S. V. Efimov, Noethericity and index of a characteristic bisingular integral operator with shifts, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 751–759

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.404>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.209.158.208

April 26, 2023, 16:37:11

НЁТЕРОВОСТЬ И ИНДЕКС ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО БИСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА СО СДВИГАМИ

С. В. Ефимов

Аннотация. Рассматривается характеристический бисингулярный оператор с весьма произвольными сдвигами, распадающимися на одномерные компоненты. Полностью изучены вопросы его нётеровости и индекса путем сведения к оператору без сдвигов. Полученные результаты имеют непосредственное приложение к двумерной краевой задаче со сдвигами — естественному обобщению задач Газемана и Карлемана.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.404

Ключевые слова: нётеровость, индекс, бисингулярный оператор, сдвиг.

§ 1. Введение и постановка задачи

Пусть Γ_1, Γ_2 — простые замкнутые контуры типа Ляпунова в комплексной плоскости, ориентированные против часовой стрелки, и Γ — любой из этих контуров, $1 < p < +\infty$. Введем оператор сингулярного интегрирования Коши S и проекторы Рисса $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S)$ в пространстве $L_p(\Gamma)$, а также четыре проектора $P_{\pm\pm} = P_{\pm} \otimes P_{\pm}$, $P_{\pm-} = P_{\pm} \otimes P_{-}$ в пространстве $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Здесь и далее во всех тензорных произведениях операторов первый оператор действует в $L_p(\Gamma_1)$, а второй — в $L_p(\Gamma_2)$.

Всякий гомеоморфизм $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_j$ ($i, j = 1, 2$) с невырождающейся гёльдеровой производной, в том числе и тождественное отображение, будем называть *одномерным сдвигом*. Заметим, что отображение, обратное одномерному сдвигу, тоже является одномерным сдвигом.

Двумерным сдвигом назовем любой гомеоморфизм тора $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ на себя одного из двух следующих видов:

1) покоординатный сдвиг

$$(t_1, t_2) \mapsto (\alpha_1(t_1), \alpha_2(t_2)) \quad (1)$$

($t_1 \in \Gamma_1, t_2 \in \Gamma_2$), где α_1 ($\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$), α_2 ($\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2$) — одномерные сдвиги,

2) перекрестный сдвиг

$$(t_1, t_2) \mapsto (\alpha_1(t_2), \alpha_2(t_1)) \quad (2)$$

($t_1 \in \Gamma_1, t_2 \in \Gamma_2$), где α_1 ($\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1$), α_2 ($\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$) — одномерные сдвиги.

Заметим, что отображение, обратное покоординатному сдвигу (1) (перекрестному сдвигу (2)), тоже является покоординатным (перекрестным) сдвигом: $(t_1, t_2) \mapsto (\alpha_1^{-1}(t_1), \alpha_2^{-1}(t_2))$ ($(t_1, t_2) \mapsto (\alpha_2^{-1}(t_2), \alpha_1^{-1}(t_1))$).

Пусть здесь и далее $\alpha_{\pm\pm}$, $\alpha_{\pm-}$ — четыре двумерных сдвига. С ними свяжем обратимые операторы $W_{\pm\pm}$, $W_{\pm-}$, действующие в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ по правилу $W_{xy}f = f \circ \alpha_{xy}$, где $x, y = \pm$, $f \in L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$.

Основным объектом исследования является действующий в пространстве $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ оператор

$$M = a_{++}W_{++}P_{++} + a_{+-}W_{+-}P_{+-} + a_{-+}W_{-+}P_{-+} + a_{--}W_{--}P_{--}, \quad (3)$$

где $a_{\pm\pm}, a_{\pm-} \in C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Данный оператор назовем *характеристическим бисингулярным оператором со сдвигами*.

Основная задача — получить критерий нётеровости (фредгольмовости) оператора M и формулу его индекса в простых терминах (а именно, в терминах частичных индексов непрерывных коэффициентов оператора) путем сведения оператора M к характеристическому бисингулярному оператору без сдвигов. Работа содержит подробные доказательства и является полным изложением решения задачи. Основные результаты анонсированы в [1].

Бисингулярные операторы с различными видами сдвигов исследовались ранее в [2–11]. Были изучены вопросы нётеровости и в некоторых случаях индекса таких операторов. Исследования в данных работах проводились с помощью символических исчислений, построение которых требовало существенных дополнительных ограничений на сдвиги: инволютивность сдвигов и конечность группы, порожденной ими. В настоящей работе нет никаких дополнительных ограничений на сдвиги, поэтому исследуемый оператор M принадлежит новому классу операторов, не изучавшемуся ранее.

§ 2. Предварительные сведения о бисингулярных операторах

В основе работы лежат результаты В. С. Пилиди о бисингулярных операторах, т. е. об операторах, действующих в пространстве $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ и образующих банахову алгебру $\mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}_p(\Gamma_1) \widehat{\otimes} \mathfrak{A}_p(\Gamma_2)$, где $\mathfrak{A}_p(\Gamma)$ — банахова алгебра операторов в $L_p(\Gamma)$, порожденная оператором S и всеми операторами умножения на функции из $C(\Gamma)$.

Пусть $C(\Gamma_i, \mathfrak{A}_p(\Gamma_j))$ — банахова алгебра всех непрерывных в равномерной операторной топологии отображений из Γ_i в $\mathfrak{A}_p(\Gamma_j)$, наделенная естественными операциями и равномерной нормой ($i, j = 1, 2$). В [12] доказано существование четырех гомоморфизмов банаховых алгебр

$$A(\in \mathfrak{A}_p) \mapsto A_1^\pm(\in C(\Gamma_1, \mathfrak{A}_p(\Gamma_2))), \quad A(\in \mathfrak{A}_p) \mapsto A_2^\pm(\in C(\Gamma_2, \mathfrak{A}_p(\Gamma_1))),$$

определяемых на образующих алгебры $\mathfrak{A}_p$ следующим образом:

- 1) если $A = aI$, где $a \in C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$, то $A_1^\pm(t_1) = a(t_1, \cdot)I$, $A_2^\pm(t_2) = a(\cdot, t_2)I$,
- 2) если $A = S \otimes I$, то $A_1^\pm(t_1) = \pm I$, $A_2^\pm(t_2) = S$,
- 3) если $A = I \otimes S$, то $A_1^\pm(t_1) = S$, $A_2^\pm(t_2) = \pm I$ ($t_1 \in \Gamma_1$, $t_2 \in \Gamma_2$).

При этом из результатов работы [12] следует, что если $A = (P_+ + K) \otimes B^+ + (P_- + T) \otimes B^-$, где $B^\pm \in \mathfrak{A}_p(\Gamma_2)$, а K и T — компактные операторы в $L_p(\Gamma_1)$, то $A_1^\pm(t_1) = B^\pm$ ($t_1 \in \Gamma_1$). Аналогично рассматривается симметричная конструкция. Семейство операторов $A_i^\pm(t_i)$ ($i = 1, 2$, $t_i \in \Gamma_i$) называется *символом бисингулярного оператора* A из алгебры $\mathfrak{A}_p$. В [12] доказано, что всякий бисингулярный оператор определяется своим символом единственным образом с точностью до компактного слагаемого.

Теорема 1 [12]. Нётеровость бисингулярного оператора равносильна обратимости всех операторов его символа.

Бисингулярный оператор

$$A = a_{++}P_{++} + a_{+-}P_{+-} + a_{-+}P_{-+} + a_{--}P_{--}, \quad (4)$$

где $a_{\pm\pm}, a_{\pm-} \in C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$, называется *характеристическим бисингулярным оператором*.

Пусть здесь и далее $\text{ind}_1 a$ и $\text{ind}_2 a$ — частичные индексы невырождающей функции a класса $C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ по первой и по второй переменным соответственно.

Теорема 2 [12, 13]. Для нётеровости характеристического бисингулярного оператора A вида (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

- 1) $a_{xy}(t_1, t_2) \neq 0$ ($x, y = \pm, t_1 \in \Gamma_1, t_2 \in \Gamma_2$),
- 2) $\text{ind}_1 a_{+\pm} = \text{ind}_1 a_{-\pm}, \text{ind}_2 a_{\pm+} = \text{ind}_2 a_{\pm-}$.

При этом индекс оператора A вычисляется по формуле

$$\text{Ind } A = (\text{ind}_1 a_{++} - \text{ind}_1 a_{--}) \cdot (\text{ind}_2 a_{++} - \text{ind}_2 a_{--}).$$

Бисингулярный оператор A называется *остаточным бисингулярным оператором*, если все операторы $A_i^\pm(t_i) - I$ компактные ($i = 1, 2, t_i \in \Gamma_i$). Ниже понадобится следующий частный случай теоремы 2 из [13].

Теорема 3. Если A — нётеров остаточный бисингулярный оператор и $A_i^\pm(t_i)$ не зависят от t_i ($i = 1, 2, t_i \in \Gamma_i$), то $\text{Ind } A = 0$.

§ 3. Случай покоординатных сдвигов типа $(+, +)$

Если одномерный сдвиг сохраняет или меняет ориентацию, то будем говорить, что он *типа $(+)$* или *типа $(-)$* соответственно. Всякому одномерному сдвигу α ($\Gamma_i \rightarrow \Gamma_j$) поставим в соответствие обратимый оператор V_α ($L_p(\Gamma_j) \rightarrow L_p(\Gamma_i)$) по правилу $V_\alpha f = f \circ \alpha$, $f \in L_p(\Gamma_j)$ ($i, j = 1, 2$).

Лемма 1 [14, гл. I, § 4, теорема 4.4; 15, гл. I, § 3, теорема 3.1]. Если α — одномерный сдвиг $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_j$ типа $(+)$ (или типа $(-)$), $i, j = 1, 2$, то операторы $V_\alpha P_\pm V_\alpha^{-1} - P_\pm$ (соответственно операторы $V_\alpha P_\pm V_\alpha^{-1} - P_\mp$) компактны в пространстве $L_p(\Gamma_i)$.

Лемма 2. Пусть $a_\pm \in C(\Gamma)$, α — одномерный сдвиг $\Gamma \rightarrow \Gamma$ типа $(+)$. Тогда для каждого из операторов $A_1 = a_+P_+ + a_-P_-$ и $A_2 = a_+V_\alpha P_+ + a_-P_-$ критерием обратимости в пространстве $L_p(\Gamma)$ являются условия $a_\pm(t) \neq 0$ ($t \in \Gamma$), $\text{ind } a_+ = \text{ind } a_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для оператора A_1 данный факт известен из [14, гл. III, § 7, теорема 7.1], а обратимость оператора A_2 сводится методом конформного склеивания [15, гл. III, § 10, п. 10.2] к обратимости некоторого оператора вида A_1 , действующего в пространстве $L_p(\Gamma')$, где Γ' — некоторый контур, во всем аналогичный Γ .

Разложим банахово пространство $L_p(\Gamma)$ в прямую сумму двух его подпространств $L_p^\pm(\Gamma) = P_\pm(L_p(\Gamma))$.

Лемма 3. Если α — одномерный сдвиг $\Gamma \rightarrow \Gamma$ типа $(+)$, то операторы $P_+V_\alpha P_+$ и $P_-V_\alpha P_-$ обратимы в пространствах $L_p^+(\Gamma)$ и $L_p^-(\Gamma)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Парные операторы $V_\alpha P_+ + P_-$ и $P_+ + V_\alpha P_-$ обратимы в $L_p(\Gamma)$ по лемме 2. Но тогда [16] обратимы и операторы $P_\pm V_\alpha P_\pm$ в соответствующих $L_p^\pm(\Gamma)$.

Лемма 4. Пусть $a_{\pm} \in C(\Gamma)$, $\alpha, \beta, \varphi, \psi$ — одномерные сдвиги $\Gamma \rightarrow \Gamma$ типа $(+)$. Тогда для обратимости оператора $a_+ V_{\alpha} P_+ V_{\beta} P_+ + a_- V_{\varphi} P_- V_{\psi} P_-$ в пространстве $L_p(\Gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы $a_{\pm}(t) \neq 0$ ($t \in \Gamma$), $\text{ind } a_+ = \text{ind } a_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данный оператор можно представить в виде $V_{\varphi} B C$, где $B = b_+ V_{\omega} P_+ + b_- P_-$, $b_{\pm} = a_{\pm} \circ \varphi^{-1}$, $\omega = \alpha \circ \varphi^{-1}$, $C = P_+ V_{\beta} P_+ + P_- V_{\psi} P_-$. При этом оператор C обратим в $L_p(\Gamma)$ по лемме 3. Остается сформулировать условия обратимости оператора B с помощью леммы 2. $\square$

Приступаем непосредственно к изучению характеристического бисингулярного оператора со сдвигами (3). Двумерный сдвиг (1) или (2) будем называть *сдвигом типа* (ε, δ) , если его одномерные компоненты α_1 и α_2 будут типа (ε) и типа (δ) соответственно, $\varepsilon, \delta = \pm$.

Теорема 4. Пусть M — оператор (3) и все двумерные сдвиги α_{xy} ($x, y = \pm$) по координатным типа $(+, +)$. Тогда для нётеровости оператора M необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

- 1) $a_{xy}(t_1, t_2) \neq 0$ ($x, y = \pm$, $t_1 \in \Gamma_1$, $t_2 \in \Gamma_2$),
- 2) $\text{ind}_1 a_{++} = \text{ind}_1 a_{-+}$, $\text{ind}_2 a_{++} = \text{ind}_2 a_{--}$.

При этом индекс оператора M вычисляется по формуле

$$\text{Ind } M = (\text{ind}_1 a_{++} - \text{ind}_1 a_{--}) \cdot (\text{ind}_2 a_{++} - \text{ind}_2 a_{--}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы $W_{++} = V_{\alpha_1} \otimes V_{\alpha_2}$, $W_{+-} = V_{\alpha_3} \otimes V_{\alpha_4}$, $W_{-+} = V_{\alpha_5} \otimes V_{\alpha_6}$, $W_{--} = V_{\alpha_7} \otimes V_{\alpha_8}$, где $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_7$ ($\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$) и $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_8$ ($\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2$) — одномерные сдвиги типа $(+)$. Из леммы 3 следует, что оператор $N = \sum_{x,y=\pm} P_{xy} W_{xy}^{-1} P_{xy}$ обратим в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Поэтому вопросы нётеровости и индекса оператора M сводятся к равносильным вопросам для оператора

$$\begin{aligned} A &= MN = \sum_{x,y=\pm} a_{xy} W_{xy} P_{xy} W_{xy}^{-1} P_{xy} \\ &= a_{++} \cdot (V_{\alpha_1} P_+ V_{\alpha_1}^{-1} P_+ \otimes V_{\alpha_2} P_+ V_{\alpha_2}^{-1} P_+) + a_{+-} \cdot (V_{\alpha_3} P_+ V_{\alpha_3}^{-1} P_+ \otimes V_{\alpha_4} P_- V_{\alpha_4}^{-1} P_-) \\ &\quad + a_{-+} \cdot (V_{\alpha_5} P_- V_{\alpha_5}^{-1} P_- \otimes V_{\alpha_6} P_+ V_{\alpha_6}^{-1} P_+) + a_{--} \cdot (V_{\alpha_7} P_- V_{\alpha_7}^{-1} P_- \otimes V_{\alpha_8} P_- V_{\alpha_8}^{-1} P_-). \end{aligned}$$

По лемме 1 все операторы $V_{\alpha_i} P_{\pm} V_{\alpha_i}^{-1} - P_{\pm}$ компактные ($i = 1, \dots, 8$). Отсюда следует, что A — бисингулярный оператор из алгебры $\mathfrak{A}_p$. Тогда его символ имеет вид

$$\begin{aligned} A_1^+(t_1) &= a_{++}(t_1, \cdot) V_{\alpha_2} P_+ V_{\alpha_2}^{-1} P_+ + a_{+-}(t_1, \cdot) V_{\alpha_4} P_- V_{\alpha_4}^{-1} P_-, \\ A_1^-(t_1) &= a_{-+}(t_1, \cdot) V_{\alpha_6} P_+ V_{\alpha_6}^{-1} P_+ + a_{--}(t_1, \cdot) V_{\alpha_8} P_- V_{\alpha_8}^{-1} P_-, \\ A_2^+(t_2) &= a_{++}(\cdot, t_2) V_{\alpha_1} P_+ V_{\alpha_1}^{-1} P_+ + a_{-+}(\cdot, t_2) V_{\alpha_5} P_- V_{\alpha_5}^{-1} P_-, \\ A_2^-(t_2) &= a_{+-}(\cdot, t_2) V_{\alpha_3} P_+ V_{\alpha_3}^{-1} P_+ + a_{--}(\cdot, t_2) V_{\alpha_7} P_- V_{\alpha_7}^{-1} P_-. \end{aligned}$$

($t_1 \in \Gamma_1$, $t_2 \in \Gamma_2$). Применяя теорему 1 и лемму 4, получаем нужные необходимые и достаточные условия нётеровости операторов A и M .

Условия нётеровости допускают гомотопию непрерывных коэффициентов a_{xy} ($x, y = \pm$), поэтому формулу индекса нётеровых A и M достаточно проверить для случая $a_{++} = a \otimes b$, $a_{+-} = c \otimes b$, $a_{-+} = a \otimes d$, $a_{--} = c \otimes d$, где функции a, c из $C(\Gamma_1)$ и b, d из $C(\Gamma_2)$ не обращаются в нуль. Воспользуемся приемом В. С. Пилиди [13]: $A = A_0 A^0 + K$, где A_0 и A^0 — нётеровы бисингулярные

операторы, остаточный и характеристический соответственно, связанные соотношением $(A_0)_i^\pm(t_i)(A^0)_i^\pm(t_i) = A_i^\pm(t_i)$ ($i = 1, 2, t_i \in \Gamma_i$), K — компактный оператор. Тогда $\text{Ind } A = \text{Ind } A_0 + \text{Ind } A^0$. Из леммы 1 следует, что $A^0 = \sum_{x,y=\pm} a_{xy} P_{xy}$.

Кроме того, операторы $(A_0)_i^\pm(t_i)$ не зависят от t_i ($i = 1, 2, t_i \in \Gamma_i$), например

$$\begin{aligned} (A_0)_1^+(t_1) &= A_1^+(t_1)[(A^0)_1^+(t_1)]^{-1} \\ &= (a(t_1)bV_{\alpha_2}P_+V_{\alpha_2}^{-1}P_+ + c(t_1)bV_{\alpha_4}P_-V_{\alpha_4}^{-1}P_-)(a(t_1)bP_+ + c(t_1)bP_-)^{-1} \\ &= b(a(t_1)V_{\alpha_2}P_+V_{\alpha_2}^{-1}P_+ + c(t_1)V_{\alpha_4}P_-V_{\alpha_4}^{-1}P_-) \left(\frac{1}{a(t_1)}P_+ + \frac{1}{c(t_1)}P_- \right) \frac{1}{b}I \\ &= b(V_{\alpha_2}P_+V_{\alpha_2}^{-1}P_+ + V_{\alpha_4}P_-V_{\alpha_4}^{-1}P_-) \frac{1}{b}I. \end{aligned}$$

Тогда по теореме 3 $\text{Ind } A_0 = 0$. Таким образом, $\text{Ind } M = \text{Ind } A = \text{Ind } A^0$, а $\text{Ind } A^0$ вычисляется по теореме 2. $\square$

Из теорем 2 и 4 очевидно вытекает

Теорема 5. Пусть все двумерные сдвиги α_{xy} ($x, y = \pm$) покоординатные типа $(+, +)$. Тогда оператор M вида (3) нётеров или нет одновременно с оператором A вида (4). При этом $\text{Ind } M = \text{Ind } A$.

§ 4. Случай произвольных двумерных сдвигов

Ниже понадобятся две леммы, вытекающие из теоремы о соответствии границ [17, гл. II, § 1, п. 29, теорема 1] и теоремы Келлога [17, гл. II, § 1, п. 29; 18, гл. X, § 1, теорема 6]. Предварительно отметим, что контур Γ_i разбивает комплексную плоскость на ограниченную область D_i^+ и неограниченную область D_i^- , и обозначим $\dot{D}_i^- = D_i^- \cup \{\infty\}$ ($i = 1, 2$).

Лемма 5. Пусть i, j ($= 1, 2$) фиксированы, $\omega(t_i)$ — граничное значение конформного отображения D_i^+ на D_j^+ (или $\dot{D}_i^-$ на $\dot{D}_j^-$, $\infty \mapsto \infty$), $t_i \in \Gamma_i$. Тогда

- 1) ω — одномерный сдвиг $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_j$ типа $(+)$,
- 2) V_ω обратимо отображает $L_p^+(\Gamma_j)$ на $L_p^+(\Gamma_i)$ (соответственно $L_p^-(\Gamma_j)$ на $L_p^-(\Gamma_i)$).

Зафиксируем две точки $z_1^0 (\in D_1^+)$, $z_2^0 (\in D_2^+)$ и рассмотрим две функции $e_1(t_1) = t_1 - z_1^0$ ($t_1 \in \Gamma_1$), $e_2(t_2) = t_2 - z_2^0$ ($t_2 \in \Gamma_2$).

Лемма 6. Пусть i, j ($= 1, 2$) фиксированы, $\omega(t_i)$ — граничное значение конформного отображения $\dot{D}_i^-$ на D_j^+ , $\infty \mapsto z_j^0$ (или D_i^+ на $\dot{D}_j^-$), $t_i \in \Gamma_i$. Тогда

- 1) ω — одномерный сдвиг $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_j$ типа $(-)$,
- 2) $V_\omega e_j I$ обратимо отображает $L_p^+(\Gamma_j)$ на $L_p^-(\Gamma_i)$ (соответственно $L_p^-(\Gamma_j)$ на $L_p^+(\Gamma_i)$).

Для $x = \pm$ обозначим $\bar{x} = \mp$. Введем функции e_{xy} на $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ и проекторы P'_{xy} в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ ($x, y = \pm$) по следующим правилам. Пусть двумерный сдвиг α_{xy} покоординатный (перекрестный), тогда

- 1) если α_{xy} типа $(+, +)$, то $e_{xy} = 1$ и $P'_{xy} = P_{xy}$ ($P'_{xy} = P_{yx}$),
- 2) если α_{xy} типа $(+, -)$, то $e_{xy} = 1 \otimes e_2$ и $P'_{xy} = P_{x\bar{y}}$ ($P'_{xy} = P_{\bar{y}x}$),
- 3) если α_{xy} типа $(-, +)$, то $e_{xy} = e_1 \otimes 1$ и $P'_{xy} = P_{xy}$ ($P'_{xy} = P_{y\bar{x}}$),
- 4) если α_{xy} типа $(-, -)$, то $e_{xy} = e_1 \otimes e_2$ и $P'_{xy} = P_{\bar{x}\bar{y}}$ ($P'_{xy} = P_{\bar{y}\bar{x}}$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Проекторы $P_{\pm\pm}$, $P_{\pm-}$ попарно различные, а проекторы $P'_{\pm\pm}$, $P'_{\pm-}$ — не всегда.

Предложение 1. Если сдвиг α_{xy} покоординатный (перекрестный), то найдется покоординатный (перекрестный) сдвиг ω_{xy} одного типа с α_{xy} такой, что оператор $\widetilde{W}_{xy}e_{xy}I$, где $\widetilde{W}_{xy}f = f \circ \omega_{xy}$, $f \in L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$, обратимо отображает пространство $P_{xy}(L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2))$ на $P'_{xy}(L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2))$ ($x, y = \pm$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим для определенности перекрестный сдвиг α_{++} типа $(+, -)$. Тогда $e_{++} = 1 \otimes e_2$, $P'_{++} = P_{-+}$. Пусть $\omega_1(t_2)$ и $\omega_2(t_1)$ — граничные значения конформных отображений D_2^+ на D_1^+ и $\dot{D}_1^-$ на D_2^+ , $\infty \mapsto z_2^0$, соответственно, а $\omega_{++}(t_1, t_2) = (\omega_1(t_2), \omega_2(t_1))$, $t_1 \in \Gamma_1$, $t_2 \in \Gamma_2$. По леммам 5 и 6 $\omega_1(\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_1)$ и $\omega_2(\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2)$ — одномерные сдвиги типа $(+)$ и типа $(-)$ соответственно. Тогда ω_{++} — перекрестный сдвиг типа $(+, -)$, как и α_{++} . Кроме того, из лемм 5 и 6 следует, что оператор $\widetilde{W}_{++}e_{++}I$ устанавливает биективное соответствие между функциями $\varphi \otimes \psi$, где $\varphi \in L_p^+(\Gamma_1)$, $\psi \in L_p^+(\Gamma_2)$, и функциями $f \otimes g$, где $f \in L_p^-(\Gamma_1)$, $g \in L_p^+(\Gamma_2)$: $(\widetilde{W}_{++}e_{++}I)(\varphi \otimes \psi) = (V_{\omega_2}e_2I\psi) \otimes (V_{\omega_1}\varphi)$. Но при этом оператор $\widetilde{W}_{++}e_{++}I$, очевидно, обратим в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$, поэтому он обратимо отображает пространство $L_p^+(\Gamma_1) \widehat{\otimes} L_p^+(\Gamma_2)$ на $L_p^-(\Gamma_1) \widehat{\otimes} L_p^+(\Gamma_2)$, т. е. пространство $P_{++}(L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2))$ на $P'_{++}(L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2))$. $\square$

Следствие. Оператор $P'_{xy}W_{xy}e_{xy}P_{xy}$ обратимо отображает пространство $P_{xy}(L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2))$ на $P'_{xy}(L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2))$ ($x, y = \pm$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сдвиг ω_{xy} и соответствующий оператор $\widetilde{W}_{xy}$ из предложения 1. Пусть $W'_{xy} = W_{xy}\widetilde{W}_{xy}^{-1}$. Тогда

$$P'_{xy}W_{xy}e_{xy}P_{xy} = P'_{xy}W'_{xy}\widetilde{W}_{xy}e_{xy}P_{xy} = (P'_{xy}W'_{xy}P'_{xy})(P'_{xy}\widetilde{W}_{xy}e_{xy}P_{xy}).$$

Остается доказать обратимость $P'_{xy}W'_{xy}P'_{xy}$ в пространстве $P'_{xy}(L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2))$. Для этого заметим, что $W'_{xy}f = f \circ \beta_{xy}$ ($f \in L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$), где $\beta_{xy} = \omega_{xy}^{-1} \circ \alpha_{xy}$ — покоординатный сдвиг типа $(+, +)$, и с помощью леммы 3 получим нужное. $\square$

Пусть $\mathfrak{K}_p(\Gamma)$ — идеал всех компактных операторов банаховой алгебры $\mathfrak{A}_p(\Gamma)$, $\mathfrak{K}_p^{12}$ — идеал банаховой алгебры $\mathfrak{A}_p$, состоящий из всех операторов вида $K_1 + K_2$, где $K_1 \in \mathfrak{K}_p(\Gamma_1) \widehat{\otimes} \mathfrak{A}_p(\Gamma_2)$, $K_2 \in \mathfrak{A}_p(\Gamma_1) \widehat{\otimes} \mathfrak{K}_p(\Gamma_2)$.

Предложение 2 [12]. Если $A, B \in \mathfrak{A}_p$, то $AB - BA \in \mathfrak{K}_p^{12}$.

Предложение 3. $W_{xy}P_{xy}W_{xy}^{-1} - P'_{xy} \in \mathfrak{K}_p^{12}$ ($x, y = \pm$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности α_{xy} — перекрестный сдвиг типа $(+, -)$: $\alpha_{xy}(t_1, t_2) = (\alpha_1(t_2), \alpha_2(t_1))$, $t_1 \in \Gamma_1$, $t_2 \in \Gamma_2$, α_1 типа $(+)$, α_2 типа $(-)$. Заметим, что $W_{xy}P_{xy}W_{xy}^{-1} = (V_{\alpha_2}P_yV_{\alpha_2}^{-1}) \otimes (V_{\alpha_1}P_xV_{\alpha_1}^{-1})$: достаточно сделать элементарную проверку равенства операторов на функциях вида $\varphi \otimes \psi$ ($\varphi \in L_p(\Gamma_1)$, $\psi \in L_p(\Gamma_2)$), образующих полную систему в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. По лемме 1 $W_{xy}P_{xy}W_{xy}^{-1} = (P'_y + K_1) \otimes (P_x + K_2) = P'_{xy} + K$, где $K_1 \in \mathfrak{K}_p(\Gamma_1)$, $K_2 \in \mathfrak{K}_p(\Gamma_2)$, $K \in \mathfrak{K}_p^{12}$. $\square$

Теорема 6. Пусть M — оператор (3). Если оператор M нётеров, то проекторы P'_{++} , P'_{+-} , P'_{-+} , P'_{--} попарно различны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда включение $\{P'_{\pm\pm}, P'_{\pm\mp}\} \subset \{P_{\pm\pm}, P_{\pm\mp}\}$ строгое, т. е. во втором множестве найдется проектор $P_{\varepsilon\delta}$ ($\varepsilon, \delta = \pm$), которого нет в первом. Но тогда $P_{\varepsilon\delta}P'_{xy} = O$ для любых $x, y (= \pm)$. В этом случае из предложений 2 и 3 будет следовать, что $P_{\varepsilon\delta}M = \sum_{x,y=\pm} K_{xy}W_{xy}$, где $K_{xy} \in \mathfrak{K}_p^{12}$. Пусть u_n ($\subset \Gamma_1 \times \Gamma_2$) — окрестности какой-нибудь точки (t_1^0, t_2^0)

($\in \Gamma_1 \times \Gamma_2$), стягивающиеся в эту точку, $n = 1, 2, 3, \dots$, а χ_n — характеристическая функция окрестности u_n . Тогда [12] $\|\chi_n P_{\varepsilon\delta}\| \geq 1$ и $\|\chi_n P_{\varepsilon\delta} M\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь $\|\cdot\|$ — существенная норма, т. е. полунорма в банаховой алгебре $\mathfrak{B}_p$ всех линейных ограниченных операторов в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ по модулю идеала $\mathfrak{K}_p$ всех компактных операторов алгебры $\mathfrak{B}_p$. В этом случае класс эквивалентности $M + \mathfrak{K}_p$ является топологическим делителем нуля в фактор-алгебре $\mathfrak{B}_p/\mathfrak{K}_p$, что противоречит нётеровости M . $\square$

Следующее утверждение является главным результатом работы, поскольку вместе с теоремой 2 оно позволяет эффективно решить вопросы нётеровости и индекса оператора (3) для любых двумерных сдвигов α_{xy} .

Теорема 7. Пусть M — оператор (3). Тогда оператор M нётеров или нет одновременно с характеристическим бисингулярным оператором

$$A = \sum_{x,y=\pm} \frac{a_{xy}}{e_{xy} \circ \alpha_{xy}} P'_{xy}.$$

При этом $\text{Ind } M = \text{Ind } A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого сдвига α_{xy} подберем сдвиг ω_{xy} и оператор $\widetilde{W}_{xy}$, как в предложении 1 ($x, y = \pm$). Введем операторы

$$W'_{xy} = W_{xy} \widetilde{W}_{xy}^{-1} \quad (x, y = \pm),$$

$$M' = \sum_{x,y=\pm} \frac{a_{xy}}{e_{xy} \circ \alpha_{xy}} W'_{xy} P'_{xy}, \quad N = \sum_{x,y=\pm} \widetilde{W}_{xy} e_{xy} P_{xy}.$$

Рассмотрим два альтернативных случая.

1. Пусть проекторы $P'_{++}, P'_{+-}, P'_{-+}, P'_{--}$ не являются попарно различными. Тогда по теоремам 2 и 6 оба оператора A и M не нётеровы.

2. Пусть проекторы $P'_{++}, P'_{+-}, P'_{-+}, P'_{--}$ попарно различны. Тогда $M = M'N$ и оператор N обратим в $L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$. Кроме того,

$$W'_{xy} f = f \circ \beta_{xy} \quad (f \in L_p(\Gamma_1 \times \Gamma_2)),$$

где $\beta_{xy} = \omega_{xy}^{-1} \circ \alpha_{xy}$ — покоординатные сдвиги типа $(+, +)$, $x, y = \pm$, поэтому к оператору M' применима теорема 5. Таким образом, операторы M, M', A нётеровы или нет одновременно и их индексы равны. $\square$

Следствие. Если все сдвиги α_{xy} покоординатные ($x, y = \pm$), то нётеровость оператора M вида (3) равносильна нётеровости характеристического бисингулярного оператора $A = \sum_{x,y=\pm} a_{xy} e_{xy} P'_{xy}$ и $\text{Ind } M = \text{Ind } A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что в случае покоординатных сдвигов $\text{ind}_i(e_{xy} \circ \alpha_{xy}) = -\text{ind}_i e_{xy}$ ($i = 1, 2$), и воспользоваться теоремами 7 и 2. $\square$

ПРИМЕР 1. Пусть α_{++} покоординатный типа $(+, +)$, α_{+-} покоординатный типа $(-, +)$, α_{-+} перекрестный типа $(-, -)$, α_{--} покоординатный типа $(+, -)$. Среди проекторов $P'_{++} = P_{++}, P'_{+-} = P_{--}, P'_{-+} = P_{-+}, P'_{--} = P_{-+}$ есть повторяющиеся, и по теореме 6 оператор (3) не нётеров.

ПРИМЕР 2. Пусть α_{++} перекрестный типа $(+, -)$, α_{+-} покоординатный типа $(+, +)$, α_{-+} покоординатный типа $(+, -)$, α_{--} перекрестный типа $(-, -)$ и M — оператор (3). Тогда

$$e_{++} = 1 \otimes e_2, \quad e_{+-} = 1, \quad e_{-+} = 1 \otimes e_2, \quad e_{--} = e_1 \otimes e_2,$$

$$P'_{++} = P_{-+}, \quad P'_{+-} = P_{+-}, \quad P'_{-+} = P_{--}, \quad P'_{--} = P_{++}$$

и по теореме 7 нётеровость оператора M равносильна нётеровости характеристического бисингулярного оператора

$$A = \frac{a_{--}}{e_{--} \circ \alpha_{--}} P_{++} + a_{+-} P_{+-} + \frac{a_{++}}{e_{++} \circ \alpha_{++}} P_{-+} + \frac{a_{-+}}{e_{-+} \circ \alpha_{-+}} P_{--},$$

причем $\text{Ind } M = \text{Ind } A$. Применим теорему 2 к оператору A и заметим, что $\text{ind}_1(e_{--} \circ \alpha_{--}) = \text{ind}_2(e_{--} \circ \alpha_{--}) = \text{ind}_1(e_{++} \circ \alpha_{++}) = \text{ind}_2(e_{-+} \circ \alpha_{-+}) = -1$ и $\text{ind}_2(e_{++} \circ \alpha_{++}) = \text{ind}_1(e_{-+} \circ \alpha_{-+}) = 0$. Получаем следующий результат: для нётеровости оператора M необходимо и достаточно, чтобы

- 1) $a_{xy}(t_1, t_2) \neq 0$ ($x, y = \pm$, $t_1 \in \Gamma_1$, $t_2 \in \Gamma_2$),
- 2) $\text{ind}_1 a_{\pm\pm} = \text{ind}_1 a_{-\mp}$, $\text{ind}_2 a_{\pm\pm} = 1 + \text{ind}_2 a_{-\pm}$.

При этом индекс оператора M вычисляется по формуле

$$\text{Ind } M = (1 + \text{ind}_1 a_{--} - \text{ind}_1 a_{-+}) \cdot (\text{ind}_2 a_{--} - \text{ind}_2 a_{-+}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов С. В. Нётеровость и индекс характеристического бисингулярного оператора со сдвигом // Владикавк. мат. журн. 2014. Т. 16, № 2. С. 46–48.
2. Сазонов Л. И. Бисингулярное уравнение со сдвигом в пространстве L_p // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 3. С. 385–393.
3. Пилиди В. С., Стефаниди Е. Н. Об одной алгебре бисингулярных операторов со сдвигом. Ростов н/Д, 1981. 26 с. Деп. в ВИНТИ, № 3036.
4. Пилиди В. С., Стефаниди Е. Н. Об одной алгебре бисингулярных операторов со сдвигом // Изв. вузов. Математика. 1981. № 9. С. 80–81.
5. Ефимов С. В. Бисингулярные операторы с нераспадающимся инволютивным сдвигом // Изв. вузов. Математика. 1992. № 2. С. 29–36.
6. Ефимов С. В. Об эффективно проверяемых условиях нётеровости некоторых бисингулярных интегральных операторов со сдвигом // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения. Ростов-на-Дону: ДГТУ, 1997. Вып. 2. С. 75–78.
7. Ефимов С. В. Об индексе некоторых бисингулярных интегральных операторов со сдвигом // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения. Ростов-на-Дону: ДГТУ, 1998. Вып. 3. С. 61–66.
8. Ефимов С. В. Индекс некоторых бисингулярных операторов с нераспадающимся сдвигом // Интегро-дифференциальные операторы и их приложения. Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2001. Вып. 5. С. 88–94.
9. Ефимов С. В. Вычисление индекса некоторых бисингулярных операторов с нераспадающимся инволютивным сдвигом // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Ест. науки. Прил. 2004. № 9. С. 7–14.
10. Ефимов С. В. Об индексе бисингулярного оператора со сдвигом // Вестн. Дон. гос. тех. ун-та. 2004. Т. 4, № 3. С. 290–295.
11. Ефимов С. В. Вычисление индекса некоторых бисингулярных операторов со сдвигом методом гомотопии // Вестн. Дон. гос. тех. ун-та. 2010. Т. 10, № 1. С. 22–27.
12. Пилиди В. С. О бисингулярном уравнении в пространстве L_p // Мат. исследования. Кишинев: Штиинца. 1972. Т. 7, вып. 3. С. 167–175.
13. Пилиди В. С. Вычисление индекса бисингулярного оператора // Функцион. анализ и его прил. 1973. Т. 7, № 4. С. 93–94.
14. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: АН МССР, 1973.
15. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977.
16. Симоненко И. Б. Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32, № 5. С. 1138–1146.
17. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

-
18. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 29 августа 2018 г.

После доработки 1 апреля 2019 г.

Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Ефимов Сергей Викторович
Северо-Кавказский филиал Московского
технического университета связи и информатики,
ул. Серафимовича, 62, Ростов-на-Дону 344002
EfimovSergei1960@mail.ru