма 4.1. Для всякого терма $t \in W_{\tau}(X)$ и всякой гиперподстановки $\sigma \in \text{Нур}(\tau)$ имеем $\text{var}(\bar{\sigma}[t]) \subseteq \text{var}(t)$. $\square$

На множестве $\text{Нур}(\tau)$ всех гиперподстановок типа τ можно определить бинарную ассоциативную операцию $\circ_h$ формулой $\sigma_1 \circ_h \sigma_2 := \bar{\sigma}_1 \circ \sigma_2$, где $\circ$ —

обычная композиция функций. Вместе с тождественной гиперподстановкой σ_{id} , определенной равенством $\sigma_{id}(f_i) := f_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ для всех $i \in I$, получаем моноид $(\text{Нур}(\tau); \circ_h, \sigma_{id})$.

Если символы операций отображаются только на линейные термы, говорят о *линейных гиперподстановках*. В [9] показано, что продолжение линейной гиперподстановки отображает $W_\tau^{\text{lin}}(X)$ в $W_\tau^{\text{lin}}(X)$ и что множество $\text{Нур}^{\text{lin}}(\tau)$ всех гиперподстановок типа τ образует подмоноид в моноиде всех гиперподстановок.

Понятие гиперподстановки можно распространить на гиперподстановки для алгебраических систем типа (τ, τ') следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Произвольная пара $\sigma := (\sigma_H, \sigma_R)$ отображений $\sigma_H : \{f_i \mid i \in I\} \rightarrow W_\tau(X), \sigma_R : \{\gamma_j \mid j \in J\} \rightarrow \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X))$, отображающая n_i -арные символы операций в n_i -арные термы и n_j -арные символы отношений в n_j -арные формулы, называется *гиперподстановкой для алгебраических систем типа (τ, τ')* или, кратко, *гиперподстановкой типа (τ, τ')* . Обозначим символом $\text{Нур}(\tau, \tau')$ множество всех гиперподстановок типа (τ, τ') .

Здесь σ_H — обычная гиперподстановка типа τ и $\bar{\sigma}_H$ — ее продолжение.

Пользуясь σ_H и σ_R , определим отображение $\widehat{\sigma}_R : \mathcal{F}(W_\tau(X)) \rightarrow \mathcal{F}(W_\tau(X))$ следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. (i) $\widehat{\sigma}_R[s \approx t]$ равно $\widehat{\sigma}_H[s] \approx \widehat{\sigma}_H[t]$.

(ii) $\widehat{\sigma}_R[\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j})]$ — это формула $R_n^{n_j}(\sigma_R(\gamma_j), \widehat{\sigma}_H[t_1], \dots, \widehat{\sigma}_H[t_{n_j}])$, $t_1, \dots, t_{n_j} \in W_\tau(X_n)$.

(iii) $\widehat{\sigma}_R[\neg F] := \neg \widehat{\sigma}_R[F]$.

(iv) $\widehat{\sigma}_R[F_1 \vee F_2] := \widehat{\sigma}_R[F_1] \vee \widehat{\sigma}_R[F_2]$.

(v) $\widehat{\sigma}_R[\exists x_i(F)] := \exists x_i(\widehat{\sigma}_R[F])$.

Ясно, что $\widehat{\sigma}_R$ отображает n -арные формулы в n -арные формулы.

Продолжение $\tilde{\sigma}$ гиперподстановки σ типа (τ, τ') определяется как пара $\tilde{\sigma} := (\bar{\sigma}_H, \widehat{\sigma}_R)$,

$$\tilde{\sigma} : W_\tau(X) \times \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X)) \rightarrow W_\tau(X) \times \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X)).$$

Определим произведение $\circ_r$ на $\text{Нур}(\tau, \tau')$ формулой

$$\sigma_1 \circ_r \sigma_2 = (\sigma_{1_H}, \sigma_{1_R}) \circ_r (\sigma_{2_H}, \sigma_{2_R}) := (\bar{\sigma}_{1_H} \circ \sigma_{2_H}, \widehat{\sigma}_{1_R} \circ \sigma_{2_R}).$$

Так как $\bar{\sigma}_{1_H} \circ \sigma_{2_H}$ отображает $\{f_i \mid i \in I\}$ в $W_\tau(X)$ и $\widehat{\sigma}_{1_R} \circ \sigma_{2_R}$ отображает $\{\gamma_j \mid j \in J\}$ в $\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X))$ и арности сохраняются, то $\sigma_1 \circ_r \sigma_2$ снова является гиперподстановкой типа (τ, τ') . Поскольку операция $\circ_r$ определяется покомпонентно как композиция функций, она ассоциативна. Пара $\sigma_{id} := (\sigma_{H_{id}}, \sigma_{R_{id}})$, где $\sigma_{R_{id}} : \gamma_j \rightarrow \gamma_j(x_1, \dots, x_{n_j})$ для любого $j \in J$, является тождественной гиперподстановкой. Равенство $\sigma_{H_{id}}[t] = t$ для любого $t \in W_\tau(X)$ ясно (см. [8]), а для второй компоненты доказываем следующее утверждение.

Лемма 4.4. Для произвольной формулы F имеем $\widehat{\sigma}_{R_{id}}[F] = [F]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать индуктивному определению формул.

(i) Если F имеет вид $s \approx t$, то

$$\widehat{\sigma}_{id}[s \approx t] = \bar{\sigma}_{H_{id}}[s] \approx \bar{\sigma}_{H_{id}}[t] = s \approx t.$$

(ii) Если F — это формула $\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j})$, $j \in J$, то

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{R_{id}}[F] &= \widehat{\sigma}_{R_{id}}[\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j})] = R_n^{n_j}(\sigma_{R_{id}}(\gamma_j), \bar{\sigma}_{H_{id}}[t_1], \dots, \bar{\sigma}_{H_{id}}[t_{n_j}]) \\ &= R_n^{n_j}(\gamma_j(x_1, \dots, x_{n_j}), t_1, \dots, t_{n_j}) \\ &= \gamma_j(S_n^{n_j}(x_1, t_1, \dots, t_{n_j}), \dots, S_n^{n_j}(x_{n_j}, t_1, \dots, t_{n_j})) = \gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j}). \end{aligned}$$

Предположим, что $\widehat{\sigma_{R_{id}}}[F] = F$, $\widehat{\sigma_{R_{id}}}[F_1] = F_1$ и $\widehat{\sigma_{R_{id}}}[F_2] = F_2$. Тогда

- (iii), (v) $\widehat{\sigma_{R_{id}}}[\neg F] = \neg \widehat{\sigma_{R_{id}}}[F] = \neg F$, $\widehat{\sigma_{R_{id}}}[\exists x_i(F)] = \exists x_i(\widehat{\sigma_{R_{id}}}[F]) = \exists x_i(F)$,
- (iv) $\widehat{\sigma_{R_{id}}}[F_1 \vee F_2] = \widehat{\sigma_{R_{id}}}[F_1] \vee \widehat{\sigma_{R_{id}}}[F_2] = F_1 \vee F_2$. $\square$

Поэтому $(\text{Hyprel}(\tau, \tau'); \circ_r, \sigma_{id})$ — моноид.

Нашей целью является определение линейных гиперподстановок типа (τ, τ') . Образуют ли линейные гиперподстановки типа (τ, τ') подмоноид в моноиде всех гиперподстановок типа (τ, τ') ?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Пусть (τ, τ') — тип формул. Всякая пара $\sigma := (\sigma_H, \sigma_R)$ отображений

$$\sigma_H : \{f_i \mid i \in I\} \rightarrow W_\tau^{\text{lin}}(X), \quad \sigma_R : \{\gamma_j \mid j \in J\} \rightarrow \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_\tau^{\text{lin}}(X)),$$

отображающая n_i -арные символы операций в n_i -арные линейные термы и n_j -арные символы отношений в n_j -арные линейные формулы, называется *линейной гиперподстановкой для алгебраических систем типа (τ, τ')* или, кратко, *линейной гиперподстановкой типа (τ, τ')* . Обозначим символом $\text{Hyprel}^{\text{lin}}(\tau, \tau')$ множество всех линейных гиперподстановок типа (τ, τ') .

Как отмечено выше, продолжение обычной линейной гиперподстановки отображает $W_\tau^{\text{lin}}(X)$ в $W_\tau^{\text{lin}}(X)$. Докажем, что продолжение линейной гиперподстановки типа (τ, τ') переводит линейные термы в линейные термы и линейные формулы в линейные формулы. Но сначала докажем следующую полезную лемму.

Лемма 4.6. Пусть $t_l, t_k \in W_\tau^{\text{lin}}(X)$, $\text{var}(t_l) \cap \text{var}(t_k) = \emptyset$. Пусть $\sigma_H \in \text{Hyp}^{\text{lin}}(\tau)$. Тогда

$$\text{var}(\bar{\sigma}_H[t_l]) \cap \text{var}(\bar{\sigma}_H[t_k]) = \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4.1 $\text{var}(t_l) \supseteq \text{var}(\bar{\sigma}_H[t_l])$, $\text{var}(t_k) \supseteq \text{var}(\bar{\sigma}_H[t_k])$ и потому

$$\emptyset = \text{var}(t_l) \cap \text{var}(t_k) \supseteq \text{var}(\bar{\sigma}_H[t_l]) \cap \text{var}(\bar{\sigma}_H[t_k]). \quad \square$$

Лемма 4.7. Пусть $\sigma = (\sigma_H, \sigma_R)$ — линейная гиперподстановка типа (τ, τ') . Тогда отображение $\widehat{\sigma}_R$ переводит линейные формулы в линейные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать индуктивному определению формул.

(i) Если F имеет вид $t_1 \approx t_2$, $t_1, t_2 \in W_\tau^{\text{lin}}(X)$, то $\widehat{\sigma}_R(t_1 \approx t_2)$ — равенство $\bar{\sigma}_H[t_1] \approx \bar{\sigma}_H[t_2]$. В силу [9, лемма 2.4] $\bar{\sigma}_H$ переводит линейные термы в линейные термы, поскольку σ_H — линейная гиперподстановка типа τ . Следовательно, $\widehat{\sigma}_R(t_1 \approx t_2)$ — линейная формула.

(ii) Если F имеет вид $\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j})$, $t_1, \dots, t_{n_j} \in W_\tau^{\text{lin}}(X)$ и $\text{var}(t_l) \cap \text{var}(t_k) = \emptyset$ при $1 \leq l < k \leq n_j$, то термы $\bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_{n_j}]$ линейны и по лемме 4.6 $\text{var}(\bar{\sigma}_H[t_l]) \cap \text{var}(\bar{\sigma}_H[t_k]) = \emptyset$ при $1 \leq l < k \leq n_j$, а по определению 4.3(ii) и теореме 2.5 $\widehat{\sigma}_R[\gamma_j(t_1, \dots, t_{n_j})]$ линейна.

По индукции предположим, что формулы $\widehat{\sigma}_R[F]$, $\widehat{\sigma}_R[F_1]$, $\widehat{\sigma}_R[F_2]$ линейны и что $\text{var}(\widehat{\sigma}_R[F_1]) \cap \text{var}(\widehat{\sigma}_R[F_2]) = \emptyset$. Покажем, что формулы $\widehat{\sigma}_R[\neg F]$, $\widehat{\sigma}_R[\exists x_i(F)]$ и $\widehat{\sigma}_R[F_1 \vee F_2]$ линейны. Поскольку $\widehat{\sigma}_R[\neg F] = \neg \widehat{\sigma}_R[F]$, $\widehat{\sigma}_R[\exists x_i(F)] = \exists x_i(\widehat{\sigma}_R[F])$, по пп. (iii), (v) определения 2.3 $\widehat{\sigma}_R[\neg F]$ и $\widehat{\sigma}_R[\exists x_i(F)]$ линейны. Так как $\widehat{\sigma}_R[F_1]$ и $\widehat{\sigma}_R[F_2]$ линейны и $\text{var}(\widehat{\sigma}_R[F_1]) \cap \text{var}(\widehat{\sigma}_R[F_2]) = \emptyset$, в силу п. (iv) определения 2.3 формула $\widehat{\sigma}_R[F_1] \vee \widehat{\sigma}_R[F_2]$ линейна. Тогда в силу п. (iv) определения 4.3 формула $\widehat{\sigma}_R[F_1 \vee F_2]$ линейна. $\square$

Теорема 4.8. Множество $\text{Нур}^{\text{lin}}(\tau, \tau')$ всех линейных гиперподстановок типа (τ, τ') образует подмоноид в моноиде $(\text{Нур}(\tau, \tau'); \circ_r, \sigma_{id})$ всех гиперподстановок типа (τ, τ') .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Нур}^{\text{lin}}(\tau, \tau')$. Нужно показать, что $\sigma_1 \circ_r \sigma_2 \in \text{Нур}^{\text{lin}}(\tau, \tau')$ и $\sigma_{id} \in \text{Нур}^{\text{lin}}(\tau, \tau')$. Имеем

$$\sigma_1 \circ_r \sigma_2 = (\sigma_{1_H}, \sigma_{1_R}) \circ_r (\sigma_{2_H}, \sigma_{2_R}) = (\bar{\sigma}_{1_H} \circ \sigma_{2_H}, \widehat{\sigma_{1_R}} \circ \sigma_{2_R}).$$

Соотношение $\bar{\sigma}_{1_H} \circ \sigma_{2_H} \in \text{Нур}^{\text{lin}}(\tau, \tau')$ установлено в [9]. В силу леммы 4.7 $\widehat{\sigma_{1_R}} \circ \sigma_{2_R} = \widehat{\sigma_{1_R}}[\sigma_{2_R}(\gamma_j)]$ — n -арная линейная формула. Так как $f_i(x_1, \dots, x_{n_i})$ — линейный терм и $\gamma_j(x_1, \dots, x_{n_i})$ — линейная формула, σ_{id} — линейная гиперподстановка типа (τ, τ') . $\square$

Известно (см., например, [8, 10]), что продолжение $\bar{\sigma} : W_\tau(X) \rightarrow W_\tau(X)$ любой подстановки типа τ перестановочно с суперпозицией операций $S_m^n : W_\tau(X_n) \times (W_\tau(X_m))^n \rightarrow W_\tau(X_m)$, $m, n \in \mathbb{N}^+$, т. е.

$$\bar{\sigma}[S_m^n(s, t_1, \dots, t_n)] = S_m^n(\bar{\sigma}[s], \bar{\sigma}[t_1], \dots, \bar{\sigma}[t_n])$$

для всех $s \in W_\tau(X_n), t_1, \dots, t_n \in W_\tau(X_m)$. (*)

В самом деле, если $x_j \in X_n$, то

$$\bar{\sigma}[x_j] = x_j, \quad S_m^n(x_j, t_1, \dots, t_n) = t_j,$$

$$S_m^n(\bar{\sigma}[x_j], \bar{\sigma}[t_1], \dots, \bar{\sigma}[t_n]) = \bar{\sigma}[S_m^n(x_j, t_1, \dots, t_n)].$$

Предположим, что $s = f_i(s_1, \dots, s_{n_i}) \in W_\tau(X_n)$ и равенство выполнено для $s_1, \dots, s_{n_i}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}[S_m^n(f_i(s_1, \dots, s_{n_i}), t_1, \dots, t_n)] \\ &= \bar{\sigma}[f_i(S_m^n(s_1, t_1, \dots, t_n), \dots, S_m^n(s_{n_i}, t_1, \dots, t_n))] \text{ по определению } S_m^n \\ &= S_m^{n_i}(\bar{\sigma}[f_i], \bar{\sigma}[S_m^n(s_1, t_1, \dots, t_n)], \dots, \bar{\sigma}[S_m^n(s_{n_i}, t_1, \dots, t_n)]) \text{ по определению } \bar{\sigma} \\ &= S_m^{n_i}(\bar{\sigma}[f_i], S_m^n(\bar{\sigma}[s_1], \bar{\sigma}[t_1], \dots, \bar{\sigma}[t_n]), \dots, S_m^n(\bar{\sigma}[s_{n_i}], \bar{\sigma}[t_1], \dots, \bar{\sigma}[t_n])) \\ & \hspace{15em} \text{по предположению} \\ &= S_m^n(S_m^{n_i}(\bar{\sigma}[f_i], \bar{\sigma}[s_1], \dots, \bar{\sigma}[s_{n_i}]), \bar{\sigma}[t_1], \dots, \bar{\sigma}[t_n]) \text{ в силу (C1)} \\ &= S_m^n(\bar{\sigma}[f_i(s_1, \dots, s_{n_i})], \bar{\sigma}[t_1], \dots, \bar{\sigma}[t_n]) \text{ по определению } \bar{\sigma} \\ &= S_m^n(\bar{\sigma}[s], \bar{\sigma}[t_1], \dots, \bar{\sigma}[t_n]). \end{aligned}$$

Нас интересует, остается ли все это верным для операций суперпозиции $R_m^n : \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n)) \times W_\tau(X_m)^n \rightarrow \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_m))$, для продолжения $\bar{\sigma}_H$ первой компоненты и отображения $\hat{\sigma}$ гиперподстановки $\sigma = (\sigma_H, \sigma_R)$ типа (τ, τ') .

Лемма 4.9. Пусть $\sigma = (\sigma_H, \sigma_R)$ — гиперподстановка типа (τ, τ') . Тогда для всякой формулы $F \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n))$ и любых $s_1, \dots, s_n \in W_\tau(X_n)$

$$\widehat{\sigma_R}[R_m^n(F, s_1, \dots, s_n)] = R_m^n(\widehat{\sigma_R}[F], \bar{\sigma}_H[s_1], \dots, \bar{\sigma}_H[s_n]). \quad (**)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать индуктивному определению формул типа (τ, τ') .

(i) Если F имеет вид $s \approx t$, то $\widehat{\sigma}_R[s \approx t]$ имеет вид $\bar{\sigma}_H[s] \approx \bar{\sigma}_H[t]$ и

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_R[R_m^n(s \approx t, t_1, \dots, t_n)] &= \widehat{\sigma}_R[S_m^n(s, t_1, \dots, t_n) \approx S_m^n(t, t_1, \dots, t_n)] \text{ по определению } R_m^n \\ &= \bar{\sigma}_H[S_m^n(s, t_1, \dots, t_n)] \approx \bar{\sigma}_H[S_m^n(t, t_1, \dots, t_n)] \text{ по определению } \widehat{\sigma}_R \\ &= S_m^n(\bar{\sigma}_H[s], \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]) \approx S_m^n(\bar{\sigma}_H[t], \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]) \text{ в силу } (*) \\ &= R_m^n(\bar{\sigma}_H[s] \approx \bar{\sigma}_H[t], \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]) \text{ по определению } R_m^n \\ &= R_m^n(\widehat{\sigma}_R[s \approx t], \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]) \text{ по определению } \widehat{\sigma}_R. \end{aligned}$$

(ii) Предположим, что F имеет вид $\gamma_j(s_1, \dots, s_{n_j})$ для n_j -арного символа отношений γ_j и n -арных термов $t_1, \dots, t_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_R[R_m^n(\gamma_j(s_1, \dots, s_{n_j}), t_1, \dots, t_n)] &= \widehat{\sigma}_R[\gamma_j(S_m^n(s_1, t_1, \dots, t_n), \dots, S_m^n(s_{n_j}, t_1, \dots, t_n))] \text{ по определению } R_m^n \\ &= R_m^{n_j}(\sigma_R(\gamma_j), \bar{\sigma}_H[S_m^n(s_1, t_1, \dots, t_n)], \dots, \bar{\sigma}_H[S_m^n(s_{n_j}, t_1, \dots, t_n)]) \\ &\quad \text{по определению } \widehat{\sigma}_R \\ &= R_m^{n_j}(\sigma_R(\gamma_j), S_m^n(\bar{\sigma}_H[s_1], \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]), \dots, S_m^n(\bar{\sigma}_H[s_{n_j}], \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n])) \\ &\quad \text{в силу } (*) \\ &= R_m^n(R_m^{n_j}(\sigma_R(\gamma_j), \bar{\sigma}_H[s_1], \dots, \bar{\sigma}_H[s_{n_j}]), \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]) \text{ по (FC1)} \\ &= R_m^n(\widehat{\sigma}_R(\gamma_j(s_1, \dots, s_{n_j})), \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]) \text{ по определению } \widehat{\sigma}_R. \end{aligned}$$

(iii), (v) Предположим, что для формулы F выполнено (**). Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_R[R_m^n(\neg F, t_1, \dots, t_n)] &= \widehat{\sigma}_R[\neg R_m^n(F, t_1, \dots, t_n)] \text{ по определению } R_m^n \\ &= \neg(\widehat{\sigma}_R[R_m^n(F, t_1, \dots, t_n)]) \text{ по определению } \widehat{\sigma}_R \\ &= \neg R_m^n(\widehat{\sigma}_R[F], \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]), \text{ по предположению } (**) \\ &= R_m^n(\neg \widehat{\sigma}_R(F), \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]) \text{ по определению } R_m^n \\ &= R_m^n(\widehat{\sigma}_R(\neg F), \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]) \text{ по определению } \widehat{\sigma}_R. \end{aligned}$$

Аналогично получаем для $\exists x_i(F)$.

Допустим теперь, что (**) выполнена для F_1 и F_2 и что $\text{var}(F_1) \cap \text{var}(F_2) = \emptyset$. Тогда $F_1 \vee F_2 \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X))$ и

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_R[R_m^n(F_1 \vee F_2, t_1, \dots, t_n)] &= \widehat{\sigma}_R[R_m^n(F_1, t_1, \dots, t_n)] \vee \widehat{\sigma}_R[R_m^n(F_2, t_1, \dots, t_n)] \text{ по определению } R_m^n \text{ и } \widehat{\sigma}_R \\ &= R_m^n(\widehat{\sigma}_R[F_1], \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]) \vee R_m^n(\widehat{\sigma}_R[F_2], \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]) \text{ в силу } (**) \\ &= R_m^n(\widehat{\sigma}_R[F_1] \vee \widehat{\sigma}_R[F_2], \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]) \text{ по определению } R_m^n \\ &= R_m^n(\widehat{\sigma}_R[F_1 \vee F_2], \bar{\sigma}_H[t_1], \dots, \bar{\sigma}_H[t_n]) \text{ по определению } \widehat{\sigma}_R. \quad \square \end{aligned}$$

Гиперподстановки типа τ можно рассматривать как многосортные функции $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$, $\sigma_n : F_\tau^n \rightarrow W_\tau(X_n)$, где $F_\tau^n := \{f_j \mid j \in I_n\}$ и $I_n \subseteq I$ — множество всех индексов таких, что f_j n -арна. Поскольку продолжение $\bar{\sigma}_n$ сохраняет арность, оно отображает $W_\tau(X_n)$ в $W_\tau(X_n)$, а $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ переводит $(W_\tau(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}$ в $(W_\tau(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}$ как многосортное отображение. Равенство (*) превращается в последовательность равенств

$$\bar{\sigma}_m[S_m^n(s, t_1, \dots, t_n)] = S_m^n(\bar{\sigma}_n[s], \bar{\sigma}_m[t_1], \dots, \bar{\sigma}_m[t_n])$$

для всех $m, n \in \mathbb{N}^+$, $s \in W_\tau(X_n)$, $t_1, \dots, t_n \in W_\tau(X_m)$. Это значит, что $(\bar{\sigma}_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ — многосортный эндоморфизм алгебры

$$\text{clone}_\tau = ((W_\tau(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}; (S_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (x_i^n)_{i \leq n, n \in \mathbb{N}^+}).$$

Аналогично продолжение гиперподстановки типа (τ, τ') можно рассматривать как пару последовательностей $((\bar{\sigma}_{H_n})_{n \in \mathbb{N}^+}, (\widehat{\sigma_{R_n}})_{n \in \mathbb{N}^+})$.

Равенство $(**)$ превращается в последовательность равенств

$$\widehat{\sigma_{R_n}}[R_m^n(F, t_1, \dots, t_n)] = R_m^n(\widehat{\sigma_{R_n}}[F], \bar{\sigma}_{H_m}[t_1], \dots, \bar{\sigma}_{H_m}[t_n])$$

для всех $m, n \in \mathbb{N}^+$, $F \in \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_m))$, $t_1, \dots, t_n \in W_\tau(X_m)$. Это значит, что $((\bar{\sigma}_{H_n})_{n \in \mathbb{N}^+}, (\widehat{\sigma_{R_n}})_{n \in \mathbb{N}^+})$ — многосортный эндоморфизм многосортной алгебры

$$\text{Formclone}(\tau, \tau') := ((\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}(W_\tau(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^+}, (W_\tau(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}; (R_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (S_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (x_i)_{i \leq n, n \in \mathbb{N}^+}).$$

В разд. 2 упомянуто, что линейные термы образуют многосортную алгебру

$$\text{clone}_{\text{lin}} \tau := ((W_\tau^{\text{lin}}(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}, (\bar{S}_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (x_i)_{i \leq n, n \in \mathbb{N}^+}),$$

а в разд. 3 доказано, что линейные формулы и линейные термы образуют многосортную алгебру

$$\text{Formclone}_{\text{lin}}(\tau, \tau') := ((\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_\tau^{\text{lin}}(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^+}, (W_\tau^{\text{lin}}(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}; (\bar{R}_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (\bar{S}_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (x_i)_{1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^+}).$$

Пусть $\mathcal{A} = (A; (f_i^A)_{i \in I})$ — частичная алгебра с частичными операциями $f_i^A : A^{n_i} \rightarrow A$. Отображение $h : A \rightarrow A$ называется *слабым эндоморфизмом*, если для всех $i \in I$ выполняется следующее:

$$\begin{aligned} \text{если } (a_1, \dots, a_{n_i}) \in \text{dom } f_i^A, \text{ то } (h(a_1), \dots, h(a_{n_i})) \in \text{dom } f_i^A, \\ h(f_i^A(a_1, \dots, a_{n_i})) = f_i^A(h(a_1), \dots, h(a_{n_i})). \end{aligned}$$

В [5] доказано, что продолжение произвольной линейной гиперподстановки является слабым эндоморфизмом алгебры

$$\text{clone}_{\text{lin}} \tau := ((W_\tau^{\text{lin}}(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}, (\bar{S}_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (x_i)_{i \leq n, n \in \mathbb{N}^+}).$$

Докажем теперь, что это верно для линейных гиперподстановок типа (τ, τ') и $\text{Formclone}_{\text{lin}}(\tau, \tau')$.

Теорема 4.10. *Продолжение любой гиперподстановки типа (τ, τ') является слабым эндоморфизмом алгебры*

$$\text{Formclone}_{\text{lin}}(\tau, \tau') := ((\mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_\tau^{\text{lin}}(X_n)))_{n \in \mathbb{N}^+}, (W_\tau^{\text{lin}}(X_n))_{n \in \mathbb{N}^+}; (\bar{R}_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (\bar{S}_m^n)_{m, n \in \mathbb{N}^+}, (x_i)_{1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^+}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что многосортное отображение

$$\tilde{\sigma} = ((\bar{\sigma}_{H_n})_{n \in \mathbb{N}^+}, (\widehat{\sigma_{R_n}})_{n \in \mathbb{N}^+}),$$

где

$$\widehat{\sigma_{R_n}} : \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_\tau^{\text{lin}}(X_n)) \rightarrow \mathcal{F}_{(\tau, \tau')}^{\text{lin}}(W_\tau^{\text{lin}}(X_n))$$

и

$$\bar{\sigma}_{H_n} : W_{\tau}^{\text{lin}}(X_n) \rightarrow W_{\tau'}^{\text{lin}}(X_n)$$

— слабый эндоморфизм алгебры $\text{Formclone}_{\text{lin}}(\tau, \tau')$, т. е. показать, что если $(F, s_1, \dots, s_n) \in \text{dom } \bar{R}_m^n$, то

$$(\widehat{\sigma_{R_m}}[F], \bar{\sigma}_{H_m}[s_1], \dots, \bar{\sigma}_{H_m}[s_n]) \in \text{dom } \bar{R}_m^n,$$

и тогда

$$\widehat{\sigma_{R_n}}[\bar{R}_m^n(F, s_1, \dots, s_n)] = \bar{R}_m^n(\widehat{\sigma_{R_n}}[F], \bar{\sigma}_{H_m}[t_1], \dots, \bar{\sigma}_{H_m}[t_n])$$

для всех $m, n \in \mathbb{N}^+$, $F \in \mathcal{F}_{(\tau\tau')}^{\text{lin}}(W_{\tau}^{\text{lin}}(X_m))$, $t_1, \dots, t_n \in W_{\tau'}^{\text{lin}}(X_m)$. Если $(F, s_1, \dots, s_n) \in \text{dom } \bar{R}_m^n$, то F — линейная формула, $s_1, \dots, s_n$ — линейные термы и $\text{var}(s_j) \cap \text{var}(s_k) = \emptyset$ для всех $1 \leq j < k \leq n$. В силу леммы 4.6 имеем $\text{var}(\bar{\sigma}_{H_n})[s_j] \cap \text{var}(\bar{\sigma}_{H_n})[s_k] = \emptyset$, и поскольку по лемме 4.7 формула $\widehat{\sigma_{R_m}}[F]$ линейна, по теореме 2.5

$$(\widehat{\sigma_{R_m}}[F], \bar{\sigma}_{H_m}[s_1], \dots, \bar{\sigma}_{H_m}[s_n]) \in \text{dom } \bar{R}_m^n.$$

По определению $\bar{R}_m^n$ и $(**)$ обе части равны. $\square$

5. Открытые вопросы

Имеется несколько открытых проблем и пожеланий для дальнейших исследований.

1. Верно ли, что всякий слабый эндоморфизм алгебры $\text{Formclone}_{\text{lin}}(\tau, \tau')$ является продолжением линейной гиперподстановки типа (τ, τ') ?

2. Исследовать теоретико-полугрупповые свойства моноидов линейных гиперподстановок типа (τ, τ') . Каков порядок элементов для конкретных типов (τ, τ') ? Что можно сказать о регулярных элементах и регулярных подмоноидах? Изучить соотношения Грина!

3. Попробовать другое определение линейных формул. Изучить сильные линейные формулы. При каких условиях множество всех сильных линейных формул замкнуто относительно суперпозиции формул? Определить многосортную частичную алгебру $\text{Formclone}_{\text{stronglin}}(\tau, \tau')$ и исследовать ее свойства. Образуется ли сильные линейные гиперподстановки типа (τ, τ') моноид?

4. Использовать другие определения термов, например обобщенные термы, для определения формул и линейных формул! В чем отличия?

ЛИТЕРАТУРА

1. Malcev A. I. Algebraic systems. Berlin: Akademie-Verl., 1973.
2. Denecke K., Phusanga D. Hyperformulas and solid algebraic systems // Stud. Logica. 2000. V. 90. P. 263–268.
3. Lawvere F. W. Functorial semantics of algebraic theories: Diss. New York: Columbia Univ., 1963.
4. Denecke K., Phusanga D. Hypersatisfaction of formulas in algebraic systems // Discuss. Math. Gen. Algebra Appl. 2009. V. 29, N 2. P. 123–152.
5. Денеке К. Частичный клон линейных термов // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 4. С. 755–767.
6. Pilitowska A. Linear identities in graph algebras // Comment. Math. Univ. Carolin. 2009. V. 50. P. 11–24.
7. Grätzer G., Lakser H. Identities for globals (complex algebras) of algebras // Colloq. Math. 1988. V. 56. P. 19–29.

8. Denecke K., Wismath S. L. Hyperidentities and clones. New York: Gordon and Breach, 2000.
9. Changphas Th., Denecke K., Pibajomtee B. Linear terms and linear hypersubstitutions. (Preprint). KhonKaen, 2014.
10. Koppitz J., Denecke K. M-solid varieties of algebras. New York: Springer-Verl., 2006 (Adv. Math.).

Поступила в редакцию 16 февраля 2018 г.

После доработки 16 февраля 2018 г.

Принята к публикации 23 мая 2018 г.

Klaus Denecke (Денеке Клаус)
University of Potsdam,
Institute of Mathematics
Karl-Liebknecht-Straße, Potsdam 14476
klausdenecke@hotmail.com