O. K. Kruglov, Polyhedral divisors of affine trinomial hypersurfaces, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 787–800

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.407>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.198.55.26

April 26, 2023, 08:20:27

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ ДИВИЗОРЫ АФФИННЫХ ТРИНОМИАЛЬНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

О. К. Круглов

Аннотация. Найден общий вид полиэдральных дивизоров, соответствующих естественному действию тора сложности один на аффинных триномимальных гиперповерхностях. Приведены примеры вычисления таких дивизоров для конкретных классов гиперповерхностей.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.407

Ключевые слова: аффинное многообразие, алгебраический тор, триномимальное уравнение, градуированная алгебра, полиэдральный дивизор.

§ 1. Введение

Одной из основных задач современной алгебраической геометрии являются задача эффективного описания тех или иных классов алгебраических многообразий и изучение геометрических свойств многообразий в терминах этого описания. Классическим примером реализации такого подхода является теория торических многообразий. В этом случае нормальное алгебраическое многообразие с действием алгебраического тора с открытой орбитой задается веером рациональных полиэдральных конусов (см, например, [1, 2]). За последние десятилетия получено множество результатов, связывающих геометрию многообразия с комбинаторными свойствами соответствующего веера.

Естественным обобщением этой теории является изучение произвольных действий алгебраического тора. Важным инвариантом, характеризующим действие, является сложность действия, определенная в 1986 г. Э. Б. Винбергом [3]. В случае действия алгебраического тора это коразмерность типичной орбиты действия. В 2006 г. Альтманн и Хаузен [4] предложили описывать действия тора произвольной сложности на аффинном многообразии с помощью собственных полиэдральных дивизоров. Этот подход получил широкое распространение. За подробностями можно обратиться к обзору [5]. Тем самым большое значение приобретает задача явного вычисления полиэдральных дивизоров для конкретных аффинных многообразий. Наиболее эффективно данное описание в случае действий сложности один.

Теория колец Кокса связывает произвольное действие сложности один с аффинными многообразиями, заданными триномимальными уравнениями. Случай одного триномимального уравнения приводит к аффинным триномимальным гиперповерхностям. Такие многообразия представляют безусловный интерес с точки зрения аффинной алгебраической геометрии. Вопрос вычисления полиэдральных дивизоров, соответствующих действию тора на триномимальной

гиперповерхности, также ранее изучался в статье [6]. А именно, И. В. Аржанцевым получены полиэдральные дивизоры, соответствующие действию тора на факториальных триномимальных гиперповерхностях.

В данной работе найден общий вид полиэдрального дивизора, отвечающего каноническому действию тора сложности один на аффинной триномимальной гиперповерхности. В § 5 явно вычислен полиэдральный дивизор для рациональных триномимальных гиперповерхностей. Приводятся классификация таких гиперповерхностей и общий вид дивизора для каждого из классов. Отдельно рассмотрен двумерный случай: соответствующие аффинные поверхности широко известны как поверхности Фама — Брискорна. В заключительном примере рассматривается случай нерациональной гиперповерхности, в этом примере возникает кривая рода один.

§ 2. Полиэдральные дивизоры

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и Y — нормальное алгебраическое многообразие. Также будем считать, что Y полупроективно, т. е. проективно над некоторым аффинным многообразием. *Простым дивизором* D на многообразии Y называется неприводимое замкнутое подмногообразие коразмерности один в Y . *Дивизором Вейля* на многообразии Y называется конечная сумма

$$D = \sum_i n_i \cdot D_i,$$

где $D_i \subseteq Y$ — простые дивизоры, $n_i \in \mathbb{Z}$. Для каждого дивизора определен его носитель

$$\text{supp}(D) := \bigcup_{n_i \neq 0} D_i.$$

Дивизоры Вейля на многообразии Y образуют группу, которая обозначается через $\text{Div}(Y)$. Также можно определить группу рациональных дивизоров Вейля $\text{Div}_{\mathbb{Q}}(Y) := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Div}(Y)$. Дивизор Вейля D называется *эффективным*, если $n_i \geq 0$ для любого i (обозначается через $D \geq 0$). Пусть f — ненулевая рациональная функция на нормальном многообразии Y . Ей можно сопоставить дивизор Вейля по следующему правилу: D_i — простые дивизоры, соответствующие нулям и полюсам функции f , а $n_i < 0$, если D_i соответствует полюсу функции f , и $n_i > 0$, если D_i соответствует нулю функции f , в свою очередь, $|n_i|$ равен порядку соответствующего нуля или полюса. Дивизор D , полученный из функции f описанным выше способом, называется *главным* и обозначается через (f) . *Дивизором Картье* на многообразии Y называется локально главный дивизор, т. е. такой дивизор D , что существует открытое покрытие многообразия Y аффинными картами U_i такими, что для любого i ограничение дивизора D на U_i совпадает с ограничением на U_i главного дивизора некоторой функции $f_i \in \mathbb{K}(Y)$. Ограничение дивизора D на открытое подмножество $U \subseteq Y$ определяется как

$$D|_U := \sum_i n_i \cdot (D_i \cap U).$$

Дивизоры Картье на Y образуют подгруппу в $\text{Div}(Y)$, обозначаемую через $\text{CaDiv}(Y)$, и соответственно $\text{CaDiv}_{\mathbb{Q}}(Y) := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{CaDiv}(Y)$. С дивизором $D \in \text{Div}(Y)$ связано подпространство в $\mathbb{K}(Y)$, определяемое следующим образом:

$$\Gamma(Y, \mathcal{O}(D)) := \{f \in \mathbb{K}(Y)^\times \mid (f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Для $f \in \Gamma(Y, \mathcal{O}(D))$ определим множество нулей $Z(f) := \text{supp}((f)+D)$. Дивизор $D \in \text{Div}(Y)$ называется *полуобильным*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$Y = \bigcup_{f \in \Gamma(Y, \mathcal{O}(nD))} Y_f,$$

где $Y_f := Y \setminus Z(f)$. Дивизор D называется *большим*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что Y_f аффинно для некоторого $f \in \Gamma(Y, \mathcal{O}(nD))$.

Напомним некоторые определения из выпуклой геометрии. *Конусом*, порожденным векторами $v_1, \dots, v_n$ в рациональном векторном пространстве V , называется подмножество этого пространства, определяемое следующим образом:

$$\text{cone}(v_1, \dots, v_n) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in V \mid \lambda_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \right\}.$$

Полиэдром в рациональном аффинном пространстве называется пересечение конечного числа аффинных полупространств. Для полиэдра Δ определим множество относительно внутренних точек $\text{relint}(\Delta)$ — это точки полиэдра Δ , являющиеся внутренними, если рассматривать Δ как полиэдр в минимальном аффинном подпространстве, его содержащем.

Алгебраическим тором T называется прямое произведение нескольких экземпляров мультипликативной группы поля. С тором T связаны две решетки: решетка однопараметрических подгрупп N и двойственная к ней решетка характеров $M := \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ (см. [1, 2]). Далее будем рассматривать полиэдры в рациональных векторных пространствах $N_{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N$ и аналогично определенном $M_{\mathbb{Q}}$.

Каждому конусу $\sigma \subseteq N_{\mathbb{Q}}$ соответствует конус в $M_{\mathbb{Q}}$, определяемый как

$$\sigma^{\vee} := \{u \in M_{\mathbb{Q}} \mid \forall v \in \sigma \langle u, v \rangle \geq 0\}.$$

Он называется *двойственным конусом* к конусу σ . *Конусом рецессии* σ полиэдра $\Delta \subseteq N_{\mathbb{Q}}$ называется конус

$$\sigma := \{v \in N_{\mathbb{Q}} \mid \forall v' \in \Delta, \forall t \in \mathbb{Q}_{\geq 0} v' + tv \in \Delta\}.$$

На полиэдрах можно определить операцию сложения при помощи суммы Минковского. Множество полиэдров с конусом рецессии σ с данной операцией образуют коммутативный моноид $\text{Pol}_{\sigma}^{+}(N_{\mathbb{Q}})$. Группу Гротендика данного моноида обозначим через $\text{Pol}_{\sigma}(N_{\mathbb{Q}})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Полиэдральным дивизором Вейля*, связанным с конусом σ , называется элемент группы

$$\text{Div}_{\mathbb{Q}}(Y, \sigma) := \text{Pol}_{\sigma}(N_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Div}(Y).$$

Для каждого $u \in \sigma^{\vee}$ определен линейный функционал

$$\text{Div}_{\mathbb{Q}}(Y, \sigma) \rightarrow \text{Div}_{\mathbb{Q}}(Y), \quad \mathfrak{D} = \sum_i \Delta_i \cdot D_i \mapsto \mathfrak{D}(u) := \sum_i \min_{v \in \Delta_i} \langle u, v \rangle \cdot D_i.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Полиэдральный дивизор $\mathfrak{D} \in \text{Div}_{\mathbb{Q}}(Y, \sigma)$ называется *собственным* или *pp-дивизором* (*proper polyhedral divisor*), если его можно представить в виде

$$\mathfrak{D} = \sum_i \Delta_i \cdot D_i,$$

где $\Delta_i \in \text{Pol}_{\sigma}^{+}(N_{\mathbb{Q}})$, $D_i \in \text{Div}(Y)$ — простые дивизоры и $\mathfrak{D}(u) \in \text{CaDiv}_{\mathbb{Q}}(Y)$, причем $\mathfrak{D}(u)$ полуобильн для любого $u \in \sigma^{\vee}$ и большой для любого $u \in \text{relint}(\sigma^{\vee})$.

Собственные дивизоры образуют полугруппу $\text{PPDiv}_{\mathbb{Q}}(Y, \sigma) \subseteq \text{Div}_{\mathbb{Q}}(Y, \sigma)$. Сформулируем основную теорему из [4].

Теорема 2.1. Пусть $\mathfrak{D} \in \text{PPDiv}_{\mathbb{Q}}(Y, \sigma)$, где Y — нормальное полупроективное многообразие, σ — конус в пространстве $N_{\mathbb{Q}}$. Тогда дивизору $\mathfrak{D}$ соответствует нормальное аффинное многообразие $X = \text{Spec}(A[Y, \mathfrak{D}])$ размерности $\text{rank}(N) + \dim(Y)$ с эффективным действием тора T с решеткой однопараметрических подгрупп N , где

$$A[Y, \mathfrak{D}] = \bigoplus_{u \in \sigma^\vee \cap M} \Gamma(Y, \mathcal{O}(\mathfrak{D}(u))).$$

Действие тора задается M -градуировкой на A . Обратно, для любого нормального аффинного многообразия X с заданным эффективным действием тора существуют такое нормальное полупроективное многообразие Y и pp -дивизор $\mathfrak{D}$ на нем, что X изоморфно $\text{Spec}(A[Y, \mathfrak{D}])$.

Таким образом, для задания эффективного действия тора сложности один на тринomialной гиперповерхности достаточно задать полупроективную кривую Y , конус σ и полиэдральный дивизор $\mathfrak{D} \in \text{PPDiv}_{\mathbb{Q}}(Y, \sigma)$.

§ 3. Постановка задачи и формулировка результатов

Закфиксируем натуральные числа n_0, n_1, n_2 и положим $n := n_0 + n_1 + n_2$. Для каждого n_i рассмотрим набор чисел $l_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n_i}$ и определим моном

$$T_i^{l_i} := T_{i1}^{l_{i1}} \dots T_{in_i}^{l_{in_i}} \in \mathbb{K}[T_{ij}; i = 0, 1, 2, j = 0, \dots, n_i].$$

Гиперповерхность X называется *триномиальной*, если она задается в $\mathbb{K}^n$ уравнением $T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} = 0$. Будем предполагать, что $n_i l_i > 1$ для $i = 0, 1, 2$, иначе такая поверхность изоморфна аффинному пространству. Введем обозначения, которые понадобятся в дальнейшем:

$$d_i := \gcd(l_{i0}, \dots, l_{in_i}), \quad d := \gcd(d_0, d_1, d_2),$$

$$d_{ij} := \gcd\left(\frac{d_i}{d}, \frac{d_j}{d}\right), \quad \tilde{d} := dd_{01}d_{02}d_{12}.$$

Опишем некоторые свойства тринomialных гиперповерхностей в терминах введенных обозначений. Отметим, что все тринomialные гиперповерхности нормальны. Это следует из того, что они неособые в коразмерности один, а для аффинных неприводимых гиперповерхностей это равносильно нормальности [7, гл. III, § 8]. Тринomialная гиперповерхность X является факториальной тогда и только тогда, когда d_0, d_1, d_2 попарно взаимно просты (см. [8, теорема 1.1(ii)]). Рациональность рассматриваемых гиперповерхностей описывается следующим утверждением.

Утверждение 3.1 [9, утверждение 5.5]. Тринomialная гиперповерхность X рациональна тогда и только тогда, когда принадлежит одному из двух типов.

Тип I. $d = 1, d_{01} = d_{02} = 1, d_{12} = s$ (с точностью до перенумерации).

Тип II. $d = 2, d_{01} = d_{02} = d_{12} = 1$.

На тринomialной гиперповерхности определено естественное действие тора, для которого коразмерность типичной орбиты действия равна 1. В таком случае говорят, что действие имеет сложность один. Действие определяется следующим образом: рассмотрим стандартное действие n -мерного тора $\bar{T}$ на $\mathbb{K}^n$. Обозначим через $\bar{N}$ решетку однопараметрических подгрупп этого тора, $e_1, \dots, e_n$ — базис решетки. Тор $T \subseteq \bar{T}$, являющийся стабилизатором идеала

$I(X) \subseteq \mathbb{K}[T_{ij}]$, имеет размерность $n - 2$. Его удобно задавать с помощью целочисленной $(2 \times n)$ -матрицы

$$L = \begin{pmatrix} -l_0 & l_1 & 0 \\ -l_0 & 0 & l_2 \end{pmatrix}.$$

Она задает линейное отображение $L : \bar{N} \rightarrow \mathbb{Z}^2$. Нетрудно видеть, что T — это тор с решеткой однопараметрических подгрупп $N = \text{Ker}(L)$ и он действует на многообразии X .

Пусть $F : N \rightarrow \bar{N}$ — отображение вложения. Определим отображение

$$S : \bar{N} \rightarrow N, \quad S \circ F = \text{id}_N.$$

Отметим, что отображение S определено неоднозначно.

На алгебре $\mathbb{K}[X]$ существует M -градуировка, соответствующая описанному действию, где $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ — решетка характеров тора T . Проиллюстрируем описанную конструкцию на примере.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим триномияльную гиперповерхность $X \subseteq \mathbb{K}^4$, задаваемую уравнением $T_{01}^3 + T_{11}^5 + T_{21}T_{22} = 0$. В этом случае матрица L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ядро N соответствующего линейного отображения порождается векторами $(5, 3, 0, 15)$ и $(0, 0, 1, -1)$. Таким образом, действие 2-мерного тора T на X имеет вид

$$(t_1, t_2) \cdot (T_{01}, T_{11}, T_{21}, T_{22}) = (t_1^5 T_{01}, t_1^3 T_{11}, t_2 T_{21}, t_1^{15} t_2^{-1} T_{22}),$$

и соответствующая этому действию M -градуировка на $\mathbb{K}[X]$ определяется как

$$\deg(T_{01}) = (5, 0), \quad \deg(T_{02}) = (3, 0), \quad \deg(T_{11}) = (0, 1), \quad \deg(T_{21}) = (15, -1).$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 3.1. Пусть многообразие $X \subseteq \mathbb{K}^n$ задается уравнением

$$T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} = 0,$$

на нем описанным выше образом действует $(n - 2)$ -мерный тор T с решеткой однопараметрических подгрупп $N \subseteq \bar{N}$. Тогда для полиэдрального дивизора

$$\mathfrak{D} = D_0 \cdot \Delta_0 + D_1 \cdot \Delta_1 + D_2 \cdot \Delta_2 \in \text{PPDiv}_{\mathbb{Q}}(Y, \sigma),$$

соответствующего этому действию, кривая Y содержится во взвешенной проективной плоскости $\mathbb{P}(d_{12}, d_{02}, d_{01})$ и задается уравнением

$$w_0^{\tilde{d}/d_{12}} + w_1^{\tilde{d}/d_{02}} + w_2^{\tilde{d}/d_{01}} = 0,$$

дивизор D_i на ней задается уравнением $w_i = 0$, $i = 0, 1, 2$, а полиэдры Δ_i определяются конусом рецессии

$$\sigma = S(\mathbb{Q}_{\geq 0}^n \cap N_{\mathbb{Q}})$$

и соответствующими множествами вершин

$$V(\Delta_0) = S\left(\frac{\tilde{d}}{d_{12}l_{0j}}e_k\right), \quad j = k, \quad k = 1, \dots, n_0,$$

$$V(\Delta_1) = S\left(\frac{\tilde{d}}{d_{02}l_{1j}}e_k\right), \quad j = k - n_0, \quad k = n_0 + 1, \dots, n_0 + n_1,$$

$$V(\Delta_2) = S\left(\frac{\tilde{d}}{d_{01}l_{2j}}e_k\right), \quad j = k - n_0 - n_1, \quad k = n_0 + n_1 + 1, \dots, n.$$

§ 4. Доказательство основного результата

Воспользуемся методом вычисления полиэдральных дивизоров, приведенным в [4, разд. 11]. А именно, рассмотрим действие $T \times X \rightarrow X$ как ограничение диагонального действия T на $\mathbb{K}^n$. Таким образом, тор T содержится в торе $\bar{T}$ всех обратимых диагональных матриц. Вложение $T \subseteq \bar{T}$ соответствует вложению решеток однопараметрических подгрупп $F : N \subseteq \bar{N}$. Опишем дивизор $\mathfrak{D}_{\text{toric}}$, соответствующий действию T на $\mathbb{K}^n$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{F} \bar{N} \xrightarrow{P} N' \longrightarrow 0,$$

где $N' = \bar{N}/N$ и P — каноническая проекция. Пусть Σ — минимальный веер в N' , содержащий все конусы $P(\sigma)$, где σ пробегает все грани конуса $\mathbb{Q}_{\geq 0}^n \subseteq \bar{N}_{\mathbb{Q}}$. Торическое многообразие W , соответствующее вееру Σ , будет тем многообразием, на котором построим дивизор $\mathfrak{D}_{\text{toric}}$ для действия тора T на $\mathbb{K}^n$. Пусть R — множество одномерных конусов в Σ . Для каждого конуса $\rho \in R$ рассмотрим порождающий вектор v_ρ полугруппы $\rho \cap N'$. Каждому такому вектору поставим в соответствие полиэдр

$$\Delta_\rho := S(\mathbb{Q}_{\geq 0}^n \cap P^{-1}(v_\rho)) \subseteq N_{\mathbb{Q}}.$$

В этих обозначениях дивизор $\mathfrak{D}_{\text{toric}}$ имеет вид

$$\mathfrak{D}_{\text{toric}} = \sum_{\rho \in R} \Delta_\rho \cdot D_\rho,$$

где $D_\rho \subseteq W$ — это T -инвариантный простой дивизор, соответствующий ребру ρ . Перейдем к многообразию X и действию тора на нем. В этом случае искомым дивизор $\mathfrak{D}$ получается ограничением дивизора $\mathfrak{D}_{\text{toric}}$ на нормализацию замыкания образа $X \cap O$ при отображении P , где O — открытая орбита действия $\bar{T} \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Применим данную конструкцию к рассматриваемому случаю. В качестве отображения P можно взять отображение $L : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^2$. Так как L может быть не сюръективно, нужно считать, что $N' = \text{Im}(L) \subseteq \mathbb{Z}^2$. Найдем многообразие W . Очевидно, что $\text{Im}(L)$ порождается образами векторов e_i , где $\{e_1, \dots, e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{Z}^n$. Отсюда следует, что $N' \subseteq \mathbb{Z}^2$ порождается векторами

$$v_0 = (-d_0, -d_0), \quad v_1 = (d_1, 0), \quad v_2 = (0, d_2).$$

Веер Σ также порожден векторами v_0, v_1, v_2 в том смысле, что каждое собственное подмножество множества $\{v_0, v_1, v_2\}$ порождает конус $\sigma \in \Sigma$, $\sigma \subseteq N'_{\mathbb{Q}}$.

Утверждение 4.1. Пусть решетка N порождена векторами $\{v_0, \dots, v_n\}$ такими, что

$$\sum_{i=0}^n q_i v_i = 0, \quad q_i \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad \gcd(q_0, \dots, q_n) = 1.$$

Тогда $v_i = a_i u_i$, $i = 0, \dots, n$, где u_i — порождающий элемент полугруппы $\mathbb{Q}_{\geq 0} v_i \cap N$ и

$$a_i := \gcd(q_0, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n).$$

Доказательство этого факта приведено в [10, лемма 1(c)]. Согласно утверждению 4.1 решетка N' порождена векторами

$$u_0 = dd_{01}d_{02} \cdot (-1, -1), \quad u_1 = dd_{01}d_{12} \cdot (1, 0), \quad u_2 = dd_{02}d_{12} \cdot (0, 1).$$

Для того чтобы понять, какому многообразию соответствует данный веер, воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого можно найти в [1, разд. 2.3].

Утверждение 4.2. Пусть N — решетка и $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq N$ — базис решетки N . Рассмотрим векторы

$$v_0 = -\frac{1}{q_0} \sum_{i=1}^n e_i, \quad v_i = \frac{1}{q_i} e_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $q_i \in \mathbb{Z}_{>0}$, $i = 0, \dots, n$. Рассмотрим решетку N' , порожденную векторами v_i . Тогда веер Σ , порожденный векторами $\{v_0, \dots, v_n\}$, соответствует взвешенному проективному пространству $\mathbb{P}(q_0, \dots, q_n)$.

Рассмотрев в качестве исходной решетку с базисом $\{(\tilde{d}, 0), (0, \tilde{d})\}$ и воспользовавшись утверждением 4.1, видим, что многообразие W — это $\mathbb{P}(d_{12}, d_{02}, d_{01})$. Получаем, что дивизор $\mathfrak{D}_{\text{toric}}$ имеет вид

$$\mathfrak{D}_{\text{toric}} = \Delta_0 \cdot D_0 + \Delta_1 \cdot D_1 + \Delta_2 \cdot D_2,$$

где D_i — дивизор на W , соответствующий лучу $\mathbb{Q}_{\geq 0} u_i$, т. е. задаваемый в однородных координатах $[w_0 : w_1 : w_2]$ уравнением $w_i = 0$. Опишем полиэдральные коэффициенты дивизора $\mathfrak{D}_{\text{toric}}$. Согласно вышеизложенному необходимо вычислить

$$\Delta_i = S(\mathbb{Q}_{\geq 0}^n \cap L^{-1}(u_i)), \quad i = 0, 1, 2.$$

Так как $\text{Ker}(L) = N_{\mathbb{Q}}$, ясно, что конусом рецессии полиэдров Δ_i является конус $\sigma = S(\mathbb{Q}_{\geq 0}^n \cap N_{\mathbb{Q}})$. Рассмотрим образы векторов стандартного базиса пространства $\overline{N}_{\mathbb{Q}}$:

$$L(e_k) = \frac{l_{0j}}{dd_{01}d_{02}} u_0, \quad j = k, \quad k = 1, \dots, n_0;$$

$$L(e_k) = \frac{l_{1j}}{dd_{01}d_{12}} u_1, \quad j = k - n_0, \quad k = n_0 + 1, \dots, n_0 + n_1;$$

$$L(e_k) = \frac{l_{2j}}{dd_{02}d_{12}} u_2, \quad j = k - n_0 - n_1, \quad k = n_0 + n_1 + 1, \dots, n.$$

Из этого нетрудно получить, что

$$\mathbb{Q}_{\geq 0}^n \cap L^{-1}(u_0) = \left\{ \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k \frac{dd_{01}d_{02}}{l_{0j}} e_k + v \mid \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n_0} \lambda_k = 1, v \in N_{\mathbb{Q}} \right\},$$

$$\mathbb{Q}_{\geq 0}^n \cap L^{-1}(u_1) = \left\{ \sum_{k=n_0+1}^{n_0+n_1} \lambda_k \frac{dd_{01}d_{12}}{l_{1j}} e_k + v \mid \lambda_k \geq 0, \sum_{k=n_0+1}^{n_0+n_1} \lambda_k = 1, v \in N_{\mathbb{Q}} \right\},$$

$$\mathbb{Q}_{\geq 0}^n \cap L^{-1}(u_2) = \left\{ \sum_{k=n_0+n_1+1}^n \lambda_k \frac{dd_{02}d_{12}}{l_{2j}} e_k + v \mid \lambda_k \geq 0, \sum_{k=n_0+n_1+1}^n \lambda_k = 1, v \in N_{\mathbb{Q}} \right\}.$$

Таким образом, множества вершин полиэдров Δ_i , $i = 0, 1, 2$, имеют вид

$$V(\Delta_0) = \left\{ S\left(\frac{dd_{01}d_{02}}{l_{0j}} e_k\right) \mid j = k, \quad k = 1, \dots, n_0 \right\},$$

$$V(\Delta_1) = \left\{ S\left(\frac{dd_{01}d_{12}}{l_{1j}} e_k\right) \mid j = k - n_0, \quad k = n_0 + 1, \dots, n_0 + n_1 \right\},$$

$$V(\Delta_2) = \left\{ S\left(\frac{dd_{02}d_{12}}{l_{2j}} e_k\right) \mid j = k - n_0 - n_1, \quad k = n_0 + n_1 + 1, \dots, n \right\},$$

а сами полиэдры соответственно равны

$$\Delta_i = S(\operatorname{conv}(V(\Delta_i) + \mathbb{Q}_{\geq 0}^n \cap N_{\mathbb{Q}})), \quad i = 0, 1, 2.$$

Итак, дивизор $\mathfrak{D}_{\text{toric}}$ построен. Теперь рассмотрим отображение L на торах $\bar{T} \subseteq \mathbb{K}^n$ и $(\mathbb{K}^\times)^2 \subseteq \mathbb{P}(d_{12}, d_{02}, d_{01})$. Представим это отображение как композицию отображений, соответствующих отображениям решеток

$$\bar{N} \xrightarrow{L} N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N',$$

где $N_1 = \mathbb{Z}^2$ — решетка, содержащая N' и порожденная векторами $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Нетрудно видеть, что в этой решетке максимальными конусами веера Σ являются

$$\operatorname{cone}((1, 0), (0, 1)), \quad \operatorname{cone}((1, 0), (-1, -1)), \quad \operatorname{cone}((0, 1), (-1, -1)),$$

что соответствует проективному пространству $\mathbb{P}^2$. Отображение соответствующих торов имеет вид

$$(t_0, t_1, t_2) \mapsto [1 : t_0^{-l_0} t_1^{l_1} : t_0^{-l_0} t_2^{l_2}] = [t_0^{l_0} : t_1^{l_1} : t_2^{l_2}],$$

где $t_i = (t_{i1}, \dots, t_{in_i})$, $t_i^{l_i} = t_{i1}^{l_{i1}}, \dots, t_{in_i}^{l_{in_i}}$. Образ интересующего нас замыкания множества $X \cap O$ при этом отображении задается в однородных координатах $[x_0 : x_1 : x_2]$ на $\mathbb{P}^2$ уравнением

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

Решетка N_2 порождена векторами $\{(\tilde{d}, 0), (0, \tilde{d})\}$, переход к ней соответствует отображению $\mathbb{P}^2$ на себя

$$[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0^{\tilde{d}} : x_1^{\tilde{d}} : x_2^{\tilde{d}}],$$

и соответственно замыкание образа $X \cap O$ при этом отображении перейдет в кривую

$$x_0^{\tilde{d}} + x_1^{\tilde{d}} + x_2^{\tilde{d}} = 0.$$

Наконец, переход к решетке N' соответствует факторизации $\mathbb{P}^2$ по действию группы $N'/N_2 \simeq \mu_{d_{12}} \oplus \mu_{d_{02}} \oplus \mu_{d_{01}}$, где μ_k — группа корней из единицы степени k . Действие задается следующим образом:

$$(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2) \cdot [w_0 : w_1 : w_2] = [\zeta_0 w_0 : \zeta_1 w_1 : \zeta_2 w_2],$$

где $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2) \in \mu_{d_{12}} \oplus \mu_{d_{02}} \oplus \mu_{d_{01}}$. Отметим, что изоморфизм, соответствующий отображению факторизации, имеет вид

$$\phi : \mathbb{P}^2 / (\mu_{d_{12}} \oplus \mu_{d_{02}} \oplus \mu_{d_{01}}) \rightarrow \mathbb{P}(d_{12}, d_{02}, d_{01}), \quad x_0^{d_{12}} \mapsto w_0, \quad x_1^{d_{02}} \mapsto w_1, \quad x_2^{d_{01}} \mapsto w_2.$$

Мы воспользовались следующим утверждением, доказанным в [2, утверждение 1.3.18].

Утверждение 4.3. Пусть N — решетка, $N' \subseteq N$ — подрешетка конечного индекса в N , M' — решетка, двойственная к M , $G = N/N'$, $\sigma \subseteq N_{\mathbb{Q}} = N'_{\mathbb{Q}}$ — строго выпуклый рациональный конус и T, T' — торы, соответствующие решеткам N и N' . Тогда

- (1) $G \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M'/M, \mathbb{K}^\times) = \operatorname{Ker}(T' \rightarrow T)$;
- (2) группа G действует на алгебре $\mathbb{K}[\sigma^\vee \cap M']$, причем алгебра инвариантных функций $\mathbb{K}[\sigma^\vee \cap M']^G$ совпадает с $\mathbb{K}[\sigma^\vee \cap M]$;

(3) группа G действует на $U_{\sigma, N'} := \text{Spec}(\mathbb{K}[\sigma^\vee \cap M'])$, существует постоянный на орбитах G морфизм $\phi : U_{\sigma, N'} \rightarrow U_{\sigma, N}$, более того, определена биекция $U_{\sigma, N'}/G \simeq U_{\sigma, N}$.

В результате получаем, что в однородных координатах $[w_0 : w_1 : w_2]$ на многообразии $W = \mathbb{P}(d_{12}, d_{02}, d_{01})$ замыкание образа $X \cap O$ при отображении L задается уравнением $w_0^{dd_{01}d_{02}} + w_1^{dd_{01}d_{12}} + w_2^{dd_{02}d_{12}} = 0$. Для завершения доказательства теоремы 3.1 остается показать, что эта кривая нормальна.

Рассмотрим $\mathbb{Z}$ -градуированную алгебру $\mathbb{K}[w_0, w_1, w_2]$, градуировка на которой определяется степенями порождающих, а именно

$$\deg w_0 = d_{12}, \quad \deg w_1 = d_{02}, \quad \deg w_2 = d_{01},$$

и отображение π из этой алгебры в алгебру многочленов от трех переменных со стандартной $\mathbb{Z}$ -градуировкой:

$$\pi : \mathbb{K}[w_0, w_1, w_2] \rightarrow \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2], \quad w_0 \mapsto x_0^{d_{12}}, \quad w_1 \mapsto x_1^{d_{02}}, \quad w_2 \mapsto x_2^{d_{01}}.$$

Заметим, что π переводит однородные многочлены в алгебре $\mathbb{K}[w_0, w_1, w_2]$ в однородные многочлены в $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$, что позволяет дать

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Стандартным накрытием* проективной кривой $Y \subseteq \mathbb{P}(d_{12}, d_{02}, d_{01})$, задаваемой уравнением $f = 0$, $f \in \mathbb{K}[w_0, w_1, w_2]$, называется кривая $\tilde{Y} \in \mathbb{P}^2$, задаваемая уравнением $\pi(f) = 0$.

Отображение π является факторизацией по конечной группе. Отсюда следует, что если многообразие $\tilde{Y}$ нормально, то таким будет и Y . Для кривых гладкость равносильна нормальности, т. е. нужно проверить гладкость проективной кривой

$$\tilde{Y} = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2 : x_0^{\tilde{d}} + x_1^{\tilde{d}} + x_2^{\tilde{d}} = 0\}.$$

В стандартной аффинной карте $U_0 : x_0 = 1$ кривая $\tilde{Y}$ задается в координатах $y_1 = \frac{x_1}{x_0}$, $y_2 = \frac{x_2}{x_0}$ уравнением $1 + y_1^{\tilde{d}} + y_2^{\tilde{d}} = 0$. Нетрудно видеть, что она является гладкой при любых $\tilde{d}$. Аналогично можно рассмотреть карты U_1 и U_2 . Таким образом, кривая $\tilde{Y}$ гладкая, следовательно, нормальна. Теорема 3.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Опишем подробнее строение дивизоров D_i . Для этого еще раз рассмотрим стандартное накрытие кривой Y . Полный прообраз дивизора D_i при отображении π выглядит следующим образом:

$$\pi^{-1}(D_i) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \bar{Y} \mid x_i = 0\}.$$

Рассмотрим, например, дивизор D_0 . Нетрудно видеть, что точки его прообраза в $\mathbb{P}^2$ задаются уравнениями

$$x_0 = 0, \quad x_1^{\tilde{d}} + x_2^{\tilde{d}} = 0,$$

т. е. это в точности точки

$$\{[0 : 1 : \zeta^k], \quad k = 0, \dots, \tilde{d} - 1\},$$

где $\zeta^{\tilde{d}} = -1$, причем ζ — первообразный корень степени $2\tilde{d}$ из единицы. При отображении π эти точки перейдут в точки

$$\{[0 : 1 : \zeta \eta_0^k], \quad k = 0, \dots, dd_{12} - 1\},$$

где η_0 — первообразный корень степени dd_{12} из единицы. Аналогично дивизоры D_1 и D_2 представляются в виде

$$D_1 = \{[1 : 0 : \zeta\eta_1^k], k = 0, \dots, dd_{02} - 1\}, D_2 = \{[0 : \zeta\eta_2^k : 1], k = 0, \dots, dd_{01} - 1\},$$

где η_1 и η_2 — первообразные корни из единицы степеней dd_{02} и dd_{01} соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Отметим, что полученная в теореме 3.1 плоская проективная кривая имеет род

$$g = \frac{d}{2}(\tilde{d} - (d_{01} + d_{02} + d_{12})) + 1,$$

что следует из [9, теорема 5.3]

§ 5. Примеры вычисления полиэдральных дивизоров

В этом параграфе явно вычислим полиэдральные дивизоры, отвечающие нескольким классам аффинных триномиальных гиперповерхностей. Начнем с рациональных гиперповерхностей. Применим теорему 3.1 к каждому из двух классов рациональных кривых, описанных в утверждении 3.1, отдельно рассмотрев факториальный случай.

5.1. Тип I. Факториальный случай. Как отмечено, факториальность X равносильна тому, что d_0, d_1, d_2 попарно взаимно просты. Воспользовавшись теоремой 3.1, видим, что в этом случае кривая Y , на которой расположен дивизор, задающий действие тора на X , лежит в $\mathbb{P}^2$ и задается в однородных координатах уравнением $w_0 + w_1 + w_2 = 0$. Таким образом, для факториального случая получаем

Предложение 5.1. Пусть X — факториальная триномиальная гиперповерхность. Тогда дивизор $\mathfrak{D}$, отвечающий естественному действию тора сложности один на X , имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &= \Delta_0 \cdot \{0\} + \Delta_1 \cdot \{1\} + \Delta_2 \cdot \{\infty\} \in \text{PPDiv}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}^1, \sigma) \\ \Delta_0 &= \text{conv}\left(\left\{S\left(\frac{1}{l_{0j}}e_k\right) \mid j = k, k = 1, \dots, n_0\right\}\right) + \sigma, \\ \Delta_1 &= \text{conv}\left(\left\{S\left(\frac{1}{l_{1j}}e_k\right) \mid j = k - n_0, k = n_0 + 1, \dots, n_0 + n_1\right\}\right) + \sigma, \\ \Delta_2 &= \text{conv}\left(\left\{S\left(\frac{1}{l_{2j}}e_k\right) \mid j = k - n_0 - n_1, k = n_0 + n_1 + 1, \dots, n\right\}\right) + \sigma, \end{aligned}$$

где конус σ определен так же, как в теореме 3.1.

Этот результат получен в [6, утверждение 1].

ПРИМЕР 5.1. Вычислим дивизор $\mathfrak{D}$ для гиперповерхности X из примера 3.1. Действие тора T на X определяется так:

$$(t_1, t_2) \cdot (T_{01}, T_{11}, T_{21}, T_{22}) = (t_1^5 T_{01}, t_1^3 T_{11}, t_2 T_{21}, t_1^{15} t_2^{-1} T_{22}).$$

Следовательно, матрицы F и S имеют вид

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \quad S = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем, что искомый дивизор равен

$$\mathfrak{D} = \left(\left(\frac{2}{3}, 0 \right) + \sigma \right) \cdot \{0\} + \left(\left(-\frac{3}{5}, 0 \right) + \sigma \right) \cdot \{1\} \\ + (\{0\} \times [0, 1] + \sigma) \cdot \{\infty\} \in \text{PPDiv}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}^1, \sigma),$$

где $\sigma = S(\mathbb{Q}_{\geq 0}^4 \cap F(\mathbb{Q}^2)) = \text{cone}((1, 0), (1, 15))$.

5.2. Тип II. Нефакториальный случай. Без ограничения общности можно считать, что $d = 1$, $d_{01} = d_{02} = 1$, $d_{12} = s \geq 2$. Из теоремы 3.1 видим, что дивизор, соответствующий действию тора на такой гиперповерхности, определен на кривой $Y \subseteq \mathbb{P}(s, 1, 1)$, задаваемой уравнением $w_0 + w_1^s + w_2^s = 0$. Можно отождествить эту кривую с $\mathbb{P}^1$ с помощью следующего изоморфизма:

$$\phi_I : Y \rightarrow \mathbb{P}^1, [w_0 : w_1 : w_2] \mapsto [w_1 : w_2], \\ \phi_I^{-1} : \mathbb{P}^1 \rightarrow Y, [z_0 : z_1] \mapsto [-z_0^s - z_1^s : z_0 : z_1].$$

Теорема 3.1 в этом случае принимает следующий вид.

Предложение 5.2. Пусть X — рациональная триномиальная гиперповерхность типа I. Тогда дивизор $\mathfrak{D}$, отвечающий естественному действию тора сложности один на X , имеет вид

$$\mathfrak{D} = \Delta_0 \cdot \sum_{k=0}^{s-1} \{\zeta^k\} + \Delta_1 \cdot \{0\} + \Delta_2 \cdot \{\infty\} \in \text{PPDiv}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}^1, \sigma), \\ \Delta_0 = \text{conv} \left(\left\{ S \left(\frac{1}{l_{0j}} e_k \right) \mid j = k, k = 1, \dots, n_0 \right\} \right) + \sigma, \\ \Delta_1 = \text{conv} \left(\left\{ S \left(\frac{s}{l_{1j}} e_k \right) \mid j = k - n_0, k = n_0 + 1, \dots, n_0 + n_1 \right\} \right) + \sigma, \\ \Delta_2 = \text{conv} \left(\left\{ S \left(\frac{s}{l_{2j}} e_k \right) \mid j = k - n_0 - n_1, k = n_0 + n_1 + 1, \dots, n \right\} \right) + \sigma,$$

где ζ — первообразный корень степени s из единицы, а конус σ определен так же, как в теореме 3.1.

ПРИМЕР 5.2. Пусть X задается уравнением $T_{01}^2 + T_{11}^3 + T_{21}^3 T_{22}^3 = 0$. В этом случае

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что требуемый дивизор равен

$$\mathfrak{D} = \left(\left(\frac{1}{2}, 0 \right) + \sigma \right) \cdot (\{1\} + \{\zeta\} + \{\zeta^2\}) + \left(\left(-\frac{1}{3}, 0 \right) + \sigma \right) \cdot \{0\} \\ + \left(\{0\} \times \left[0, \frac{1}{3} \right] + \sigma \right) \cdot \{\infty\} \in \text{PPDiv}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}^1, \sigma),$$

где $\sigma = \text{cone}((1, 0), (1, 2))$ и $\zeta^3 = 1$, $\zeta \neq 1$.

5.3. Рациональные гиперповерхности типа II. Рассмотрим оставшийся класс рациональных гиперповерхностей. В этом случае $d_{01} = d_{02} = d_{12} = 1$, $d = 2$. Согласно теореме 3.1 дивизор, соответствующий действию тора на X ,

существует на кривой $Y \subseteq \mathbb{P}^2$, задаваемой уравнением $w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 = 0$. Это проективная кривая рода 0, а значит, она изоморфна $\mathbb{P}^1$, как в предыдущих примерах. Изоморфизм можно построить, например, так:

$$\begin{aligned}\phi_{II} : Y &\rightarrow \mathbb{P}^1, \quad [w_0 : w_1 : w_2] \mapsto \begin{cases} [w_0 + iw_1 : w_2], & w_0 \neq -iw_1, \\ [w_2 : iw_1 - w_0], & w_0 \neq iw_1, \end{cases} \\ \phi_{II}^{-1} : \mathbb{P}^1 &\rightarrow Y, \quad [z_0 : z_1] \mapsto [z_0^2 - z_1^2 : -i(z_0^2 + z_1^2) : 2z_0z_1],\end{aligned}$$

где $i^2 = -1$. Получаем, что для рациональных гиперповерхностей типа II теорема 3.1 формулируется следующим образом.

Предложение 5.3. Пусть X – рациональная тринomialная гиперповерхность типа II. Тогда дивизор $\mathfrak{D}$, отвечающий естественному действию тора сложности один на X , имеет вид

$$\mathfrak{D} = \Delta_0 \cdot (\{1\} + \{-1\}) + \Delta_1 \cdot (\{i\} + \{-i\}) + \Delta_2 \cdot (\{0\} + \{\infty\}) \in \text{PPDiv}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}^1, \sigma),$$

$$\Delta_0 = \text{conv}\left(\left\{S\left(\frac{2}{l_{0j}}e_k\right) \mid j = k, k = 1, \dots, n_0\right\}\right) + \sigma,$$

$$\Delta_1 = \text{conv}\left(\left\{S\left(\frac{2}{l_{1j}}e_k\right) \mid j = k - n_0, k = n_0 + 1, \dots, n_0 + n_1\right\}\right) + \sigma,$$

$$\Delta_2 = \text{conv}\left(\left\{S\left(\frac{2}{l_{2j}}e_k\right) \mid j = k - n_0 - n_1, k = n_0 + n_1 + 1, \dots, n\right\}\right) + \sigma,$$

где $i^2 = -1$, а конус σ определен так же, как в теореме 3.1.

Пример 5.3. Пусть X задается уравнением $T_{01}^2 + T_{11}^4 + T_{21}^2 T_{22}^4 = 0$. В этом случае

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что искомый дивизор равен

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} = ((1, 0) + \sigma) \cdot (\{1\} + \{-1\}) &+ \left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \sigma\right) \cdot (\{i\} + \{-i\}) \\ &+ \left(\{0\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right] + \sigma\right) \cdot (\{0\} + \{\infty\}) \in \text{PPDiv}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{P}^1, \sigma),\end{aligned}$$

где $\sigma = \text{cone}((1, 0), (1, -1))$ и $i^2 = -1$.

5.4. Поверхности Фама — Брискорна. Пусть $n_0 = n_1 = n_2 = 1$. Тогда X задается в $\mathbb{A}^3$ уравнением $x_0^{d_0} + x_1^{d_1} + x_2^{d_2} = 0$. Такие поверхности называются *поверхностями Фама — Брискорна*. На X существует действие одномерного тора сложности один. Несложно видеть, что для этих поверхностей всегда можно выбрать матрицы F и S так, что $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Для этого нужно выбрать F так, чтобы ее элементы были неотрицательны. Отображение F можно задать вектором

$$f = (\bar{d}/d_0, \bar{d}/d_1, \bar{d}/d_2),$$

где $\bar{d} := \text{lcm}(d_0, d_1, d_2)$. Его элементы взаимно просты в совокупности, следовательно, существует такой вектор $s = (s_0, s_1, s_2)$, задающий отображение S , что $(f, s) = 1$.

Предложение 5.4. Пусть X — поверхность Фама — Брискорна, задаваемая уравнением $x_0^{d_0} + x_1^{d_1} + x_2^{d_2} = 0$. Тогда дивизор $\mathfrak{D}$, отвечающий действию одномерного тора на X , имеет вид

$$\mathfrak{D} = \Delta_0 \cdot D_0 + \Delta_1 \cdot D_1 + \Delta_2 \cdot D_2 \in \text{PPDiv}_{\mathbb{Q}}(Y, \mathbb{Q}_{\geq 0}),$$

$$\Delta_0 = \left(s_0 \frac{dd_{01}d_{02}}{d_0}, +\infty \right), \quad \Delta_1 = \left(s_1 \frac{dd_{01}d_{12}}{d_1}, +\infty \right), \quad \Delta_2 = \left(s_2 \frac{dd_{02}d_{12}}{d_2}, +\infty \right),$$

где кривая Y и дивизоры D_i на ней определены так же, как в теореме 3.1.

Пример 5.4. Пусть X задается в $\mathbb{K}^3$ уравнением $x_0^2 + x_1^3 + x_2^6 = 0$. Векторы f и s , задающие соответствующие отображения, имеют вид

$$f = (3, 2, 1), \quad s = (1, -1, 0).$$

Кривая Y лежит в $\mathbb{P}(3, 2, 1)$ и задается уравнением $w_0^2 + w_1^3 + w_2^6 = 0$. Согласно замечанию 4.2 это кривая рода 1. Получаем, что дивизор, соответствующий действию тора на X , равен

$$\mathfrak{D} = [1, +\infty) \cdot D_0 + [-1, +\infty) \cdot D_1,$$

$$D_0 = \sum_{k=1}^3 \{[0 : \zeta^k : 1]\}, \quad D_1 = \{[i : 0 : 1]\} + \{[-i : 0 : 1]\} \in \text{PPDiv}_{\mathbb{Q}}(Y, \mathbb{Q}_{\geq 0}),$$

где $\zeta^3 = 1$, $\zeta \neq 1$.

Замечание 5.1. Данный пример демонстрирует, что можно выбрать отображение S таким образом, что некоторые из полиэдров Δ_i будут равны конусу σ .

5.5. Нерациональный случай. В завершение построим дивизор для действия тора сложности один на нерациональной трехмерной гиперповерхности.

Пример 5.5. Пусть X задается в $\mathbb{K}^4$ уравнением $T_{01}^2 + T_{11}^3 + T_{21}^6 T_{22}^6 = 0$,

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кривая Y совпадает с кривой, полученной в предыдущем примере. Как было указано, это кривая рода один. Получаем, что дивизор, соответствующий действию тора на X , равен

$$\mathfrak{D} = ((1, 0) + \sigma) \cdot D_0 + ((-1, 0) + \sigma) \cdot D_1 + (\{0\} \times [0, 1] + \sigma) \cdot D_2,$$

$$D_0 = \sum_{k=1}^3 \{[0 : \zeta^k : 1]\}, \quad D_1 = \{[i : 0 : 1]\} + \{[-i : 0 : 1]\}, \quad D_2 = \{[1 : -1 : 0]\},$$

где $\sigma = \text{cone}((1, 0), (1, 1))$, $i^2 = -1$, $\zeta^3 = 1$, $\zeta \neq 1$.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю И. В. Аржанцеву за постановку задачи, плодотворные консультации и развитие интереса автора в области алгебраической геометрии. Автор также благодарит Ю. Г. Прохорова за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fulton W.* Introduction to toric varieties. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993. (Ann. Math. Stud.; V. 131).
2. *Cox D., Little J., Schenck H.* Toric varieties. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2011. (Grad. Stud. Math.; V. 124).
3. *Винберг Э. Б.* Сложность действий редуктивных групп // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20, № 1. С. 1–13.
4. *Altmann K., Hausen J.* Polyhedral divisors and algebraic torus actions. // Math. Ann. 2006. V. 334, N 3. P. 557–607.
5. *Altmann K., Ilten N., Petersen L., Süli H., Vollmert R.* The geometry of T -varieties // Contributions to algebraic geometry. EMS Ser. Congr. Rep. Zürich: Eur. Math. Soc., 2012. P. 17–69.
6. *Arzhantsev I.* On rigidity of factorial trinomial hypersurfaces // Int. J. Algebra Comput. 2016. V. 26, N 5. P. 1061–1070.
7. *Мамфорд Д.* Красная книга о многообразиях и схемах. М.: МЦНМО, 2014.
8. *Hausen J., Herppich E.* Factorially graded rings of complexity one // Torsors, tale homotopy and applications to rational points. London: London Math. Soc., 2013. P. 414–428. (Lond. Math. Soc. Lecture Note; V. 405).
9. *Arzhantsev I., Braun L., Hausen J., Wrobel M.* Log terminal singularities, platonic tuples and iterations of Cox rings // Eur. J. Math. 2018. V. 4. P. 242–313.
10. *Rossi M., Terracini L.* Linear algebra and toric data of weighted projective spaces // Rend. Sem. Mat. 2012. V. 70, N 4. P. 469–495.

Поступила в редакцию 9 августа 2018 г.

После доработки 9 ноября 2018 г.

Принята к публикации 19 декабря 2018 г.

Круглов Олег Константинович

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет,

Главное здание МГУ, Ленинские горы, ГСП-1, Москва 119991

`o.kruglov@mail.ru`