Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. V. Malygina, Tests for the oscillation of autonomous differential equations with bounded aftereffect, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2019, Volume 60, Number 4, 815–823

DOI: <https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.409>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 54.147.182.235

April 26, 2023, 17:53:22

ПРИЗНАКИ ОСЦИЛЛЯЦИИ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В. В. Малыгина

Аннотация. Для автономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа установлен критерий осцилляции, который сводит задачу осцилляции к вычислению единственного корня вещественнозначной функции, определяемой коэффициентами исходного уравнения. На основе этого критерия получены эффективно проверяемые признаки осцилляции для уравнений с разными видами последействия.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.409

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с последействием, осцилляция, сосредоточенное и распределенное запаздывание.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и высших порядков задача описания осциллирующих решений ставилась и решалась начиная с классических работ С. А. Чаплыгина [1]. Переход к функционально-дифференциальным уравнениям (ФДУ) делает эту задачу содержательной уже для уравнений первого порядка: как известно [2], их решения могут иметь нули и быть осциллирующими. С другой стороны, существенное расширение класса уравнений усложняет исследование и требует привлечения новых идей и методов.

Рассмотрим ФДУ вида

$$\dot{x}(t) + \mu \int_0^r x(t-s) dk(s) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Параметры уравнения (1) подчинены следующим ограничениям: μ, r — вещественные числа, $r > 0$, k — функция ограниченной вариации, удовлетворяющая условию $k(0) = 0$, интеграл понимается в смысле Римана — Стильеса. При неположительных значениях аргумента решение доопределяется непрерывной (заранее заданной) начальной функцией. В этих предположениях, как известно [3], решение уравнения (1) существует и единственно в классе локально абсолютно непрерывных функций.

Определенную на полуоси непрерывную функцию назовем *осциллирующей*, если она имеет неограниченную справа последовательность нулей. Уравнение

Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (№ 1.5336.2017/8.9) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-01-00928).

(1) будем называть *осциллирующим*, если все его решения (при любом выборе начальной функции) являются осциллирующими функциями.

Поставим уравнению (1) в соответствие характеристическую функцию

$$F(\lambda) \equiv -\lambda + \mu \int_0^r e^{\lambda s} dk(s), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Следующее утверждение связывает осцилляцию уравнения (1) со свойствами характеристической функции.

Теорема 1 [4–6]. *Для того чтобы уравнение (1) было осциллирующим, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $F(\lambda) = 0$ не имело вещественных корней.*

На основе теоремы 1 легко получить критерии осцилляции для простых уравнений вида (1); эти критерии наряду с полученными в начале 1980-х гг. достаточными признаками осцилляции систематизированы в [4].

За последние десятилетия существенно новых результатов для автономных ФДУ не появилось. Фокус внимания исследователей сместился в сторону *неавтономных* ФДУ, к которым теорема 1 неприменима. Для них естественно ставить задачу получения точных достаточных признаков осцилляции и использовать другие идеи и методы [7–11].

Отсутствие новых признаков для уравнений вида (1) объясняется тем, что с усложнением структуры последствия усложняется структура характеристической функции: прямое исследование множества ее вещественных корней оказывается достаточно трудной задачей.

В настоящей работе приведен критерий, позволяющий решать задачу осцилляции для уравнения (1) более эффективно, чем это позволяет сделать теорема 1.

Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда (1) — обыкновенное дифференциальное уравнение, так как оно не имеет осциллирующих решений.

Пусть k — монотонная на $[0, r]$ функция. Не нарушая общности, рассмотрим только случай неубывающей k (случай невозрастающей функции сводится к нему сменой знака коэффициента μ). Если $\mu = 0$, то $F(0) = 0$, а если $\mu < 0$, то $F(0)F(-\infty) < 0$, т. е. при $\mu \leq 0$ характеристическая функция имеет вещественные корни. Поэтому далее считаем, что $\mu > 0$.

Обозначим

$$G(\zeta) \equiv \zeta \int_0^r s e^{\zeta s} dk(s) - \int_0^r e^{\zeta s} dk(s),$$

где $\zeta \in \mathbb{R}$. Отметим, что функция G непрерывно дифференцируема (см. [12, лемма 3.1]). Легко видеть, что $G(\zeta) < 0$ при $\zeta \leq 0$, а при $\zeta > 0$ имеем $G'(\zeta) > 0$, т. е. G монотонно возрастает на положительной полуоси. Так как $G(\zeta) \rightarrow +\infty$ при $\zeta \rightarrow +\infty$, уравнение $G(\zeta) = 0$ имеет на вещественной оси единственный (причем положительный) корень. Обозначим его через ζ_* .

Теорема 2. *Функция F положительна при всех $\zeta \geq 0$ тогда и только тогда, когда $\mu \int_0^r e^{\zeta_* s} dk(s) > \zeta_*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы и свойств ζ_* следует, что

$$\int_0^r e^{\zeta_* s} dk(s) > 0.$$

Обозначим $\mu_* = \zeta_* \left(\int_0^r e^{\zeta_* s} dk(s) \right)^{-1}$ и рассмотрим на множестве $\mathbb{R}$ функцию

$$F_*(\zeta) = -\zeta + \mu_* \int_0^r e^{\zeta s} dk(s).$$

В силу [12, лемма 3.1] функция F_* бесконечно дифференцируема, причем

$$F'_*(\zeta) = -1 + \mu_* \int_0^r s e^{\zeta s} dk(s), \quad F''_*(\zeta) = \mu_* \int_0^r s^2 e^{\zeta s} dk(s).$$

Так как $F''_*(\zeta) > 0$ при всех $\zeta \in \mathbb{R}$, то F'_* монотонно возрастает на $\mathbb{R}$ от -1 до $+\infty$, следовательно, существует единственная точка $\zeta_0 \in \mathbb{R}$, в которой $F'_*(\zeta_0) = 0$. С другой стороны,

$$\int_0^r s e^{\zeta_* s} dk(s) = \frac{1}{\zeta_*} \int_0^r e^{\zeta_* s} dk(s) = \frac{1}{\mu_*},$$

следовательно, $F'_*(\zeta_*) = -1 + \mu_*/\mu_* = 0$, а значит, $\zeta_0 = \zeta_*$. Итак, $F_*(\zeta_0) = F'_*(\zeta_0) = 0$, причем ζ_0 — точка минимума функции F_* , следовательно, $F_*(\zeta) \geq 0$ при всех $\zeta \geq 0$.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть выполнено предположение теоремы, которому с учетом введенных обозначений можно придать вид $\mu > \mu_*$. Тогда для любого $\zeta \in [0, \infty)$ имеем

$$F(\zeta) = -\zeta + \mu \int_0^r e^{\zeta s} dk(s) = F_*(\zeta) + (\mu - \mu_*) \int_0^r e^{\zeta s} dk(s) > 0,$$

что и требовалось. Обратно, если $\mu \leq \mu_*$, то

$$F(\zeta_*) = F_*(\zeta_*) + (\mu - \mu_*) \int_0^r e^{\zeta_* s} dk(s) = (\mu - \mu_*) \int_0^r e^{\zeta_* s} dk(s) \leq 0,$$

следовательно, функция F не является положительной на $[0, \infty)$. Теорема доказана.

Объединяя теоремы 1 и 2, получаем следующий результат.

Теорема 3. Эквивалентны следующие утверждения.

1. Уравнение (1) осциллирующее.
2. Характеристическая функция уравнения (1) положительна на $[0, \infty)$.
3. Имеет место неравенство $\mu \int_0^r e^{\zeta_* s} dk(s) > \zeta_*$.
4. Имеет место неравенство $\mu \int_0^r s e^{\zeta_* s} dk(s) > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $F(\zeta) > 0$ при $\zeta < 0$, следовательно, по теореме 1 утверждения 1 и 2 эквивалентны. Теорема 2 обеспечивает эквивалентность утверждений 2 и 3, а определение корня ζ_* — утверждений 3 и 4.

Следствие 1. Если $\mu \int_0^r s dk(s) > 1/e$, то уравнение (1) осциллирующее.

Функция k как всякая функция ограниченной вариации может быть представлена в виде суммы «функции скачков», абсолютно непрерывной составляющей и сингулярной составляющей [13]. Каждая из этих функций соответствует своему типу ФДУ. Продемонстрируем применение теоремы 3 на примерах уравнений с разными видами последдействия.

1. Уравнения с сосредоточенным запаздыванием. Пусть $\mu = 1$, $k(t) = \sum_{k=1}^n a_k \chi(t - r_k)$, где $a_k > 0$, $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n = r$, а χ — характеристическая функция множества $[0, \infty)$. Уравнение (1) принимает вид

$$\dot{x}(t) + \sum_{k=1}^n a_k x(t - r_k) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Применяя к нему следствие 1, получаем известный признак осцилляции.

Признак 1 [4]. Если $a_k > 0$ для любого $k = \overline{1, n}$ и $\sum_{k=1}^n a_k r_k > 1/e$, то уравнение (2) осциллирующее.

Положив в уравнении (2) $n = 1$, получаем уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t - r) = 0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

для которого $G(\zeta) = e^{\zeta r}(\zeta r - 1)$, а $\zeta_* = 1/r$. Применяя п. 3 или п. 4 теоремы 3, получаем для уравнения (3) критерий осцилляции.

Признак 2 [2]. Уравнение (3) осциллирующее, если и только если $ar > 1/e$.

Таким образом, в случае одного слагаемого признак 1 обращается в критерий. Отсюда, в частности, следует, что постоянная $1/e$ в признаке 1 не улучшаема; более того, строгое неравенство нельзя заменить нестрогим.

2. Уравнения с распределенным запаздыванием. Пусть

$$k(t) = \int_0^t p(s) ds,$$

где p — суммируемая на $[0, r]$ неотрицательная функция. Уравнение (1) принимает вид

$$\dot{x}(t) + \mu \int_0^r p(s)x(t - s) ds = 0, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Уточним для уравнения (4) следствие 1: в данном случае строгое неравенство можно заменить нестрогим.

Признак 3. Если $\mu \int_0^r p(s)s ds \geq 1/e$, то уравнение (4) осциллирующее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $e^{\zeta_* s} > e s \zeta_*$ для всех $s \neq 1/\zeta_*$, а из условий признака 3 вытекает, что $\mu > 0$ и $\int_0^r p(s)s ds > 0$, то

$$\mu \int_0^r p(s) e^{\zeta_* s} ds > \mu e \zeta_* \int_0^r p(s)s ds \geq \frac{e \zeta_*}{e} = \zeta_*.$$

Остается использовать п. 3 теоремы 3. Признак доказан.

Применим теорему 3 к уравнению вида (4) для конкретных семейств функций p .

СЕМЕЙСТВО 1. Пусть $p(t) = t^\alpha$, где $\alpha > -1$. Уравнение (4) перепишется в виде

$$\dot{x}(t) + \mu \int_0^t s^\alpha x(t-s) ds = 0, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Обозначим $I(\xi) = \int_0^1 s^\alpha e^{\xi s} ds$, тогда

$$\int_0^r p(s) e^{\xi s} ds = r^{\alpha+1} I(r\xi), \quad \xi \int_0^r p(s) s e^{\xi s} ds = r^{\alpha+1} (e^{\xi r} - (\alpha+1) I(r\xi)).$$

Положим $\xi = r\zeta$. Легко видеть, что для семейства (4) уравнение $G(\zeta) = 0$ эквивалентно уравнению

$$(\alpha+2)I(\xi) = e^\xi,$$

которое в силу установленных выше свойств функции G имеет единственный положительный корень. Обозначим его через ξ_α .

Перепишав неравенство из п. 3 теоремы 3 в виде $\mu r^{\alpha+2} I(\xi) > \xi$ или $\mu r^{\alpha+2} > (\alpha+2)\xi e^{-\xi}$, получим для уравнения (5) следующий критерий осцилляции.

Признак 4. Уравнение (5) осциллирующее тогда и только тогда, когда $\mu r^{\alpha+2} > (\alpha+2)\xi_\alpha e^{-\xi_\alpha}$.

В частности, при $\alpha = 0$ имеем

Признак 5. Уравнение $\dot{x}(t) + \mu \int_0^t x(t-s) ds = 0$ осциллирующее тогда и только тогда, когда $\mu r^2 > 2\xi_0 e^{-\xi_0}$, где ξ_0 — положительный корень уравнения $1 - \xi/2 = e^{-\xi}$.

Численные методы дают $\xi_0 \approx 1,594$, $2\xi_0 e^{-\xi_0} \approx 0,648$.

Так же легко находятся корни уравнения $(\alpha+2)I(\xi) = e^\xi$ и при других $\alpha > -1$: $\xi_{-1/2} \approx 1,914$; $\xi_{1/2} \approx 1,447$; $\xi_1 \approx 1,361$; $\xi_{3/2} \approx 1,303$; $\xi_2 \approx 1,262$; $\xi_{5/2} \approx 1,231$; $\xi_3 \approx 1,206$. Каждому корню соответствует свой признак осцилляции.

Отметим следующий интересный факт: признак 4 дает возможность показать точность постоянной $1/e$ в признаке 3. Для этого установим некоторые свойства семейства ξ_α .

Лемма 1. При всех $\alpha > -1$ имеет место неравенство $\xi_\alpha > 1$, более того, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \xi_\alpha = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения ξ_α имеем

$$(\alpha+2) \int_0^1 s^\alpha e^{\xi_\alpha(s-1)} ds = 1.$$

Интегрируя это равенство по частям, получаем

$$(\alpha+2) \int_0^1 s^{\alpha+1} e^{\xi_\alpha(s-1)} ds = 1/\xi_\alpha.$$

Вычитая из первого равенства второе, имеем

$$1 - 1/\xi_\alpha = (\alpha + 2) \int_0^1 s^\alpha (1 - s) e^{\xi_\alpha(s-1)} ds, \quad (6)$$

откуда сразу следует, что для любого $\alpha > -1$ справедлива оценка $\xi_\alpha > 1$. С учетом этого неравенства из (6) имеем

$$0 < 1 - 1/\xi_\alpha \leq (\alpha + 2) \int_0^1 (s^\alpha - s^{\alpha+1}) ds = 1/(\alpha + 1),$$

откуда $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \xi_\alpha = 1$. Лемма доказана.

Покажем, что в признаке 3 постоянную $1/e$ нельзя уменьшить. Положим в уравнении (5) $r = 1$ и применим к нему признак 3. Получим достаточное условие осцилляции: $\frac{\mu r^{\alpha+2}}{\alpha+2} \geq 1/e$.

Применение признака 4 дает критерий осцилляции: $\frac{\mu r^{\alpha+2}}{\alpha+2} > \xi_\alpha e^{-\xi_\alpha}$. В силу леммы 1 $\xi_\alpha > 1$, следовательно, $\xi_\alpha e^{-\xi_\alpha} < 1/e$, но при этом $\xi_\alpha e^{-\xi_\alpha} \rightarrow 1/e$, значит, в признаке 3 уменьшение константы $1/e$ невозможно.

СЕМЕЙСТВО 2. Положим в (2) $p(t) = (r - t)^\alpha$, где $\alpha > -1$, и рассмотрим семейство уравнений

$$\dot{x}(t) + \mu \int_0^r (r - s)^\alpha x(t - s) ds = 0, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

Обозначим $J(\eta) = \int_0^1 (1 - s)^\alpha e^{\eta s} ds = \int_0^1 s^\alpha e^{\eta(1-s)} ds$. Тогда

$$\int_0^r p(s) e^{\zeta s} ds = r^{\alpha+1} J(r\zeta),$$

$$\zeta \int_0^r p(s) s e^{\zeta s} ds = r^{\alpha+1} (r\zeta J(r\zeta) + 1 - (\alpha + 1)J(r\zeta)).$$

Положим $\eta = r\zeta$. Легко видеть, что для семейства (7) уравнение $G(\zeta) = 0$ эквивалентно уравнению

$$(\alpha + 2 - \eta)J(\eta) = 1,$$

которое в силу установленных выше свойств функции G имеет единственный положительный корень. Обозначим его через η_α . Перепишав неравенство из п. 3 теоремы 3 в виде $\mu r^{\alpha+2} J(\eta) > \eta$ или $\mu r^{\alpha+2} > \eta(\alpha + 2 - \eta)$, получим для уравнения (7) следующий критерий осцилляции.

Признак 6. Уравнение (7) осциллирующее тогда и только тогда, когда $\mu r^{\alpha+2} > \eta_\alpha(\alpha + 2 - \eta_\alpha)$.

При $\alpha = 0$ признак 6, очевидно, совпадает с признаком 5.

При других $\alpha > -1$ корни уравнения $(\alpha + 2 - \eta)J(\eta) = 1$ легко находятся численными методами: например, $\eta_1 \approx 2,149$; $\eta_2 \approx 2,688$; $\eta_3 \approx 3,217$; $\eta_4 \approx 3,741$; $\eta_5 \approx 4,260$; $\eta_{10} \approx 6,822$; $\eta_{20} \approx 11,880$; $\eta_{100} \approx 51,965$.

Исследуем асимптотическое поведение семейства η_α .

Лемма 2. При всех $\alpha > -1$ имеет место неравенство $\eta_\alpha > \frac{\alpha+2}{2}$, более того, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\eta_\alpha}{\alpha+2} = 1/2$.

Доказательство. Обозначим $K(\eta) = (\alpha+2-\eta) \int_0^1 s^\alpha e^{\eta(1-s)} ds$. Очевидно, что функция K определена и непрерывна при всех $\eta \geq 0$. Установим для нее два неравенства. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 s^\alpha e^{\frac{\alpha+2}{2}(1-s)} ds &= \int_0^1 s^\alpha e^{\frac{\alpha+2}{2}(1-s)} ds + \frac{2}{\alpha+2} \int_0^1 (s^{\alpha+2} e^{\frac{\alpha+2}{2}(1-s)})' ds \\ &\quad - \frac{2}{\alpha+2} \int_0^1 \left((\alpha+2)s^{\alpha+1} - \frac{\alpha+2}{2}s^{\alpha+2} \right) e^{\frac{\alpha+2}{2}(1-s)} ds \\ &= \frac{2}{\alpha+2} + \int_0^1 (1-s)^2 s^\alpha e^{\frac{\alpha+2}{2}(1-s)} ds > \frac{2}{\alpha+2}, \end{aligned}$$

откуда $K(\frac{\alpha+2}{2}) > 1$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_0^1 s^\alpha e^{\frac{\alpha+4}{2}(1-s)} ds &= \int_0^1 s^\alpha e^{\frac{\alpha+4}{2}(1-s)} ds \\ &\quad + \frac{2}{\alpha} \int_0^1 (s^\alpha e^{\frac{\alpha}{2}(1-s)})' ds - \frac{2}{\alpha} \int_0^1 \left(\alpha s^{\alpha-1} - \frac{\alpha}{2}s^\alpha \right) e^{\frac{\alpha}{2}(1-s)} ds \\ &= \frac{2}{\alpha} + \int_0^1 (se^{2(1-s)} + s - 2)s^{\alpha-1} e^{\frac{\alpha}{2}(1-s)} ds < \frac{2}{\alpha}, \end{aligned}$$

следовательно, $K(\frac{\alpha+4}{2}) < 1$. Так как η_α — единственный корень уравнения $K(\eta) = 1$, то $\frac{\alpha+2}{2} < \eta_\alpha < \frac{\alpha+4}{2}$, откуда следует первое утверждение леммы. Перепишем полученные оценки в виде $\frac{1}{2} < \frac{\eta_\alpha}{\alpha+2} < \frac{\alpha+4}{2(\alpha+2)}$ и перейдем к пределу при $\alpha \rightarrow +\infty$. Получим, что $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\eta_\alpha}{\alpha+2} = 1/2$. Лемма доказана.

С помощью леммы 2 можно получить простой и легко проверяемый достаточный признак осцилляции уравнения (7).

Признак 7. Если $\mu r^{\alpha+2} \geq \frac{1}{4}(\alpha+2)^2$, то уравнение (7) осциллирующее.

Доказательство. Очевидно, что $x(1-x) < 1/4$ при любом $x \neq 1/2$. В лемме 2 установлено, что $\frac{\eta_\alpha}{\alpha+2} > 1/2$, следовательно,

$$\mu r^{\alpha+2} \geq \frac{(\alpha+2)^2}{4} > \frac{\eta_\alpha}{\alpha+2} \left(1 - \frac{\eta_\alpha}{\alpha+2} \right) (\alpha+2)^2 = \eta_\alpha (\alpha+2 - \eta_\alpha).$$

Ссылка на признак 6 завершает доказательство.

Отметим, что постоянная $1/4$ в признаке (7) точная. Чтобы убедиться в этом, перепишем критерий осцилляции для уравнения (7) в виде $\frac{\mu r^{\alpha+2}}{(\alpha+2)^2} > \frac{\eta_\alpha}{\alpha+2} (1 - \frac{\eta_\alpha}{\alpha+2})$. По лемме 2 $\frac{\eta_\alpha}{\alpha+2} \rightarrow 1/2$, следовательно, $\frac{\eta_\alpha}{\alpha+2} (1 - \frac{\eta_\alpha}{\alpha+2}) \rightarrow 1/4$,

значит, постоянную $1/4$ в признаке 7 нельзя уменьшить ни на какую сколь угодно малую величину.

3. Уравнения с сингулярной составляющей. ФДУ с сингулярной составляющей известно крайне мало. Рассмотрим в качестве примера уравнение вида (1), где $r = 1$, а $k(t) = c(t)$ — «канторова лестница» [13]:

$$\dot{x}(t) + \mu \int_0^1 x(t-s) dc(s) = 0, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Обозначим $\phi(\zeta) = \int_0^1 e^{\zeta s} dc(s)$. Очевидно, что $\phi(0) = 1$.

Отметим следующие элементарные свойства функции c : $c(s/3) = (1/2)c(s)$, $c(2/3 + s/3) = 1/2 + (1/2)c(s)$ для всех $s \in [0, 1]$. Отсюда следует, что функция ϕ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\phi(\zeta) = \frac{1 + e^{2\zeta/3}}{2} \phi(\zeta/3),$$

решение которого может быть представлено в виде бесконечного произведения:

$\phi(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + e^{2\zeta/3^k}}{2}$. Уравнение $G(\zeta) = 0$ для (8) принимает вид $\frac{1}{\zeta} = w(\zeta)$, где

$$w(\zeta) = \frac{\phi'(\zeta)}{\phi(\zeta)} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k (1 + e^{-2\zeta/3^k})}.$$

Легко видеть, что функция w определена и непрерывно дифференцируема на всей оси. Так как $w'(\zeta) > 0$, то w монотонно возрастает от $0 = \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} w(\zeta)$ до $1 = \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} w(\zeta)$. Кроме того, для всех $\zeta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$w(\zeta) + w(-\zeta) = 1,$$

это означает, что точка $(0, 1/2)$ является точкой симметрии графика функции w .

Рис. 1. Толстая линия — график функции $w(\zeta)$, тонкая линия — график функции $1/\zeta$

Обозначим единственный корень уравнения $\frac{1}{\zeta} = w(\zeta)$ через ζ_* (рис. 1) и положим $\mu_* = \frac{\zeta_*}{\phi(\zeta_*)}$. Из теоремы 3 следует признак осцилляции уравнения (8).

Признак 8. Уравнение (8) осциллирующее тогда и только тогда, когда $\mu > \mu_*$.

Численные методы дают $\zeta_* \approx 1,48$, $\mu_* \approx 0,618$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Мышкис А. Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Мат. сб. 1951. Т. 28, № 3. С. 641–658.
3. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
4. Györi I., Ladas G. Oscillation theory of delay differential equations with applications. New York: The Clarendon Press; Oxford Univ. Press, 1991.
5. Сабатулина Т. Л. Об осциллирующих решениях автономных дифференциальных уравнений с последействием // Вестн. Перм. ун-та. Математика. Механика. Информатика. 2016. № 3. С. 25–32.
6. Трамов М. И. Условия колеблемости решений дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. 1975. № 3. С. 92–96.
7. Koplatadze R., Kvinikadze G. On oscillation of solutions of first order delay differential inequalities and equations // Georg. Math. J. 1994. V. 1. P. 675–685.
8. Li B. Oscillation of first order delay differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124, N 12. P. 3729–3737.
9. Tang X. H. Oscillation of first order delay differential equations with distributed delay // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 289, N 2. P. 367–378.
10. Berezansky L., Braverman E. Oscillation of equations with an infinite distributed delay // Comp. Math. Appl. 2010. V. 60. P. 2583–2593.
11. Чудинов К. М. О точных достаточных условиях осцилляции решений линейных дифференциальных и разностных уравнений первого порядка с последействием // Изв. вузов. Математика. 2018. № 5. С. 93–98.
12. Sabatulina T., Malygina V. On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2014. V. 61. P. 1–16.
13. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 29 августа 2018 г.

После доработки 4 декабря 2018 г.

Принята к публикации 19 декабря 2018 г.

Малыгина Вера Владимировна
Пермский национальный исследовательский
политехнический университет,
Комсомольский пр., 29, Пермь 614990
mavera@list.ru