E. N. Lomakina, M. G. Nasyrova, Estimate for the entropy numbers of the weighted Hardy operators that act from Banach space to q -Banach space, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 801–814

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.408>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 35.174.16.151

April 26, 2023, 13:21:13

ОЦЕНКИ ЭНТРОПИЙНЫХ ЧИСЕЛ ВЕСОВЫХ
ОПЕРАТОРОВ ХАРДИ, ДЕЙСТВУЮЩИХ
ИЗ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ
В q -БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Е. Н. Ломакина, М. Г. Насырова

Аннотация. Изучаются весовые операторы Харди, действующие из банаховых пространств L_p в q -банаховы пространства L_q . Получены оценки энтропийных чисел для одновесового и двухвесового операторов Харди с неотрицательными измеримыми весовыми функциями.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.408

Ключевые слова: интегральный оператор, оператор Харди, энтропийные числа, аппроксимативные числа.

1. Введение. Основные результаты

Пусть E — банахово пространство, пространство F q -банахово, $0 < q < 1$, т. е. пространство, в котором выполнены все аксиомы банахова пространства, кроме неравенства треугольника, принимающего вид: для всех $x, y \in F$

$$\|x + y\|_F^q \leq \|x\|_F^q + \|y\|_F^q.$$

В частности, множество всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^+)} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

образует q -банахово пространство $L_q(\mathbb{R}^+)$ при $0 < q < 1$, в случае же $q \geq 1$ — банахово пространство.

Обозначим через $\mathfrak{B}(E, F)$ класс всех линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства E в q -банахово пространство F , где $0 < q < 1$.

Важной характеристикой компактности оператора $T \in \mathfrak{B}(E, F)$ являются его энтропийные и аппроксимативные числа. Энтропийное число $e_n(T)$ оператора $T \in \mathfrak{B}(E, F)$ для $n \in \mathbb{N}$ определяется как точная нижняя грань множества всех чисел $\varepsilon \geq 0$, для которых существуют элементы $y_1, \dots, y_{2^{n-1}} \in F$ такие, что

$$T(B_E) \subset \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} \{y_j + \varepsilon B_F\},$$

B_E, B_F — замкнутые единичные шары в E, F соответственно.

Энтропийные числа для операторов в q -банаховых пространствах обладают следующими свойствами [1, § 1.3.1, лемма 1]: для $S, T \in \mathfrak{B}(E, F)$ и $R \in \mathfrak{B}(F, H)$

- (i) $\|T\| \geq e_1(T) \geq e_2(T) \geq \dots \geq 0$; если F банахово, то $e_1(T) = \|T\|$;
- (ii) $e_{n+m-1}(R \circ S) \leq e_n(R) \cdot e_m(S)$, $n, m \in \mathbb{N}$;
- (iii) $e_{n+m-1}^q(T + S) \leq e_n^q(T) + e_m^q(S)$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Для $n \in \mathbb{N}$ аппроксимативное число $a_n(T)$ оператора $T \in \mathfrak{B}(E, F)$ определяется как расстояние между оператором T и подпространством конечномерных операторов:

$$a_n(T) = \inf_{L \in \mathfrak{B}(E, F)} \{\|T - L\|_{E \rightarrow F} : \text{rank } L \leq n - 1\}.$$

Энтропийные и аппроксимативные числа компактного оператора $T \in \mathfrak{B}(E, F)$ связаны следующим неравенством (см. [1, § 1.3.3]): для любого $\alpha > 0$

$$\sup_n n^\alpha e_n(T) \leq c_\alpha \sup_n n^\alpha a_n(T). \quad (1.1)$$

Целью данной работы является исследование асимптотического поведения энтропийных чисел интегрального оператора Харди $T : L_p(0, \infty) \rightarrow L_q(0, \infty)$, $0 < q < 1 < p < \infty$,

$$Tf(x) = T_{v,u}f(x) = v(x) \int_0^x u(y)f(y) dy, \quad (1.2)$$

где u, v — неотрицательные измеримые весовые функции, $u \in L_{p'}(0, x)$, $v \in L_q(x, \infty)$ для всех $x > 0$.

В [2] получен критерий ограниченности оператора Харди (1.2) при $0 < q < 1 < p < \infty$, что при данном соотношении параметров автоматически влечет компактность.

Первые шаги по исследованию поведения аппроксимативных чисел оператора (1.2) сделаны в работах Эдмундса, Эванса, Харриса [3, 4], где в случае $T : L_p(0, \infty) \rightarrow L_q(0, \infty)$ при $1 < p \leq q < \infty$ получены невязные оценки, а в случае $T : L_p(0, \infty) \rightarrow L_p(0, \infty)$ — асимптотические оценки a -чисел и нормы Шаттена — Неймана оператора Харди. Обобщением и расширением этих результатов на область $1 < p, q < \infty$ послужила работа Е. Н. Ломакиной и В. Д. Степанова [5]. Далее, в [6] получены точные двусторонние асимптотические оценки как для аппроксимативных, так и для энтропийных чисел оператора $T : L_p \rightarrow L_q$ в банаховых пространствах при $1 \leq p, q \leq \infty$. Оценки аппроксимативных чисел операторов Харди, действующих в квазибанаховых пространствах, выведены в [7]. В статьях А. А. Васильевой [8, 9] получены порядковые оценки энтропийных чисел операторов вложения весовых пространств Соболева в весовое пространство Лебега, а также найдены порядки убывания колмогоровских поперечников весовых соболевских классов в весовом пространстве L_q и аппроксимативных чисел оператора вложения. Данная работа дополняет проводимые ранее исследования поведения энтропийных чисел оператора T вида (1.2) в новом, не рассмотренном ранее, случае $0 < q < 1 < p < \infty$.

Пусть $\xi_k > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, — минимальное действительное число, удовлетворяющее уравнению $2^k = \int_0^{\xi_k} u(t)^{p'} dt$, иначе полагаем $\xi_k = \infty$. Положим

$$\Delta_k = [2^k, 2^{k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1.3)$$

$$\delta_k(u, v) = 2^{k/p'} \|v\|_{L_q(\xi_k, \xi_{k+1})} = \|u\|_{L_{p'}(\xi_k, \xi_{k+1})} \|v\|_{L_q(\xi_k, \xi_{k+1})}. \quad (1.4)$$

Введем следующие обозначения: $p' = \frac{p}{p-1}$, $r = \frac{p'q}{p'+q}$,

$$|(u, v)|_r = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k(u, v)^r \right)^{1/r}, \quad |(u, v)|_{r, \infty} = \sup_k k^{1/r} \delta_k(u, v).$$

В частном случае, когда $u \equiv 1$ и, следовательно, $\xi_k = 2^k$, обозначим

$$\delta_k(v) = \delta_k(1, v) = 2^{k/p'} \|v\|_{L_q(\xi_k, \xi_{k+1})} = \|\chi_{\Delta_k}\|_{L_{p'}(\Delta_k)} \|v\|_{L_q(\Delta_k)},$$

$$|v|_r = |(1, v)|_r = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k(v)^r \right)^{1/r}, \quad |v|_{r, \infty} = \sup_k k^{1/r} \delta_k(v).$$

Разд. 2 содержит некоторые вспомогательные леммы и оценки для диагональных операторов, действующих в пространствах последовательностей, дополняющие результаты из [10], которые применяются в последующих доказательствах.

В разд. 3 доказаны оценки энтропийных и аппроксимативных чисел для одновесового оператора Харди, содержащиеся в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $0 < q < 1 < p < \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$, и неотрицательная весовая функция v принадлежит $L_q(x, \infty)$, $x > 0$. Тогда для компактного оператора $T_v = T_{v,1} : L_p(0, \infty) \rightarrow L_q(0, \infty)$, определенного формулой

$$T_v f(x) = T_{v,1} f(x) = v(x) \int_0^x f(y) dy \quad (1.5)$$

с некоторыми константами c_i , $i = 1, 2, 3$, зависящими только от p и q , выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |v|_{r, \infty} &\leq c_1 \sup_n n^{1/q} e_n(T_v), \\ \sup_n n e_n(T_v) &\leq c_2 |v|_r, \\ |v|_{r, \infty} &\leq c_3 \sup_n n^{1/q} a_n(T_v). \end{aligned}$$

Кроме того, в разд. 3 получена оценка сверху энтропийных чисел в частном случае, когда весовая функция оператора (1.5) монотонна на полуоси.

В разд. 4 доказана теорема, обобщающая результаты теоремы 1 на случай двухвесового оператора Харди (1.2).

Теорема 2. Пусть $0 < q < 1 < p < \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$, и $u \in L_{p'}(0, x)$, $v \in L_q(x, \infty)$, $x > 0$, — неотрицательные весовые функции. Тогда для компактного оператора $T : L_p(0, \infty) \rightarrow L_q(0, \infty)$, определенного равенством

$$Tf(x) = v(x) \int_0^x u(y) f(y) dy,$$

справедливо неравенство

$$c|(u, v)|_{r, \infty} \leq \sup_n n^{1/q} e_n(T) \quad (1.6)$$

с константой c , зависящей только от p и q .

2. Оценки энтропийных чисел диагональных операторов

Пусть $0 < q \leq \infty$. Множество ℓ_q всех последовательностей $x = \{x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, для которых конечна квазинорма

$$\|x\|_{\ell_q} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^q \right)^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, & q = \infty, \end{cases}$$

образует квазибанахово пространство, а в случае $q \geq 1$ — банахово пространство.

Пусть $x = \{x_n\}$ — ограниченная последовательность, положим

$$s_n(x) = \inf\{\tau \geq 0 : \text{card}(k : |x_k| \geq \tau) < n\}.$$

В случае $|x_1| \geq |x_2| \geq \dots \geq 0$ получаем $s_n(x) = |x_n|$. Ясно, что $s_{n+1}(x) \leq s_n(x)$. Последовательность $\{s_n(x)\}$ называют *невозрастающей перестановкой* $x = \{x_n\}$.

Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$. Пространство Лоренца $\ell_{p,q}$ состоит из всех последовательностей $x = \{x_n\}$, имеющих конечную квазинорму

$$\|x\|_{\ell_{p,q}} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} s_n(x))^q \right)^{1/q}, & q < \infty, \\ \sup_{1 \leq n < \infty} n^{\frac{1}{p}} s_n(x), & q = \infty. \end{cases}$$

При $p = q$ получаем $\ell_{q,q} = \ell_q$. Для пространств Лоренца справедливы следующие вложения [11, лемма 1.5.2]:

- (1) $\ell_{p,q_1} \subset \ell_{p,q_2}$, если $0 < p \leq \infty$ и $0 < q_1 < q_2 \leq \infty$;
- (2) $\ell_{p_1,q_1} \subset \ell_{p_2,q_2}$, если $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$ и $0 < q_1, q_2 \leq \infty$.

Для дальнейших исследований необходима

Лемма 2.1 [12, предложения 12.1.13, 12.1.10]. Пусть E_n — n -мерное вещественное банахово пространство и $\text{id}_n : E_n \rightarrow E_n$ — тождественный оператор. Тогда

$$e_k(\text{id}_n : E_n \rightarrow E_n) \leq 4 \cdot 2^{-(k-1)/n}. \quad (2.1)$$

Лемма 2.2. Пусть $0 < \alpha < \infty$, $0 < \beta \leq \infty$, E_n — n -мерное вещественное банахово пространство и $\text{id}_n : E_n \rightarrow E_n$ — тождественный оператор. Тогда

$$\|\{e_k(\text{id}_n : E_n \rightarrow E_n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \leq C n^{1/\alpha}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где C — положительная константа, зависящая только от α и β .

Доказательство. Предположим, что $0 < \beta \leq \alpha < \infty$. Используя оценку

(2.1), находим

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k^{(\frac{\beta}{\alpha}-1)} e_k^{\beta}(\text{id}_n) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4^{\beta} k^{(\frac{\beta}{\alpha}-1)} \cdot 2^{-\frac{\beta}{n}(k-1)} \\
&= 4^{\beta} \left(\sum_{k=1}^n k^{(\frac{\beta}{\alpha}-1)} 2^{-\frac{\beta}{n}(k-1)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{(\frac{\beta}{\alpha}-1)} 2^{-\frac{\beta}{n}(k-1)} \right) \\
&\leq 4^{\beta} \left(\sum_{k=1}^n k^{(\frac{\beta}{\alpha}-1)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{(\frac{\beta}{\alpha}-1)} 2^{-\frac{\beta}{n}(k-1)} \right) \\
&\leq 4^{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} n^{\frac{\beta}{\alpha}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1-\frac{\beta}{\alpha}}} 2^{-\frac{\beta}{n}(k-1)} \right) \leq 4^{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} n^{\frac{\beta}{\alpha}} + n^{\frac{\beta}{\alpha}-1} \sum_{k=0}^{\infty} (2^{-\frac{\beta}{n}})^k \right) \\
&\leq 4^{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} n^{\frac{\beta}{\alpha}} + n^{\frac{\beta}{\alpha}-1} \frac{1}{1-2^{-\beta/n}} \right) \leq \frac{4^{\beta}}{\beta} (\alpha + 2^{\beta}) n^{\frac{\beta}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\|\{e_k(\text{id}_n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}}^{\beta} &= \sum_{k=1}^{\infty} (k^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}} e_k(\text{id}_n))^{\beta} \leq \frac{4^{\beta}}{\beta} (\alpha + 2^{\beta}) n^{\frac{\beta}{\alpha}}, \\
\|\{e_k(\text{id}_n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}} &\leq \left(\frac{4^{\beta}}{\beta} (\alpha + 2^{\beta}) \right)^{1/\beta} n^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Пусть $0 < \alpha < \beta \leq \infty$, тогда имеем вложение $\ell_{\alpha,\alpha} \subset \ell_{\alpha,\beta}$ и, следовательно, $\|\{e_k(\text{id}_n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \leq \|\{e_k(\text{id}_n)\}\|_{\ell_{\alpha,\alpha}}$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
\|\{e_k(\text{id}_n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}} &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} e_k^{\alpha}(\text{id}_n) \right)^{1/\alpha} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} 4^{\alpha} 2^{-\alpha(k-1)/n} \right)^{1/\alpha} \\
&\leq 4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (2^{-\frac{\alpha}{n}})^{(k-1)} \right)^{1/\alpha} \leq 4 \left(\frac{1}{1-2^{-\alpha/n}} \right)^{1/\alpha} = 4 \left(\frac{2^{\alpha/n}}{2^{\alpha/n}-1} \right)^{1/\alpha} \\
&\leq 4 \left(\frac{2^{\alpha/n}}{\alpha/n} \right)^{1/\alpha} \leq \frac{8}{\alpha^{1/\alpha}} n^{1/\alpha}. \quad \square
\end{aligned}$$

Лемма 2.3. Пусть $0 < q < 1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \infty$, $0 < \beta \leq \infty$. Тогда

$$\|\{e_k(\text{id}_n : l_p^n \rightarrow l_q^n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \leq C n^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

Доказательство. В силу леммы 2.2 для действующего в n -мерном банаховом пространстве оператора $\text{id}_n : l_p^n \rightarrow l_p^n$ имеем

$$\|\{e_k(\text{id}_n : l_p^n \rightarrow l_p^n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \leq C n^{1/\alpha}.$$

Зададим операторы вложения $\text{id}_n^1 : l_p^n \rightarrow l_p^n$, $\text{id}_n^2 : l_p^n \rightarrow l_q^n$ и положим $\text{id}_n = \text{id}_n^2 \text{id}_n^1$. По свойству (ii) энтропийных чисел

$$e_k(\text{id}_n : l_p^n \rightarrow l_q^n) \leq \|\text{id}_n^2 : l_p^n \rightarrow l_q^n\| e_k(\text{id}_n^1 : l_p^n \rightarrow l_p^n).$$

Применяем неравенство Гёльдера с показателями $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{p-q}$ и лемму 2.2:

$$\begin{aligned}
\|\{e_k(\text{id}_n : l_p^n \rightarrow l_q^n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}} &\leq \|\{e_k(\text{id}_n^1 : l_p^n \rightarrow l_p^n)\}\|_{\ell_{\alpha,\beta}} \|\text{id}_n^2 : l_p^n \rightarrow l_q^n\| \\
&\leq C n^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Далее, рассмотрим диагональный оператор $D : l_p \rightarrow l_q$, $0 < q < 1 \leq p \leq \infty$, который порождается последовательностью $\{\sigma_i\}$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$,

$$D\{x_i\} = \{\sigma_i x_i\}, \quad \{x_i\} \in l_p. \quad (2.2)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq \dots > 0.$$

Определим канонические операторы $J_n \in \mathfrak{B}(l_p^n, l_p)$ и $Q_n \in \mathfrak{B}(l_q, l_p^n)$ согласно формулам

$$\begin{aligned} J_n(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0, \dots), \\ Q_n(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) &= (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Очевидно, что $\|J_n\| = \|Q_n\| = 1$.

Лемма 2.4. Пусть $0 < \gamma \leq \infty$ и $\frac{1}{r} = \gamma - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Тогда для оператора (2.2)

$$\|\{\sigma_n\}\|_{l_{r,\infty}} \leq 6 \sup_n n^{\gamma-1/q'} e_n(D). \quad (2.3)$$

В частности, при $\gamma = 1$ формула (2.3) имеет вид

$$\|\{\sigma_n\}\|_{l_{r,\infty}} \leq 6 \sup_n n^{1/q} e_n(D). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим оператор тождественного вложения $\text{id}_n : l_\infty^n \rightarrow l_1^n$ в виде композиции следующих отображений:

$$\text{id}_n : l_\infty^n \xrightarrow{\text{id}_n^3} l_p^n \xrightarrow{W_n} l_p^n \xrightarrow{J_n} l_p \xrightarrow{D} l_q \xrightarrow{Q_n} l_q^n \xrightarrow{\text{id}_n^4} l_1^n,$$

где $\text{id}_n^3, \text{id}_n^4$ — тождественные вложения соответствующих пространств, а оператор $W_n : l_p^n \rightarrow l_p^n$ определяется формулой

$$W_n\{x_i\}_{i=1}^n = \{\sigma_i^{-1} x_i\}_{i=1}^n.$$

Поскольку $|\sigma_1| \geq \dots \geq |\sigma_n| > 0$, выполнена оценка $\|W_n\| \leq |\sigma_n|^{-1}$.

Известно (см. [12, лемма 12.2.1]), что

$$e_n(\text{id}_n : l_\infty^n \rightarrow l_1^n) \geq \frac{1}{6} n. \quad (2.5)$$

Из неравенства Йенсена следует, что $\|\text{id}_n^4 : l_q^n \rightarrow l_1^n\| \leq 1$ (поскольку $q < 1$), а прямое вычисление влечет $\|\text{id}_n^3 : l_\infty^n \rightarrow l_p^n\| = n^{1/p}$.

Используя неравенство (2.5) и мультипликативность энтропийных чисел, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} n &\leq e_n(\text{id}_n : l_\infty^n \rightarrow l_1^n) = e_n(\text{id}_n^4 Q_n D J_n W_n \text{id}_n^3) \\ &\leq e_n(\text{id}_n^4 Q_n D J_n : l_p^n \rightarrow l_1^n) \|W_n \text{id}_n^3 : l_\infty^n \rightarrow l_p^n\| \\ &\leq \|\text{id}_n^4 : l_q^n \rightarrow l_1^n\| \|Q_n\| e_n(D) \|J_n\| \|\text{id}_n^3 : l_\infty^n \rightarrow l_p^n\| \|W_n\| \\ &\leq e_n(D) n^{1/p} |\sigma_n|^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $|\sigma_n| \leq 6 e_n(D) n^{\frac{1}{p}-1}$. Умножая полученное неравенство на $n^{1/r}$, выводим

$$n^{\frac{1}{r}} |\sigma_n| \leq 6 n^{\frac{1}{r} + \frac{1}{p} - 1} e_n(D) = 6 n^{\gamma-1/q'} e_n(D) \leq 6 \sup_n n^{\gamma-1/q'} e_n(D).$$

Отсюда

$$\sup_n n^{\frac{1}{r}} |\sigma_n| \leq 6 \sup_n n^{\gamma-1/q'} e_n(D),$$

что в результате дает требуемую оценку

$$\|\{\sigma_n\}\|_{l_{r,\infty}} \leq 6 \sup_n n^{\gamma-1/q'} e_n(D). \quad \square$$

3. Оценки энтропийных чисел одновесового оператора Харди

Рассмотрим при $0 < q < 1 < p < \infty$ одновесовой оператор $T_v : L_p(0, \infty) \rightarrow L_q(0, \infty)$ вида

$$T_v f(s) = v(s) \int_0^s f(t) dt, \quad s > 0, \quad (3.1)$$

где неотрицательная измеримая весовая функция v принадлежит $L_q(s, \infty)$ для всех $s > 0$.

Для дальнейших рассуждений необходима

Лемма 3.1. Пусть E — банахово пространство, F_1, F_2 — q -банаховы пространства и $T : E \rightarrow F_1, S : E \rightarrow F_2$ — компактные линейные операторы такие, что для всех $x \in E$

$$\|Tx\|_{F_1} \leq \|Sx\|_{F_2}.$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$e_n(T) \leq e_n(S).$$

Доказательство. По определению точной нижней грани для $n \in \mathbb{N}$ выберем убывающую последовательность $\varepsilon_i \rightarrow e_n(S)$. Тогда можно указать набор $\{x_j^{(i)} : j = 1, \dots, 2^{n-1}\}$ такой, что $\|x_j^{(i)}\|_E \leq 1$ и для любого $x \in E$ с $\|x\|_E \leq 1$ найдется $x_{j_0}^{(i)}$ такой, что

$$\|Sx - Sx_{j_0}^{(i)}\|_{F_2}^q \leq \varepsilon_i.$$

Согласно условию леммы

$$\|Tx - Tx_{j_0}^{(i)}\|_{F_1}^q = \|T(x - x_{j_0}^{(i)})\|_{F_1}^q \leq \|S(x - x_{j_0}^{(i)})\|_{F_2}^q = \|Sx - Sx_{j_0}^{(i)}\|_{F_2}^q \leq \varepsilon_i,$$

т. е. набор $\{Tx_j^{(i)}\}_{j=1}^{2^{n-1}}$ является ε_i -сетью для множества $\{Tx : \|x\|_E \leq 1\} \subset F_2$. Переходя к пределу справа, а затем к инфимуму, получим $e_n(T) \leq e_n(S)$. $\square$

Определим подпространство $L_p^c(0, \infty)$ согласно формуле

$$L_p^c(0, \infty) = \left\{ f \in L_p(0, \infty) : f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \chi_{\Delta_k}, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\},$$

где Δ_k определены в (1.3). Зададим канонический проектор на это подпространство $P^c : L_p \rightarrow L_p^c$, определив числа $\alpha_k = \frac{1}{|\Delta_k|} \|\chi_{\Delta_k} f\|_p$, и оператор $T_v^c : L_p^c \rightarrow L_q$, где T_v^c является сужением T_v на L_p^c . Заметим, что $\|P^c\| = 1$.

Доказательство теоремы 1. Основная идея доказательства состоит в том, что строится семейство диагональных операторов D^i , оценивающих снизу по норме исходный одновесовой оператор T_v , лемма 3.1 дает оценку для энтропийных чисел $e_n(D^i) \leq c \cdot e_n(T_v)$, а далее, применяя полученные в лемме 2.4 результаты для диагональных операторов, получаем нижнюю оценку энтропийных чисел одновесового оператора (3.1).

Рассмотрим три диагональных оператора $D^i : l_p \rightarrow l_q$, $i = 0, 1, 2$, таких, что

$$D^i : \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \rightarrow \{\delta_{3k+i} x_k\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

числа δ_k определены формулой (1.4).

Покажем, что существуют ограниченные операторы $X_i : l_p \rightarrow L_p^c$, $i = 0, 1, 2$, такие, что

$$\|D^i x\|_{l_q} \leq \|(T_v^c X_i)(x)\|_{L_q} \quad (3.2)$$

для всех $x \in l_p$.

Доказательство (3.2) приведем для $i = 0$, остальные случаи проверяются аналогично.

Пусть e_k , $k \in \mathbb{Z}$, обозначает k -й единичный вектор в пространстве l_p . Определим $X = X_0$ формулой

$$X(e_k) = 2^{1/p'} |\Delta_{3k-1}|^{-1/p} \chi_{\Delta_{3k-1}} - 2^{-1/p'} |\Delta_{3k+1}|^{-1/p} \chi_{\Delta_{3k+1}}. \quad (3.3)$$

Очевидно, что X — ограниченный оператор из l_p в L_p^c .

Положим $g_k = (T_v^c X)(e_k)$, $g_k \in L_p^c$. Тогда $\text{supp}(g_k) \subseteq \Delta_{3k-1} \cup \Delta_{3k} \cup \Delta_{3k+1}$.

Если $s \in \Delta_{3k}$, то

$$\begin{aligned} g_k(s) &= (T_v^c X)(e_k)(s) = v(s) \int_0^s X(e_k)(t) dt \\ &= v(s) \int_0^s (2^{1/p'} |\Delta_{3k-1}|^{-1/p} \chi_{\Delta_{3k-1}} - 2^{-1/p'} |\Delta_{3k+1}|^{-1/p} \chi_{\Delta_{3k+1}}) dt \\ &= v(s) 2^{1/p'} |\Delta_{3k-1}|^{-1/p} |\Delta_{3k-1}| = v(s) 2^{1/p'} |\Delta_{3k-1}|^{1/p'} \\ &= v(s) 2^{1/p'} 2^{(3k-1)/p'} = v(s) 2^{(3k)/p'} = v(s) |\Delta_{3k}|^{1/p'}. \end{aligned}$$

Для $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_p$ находим

$$\begin{aligned} \|(T_v^c X)(x)\|_q^q &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^q \|g_k\|_q^q \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^q \int_{\Delta_{3k}} g_k^q(s) ds \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^q |\Delta_{3k}|^{q/p'} \int_{\Delta_{3k}} v^q(s) ds = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^q \delta_{3k}^q = \|D^0 x\|_{l_q}^q, \end{aligned}$$

и формула (3.2) при $i = 0$ доказана.

Используя лемму 3.1, оцениваем

$$e_n(D^i) \leq e_n(T_v^c X_i) \leq \|X_i\| e_n(T_v^c) \leq C e_n(T_v), \quad (3.4)$$

где $C = \max_{i=0,1,2} \|X_i\|$. Умножая на $n^{1/q}$ и переходя к супремуму справа, а затем слева, получим

$$\sup_n n^{1/q} e_n(D^i) \leq C \sup_n n^{1/q} e_n(T_v). \quad (3.5)$$

Далее применяем (2.4) поочередно к $k \geq 0$ и $k < 0$:

$$\|\{\delta_{3k+i}\}_{k \geq 0}\|_{r,\infty} + \|\{\delta_{3k+i}\}_{k < 0}\|_{r,\infty} \leq 12 \sup_n n^{1/q} e_n(D^i).$$

Из неравенства треугольника следует, что

$$\|\{\delta_k\}_{k \geq 0}\|_{r,\infty} \leq \sum_{i=0}^2 \|\{\delta_{3k+i}\}_{k \geq 0}\|_{r,\infty},$$

$$\|\{\delta_k\}_{k<0}\|_{r,\infty} \leq \sum_{i=0}^2 \|\{\delta_{3k+i}\}_{k<0}\|_{r,\infty}.$$

В силу (3.4) и (3.5) заключаем, что

$$|v|_{r,\infty} = \|\{\delta_k\}_{k\geq 0}\|_{r,\infty} + \|\{\delta_k\}_{k<0}\|_{r,\infty} \leq c_1 \sup_n n^{1/q} e_n(T_v).$$

В [7] для одновесового компактного оператора $T_v : L_p(0, \infty) \rightarrow L_q(0, \infty)$ в случае $0 < q < 1 < p < \infty$ с константой, зависящей только от p и q , доказано следующее неравенство для аппроксимативных чисел:

$$\sup_n n a_n(T_v) \leq c |v|_r.$$

Имея формулу (1.1), показывающую связь между энтропийными и аппроксимативными числами, с константой, зависящей только от p и q , получаем и оценку сверху для энтропийных чисел:

$$\sup_n n e_n(T_v) \leq c_2 |v|_r.$$

Полученные выше результаты и формула (1.1) дают также и нижнюю оценку для аппроксимативных чисел, дополняющую результаты из [7]. Итак, для компактного одновесового оператора (3.1) имеем

$$|v|_{r,\infty} \leq c_3 \sup_n n^{1/q} a_n(T_v). \quad \square$$

Если весовая функция v оператора T_v из (1.5) является квазимонотонной на полуоси, то имеем

Следствие 3.1. Пусть α — действительное число и весовая функция v такая, что функция $v(t)t^\alpha$ монотонна на $(0, \infty)$. Тогда

$$\sup_n n e_n(T_v) \leq c_2 2^{1/r+2|\alpha|} \|v\|_r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай, когда функция $v(t)t^\alpha$ убывает. Для $t \in \Delta_k$ имеем

$$v(t) \leq v(2^k) \left(\frac{2^k}{t} \right)^\alpha \leq v(2^k) 2^{|\alpha|},$$

если $t' \in \Delta_{k-1}$, то получаем

$$v(t') \geq v(2^k) \left(\frac{2^k}{t'} \right)^\alpha \geq v(2^k) 2^{-|\alpha|}.$$

Следовательно,

$$\int_{\Delta_{k-1}} v(t')^r dt' \geq |\Delta_{k-1}| v(2^k)^r 2^{-|\alpha|r} = 2^{k-1-|\alpha|r} v(2^k)^r,$$

откуда

$$2^k v(2^k)^r \leq 2^{1+|\alpha|r} \left(\int_{\Delta_{k-1}} v(t')^r dt' \right),$$

что влечет

$$\begin{aligned}\delta_k(v)^r &= 2^{kr/p'} \|v\|_{L_q(\Delta_k)}^r \leq 2^{kr/p'} v(2^k)^r 2^{|\alpha|r} |\Delta_k|^{r/q} \\ &\leq 2^{|\alpha|r} 2^k v(2^k)^r \leq 2^{1+2|\alpha|r} \left(\int_{\Delta_{k-1}} v(t')^r dt' \right).\end{aligned}$$

Аналогично доказывается случай, когда функция $v(t)t^\alpha$ возрастает и

$$\delta_k(v)^r \leq 2^{1+2|\alpha|r} \left(\int_{\Delta_{k+1}} v(t)^r dt \right).$$

В результате заключаем, что для монотонной на $(0, \infty)$ функции $v(t)t^\alpha$ выполняется неравенство

$$|v|_r \leq 2^{\frac{1}{r}+2|\alpha|} \|v\|_r,$$

и для оценки сверху в условиях теоремы 1 получаем требуемое. $\square$

4. Преобразования. Оценки для двухвесового оператора Харди

В данном разделе используем технику изоморфизмов L_p -пространств, разработанную в [6], применительно к нашему случаю $0 < q < 1 < p < \infty$.

Пусть неубывающая функция $\theta : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ задана формулой

$$\theta(s) = \int_0^s \theta'(t) dt, \quad s > 0, \quad (4.1)$$

где $\theta' \in L_1(0, x)$, $x > 0$, и $\theta' \geq 0$. Обозначим $I \subseteq (0, \infty)$ и $\mathbb{A} = \theta(I)$. Определим

$$\theta^-(\tau) = \inf\{t \in I : \theta(t) = \tau\}, \quad \tau \in \mathbb{A},$$

при этом $\theta(\theta^-(\tau)) = \tau$, $\theta^-(\theta(t)) \leq t$. Однако для $N_\theta = \{t \in I : \theta'(t) > 0\}$

$$\theta^-(\theta(t)) = t \quad \text{для всех } t \in N_\theta. \quad (4.2)$$

Пусть λ — мера Лебега на $\mathbb{A}$. Мере ν на I определим формулой

$$\nu(B) = \int_B \theta'(t) dt,$$

где $B \subseteq I$ — измеримое множество. Тогда для $f \in L_1(I, \nu)$ имеем

$$\int_{\mathbb{A}} f(\theta^-(\tau)) d\tau = \int_I f(t) \theta'(t) dt$$

и для измеримой функции $g : \mathbb{A} \rightarrow I$, применяя последнее равенство к $f = g \circ \theta$, получаем

$$\int_{\mathbb{A}} g(\tau) d\tau = \int_I g(\theta(t)) \theta'(t) dt;$$

предполагается, что интеграл в правой части существует.

Более того, $\lambda\{\mathbb{A} \setminus \theta(N_\theta)\} = 0$, и можем рассматривать

$$\int_{\mathbb{A}} g(\tau) d\tau = \int_{N_\theta} g(\theta(t))\theta'(t) dt \quad \text{для } g : \mathbb{A} \rightarrow I. \quad (4.3)$$

Для произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $\alpha < \beta$, применяя (4.3) с функцией $g\chi_{[\alpha, \beta)}$, получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(\tau) d\tau = \int_{\theta^{-1}([\alpha, \beta)) \cap N_\theta} g(\theta(t))\theta'(t) dt = \int_{\theta^{-}(\alpha)}^{\theta^{-}(\beta)} g(\theta(t))\theta'(t) dt. \quad (4.4)$$

Напомним, что два оператора T и S называются *изоморфными*, если существуют изометрические операторы $J_1, J_2, \widehat{J}_1, \widehat{J}_2$ такие, что

$$T = J_1 \circ S \circ J_2, \quad S = \widehat{J}_2 \circ T \circ \widehat{J}_1.$$

Формула (4.4) дает возможность построить одновесовой оператор, изоморфный двухвесовому оператору (1.2).

Для $0 < q < \infty$ и $g \in L_1(\mathbb{A}, d\tau)$ определим оператор $\Phi_q^\theta : L_q(\mathbb{A}, d\tau) \rightarrow L_q(N_\theta, dt)$ формулой

$$\Phi_q^\theta g(t) = g(\theta(t))[\theta'(t)]^{1/q}, \quad t \in N_\theta. \quad (4.5)$$

Вычисление

$$\int_{N_\theta} [\Phi_q^\theta g]^q(t) dt = \int_{N_\theta} [g(\theta(t))]^q d\theta(t) = \int_{\mathbb{A}} [g(\tau)]^q d\tau$$

показывает, что он является изометрическим.

Определим подпространство

$$E_q^\theta = \{f \in L_q(I, dt) : f = f\chi_{N_\theta} \text{ п. в.}\}$$

в $L_q(I, dt)$. Для $f \in E_q^\theta$ зададим обратный оператор $(\Phi_q^\theta)^{-1} : L_q(N_\theta, dt) \rightarrow L_q(\mathbb{A}, d\tau)$:

$$(\Phi_q^\theta)^{-1} f(\tau) = f(\theta^{-}(\tau))[\theta'(\theta^{-}(\tau))]^{-1/q}, \quad \tau \in \mathbb{A}.$$

Тогда

$$[(\Phi_q^\theta)^{-1} \circ \Phi_q^\theta]g(\tau) = g(\theta(\theta^{-}(\tau))) \cdot \theta'(\theta^{-}(\tau))^{1/q} \cdot \theta'(\theta^{-}(\tau))^{-1/q} = g(\tau).$$

Зададим весовые функции

$$\bar{v}(t) = v(t)\chi_{N_\theta}(t), \quad \bar{u}(t) = u(t)\chi_{N_\theta}(t), \quad t \in I, \quad (4.6)$$

и $T_{\bar{v}, \bar{u}}$ — оператор вида (1.2) с этими весовыми функциями. Более того, $T_{\bar{v}, \bar{u}} : E_p^\theta \rightarrow E_q^\theta$.

Далее, определим весовые функции

$$\tilde{v}(\tau) = v(\theta^{-}(\tau)) \cdot \theta'(\theta^{-}(\tau))^{-1/q}, \quad \tau \in \mathbb{A}, \quad (4.7)$$

$$\tilde{u}(\tau) = u(\theta^{-}(\tau)) \cdot \theta'(\theta^{-}(\tau))^{-1/p'}, \quad \tau \in \mathbb{A}, \quad (4.8)$$

и рассмотрим оператор $T_{\tilde{v}, \tilde{u}} : L_p(\mathbb{A}) \rightarrow L_q(\mathbb{A})$:

$$T_{\tilde{v}, \tilde{u}}g(s) = \tilde{v}(s) \int_0^s \tilde{u}(\tau)g(\tau) d\tau, \quad s \in \mathbb{A}. \quad (4.9)$$

Лемма 4.1. Пусть преобразование θ на I задано по формуле (4.1) и $\mathbb{A} = \theta(I)$. Тогда $T_{\bar{v}, \bar{u}}$ и $T_{\bar{v}, \bar{u}}$ являются изоморфными операторами, т. е. справедливы следующие равенства:

$$T_{\bar{v}, \bar{u}} = \Phi_q^\theta \circ T_{\bar{v}, \bar{u}} \circ (\Phi_p^\theta)^{-1}, \quad (4.10)$$

$$T_{\bar{v}, \bar{u}} = (\Phi_q^\theta)^{-1} \circ T_{\bar{v}, \bar{u}} \circ \Phi_p^\theta. \quad (4.11)$$

Если $\theta' > 0$ п. в., то оператор T изоморфен оператору $T_{\bar{v}, \bar{u}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим функцию $g \in L_p(\mathbb{A})$. Последовательно применения (4.5), (4.6), (4.2) и (4.8), получаем

$$\begin{aligned} T_{\bar{v}, \bar{u}}^\theta \Phi_p^\theta g(s) &= \bar{v}(s) \int_0^s \bar{u}(t) g(\theta(t)) \theta'(t)^{1/p} dt \\ &= \bar{v}(s) \int_{I \cap N_\theta} \chi_{[0, s]}(t) u(t) g(\theta(t)) \theta'(t)^{1/p} dt \\ &= \bar{v}(s) \int_I \chi_{[0, s]}(\theta^-(\theta(t))) u(\theta^-(\theta(t))) g(\theta(t)) \theta'(\theta^-(\theta(t)))^{1/p} dt \\ &= \bar{v}(s) \int_{\mathbb{A}} \chi_{[0, s]}(\theta^-(\tau)) u(\theta^-(\tau)) g(\tau) \theta'(\theta^-(\tau))^{-1/p'} d\tau \\ &= \bar{v}(s) \int_{0 \leq \theta^-(\tau) \leq s} \bar{u}(\tau) g(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

С другой стороны, для $s \in N_\theta$ в силу равенств (4.5), (4.9), (4.7), (4.2) и (4.6) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_q^\theta T_{\bar{v}, \bar{u}} g(s) &= (T_{\bar{v}, \bar{u}} g)(\theta(s)) \theta'(s)^{1/q} = \tilde{v}(\theta(s)) \theta'(s)^{1/q} \int_0^{\theta(s)} \bar{u}(\tau) g(\tau) d\tau \\ &= v(\theta^-(\theta(s))) \theta'(\theta^-(\theta(s)))^{-1/q} \theta'(s)^{1/q} \int_0^{\theta(s)} \bar{u}(\tau) g(\tau) d\tau \\ &= \bar{v}(s) \int_0^{\theta(s)} \bar{u}(\tau) g(\tau) d\tau = \bar{v}(s) \int_{0 \leq \tau \leq \theta(s)} \bar{u}(\tau) g(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Заметим, что $\theta^-(\tau) \leq s$ влечет $\theta(\theta^-(\tau)) \leq \theta(s)$, откуда $\tau \leq \theta(s)$. Обратно, если $\tau \leq \theta(s)$, то $\theta^-(\tau) \leq (\theta^-(\theta(s))) \leq s$. Таким образом, $\tau \leq \theta(s) \Leftrightarrow \theta^-(\tau) \leq s$, что доказывает равенство

$$T_{\bar{v}, \bar{u}} \circ \Phi_p^\theta = \Phi_q^\theta \circ T_{\bar{v}, \bar{u}}.$$

Равенства (4.10) и (4.11) получаем применением операторов $(\Phi_p^\theta)^{-1}$ и $(\Phi_q^\theta)^{-1}$ соответственно. Если $\theta' > 0$ п. в., то (4.10) и (4.11) выполнены для $T = T_{v, u}$ вместо $T_{\bar{v}, \bar{u}}$ в силу построения вспомогательных весов $\bar{v}$ и $\bar{u}$. $\square$

Следствие 4.1. Пусть преобразование θ на I задано формулой (4.1). Тогда

$$e_n(T_{\bar{v}, \bar{u}}) = e_n(T_{\bar{v}, \bar{u}}) \leq e_n(T).$$

В случае $\theta' > 0$ п. в. имеет место

$$e_n(T_{\bar{v}, \bar{u}}) = e_n(T_{\bar{v}, \bar{u}}) = e_n(T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $T_{\bar{v}, \bar{u}} = M_q^\theta T M_p^\theta$, где $M_p^\theta : L_p(I, dt) \rightarrow L_p(N_\theta, dt)$, $M_p^\theta f = f \cdot \chi_{N_\theta}$ и $\|M_p^\theta\| \leq 1$. По свойству энтропийных чисел $e_n(T_{\bar{v}, \bar{u}}) \leq e_n(T)$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для всякого $\omega \in \mathbb{A}$ в силу (4.4) с учетом (4.2) и (4.7), (4.8) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \tilde{u}(\tau)^{p'} d\tau &= \int_0^{\theta^-(\omega)} \tilde{u}(\theta(t))^{p'} \theta'(t) dt \\ &= \int_0^{\theta^-(\omega)} u(\theta^-(\theta(t)))^{p'} \theta'((\theta^-(\theta(t))))^{-1} \theta'(t) dt = \int_0^{\theta^-(\omega)} \bar{u}(t)^{p'} dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Если $\omega_k > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, — минимальное действительное число, удовлетворяющее уравнению

$$2^k = \int_0^{\omega_k} \tilde{u}(\tau)^{p'} d\tau,$$

то согласно (4.12) число $\xi_k = \theta^-(\omega_k)$ разрешает уравнение

$$2^k = \int_0^{\xi_k} \bar{u}(t)^{p'} dt.$$

Используя (4.4), получаем

$$\int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} \tilde{v}(\tau)^q d\tau = \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \bar{v}(t)^q dt,$$

и это показывает, что $\delta_k(\tilde{u}, \tilde{v}) = \delta_k(\bar{u}, \bar{v})$.

Если выберем $I = (0, \infty)$ и $\theta'(t) = u(t)^{p'}$, $t \in (0, \infty)$, то

$$\theta(s) = \int_0^s u(t)^{p'} dt, \quad s > 0, \quad (4.13)$$

и $\mathbb{A} = (0, \theta(\infty)) = (0, \|u\|_{L_{p'}}^{p'})$. Тогда $\theta^- : \mathbb{A} \rightarrow (0, \infty)$ задается формулой

$$\theta^-(\tau) = \inf \left\{ s > 0 : \int_0^s u(t)^{p'} dt = \tau \right\}.$$

Если $u(t) > 0$ п. в., то $\theta^- = \theta^{-1}$. В этом случае функции, заданные формулами (4.7) и (4.8), превращаются в

$$\tilde{v}(\tau) = v(\theta^-(\tau)) \cdot u(\theta^-(\tau))^{-p'/q}, \quad \tau \in \mathbb{A}, \quad (4.14)$$

$$\tilde{u}(\tau) = 1. \quad (4.15)$$

Согласно лемме 4.1 если $v = v \cdot \chi_{\{u>0\}}$ п. в. на $(0, \infty)$, то с весовыми функциями, определенными по (4.14), (4.15), операторы $T = T_{v,u}$ и $T_{\tilde{v},1}$ изоморфны и $e_n(T) = e_n(T_{\tilde{v},1})$, а в силу выбора (4.13) имеем $\delta_k(1, \tilde{v}) = \delta_k(u, \tilde{v}) = \delta_k(u, v\chi_{\{u>0\}})$, что и доказывает оценку (1.6). $\square$

Авторы выражают благодарность рецензенту за замечания и важные рекомендации, позволившие улучшить работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Edmunds D. E., Triebel H.* Function spaces, entropy numbers, differential operators. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1996.
2. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Интегральные операторы Харди — Стеклова // Соврем. проблемы математики. Вып. 22. М.: МИАН, 2016.
3. *Edmunds D. E., Evans W. D., Harris D. J.* Approximation numbers of certain Volterra integral operators // J. Lond. Math. Soc. 1988. V. 38. P. 471–489.
4. *Edmunds D. E., Evans W. D., Harris D. J.* Two-sided estimates of the approximation numbers of certain Volterra integral operators // Stud. Math. 1997. V. 124. P. 59–80.
5. *Lomakina E., Stepanov V.* On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten-von Neumann norms of Hardy-type integral operators // Function spaces and applications. New Delhi: Narosa Publ. House, 2000. P. 153–187.
6. *Lifshits M. A., Linde W.* Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion // Mem. Am. Math. Soc. 2002. V. 745. P. 1–87.
7. *Lomakina E. N.* Asymptotic estimates for approximation numbers of the Hardy operator in q -Banach spaces // Math. Inequal. Appl. 2009. V. 12, N 4. P. 815–825.
8. *Васильева А. А.* Энтропийные числа операторов вложения весовых пространств Соболева // Мат. заметки. 2015. Т. 98, вып. 6. С. 937–940.
9. *Васильева А. А.* Колмогоровские поперечники и аппроксимативные числа классов Соболева с сингулярными весами // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, вып. 1. С. 3–39.
10. *Carl B.* Entropy numbers of diagonal operators with application to eigenvalue problems // J. Approx. Theory. 1981. V. 32. P. 135–150.
11. *Carl B., Stephani I.* Entropy, compactness and the approximation of operators. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1990.
12. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию 6 ноября 2018 г.

После доработки 26 февраля 2019 г.

Принята к публикации 12 марта 2019 г.

Ломакина Елена Николаевна

Хабаровский государственный университет экономики и права,

ул. Тихоокеанская, 134, Хабаровск 680042;

Дальневосточный государственный университет путей сообщения,

ул. Серышева, 47, Хабаровск 680021

enlomakina@mail.ru

Насырова Мария Георгиевна

Вычислительный Центр ДВО РАН,

ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск 680000

nassm@mail.ru