V. I. Zenkov, Intersections of three nilpotent subgroups of finite groups, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 777–786

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.406>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.205.225.156

April 26, 2023, 16:34:20

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ТРЕХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В. И. Зенков

Аннотация. Исследуется гипотеза о том, что в любой конечной группе G для любых трех ее нильпотентных подгрупп A , B и C в группе G найдутся такие элементы x и y , что $A \cap B^x \cap C^y \leq F(G)$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G . Доказывается, что контрпример минимального порядка к этой гипотезе является почти простой группой. Доказательство теоремы использует классификацию конечных простых групп.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.406

Ключевые слова: конечная группа, нильпотентная подгруппа, пересечение подгрупп, подгруппа Фиттинга.

Введение

В 1966 г. Пассман [1] доказал, что в p -разрешимой конечной группе G , p простое, для силовской p -подгруппы P найдутся элементы x и y из G такие, что $P \cap P^x \cap P^y = O_p(G)$. Позднее в 1994 г. автором в [2] для случая π -разрешимой группы G с нильпотентной холловой π -подгруппой H было доказано, что $H \cap H^x \cap H^y = O_\pi(G) \leq F(G)$ для некоторых элементов x и y из G . Далее Е. П. Вдовин [3] и Дольфи [4] для π -разрешимой группы G с разрешимой холловой π -подгруппой H независимо доказали, что $H \cap H^x \cap H^y = O_\pi(G)$ для некоторых $x, y \in G$. Но если в π -разрешимой группе любая π -подгруппа лежит в некоторой холловой π -подгруппе, а в случае $\pi = \{p\}$ даже в силовской p -подгруппе группы G , то в общем случае π -подгруппа группы G не обязана лежать в некоторой холловой π -подгруппе группы G . Более того, такой холловой π -подгруппы может и не существовать. Например, в знакопеременной группе A_5 для $\pi = \{2, 5\}$ подгруппа $C_5 \rtimes C_2$ максимальна в G и не является $\{2, 5\}$ -холловой. Таким образом, в общем случае вопрос изучения пересечений π -подгрупп в группе G не сводится к изучению пересечений соответствующих холловых подгрупп. Конечно, в первую очередь интересно было бы изучить пересечения абелевых, нильпотентных и разрешимых подгрупп конечной группы G .

В случае абелевых подгрупп A и B группы G на вопрос об их пересечениях удовлетворительно отвечает лемма 2. Если хотя бы одна из подгрупп A или B абелева, а вторая нильпотентна, то удовлетворительный ответ на вопрос об

Работа выполнена (теорема) при финансовой поддержке комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 18–1–1–17) и проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (введение) (соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.210006).

их пересечениях дает лемма 3. Однако даже в случае, когда одна из подгрупп, скажем, A абелева, а вторая B метациклическая, существует группа G такая, что никакое пересечение $A \cap B^g$ не лежит в $F(G)$. Это происходит, например, в группе $G = A_5$ для $A \in \text{Syl}_2(G)$ и $B \simeq C_5 \rtimes C_2$. Можно проверить, что $A \cap B^g \neq 1$ для любого элемента g из G . Этот пример говорит о том, что в конечной группе G для заключения о том, что $A \cap B^x \leq F(G)$ для некоторого x из G , даже метациклическости подгруппы B мало. Если условие на подгруппу B усилить до нильпотентности, а условие на подгруппу A ослабить с абелевости также до нильпотентности, то существуют примеры группы G как в разрешимом, так и в почти простом случаях, когда $A \cap B^g \not\leq F(G)$ для любого $g \in G$. Это, например, группы $G \simeq E_9 \rtimes D_8$ с точным действием D_8 на E_9 и $G \simeq \text{Aut}(L_3(2))$. Заметим, что в обоих случаях $A = B \in \text{Syl}_2(G)$.

Автором в 2014 г. [5] доказано, что в разрешимой группе G для любых ее нильпотентных подгрупп A , B и C найдутся элементы x и y из G такие, что $A \cap B^x \cap C^y \leq F(G)$. Эта теорема послужила отправным пунктом для настоящей работы, в которой сформулирована

Гипотеза. Пусть G — конечная группа и A , B , C — нильпотентные подгруппы из G . Тогда $A \cap B^x \cap C^y \leq F(G)$ для некоторых элементов x и y из G .

Заметим, что в частном случае, когда $A = B = C$, данная гипотеза является содержанием задачи под номером 17.40 из «Коуровской тетради» [6].

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. Пусть G — контрпример минимального порядка к гипотезе. Тогда G — почти простая группа.

§ 1. Предварительные сведения

Лемма 1 [7, лемма 1]. Пусть G — конечная группа и G_1 , A , B — подгруппы из G такие, что G_1 содержит A . Если $G_2 \trianglelefteq G_1$ и $G_2 \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G , причем в фактор-группе $\bar{G}_1 = G_1/G_2$ имеем $\bar{A} \cap (\bar{G}_1 \cap \bar{B}^g)^{\bar{g}_1} = \bar{1}$ для некоторого элемента $g_1 \in G_1$, то $A \cap B^{gg_2} = 1$ для любого элемента g_2 из смежного класса $g_1 G_2$.

Лемма 2 [8, теорема 1]. Пусть G — конечная группа и A , B — абелевы подгруппы из G . Тогда $\text{Min}_G(A, B) \leq F(G)$, где $\text{Min}_G(A, B) = \langle A \cap B^g \mid g \in G \text{ и } A \cap B^g \text{ минимально по включению среди всех пересечений такого вида} \rangle$.

Лемма 3 [9, теорема]. Пусть G — конечная группа, A — абелева подгруппа и B — нильпотентная подгруппа из G . Тогда $A \cap B^g \leq F(G)$ для некоторого элемента g из G .

Лемма 4 [10, лемма 0.11]. Если нильпотентная группа N действует на неразрешимой группе G , то $C_G(N) \neq 1$.

Лемма 5. Пусть T — транзитивная нильпотентная подгруппа симметрической группы Σ_n . Тогда T содержит интранзитивную подгруппу T_0 такую, что $|T : T_0| = p$ для любого $p \in \pi(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\pi(T) = \{p\}$, то T — примарная подгруппа, действующая транзитивно на множестве точек $W = \{w_1, \dots, w_n\}$. Тогда T лежит в некоторой силовой p -подгруппе S из Σ_n , где n в силу транзитивности T — некоторая степень числа p . Тем более S транзитивна на $W = \{w_1, \dots, w_n\}$. Имеем $S \simeq (C_p \wr C_p) \wr \dots \wr C_p \wr C_p$ (см. [10, с. 93]). Обозначим через S_1 интранзитивную

подгруппу индекса p из S , изоморфную p раз $(C_p \wr C_p \wr \dots \wr C_p) \times \dots \times (C_p \wr C_p \wr \dots \wr C_p)$ базе сплетения из указанного изоморфизма. Тогда S содержит элемент t порядка p , который переставляет подгруппы $S_1, S_1^t, \dots, S_1^{t^{p-1}}$ между собой, где $B = S_1 \times S_1^t \times \dots \times S_1^{t^{p-1}}$ — база сплетения $S_1 \wr \langle t \rangle$. По построению подгруппа B интранзитивна на W и $|S : B| = p$. Так как T — транзитивная подгруппа на W , то $T \not\leq B$. Следовательно, $|S : B| = p$ влечет, что $|T : T \cap B| = p$. Поскольку B интранзитивна на W , то и $T \cap B = T_0$ интранзитивна на W , и в этом случае лемма доказана.

Покажем, что общий случай, когда $|\pi(T)| \geq 2$, сводится к рассмотренному. Действительно, так как T — нильпотентная подгруппа, $T = O_p(T) \times O_{p'}(T)$, где p — произвольное число из $\pi(T)$. Возьмем произвольную точку w_i из W и рассмотрим подмножество $V = \{w_j \mid w_j = w_i^t, \text{ где } t \in O_{p'}(T)\}$. Если $V = W$, то $O_{p'}(T)$ действует транзитивно на W . Тогда $n = |O_{p'}(T) : T_{w_j}|$, где T_{w_j} — стабилизатор точки w_j в T . Так как это p' -число, то $O_p(T) \leq T_{w_j}$. Но $[O_p(T), O_{p'}(T)] = 1$. Следовательно, транзитивность $O_{p'}(T)$ на W влечет, что $O_p(T) \leq T_{w_k}$ для $k \in \{1, \dots, n\}$. Поэтому $O_p(T) = 1$; противоречие.

Значит, $V < W$. Тогда $V = \{w_1, \dots, w_m\}$, где m является p' -числом и $m = |O_{p'}(T) : T_{p'}|$, где $T_{p'}$ — стабилизатор точки w_j в $O_{p'}(T)$. Нильпотентность T влечет, что $T_{w_j} = T_p \times T_{p'}$. Так как $V < W$, то $T_p < O_p(T)$. Поскольку $n = |T : T_{w_j}|$ и $T_{w_j} = T_p \times T_{p'}$, то $n = |O_p(T) : T_p| |O_{p'}(T) : T_{p'}|$. Следовательно, можно рассматривать действие подгруппы T как на множестве $W = \{w_1, \dots, w_n\}$, так и на множестве $W_1 = \{V_r \mid V_r = V^t, \text{ где } t \in T\}$. Тогда $r = |O_p(T) : T_p|$ в силу того, что $O_{p'}(T) \leq T_{V_r}$. Таким образом, получили представление транзитивной примарной подгруппы $O_p(T)$ на r символах. Как показано в первой части доказательства леммы, подгруппа $O_p(T)$ содержит интранзитивную подгруппу T_2 с $|O_p(T) : T_2| = p$. Значит, подгруппа T содержит подгруппу $T_0 = T_2 \times O_{p'}(T)$ с $|T : T_0| = p$. Число p выбрано произвольным, поэтому лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение леммы становится неверным уже для сверхразрешимой группы Σ_3 , действующей транзитивно на $W = \{w_1, w_2, w_3\}$. Действительно, $|\Sigma_3| = 6$, но в Σ_3 нет интранзитивной подгруппы индекса два.

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть G — контрпример к теореме и $|G|$ при этом минимален. Выберем в группе G нильпотентные подгруппы A, B и C так, что $A \cap B^x \cap C^y \not\leq F(G)$ для любых x и y из G и число $|A||B||C|$ при этом минимально.

Лемма 6. *Группа G неразрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из [5, теорема].

Лемма 7. *Разрешимый радикал $S(G)$ группы G единичен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $S(G) \neq 1$. По лемме 6 группа G неразрешима. Тогда фактор-группа $\bar{G} = G/S(G)$ неразрешима и по индукции в $\bar{G}$ имеем $\bar{A} \cap \bar{B}^{\bar{x}} \cap \bar{C}^{\bar{y}} = \bar{1}$ для некоторых элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из $\bar{G}$. Следовательно, $A \cap B^{x_{r_1}} \cap C^{y_{r_2}} \leq S(G)$ для любых элементов r_1 и r_2 из $S(G)$. Положим $A_1 = A \cap S(G)$, $B_1 = B^{x_{r_1}} \cap S(G)$ и $C_1 = C^{y_{r_2}} \cap S(G)$. Тогда A_1, B_1 и C_1 — нильпотентные подгруппы из $S(G)$ и по индукции имеем $A_1 \cap B_1^{t_1} \cap C_1^{t_2} \leq F(S(G)) = F(G)$, где t_1, t_2 из $S(G)$. Но тогда $A \cap B^{x_{r_1 t_1}} \cap C^{y_{r_2 t_2}} \leq S(G)$. Поэтому $A \cap B^{x_{r_1 t_1}} \cap C^{y_{r_2 t_2}} = A \cap B^{x_{r_1 t_1}} \cap C^{y_{r_2 t_2}} \cap S(G) = (A \cap S(G)) \cap (B^{x_{r_1 t_1}} \cap$

$S(G) \cap (C^{y_1 t_2} \cap S(G)) = A_1 \cap B_1^{t_1} \cap C_1^{t_2} \leq F(G)$; противоречие с тем, что $A \cap B^x \cap C^y \not\leq F(G)$ для любых x и y из G . Лемма доказана.

Лемма 8. $G = E(G)A = E(G)B = E(G)C$, где $E(G) = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$ — слой группы G и K_i — простые неабелевы группы для $i = 1, 2, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $G_1 = E(G)A \neq G$. Положим $B_1 = B \cap G_1$ и $C_1 = C \cap G_1$. Тогда по индукции $A \cap B_1^{x_1} \cap C_1^{y_1} \leq F(G_1)$ для некоторых элементов x_1 и y_1 из G_1 . Заметим, что $F^*(G) = F(G)E(G) = E(G)$ по лемме 7. Но $E(G) = E(G_1)$. Поэтому в случае $A \cap B_1^{x_1} \cap C_1^{y_1} \leq F(G_1) \neq 1$ имеем $[F(G_1), E(G_1)] = [F(G_1), E(G)] = 1$. Так как $E(G) = F^*(G)$ и согласно [12, предложение 1.27] $C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$, по лемме 7 $C_G(F^*(G)) = 1$. Следовательно, в случае $A \cap B_1^{x_1} \cap C_1^{y_1} \leq F(G) \neq 1$ имеем противоречие. Поэтому $A \cap B_1^{x_1} \cap C_1^{y_1} = 1$. Но тогда $A \cap B^{x_1} \cap C^{y_1} = A \cap B^{x_1} \cap C^{y_1} \cap G_1$ в силу $A \leq G_1$. Поэтому $A \cap B^{x_1} \cap C^{y_1} = A \cap B^{x_1} \cap C^{y_1} \cap G_1 = (A \cap G_1) \cap (B^{x_1} \cap G_1) \cap (C^{y_1} \cap G_1) = A \cap B_1^{x_1} \cap C_1^{y_1} = 1$ в силу того, что x_1 и y_1 из G_1 ; противоречие с тем, что $A \cap B^x \cap C^y \not\leq F(G)$ для любых x и y из G . Аналогично для подгрупп B и C . Лемма доказана.

Лемма 9. Подгруппы A, B и C действуют транзитивно на компонентах $K_1, K_2, \dots, K_n$ из $E(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $E_1(G) = \langle K_1^A \rangle \neq E(G)$. Тогда $E(G) = E_1(G) \times E_2(G)$, где $E_2(G) \leq E(G)$ — произведение компонент из $E(G)$, не вошедших в $E_1(G)$. По лемме 8 $G = E(G)A$, значит, подгруппы $E_1(G)$ и $E_2(G)$ нормальны в G . Следовательно, подгруппы $C_1 = C_G(E_1(G))$ и $C_2 = C_G(E_2(G))$ также нормальны в G , и по теореме Ремака [10, с. 50] $G/C_1 \cap C_2 \cong G/C_1 \times G/C_2$. Поскольку $G/C_1 \cap C_2 = G/C_G(E(G)) \cong G$, а $\overline{G}_1 = G/C_1 \cong \text{Aut}(E_1(G))$ и $\overline{G}_2 = G/C_2 \cong \text{Aut}(E_2(G))$, по индукции для проекций $\overline{A}_i, \overline{B}_i$ и $\overline{C}_i$ при $i = 1, 2$ подгрупп A, B и C на G/C_i найдутся элементы $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_i$, которые по лемме 8 можно выбрать из образов E_i и для которых $\overline{A}_i \cap \overline{B}_i^{\overline{x}_i} \cap \overline{C}_i^{\overline{y}_i} = \overline{1}$. Действительно, так как $E_1 \cong \overline{E}_1$ и $E_2 \cong \overline{E}_2$, по лемме 8 $\overline{G}_i \cong \overline{E}_i \overline{A}_i = \overline{E}_i \overline{B}_i = \overline{E}_i \overline{C}_i$. По индукции $\overline{A}_i \cap \overline{B}_i^{\overline{x}_i} \cap \overline{C}_i^{\overline{y}_i} = \overline{1}_i$, где $\overline{x}_i, \overline{y}_i$ из $\overline{G}_i$. Так как $\overline{G}_i = \overline{E}_i \overline{A}_i = \overline{E}_i \overline{B}_i = \overline{E}_i \overline{C}_i$, например, $\overline{x}_i \in \overline{E}_i \overline{B}_i$, поэтому $\overline{x}_i = \overline{b}_i \overline{e}_i$, где $\overline{b}_i \in \overline{B}_i$, а $\overline{e}_i \in \overline{E}_i$ и тогда $\overline{B}_i^{\overline{x}_i} = \overline{B}_i^{\overline{b}_i \overline{e}_i} = \overline{B}_i^{\overline{e}_i}$. Аналогично можно считать без ограничения общности, что $\overline{y}_i \in \overline{E}_i$. В силу изоморфизма $\overline{E}_i$ и E_i элементы x_i и y_i , образы которых совпадают с $\overline{x}_i$ и $\overline{y}_i$ соответственно, можно выбирать из E_i . Покажем, что тогда $D = A \cap B^{x_1 x_2} \cap C^{y_1 y_2} = 1$. Действительно, $\overline{D}_1 \leq \overline{A}_1 \overline{A}_2 \cap \overline{B}_1 \overline{B}_2^{\overline{x}_1 \overline{x}_2} \cap \overline{C}_1 \overline{C}_2^{\overline{y}_1 \overline{y}_2} = \overline{A}_1 \cap \overline{B}_1^{\overline{x}_1} \cap \overline{C}_2^{\overline{y}_1} = \overline{1}_1$, и аналогично $\overline{D}_2 = \overline{1}_2$, где $\overline{D}_1$ и $\overline{D}_2$ — проекции D на $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$ соответственно и $D \cong \overline{D}_1 \times \overline{D}_2$. Тогда $D \cong \overline{1}_1 \times \overline{1}_2$. Следовательно, $D = 1$; противоречие с тем, что $A \cap B^x \cap C^y \not\leq F(G)$ для любых x и y из G . Лемма доказана.

Лемма 10. $\pi(A) = \pi(B) = \pi(C)$ и $|\pi(A)| \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что, например, $\pi(A) \neq \pi(B)$. Тогда $\pi(A) \cup \pi(B) \supset \pi(A) \cap \pi(B)$, поэтому либо в $\pi(A)$, либо в $\pi(B)$ есть элемент p , не лежащий в пересечении $\pi(A) \cap \pi(B)$. Значит, например, $1 \neq A \cap B^x \cap C^y = O_{p'}(A) \cap B^x \cap C^y$ для любых элементов x и y из G ; противоречие с выбором числа $|A||B||C|$. Теперь неравенство $|\pi(A)| \geq 2$ следует из [13, следствие C]. Лемма доказана.

Лемма 11. Имеем $O_p(A) = \Omega(O_p(A))$ для любого числа $p \in \pi(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $O_p(A) > \Omega(O_p(A))$ для некоторого $p \in \pi(A)$. Тогда $|A| > |O_{p'}(A)\Omega(O_p(A))|$. Следовательно, выбор числа $|A||B||C|$ влечет, что $O_{p'}(A)\Omega(O_p(A)) \cap B^x \cap C^y = 1$ для некоторых элементов x и y из G . Но $A \cap B^x \cap C^y \neq 1$. Нильпотентность A влечет, что $O_p(A) \cap B^x \cap C^y \neq 1$. Поэтому в разности $O_p(A) \setminus \Omega(O_p(A))$ содержится p -элемент t из $B^x \cap C^y$. Тогда $\Omega(\langle t \rangle) \leq \Omega(O_p(A)) \cap B^x \cap C^y \neq 1$; противоречие с тем, что $\Omega(O_p(A))O_{p'}(A) \cap B^x \cap C^y = 1$. Лемма доказана.

Лемма 12. Подгруппа A содержит нормальную подгруппу A_0 , которая нормализует каждую компоненту из $E(G)$ и $\pi(A/A_0) = \{p\}$, $C_{E(G)}(A)$ — неединичная p -группа и $O_{p'}(A) \cap E(G) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4 $C_{E(G)}(A) \neq 1$. Рассмотрим произвольный элемент x простого порядка p из $C_{E(G)}(A)$. По лемме 9 подгруппа A действует транзитивно на компонентах из $E(G)$, поэтому $x = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$, где x_i — проекция элемента x на компоненту K_i из $E(G)$. Таким образом, действие подгруппы A на компонентах из $E(G)$ индуцирует аналогичное транзитивное действие A на элементах x_i , $x_i \in K_i$. Пусть $A_0 = \ker(\varphi)$ — ядро транзитивного подстановочного представления A в Σ_n . Так как по лемме 4 $C_{K_1}(A_0) \neq 1$, без ограничения общности $C_{K_1}(A_0) \geq \langle x_1 \rangle$. Допустим, что $\pi(A/A_0) \neq \{p\}$. Тогда по лемме 5 подгруппа A содержит интранзитивную на $\{x_1, \dots, x_n\}$ подгруппу A_1 простого индекса $q \neq p$. Положим $V_1 = \{x_1^{a_1} \mid a_1 \in A_1\}$ и $v_1 = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m$. Здесь $x_1, x_2, \dots, x_m$ — все элементы из орбиты для элемента x_1 под действием A_1 . Тогда $v_1 \in C_{E(G)}(A_1)$ по построению. С другой стороны, подгруппа A_1 по лемме 11 не может содержать $\Omega(O_q(A))$. Следовательно, в разности $A \setminus A_1$ содержится элемент a простого порядка q , который не централизует v_1 . Подгруппа A_1 нормальна в A , поэтому A_1 централизует нормальное замыкание $N = \langle v_1^{(a)} \rangle$.

Рассмотрим подгруппу $M = AN$. Тогда $F(M) = A_1N \leq A_1E(G) < AE(G)$. По лемме 8 $AE(G) = G$. Поэтому по индукции $F(M) \cap B^h \cap C^f = 1$ для некоторых элементов h и f из G . Так как $|M : F(M)| = q$, то $D = M \cap B^h \cap C^f$ — подгруппа порядка q из $M \cap A$. По теореме Бэра — Судзуки $A \cap D^x \leq F(M)$ для некоторого элемента x из $F(M)$. Значит, $A \cap D^x = A \cap D^x \cap F(M) = (A \cap F(M)) \cap D^x = A_1 \cap D^x$. Но $A_1 \triangleleft M$. Поэтому $A_1 \cap D^x = (A_1 \cap D)^x = (A_1 \cap M \cap B^h \cap C^f)^x = (A_1 \cap B^h \cap C^f)^x \leq (F(M) \cap B^h \cap C^f)^x = 1$. С другой стороны, $A \cap D^x = A \cap (M \cap B^h \cap C^f)^x = A \cap M \cap B^{hx} \cap C^{fx} = A \cap B^{hx} \cap C^{fx} = 1$; противоречие с тем, что $A \cap B^x \cap C^y \not\leq F(G)$ для любых x и y из G . Следовательно, $\pi(A/A_0) = \{p\}$. Если в $C_{E(G)}(A)$ найдется элемент простого порядка $r \neq p$, то повторяем для него указанную процедуру. В частности, никакой p' -элемент простого порядка из A_0 — поточечного стабилизатора всех компонент из $E(G)$, не может лежать в $E(G)$. Так как $O_{p'}(A) \leq A_0$ в силу $\pi(A/A_0) = \{p\}$, то $O_{p'}(A) \cap E(G) = 1$. Лемма доказана.

Лемма 13. Пусть P — силовская p -подгруппа группы G , содержащая $O_p(A)$. Тогда либо $P \cap P^x \neq 1$ для любого элемента x из G , либо $O_{p'}(A)$ — абелева подгруппа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что утверждение леммы ложно. Тогда $P \cap P^y = 1$ для некоторого элемента y из G и $O_{p'}(A)$ — абелева подгруппа. В этом случае $O_p(A) \cap B^h = 1$ для некоторого h из G и по лемме 3 $O_{p'}(A) \cap C^f = 1$ для некоторого f из G . Следовательно, $A \cap B^h \cap C^f = O_p(A)O_{p'}(A) \cap B^h \cap C^f = O_p(A)O_{p'}(A) \cap B^h \cap C^f \leq O_{p'}(A) \cap C^f = 1$; противоречие с тем, что $A \cap B^x \cap C^y \not\leq F(G)$ для любых x и y из G . Лемма доказана.

Лемма 14. Подгруппа K_1 лиева типа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [12, основная теорема] подгруппа K_1 либо спорадическая, либо знакопеременная, либо лиева типа.

Предположим, что K_1 — спорадическая или знакопеременная подгруппа из G . Согласно [12, теоремы 4.239, 4.240] $|\text{Out}(K_1)| \leq 2$ или $K_1 \simeq A_6$ и $\text{Out}(K_1) \simeq E_4$. Но в силу [13, теорема B(2)] $P \cap P^x = 1$ для некоторого x из G , за исключением тех случаев, когда подгруппа K_1 изоморфна группе лиева типа. Согласно [12, (2.7)] $K_1 \simeq A_n$, n равно 5, 6 или 8 и $p = 2$. Но во всех этих случаях $\text{Out}(K_1)$ — 2-группа. Поэтому $O_{p'}(A) = 1$; противоречие с леммой 13. Лемма доказана.

Лемма 15. Пусть $p \geq 3$. Тогда $P \cap P^x = 1$ для некоторого x из G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $p \geq 5$, то утверждение леммы следует из [13, теорема B(2)]. Если $p = 3$ и $P \cap P^y \neq 1$ для любого элемента y из G , то согласно [13, теорема B(2)] $K_1 \simeq \Omega_8^+(3)$ и P содержит элемент g порядка 3, индуцирующий на K_1 графовый автоморфизм. По лемме 10 $O_{3'}(A) \neq 1$. Тогда по лемме 12 элементы из $O_{3'}(A)$ не лежат в $E(G)$ и потому согласно [14, с. 136] индуцируют на K_1 либо диагональные, либо графовые автоморфизмы порядков 2 или 4. В любом случае согласно [14, с. XVI] $\text{Out}(K_1) \simeq \Sigma_4$ ненильпотентна, поэтому образы 2-элементов из фактор-группы $\bar{G} = G/E(G)$ не коммутируют с образами 3-элементов из $\bar{G}$; противоречие с леммой 8. Лемма доказана.

Лемма 16. Пусть x — элемент простого порядка из $C_{E(G)}(A)$. Тогда x полупростой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что x — не полупростой элемент в $E(G)$. Тогда его проекция на K_1 , обозначим ее через x_1 , будет унитарным элементом в K_1 . Согласно [15, следствие 3.1.4] $N = N_{\text{Aut}(K_1)}(\langle x_1 \rangle)$ — p -скованная группа с $F^*(N) = O_p(N)$. Если $p \geq 3$, то по лемме 15 $O_p(C_G(x)) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента x из G и по лемме 1 G не контрпример к теореме.

Поэтому $p = 2$ и x_1 — инволюция из K_1 . Так как $O_{p'}(A) \neq 1$ по лемме 11, элемент из $O_{p'}(A)$ индуцирует на K_1 внешние автоморфизмы нечетного порядка. Если $O_2(C_G(x)) \cap (O_2(B))^y \neq 1$ для любого элемента y из G , то согласно [13, теорема B(2)] подгруппа K_1 определена либо над полем порядка 2, либо над полем порядка 4. В любом случае условие $O_2(C_G(x)) \cap O_2(B)^g \neq 1$ для любого g из G влечет, что A содержит элемент, индуцирующий графовый автоморфизм порядка 2. Но графовые автоморфизмы порядка 2 не коммутируют в данном случае с автоморфизмами нечетного порядка (диагональными в случае $K_1 \simeq L_3(4)$, что следует из [14, с. 23], или графовыми в случае $K_1 \simeq \Omega_8^+(2)$ в силу того, что $\text{Out}(K_1) \simeq \Sigma_4$).

Значит, $O_2(C_G(x)) \cap O_2(B)^t = 1$ для некоторого t из G , и, как и выше, по лемме 1 G не контрпример к теореме. Лемма доказана.

Лемма 17. Пусть a — элемент простого порядка из $Z(A)$. Тогда $F(C_G(a)) \cap B^g \neq 1$ для любого элемента g из G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $F(C_G(a)) \cap B^h = 1$ для некоторого h из G . Обозначим через B_1 подгруппу $C_G(a) \cap B^h$ и положим $C_1 = C_G(a) \cap C$. По индукции $A \cap B_1^x \cap C_1^y \leq F(C_G(a))$ для некоторых x и y из $C_G(a)$. Следовательно, $A \cap B_1^x \cap C_1^y = A \cap B_1^x \cap C_1^y \cap F(C_G(a)) = A \cap (B_1^x \cap F(C_G(a))) \cap C_1^y = A \cap (B_1 \cap F(C_G(a)))^x \cap C_1^y = A \cap (C_G(a) \cap B^h \cap F(C_G(a)))^x \cap C_1^y = A \cap (B^h \cap F(C_G(a)))^x \cap C_1^y = 1$. Но тогда $A \cap B_1^x \cap C_1^y = A \cap (C_G(a) \cap B^h)^x \cap (C_G(a) \cap C)^y = A \cap (C_G(a))^x \cap B^{hx} \cap$

$(C_G(a))^y \cap C^y = A \cap B^{hx} \cap C^y = 1$; противоречие с тем, что $A \cap B^x \cap C^y \not\leq F(G)$ для любых x и y из G . Лемма доказана.

Лемма 18. Пусть $q \in \pi(O_{p'}(A))$ и Q — силовская q -подгруппа из $O_{p'}(A)$, $q > 2$. Тогда Q абелева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что лемма неверна. Рассмотрим силовскую q -подгруппу Q из $O_{p'}(A)$, $q > 2$ простое. Согласно [16, (7–6)(2)] $Q = Q_1 \rtimes Q_2$, где неединичные элементы из Q_1 индуцируют на K_1 диагональные, а неединичные элементы из Q_2 — полевые автоморфизмы, причем обе подгруппы циклические. Заметим, что $|Q_2| = q$. Действительно, по лемме 11 $Q = \Omega(Q)$. Значит, образы порождающих элементов из Q порождают любую ее фактор-группу. В частности, фактор-группа $\bar{Q} = Q/Q_1 \simeq Q_2$ порождается элементом порядка q . Покажем, что $\Omega(Q) < Q$. Действительно, любой элемент v из Q записывается в виде $v = v_1^n v_2^m$, где $\langle v_1 \rangle = Q_1$, а $\langle v_2 \rangle = Q_2$. В случае $\Omega(Q) \not\leq \langle v_1^q \rangle \langle v_2 \rangle$ в $\Omega(Q)$ найдется элемент $v = v_3 v_4$, где $\langle v_3 \rangle = Q_1$ и $\langle v_4 \rangle = Q_2$ такой, что $v^q = 1$. Если подгруппа Q класса не выше двух, то по известной формуле (см., например, [17, обозначение 2]) $v^q = v_3^q v_4^q [v_3, v_4]^{q(q-1)/2}$. В частности, для элемента v порядка q отсюда следует, что $1 = v_3^q [v_3, v_4]^{q(q-1)/2}$. Но $[v_3, v_4] \in \langle v_3^q \rangle$. Так как $q > 2$, имеем $\langle [v_3, v_4]^{q(q-1)/2} \rangle < \langle v_3^q \rangle$. Следовательно, $1 \neq v_3^q [v_3, v_4]^{q(q-1)/2}$; противоречие. Далее, в Q_1 достаточно выбрать подгруппу Q_3 так, чтобы Q/Q_3 была класса 2, и воспользоваться предыдущим рассуждением; противоречие с леммой 11. Лемма доказана.

Лемма 19. Пусть v — элемент простого нечетного порядка q из $Z(O_{p'}(A))$. Тогда v индуцирует на K_1 диагональный автоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что лемма неверна. Тогда согласно [16, (9–1)] элемент v индуцирует на K_1 полевой, графово-полевой или графовый автоморфизм.

Предположим, что v индуцирует на K_1 полевой или графово-полевой автоморфизм. Если подгруппа $C_{K_1}(v)$ неразрешима, то ввиду [15, (9–1)] подгруппа $C_{K_1}(v)$ почти проста и для компоненты R_1 из $C_{K_1}(v)$ имеем $C_{\text{Aut}(K_1)}(R) = \langle v \rangle$. Следовательно, A действует на подгруппе $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ из $E(G)$ и $C_A(R) = \langle v \rangle$. Значит, $F(RA) = \langle v \rangle$. По лемме 3 $\langle v \rangle \cap B^g = 1$; противоречие с леммой 17. Если подгруппа $C_{K_1}(v)$ разрешима, то по [16, (9–1)] имеем $C_{K_1}(v) \simeq L_2(2), L_2(3), U_3(2), Sz(2)$. Так как $q > 2$, согласно [16, (7–3)] элемент v индуцирует полевой автоморфизм на K_1 и $K_1 \simeq L_2(2^q), L_2(3^q), U_3(2^q), Sz(2^q)$ соответственно. По лемме 4 $C_{E(G)}(A) \neq 1$ и $C_{E(G)}(A) \leq C_{K_1}(v) \times C_{K_2}(v) \times \dots \times C_{K_n}(v) = R$. Из действия A на R следует, что $C_{F(R)}(A) \neq 1$. По лемме 12 $p \mid |F(R)|$. Поэтому $F(R)$ — абелева p -группа. Но тогда и подгруппа $F(RA) = F(R)\langle v \rangle$ также абелева. Значит, по лемме 3 $F(RA) \cap B^g = 1$; противоречие, как в лемме 17.

Если v индуцирует графовый автоморфизм нечетного порядка, то согласно [16, (7–3), (9–1)] имеем $|v| = 3$, $C_{K_1}(v)$ — почти простая группа и $C_{\text{Aut}(K_1)}(v) = \langle v \rangle \times C_{K_1}(v)$. Следовательно, $F(C_{K_1}(v) \times C_{K_2}(v) \times \dots \times C_{K_n}(v)A) = \langle v \rangle$. По лемме 3 $\langle v \rangle \cap B^g = 1$; противоречие, как в лемме 17. Лемма доказана.

Лемма 20. Имеем $p > 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что лемма неверна. Тогда $p = 2$ и по лемме 18 подгруппа $O_{p'}(A)$ абелева, а по лемме 10 $O_{p'}(A) \neq 1$. Следовательно, по лемме 13 $P \cap P^g \neq 1$ для любого g из G . Тогда согласно [13, теорема B(2)]

либо K_1 определена над полем порядка 2, либо $K_1 \simeq L_3(4)$, либо K_1 определена над полем, порядок которого равен простому числу Ферма или Мерсенна, или над полем порядка 9. По лемме 16 характеристика поля определения K_1 отличается от двух. Значит, K_1 — группа нечетной характеристики, и либо K_1 определена над полем, порядок которого простое число Ферма или Мерсенна, либо K_1 определена над полем порядка 9. Из леммы 4 следует, что $A \leq C(t)$, где $t = t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_n$, и инволюция t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, лежит в K_i . Как показано выше в данной лемме, инволюция t_i является полупростым элементом в K_i . Если $C_{C^*}(t_i)$, где $C^* = \text{Inn diag}(K_i)$ не содержит подгрупп лиева типа, то согласно [15, табл. 4.5.1] $K_i \simeq L_2(q)$. Но $L_2(q)$ не имеет диагональных автоморфизмов нечетного порядка (см. [14, с. XVI]). Следовательно, в $C_{C^*}(t_i)$ есть нетривиальная лиева компонента L . Кроме того, согласно [16, (7–4)] $K_i \simeq L_n(r)$, $U_n(r)$, $q \mid (n, r-1)$ или $q \mid (n, r+1)$, $E_6(r)$ или ${}^2E_6(r)$, $3 \mid (r-1)$ или $3 \mid (r+1)$ соответственно. Если L_i разрешима, то согласно [12, теорема 2.13] L_i определена над полем порядка 2 или над полем порядка 3. Так как t_i — полупростой элемент, то $L_i \simeq SL_2(3)$ или $L_i \simeq L_2(3)$. Но в этом случае согласно [14, с. XVI] группа $\text{Out diag}(K_i)$ является 2-группой; противоречие с тем, что K_i имеет диагональный автоморфизм, индуцируемый неединичным элементом из $O(A)$.

Следовательно, все лиевы компоненты из $C_{C^*}(t_i)$ неразрешимы. Таким образом, лиевы компоненты являются просто компонентами из $C_{C^*}(t_i)$. Так как $O(A)$ индуцирует на K_i нетривиальные диагональные автоморфизмы, K_i согласно [14, с. XVI] не может быть ортогональной группой. Тогда ввиду [15, табл. 4.5.1] $C_{C^*}(E(C_{C^*}(t_i)))$ — циклическая подгруппа, инвертируемая возможным графовым автоморфизмом порядка 2, индуцируемым на K_i некоторым элементом из A . Но наличие у K_i диагонального автоморфизма нечетного порядка влечет согласно [14, с. XVI], что $K_i \simeq L_n(q)$, $U_n(q)$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$. Однако в этих подгруппах в $\text{Out}(K_i)$ образ графового автоморфизма инвертирует образ диагонального автоморфизма (см. [15, табл. 4.5.1]); противоречие с нильпотентностью A . Значит, A не индуцирует графовый автоморфизм на K_1 . Но тогда $\text{Aut}(K_1) = \text{Inn diag}(K_1) \rtimes C_2$, где полевой автоморфизм C_2 существует только для поля порядка 9. Но полевые автоморфизмы также инвертируют диагональные в указанных группах. Значит, C_2 может индуцировать на K_i только графово-полевой автоморфизм, который, в свою очередь, действует нетривиально на $E(C_{C^*}(t_i))$, что следует из описания централизатора графово-полевого автоморфизма, приведенного в [16, (9–1)].

Следовательно, $C_{\text{Aut}(K_i)}(E(C_{C^*}(t_i))) = C_{C^*}(E(C_{C^*}(t_i)))$, таким образом, $C_{\text{Aut}(K_i)}(E(C_{C^*}(t_i)))$ — циклическая группа. Поэтому $C_{\ker(\varphi)}(R)$ — абелева подгруппа для подгруппы $R = \prod_i E(C_{C^*}(t_i))$. Здесь $\ker(\varphi)$ — ядро представления A при действии сопряжением на компонентах из $E(G)$. Само представление φ определяется на компонентах из $E(G)$ по правилу: $a \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & \dots & K_n \\ K_1^a & K_2^a & \dots & K_n^a \end{pmatrix}$ для $a \in A$. Тогда для подгруппы $M = RA$ имеем $F(M) = C_{\ker(\varphi)}(R)$ — абелева подгруппа. Следовательно, $F(M) \cap B^g = 1$ по лемме 3 для некоторого g из G ; противоречие, как в лемме 17. Лемма доказана.

Лемма 21. G не контрпример к теореме.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда по лемме 20 имеем $p > 2$. Следовательно, по лемме 15 $P \cap P^x = 1$ для некоторого x из G . В этом случае лемма 13 влечет, что подгруппа $O_{p'}(A)$ неабелева. Из леммы 18 следует,

что в $O_{p'}(A)$ неабелевой может быть только силовская 2-подгруппа. Кроме того, из лемм 18 и 19 следует, что элементы нечетного порядка из $O_{p'}(A)$ индуцируют на K_1 только диагональные автоморфизмы. Следовательно, если такие неединичные элементы из $O_{p'}(A)$ существуют, то по [16, (7–4)] $K_1 \simeq L_n(q)$, $U_n(q)$. Но в этих группах диагональные автоморфизмы инвертируются как графовым, так и полевым автоморфизмом. Значит, наличие диагональных автоморфизмов нечетного порядка ведет к противоречию с нильпотентностью A . Поэтому $O_{p'}(A)$ — неабелева 2-группа. В этом случае из леммы 15 следует, что $O_{p'}(A) \cap B^g \neq 1$ для любого g из G . Неабелевость 2-группы $O_{p'}(A)$ влечет, что K_1 имеет 2-группу диагональных автоморфизмов порядка ≥ 4 . В частности, K_1 определена над полем нечетной характеристики, и согласно [14, с. XVI] $K_1 \simeq L_n(q)$, $U_n(q)$, $\Omega_n^\pm(q)$, $4|n$. Заметим, что ввиду [15, табл. 4.5.1] силовская 2-подгруппа из $\text{Out}(K_1)$ при этом диэдральна порядка ≥ 8 и образ графового автоморфизма инвертирует циклическую 2-подгруппу из $\text{Out}(K_1)$.

Пусть t — инволюция из $Z(O_{p'}(A))$, индуцирующая на K_1 диагональный автоморфизм. Тогда t — полупростой элемент. Если в $C_{K_1}(t)$ нет неединичных лиевых компонент, то согласно [15, табл. 4.5.1] $K_1 \simeq L_2(q)$. В этом случае группа диагональных автоморфизмов имеет порядок 2, что невозможно.

Если в $C_{K_1}(t)$ есть разрешимая лиева компонента L_1 , то по [12, теоремы 2.13; 15, табл. 4.5.1] $L_1 \simeq SL_2(3)$, $L_2(3)$. Тогда из леммы 16 следует, что $p \neq 3$. Так как $p \neq 3$, то $[O_2(C(t)), P \cap E(G)] = 1$ в силу того, что $P \cap E(G) \leq C_{E(G)}(t)$, и согласно структуре $C_{K_1}(t)$ (см. [15, табл. 4.5.1]), $P \cap E(G)$ нормализует каждую лиеву компоненту из $C_{K_1}(t)$ в силу $p \geq 5$. Значит, A централизует некоторую инволюцию из $E(G)$; противоречие с леммой 12.

Следовательно, лиев слой в $C_{K_1}(t)$ совпадает с $E(C_{K_1}(t))$. Так как полевые автоморфизмы согласно [16, (9–1); 12, (4.55)] действуют нетривиально на $E(C_{K_1}(t))$, то $C_{\text{Aut}(K_1)}(E(C_{K_1}(t)))$ состоит из внутренне-диагональных и графовых автоморфизмов K_1 . Пусть $R = \prod_i E(C_{K_1}(t))$ и $M = RA$. Тогда $F(RA) \leq A_1 O_{p'}(A)$, где A_1 ввиду [15, табл. 4.5.1] абелева, а $O_{p'}(A) \simeq D_{2^n}$, $n \geq 3$. Рассмотрим абелеву подгруппу T индекса 2 из $F(RA)$. По лемме 3 $T \cap B^x = 1$ для некоторого x из G и $T \cap C^y = 1$ для некоторого y из G . Пусть $B_1 = RA \cap B^x$ и $C_1 = RA \cap C^y$. По индукции в фактор-группе $RA/F(RA) = \overline{RA}$ имеем $\overline{A} \cap \overline{B_1} \cap \overline{C_1} = \overline{1}$ для некоторых элементов $\bar{r}$ и $\bar{t}$ из $\overline{RA}$, или $A \cap B_1^{rf_1} \cap C_1^{tf_2} \leq F(RA)$ для некоторых элементов f_1 и f_2 из $F(RA)$. Значит,

$$\begin{aligned} A \cap (B^x \cap RA)^{rf_1} \cap (C^y \cap RA)^{tf_2} &= A \cap B^{xrf_1} \cap C^{ytf_2} \\ &= A \cap (B_1^{rf_1} \cap F(RA)) \cap (C_1^{tf_2} \cap F(RA)) \\ &= A \cap (B^x \cap F(RA))^{rf_1} \cap (C^y \cap F(RA))^{tf_2} = \langle i_1^{rf_1} \rangle \cap \langle i_2^{tf_2} \rangle. \end{aligned}$$

Так как i_1 и i_2 — инволюции из D_{2^n} , $n \geq 3$, найдется элемент f_1 такой, что $\langle i_1^{rf_1} \rangle \cap \langle i_2^{tf_2} \rangle = 1$. Но тогда и $A \cap B^{xrf_1} \cap C^{ytf_2} = 1$; противоречие с тем, что $A \cap B^x \cap C^y \not\leq F(G)$ для любых x и y из G . Лемма доказана. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Passman D. S. Groups with normal solvable Hall p -subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 123, N 1. P. 99–111.
2. Зенков В. И. Структура пересечений нильпотентных π -подгрупп в π -разрешимых конечных группах // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4. С. 103–107.
3. Vdovin E. P. Regular orbits in coprime actions of solvable linear p' -groups // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. V. 4. P. 345–360.

4. Dolfi S. Large orbits in coprime actions of solvable groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. V. 360, N 1. P. 135–152.
5. Зенков В. И. О пересечениях троек нильпотентных подгрупп в разрешимых конечных группах // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 207–209.
6. Коуровская тетрадь. Нерешенные задачи теории групп. 17-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010.
7. Зенков В. И. О пересечениях нильпотентных подгрупп в конечных симметрических и знакопеременных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 145–149.
8. Зенков В. И. О пересечениях абелевых подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 2. С. 150–152.
9. Зенков В. И. О пересечении абелевой и нильпотентной подгрупп в конечных группах. II // Мат. заметки. 2016. Т. 105, № 3. С. 383–394.
10. Беляев В. В., Хартли Б. Централизаторы конечных нильпотентных подгрупп в локально конечных группах // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 389–410.
11. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
12. Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
13. Зенков В. И. Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фунд. и прикл. математика. 1994. Т. 56. С. 1–92.
14. Conway J. H. et al. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
15. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups. N 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998.
16. Gorenstein D., Lyons R. The local structure of finite groups of characteristic 2 type // Mem. Amer. Math. Soc. 1983. V. 42, N . P. 1–731.
17. Гаген Т., Глауберман Д., Гольдшмидт Д. К теории конечных групп. М.: Мир, 1979.

Поступила в редакцию 14 августа 2018 г.

После доработки 8 февраля 2019 г.

Принята к публикации 12 марта 2019 г.

Зенков Виктор Иванович

Институт математики и механики УрО РАН,

ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990

v19z52@mail.ru